Statistická Mechanika

Notes 0

Pythonní notebook, zopakování kombinatoriky, binomické koeficienty, a základy pravděpodobnosti.

Stisk **SHIFT + ENTER** vykonává jednotlivé buňky notesu.

Do buněk (Cell), které jsou typu Code (jsou defaultně, jinak volba v menu nahoře), lze psát pythonní skripty a vykonávat je.

Permutace

Ve skupině je n různých prvků a záleží na jejich pořadí.
n ... počet prvků ve skupině.

$\Psi(n)$ ... počet permutací (variant uspořádání).

$\Psi(n) = n!$

Kolik různých 9-ti místných čísel vytvoříme z číslic 1,2,3,4,5,6,7,8,9, přičemž se každá číslice vyskytne jen jednou?

$$\Psi(n) = \ldots$$

In [2]:
```
from __future__ import division #ošetří dělení celých čísel v tomto notesu
from math import factorial as f  # import funkce pro faktorial z knihovny math pro tento notes
Psi=f(9)
print "Psi=", Psi
```

```
Psi= 362880
```

Permutace s opakováním

Je celkem n prvků, přičemž se z toho některé prvky vyskytují víckrát (a záleží na pořadí).

Kolik různých 9-ti místných čísel vytvoříme z číslic 1,1,2,2,2,3,3,3,3?

$n = 9$, kde $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = \ldots$ jsou počty opakovaných prvků

$$\Psi_{r_1,r_2,r_3}(n) = \frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot r_3!} = \frac{\qquad}{\qquad} = \ldots$$

In [3]:
```
Psi=f(9)/(f(2)*f(3)*f(4))
print "Psi=",Psi
```

```
Psi= 1260.0
```

Variace

Je celkem n různých prvků, přičemž velikost skupiny (výběru) je r a výběry se mohou lišit jen uspořádáním.

Počet možných výběrů bez opakování prvků je

$$V_r(n) = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r}\cdot r! \quad .$$

Kolik 3-místných čísel, kde každá číslice je jen jednou lze vytvořit z číslic, 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

$n = \ \ldots\ ?,\ \ r = \ \ldots\ ?$

In [4]:
```
Vrn=f(9)/f(6)
print "Vrn=",Vrn
```

```
Vrn= 504.0
```

Variace s opakováním

Je celkem n různých prvků, přičemž velikost skupiny (výběru) je r.

Počet možných výběrů kde se prvky mohou opakovat

$V_r(n) = n^r$.

Kolik 3-místných čísel lze vytvořit z číslic, 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

$n = \ \ldots\ ?,\ \ r = \ \ldots\ ?$

In [5]:
```
Vrn=9**3
print "Vrn=",Vrn
```

```
Vrn= 729
```

Kombinace

Je celkem n různých prvků, přičemž velikost skupiny (výběru) je r.

Počet možných výběrů kde se prvky neopakují a na uspořádání nezáleží:

$$C_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

V klobouku jsou čísla od 0 do 9. V tiketu hádáte 4 čísla a první místo je pokud všechny 4 uhodnete. Jeden tiket stojí 1,- EUR. Kolik kombinací je možných? Jakou máte za jedno euro šanci, že vyhrajete první místo? Jakou šanci máte, pokud investujete 20,-EUR do 20ti různých tiketů?

$r = \ \ldots\ ,\ \ n = \ \ldots\ ?$

In [9]:
```
Crn=f(10)/(f(4)*f(6))
print Crn
print "za jedno euro je šance =", 1/Crn,"=",1/Crn*100,"%"
print "za 20 eur je šance =", 20/Crn,"=",20/Crn*100,"%"
```

```
210.0
za jedno euro je šance = 0.0047619047619 = 0.47619047619 %
za 20 eur je šance = 0.0952380952381 = 9.52380952381 %
```

Kombinace s opakováním

Je celkem n různých prvků, přičemž velikost skupiny (výběru) je r.

Počet možných výběrů kde se prvky opakují a na uspořádání nezáleží:

$$\bar{C}_r(n) = \binom{n+r-1}{r}$$

V klobouku jsou čísla od 0 do 9 a po každém tahu se číslo vrací zpět do klobouku.

V tiketu hádáte 4 čísla a první místo je pokud všechny 4 uhodnete. Jeden tiket stojí 1,- EUR. Kolik kombinací je možných? Jakou máte za jedno euro šanci, že vyhrajete první místo? Jakou šanci máte, pokud investujete 20,-EUR do 20ti různých tiketů?

$r = \ \ldots\ ,\ \ n = \ \ldots\ ?$

In [11]:
```
Crn_=f(10+4-1)/f(4)/f(9)
print Crn_
print "za jedno euro je šance =", 1/Crn_,"=",1/Crn_*100,"%"
print "za 20 eur je šance =", 20/Crn_,"=",20/Crn_*100,"%"
```

```
715.0
za jedno euro je šance = 0.0013986013986 = 0.13986013986 %
za 20 eur je šance = 0.027972027972 = 2.7972027972 %
```

Binomické koeficienty

$$(a+b)^k = \sum_i^k \binom{k}{i} \cdot a^i \cdot b^{k-i}$$

a nebo v Pythonu s knihovnou SymPy

In [39]:
```
init_printing()   # pokud chcete vidět výsledné vzorečky v LaTeX), jinak řádek zakomentujte celý
from sympy import * # nebo jen funkce symbols,expand
f,a,b=symbols("f,a,b")
f=(a+b)**7
pprint(f)   #pretty print
expand(f)
```

```
       7
(a + b)
```

Out[39]:

$$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Základy pravděpodobnosti

Příklad:

Děláte serie o 10ti na sobě nezávislých pokusech, výsledek každého jednoho pokusu je buďto úspěch nebo neúspěch.

Šanci na úspěch předpokládejte stejnou jako na neúspěch.

náhodná veličina a elementární jev: $x = \begin{cases} A \\ B \end{cases}$ A...úspěch, B...neúspěch

$p(A) = p(B)$

x...náhodná veličina, výsledek jednoho pokusu

X ... náhodná veličina, výsledek celé serie

Úlohy:

1. Kolik je v jedné serii experimentů všech možných výsledků?
2. Jaká je pravděpodobnost, že v serii neuspějete ani jednou?
3. Jaká je pravděpodobnost, že v serii uspějete jen v prvním pokusu?
4. Jaká je pravděpodobnost, že v serii uspějete jen jednou?
5. Jaká je pravděpodobnost, že v serii uspějete alespoň jednou?
6. Jaká je pravděpodobnost, že v serii uspějete více než jednou?

Řešení:

1. Na pořádí záleží, máme 2 prvky, velikost výběru je 10 , $N = 2^{10}$
2. Takový výsledek může nastat jen jednou $X_{10B} = \{B, B, B, B, B, B, B, B, B, B\}$ takže pokud $p(A) = p(B)$ lze,
   $p(X_{10B}) = \dfrac{1}{N}$
   nebo tak, že nastane současně 10 elementárních jevů B, protože obecně $p(AB) = P(A) \cdot p(B)$, tak $p(BB\ldots B) = p(B)^{10}$.
3. Také jen jediná možnost,
   $p(A, B, B, B, B, B, B, B, B, B) = 1/N\,;\ p(A) \overset{!}{=} p(B)$
4. Takových možností je 10,
   $\{A, B, B, \ldots B\}\,,\,\{B, A, B, B, \ldots, B\}\,,\ \ldots\ ,\{B, B, \ldots, B, A\}$
   $p(\text{úspěch jen jednou}) = 10/N$ pokud $p(A) = p(B)$,
   jinak
   $p(\text{úspěch jen jednou}) = 10 \cdot p(A) \cdot p(B)^9 \left(= \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot p(A)^{10-9} \cdot p(B)^9 \right)$
5. Tj, jednou i vícekrát. Opačný jev je ani jednou, takže
   $p(\text{úspěch alespoň jednou}) = 1 - p(\text{úspěch ani jednou}) = 1 - p(X_{10B})$
6. Opačný jev je "ani jednou" sjednocený s jevem "jen jednou", oba jsou neslučitelné, takže
   $p(X_{10B} \cup \text{úspěch jen jednou}) = p(X_{10B}) + p(\text{úspěch jen jednou})$
   $p(\text{úspěch víc než jednou}) = 1 - p(X_{10B} \cup \text{úspěch jen jednou})$
   nebo pokud $p(A) = p(B)$ tak přímo
   $p = \dfrac{N - 1 - 10}{N}$

Odkazy

[0] "Jupyter nbviewer", Delivered by Fastly, Rendered by Rackspace,(http://nbviewer.jupyter.org)(online prohlížení Jupyter notebooků bez aktivních výpočtů)

[1] Anaconda Distribution,Anaconda Enterprise,(https://www.anaconda.com/download) [distribuce Pythonu (free, Win,Linux, Mac) - NEinstalujte si pokud už Python máte (např. v Linuxu).

[2] František Latka, "Minilexikón matematiky", Alfa,1971,Bratislava, (12.vydání 1989), 063-013-89 MMA