

# Dimenzování zařízení - Hospodárné využívání materiálu

## 1. Původní metoda – dokonale pružný materiál:

Dimenzování konstrukcí na základě namáhání určených za předpokladu dokonalé pružnosti materiálu.

- Výhody: Jednoduchý výpočet
- Nevýhody: Problematické určit takové zatížení, při kterém dojde ke zhroucení konstrukce či nepřipustně velkým deformacím.

## 2. Metoda uvažující pružně – plastické deformace materiálu:

Chování konstrukce (zařízení) podléhající pružně-plastické deformaci:

Při plynulém zvyšování vnějšího zatížení vznikají nejdříve elastické deformace. Při dalším postupném zvyšování zatížení se v místech s nejvyšším napětím začnou tvořit plastické deformace ( $\sigma_{lok} = \sigma_K$ ). S dalším zvyšováním zatížení se počet a rozsah míst vystavených plastické deformaci postupně zvětšuje až do stavu, kdy se konstrukce zhroutí (minimální únosnost, velké deformace). Stav napjatosti v konstrukci těsně před tímto okamžikem se nazývá „**mezní stav**“.

Pro hodnocení konstrukcí, zařízení a součástí z hlediska jejich provozní spolehlivosti a bezpečnosti se používají tyto druhy mezních stavů:

1. Mezní stav pružnosti – při jeho překročení vznikají plastické deformace
2. Mezní stav pevnosti – při jeho dosažení se poruší soudržnost materiálu (lokální či celková); vzniká lom křehký, tvárný, smíšený, únavový, creepový
3. Mezní stav přetvoření – při jeho dosažení vzniká nepřipustné přetvoření soustavy

4. Mezní stav únosnosti – při něm se tvarově určitá soustava ztrátou vazeb stane soustavou tvarově neurčitou, t.zn. mechanismem (ztráta vazeb lomem některého prvku soustavy – lom křehký, tvárný, smíšený, únavový, creepový)
5. Mezní stav přizpůsobení – až do tohoto stavu jsou plastické deformace při opakovaném zatížení shora ohraničené
6. Mezní stav stability – při jeho překročení rychle vznikají nepřijatelné deformace, lomy či tvárná porušení

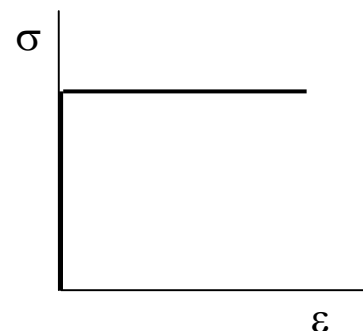
Teorii mezních stavů lze použít pro houževnaté materiály s výraznou či smluvní mezí kluzu.

### 3. Základní modely houževnatých materiálů:

#### 1. Ideálně plastický

Teoretický stav v praxi se nevyskytující

Obr.1



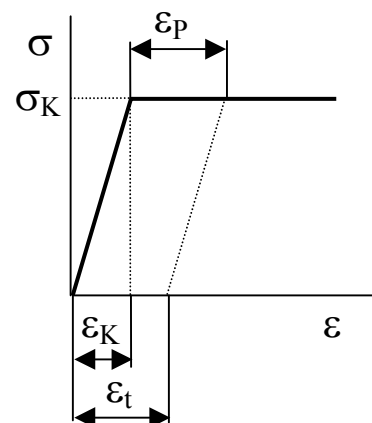
#### 2. Ideálně pružně-plastický

Předpokládá se, že až k mezi kluzu se materiál chová ideálně pružně ( $\sigma = E * \epsilon$ ).

Po dosažení meze kluzu se namáhání při rostoucí deformaci již nemění.

Jedná se o materiál bez zpevnění s hodnotou Poissonovy konstanty  $\mu = 0,3$ .

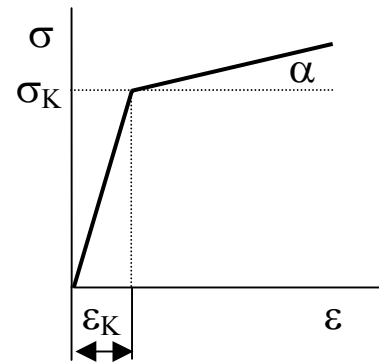
Tento model se používá pro inženýrské výpočty.



Obr.2

### 3. S lineárním zpevněním

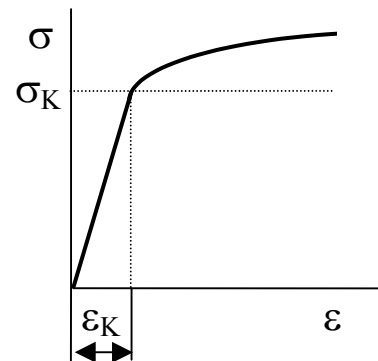
Po dosažení meze kluzu se materiál zpevňuje. Závislost přírůstku deformací na prodloužení lze vyjádřit přímkou jejíž sklon  $\alpha'$  je dán modulem zpevnění  $E'$ .



Obr.3

### 4. S mocninovým zpevněním

Po dosažení meze kluzu se materiál zpevňuje podle mocninové závislosti.



Obr.4

Protože je  $E' \ll E$  jsou rozdíly výsledků modelu 3. resp. 4. oproti modelu 2. jsou zanedbatelné  $\rightarrow$

### V inženýrské praxi se používá model ideálně pružně – plastický.

Na tlakové nádoby se používají nízkouhlíkaté oceli, které mají nepatrné zpevnění. Proto je tento zjednodušující předpoklad oprávněný. Zjednodušení jde na stranu vyšší bezpečnosti.

Modely 3. a 4. se používají pro náročnější výpočty s použitím numerických metod.

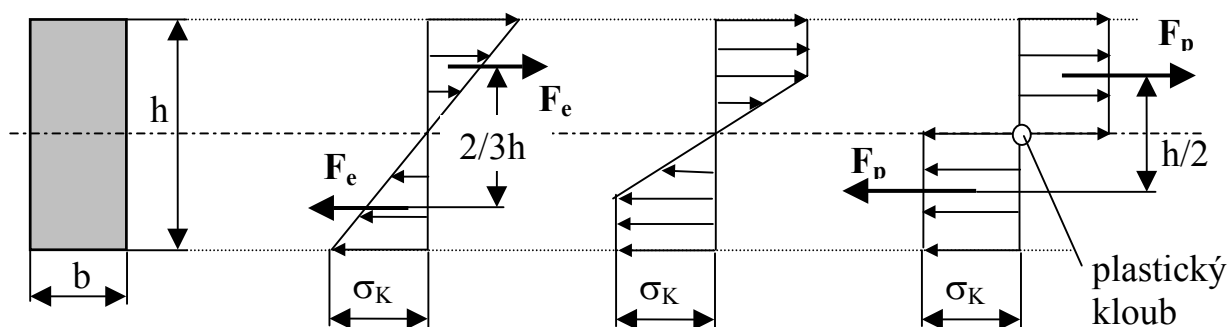
Na plasticitu materiálu má dále vliv teplota a čas (doba působení vnějšího zatížení, rovnoměrnost či cykličnost zatížení).

V konstrukci v praxi často existují vnitřní pnutí (vliv svařování, tepelného zpracování, tváření, obrábění, montáže atp.), což může zhoršit podmínky její pevnosti (někdy např. předpětí zlepší podmínky).

## 4. Hospodárné využití plasticity materiálu

### 4.1. Příklad zatížení obdélníkové tyče průřezu $b \times h$ ohybem (obr.5):

Při postupném zatěžování nosníku vzniká v jeho profilu napětí, které se zvyšuje až dosáhne v krajních vláknech hodnoty  $\sigma_K$ . Únosnost nosníku tím však podle teorie mezních stavů ještě není vyčerpána. Při dalším zatěžování se postupně začínají zplastizovávat části profilu směrem od krajních vláken ke středu. Při zplastizování celého průřezu vznikne t.zv. plastický kloub a původně trojúhelníkový průběh napětí v profilu přejde na obdélníkový.



Nosník

Elastická

Část. plastická

Plně zplastizovaný

Obr.5

deformace

deformace nosníku

průřez nosníku

Maximální moment v pružné oblasti

$$M_e' = F_e * 2/3h = 1/2 * h/2 * \sigma_K * 2/3h = 1/6 * h^2 * \sigma_K$$

Maximální moment při plném zplastizování profilu

$$M_p' = F_p * h/2 = h/2 * \sigma_K * h/2 = 1/4 * h^2 * \sigma_K$$

Pozn.: Síla působí v těžišti. U trojúhelníku je těžiště ve 2/3 odvěsny. Velikost síly je dána plochou trojúhelníku resp. obdélníku o stranách  $\sigma_K$  a  $h/2$ .

**Součinitel plasticity  $C_p$  je poměr  $M_p / M_e$ .**

$$C_p = (1/4 * h^2 * \sigma_K) / (1/6 * h^2 * \sigma_K) = 6 / 4 = 1,5$$

Z toho vyplývá, že pro obdélníkový profil je mezní plastický moment 1,5 krát větší než mezní pružný moment. Proto lze při ohybovém namáhání únosnost nosníku zvýšit 1,5 krát, resp. snížit součinitel bezpečnosti (např. z hodnoty  $x = 1,5$  na  $x = 1$ ).

Při odlehčení plně zplastizovaného profilu (po vzniku plastického kloubu) vznikne ve vnějších vláknech profilu napětí, které odpovídá opačnému zatížení ohybem o hodnotě ( $M_{pe2} =$  předpětí pružným momentem)

$$M_{pe2} = (1 - C_{e2}) * M_e \quad C_{e2} = 2/C_p - 1 \dots\dots \text{souč. zbytkové deformace po vzniku plastického kloubu}$$

Na opačné zatížení ohybem zůstává pružný moment  $M_{e2} = C_{e2} * M_e$ .

Pro některé profily jsou hodnoty  $C_p$  a  $C_{e2}$  uvedeny v tabulce na násled. straně.

Pro průřezy s hodnotou  $C_p = 2$  se při odlehčení objeví v krajním vlákne napětí na mezi kluzu opačného znaménka. Pro průřezy s  $C_p > 2$  nastane při odlehčení v krajních vláknech plastická deformace opačného smyslu. (Př.  $C_p=1,5$ ;  $C_{e2}=0,33 \rightarrow M_{e2} = 0,33 * M_e$ ;  $M_{pe2}=0,67 * M_e$ ;  $C_p=2,2$ ;  $C_{e2}=-0,1 \rightarrow M_{e2} = -0,1 * M_e$ ;  $M_{pe2}=1,1 * M_e > M_{elast}$ ).

**Tab.1: Hodnoty elastického a plastického momentu  $W$ , souč. plasticity  $C_p$  a souč. zbytkové deformace  $C_{e2}$**

Průřez	$W_o$	$W_p$	$C_p$	$C_{e2}$
Čtverec (o straně b)	$1/6b^3$	$1/4b^3$	1,5	0,33
Čtverec na koso (o straně b)	$b^3/(6*\sqrt{2})$	$\sqrt{2}*b^3/12$	2,0	0,0
Obdélník na výšku (výška h, strana b)	$1/6bh^2$	$1/4bh^2$	1,5	0,33
Trojúhelník (základna b, výška h)	$bh^2/12$	$2*\sqrt{2}/6*bh^2$	2,34	-0,145
Kruh (průměr d)	$\pi d^3/32$	$d^3/6$	1,7	0,176
Mezikruží (průměry $d_e$ a $d_i$ )	$\pi d^3/32*(1-k^4)$	$d^3/6*(1-k^3)$	$(0,18+k^3-1,18k^4)/(1-k^3)$ $1,7*(1-k^3)/(1-k^4)$	
Mezikruží (průměr $d_e$ , tl. stěny s)	$0,78*d_e^2*s$	$d_e^2*s$	1,27	0,575

## 4.2. Plastizace při kombinovaném zatížení (tah + ohyb)

Mezní síla při zatížení pouze silou  $F_{PO}$

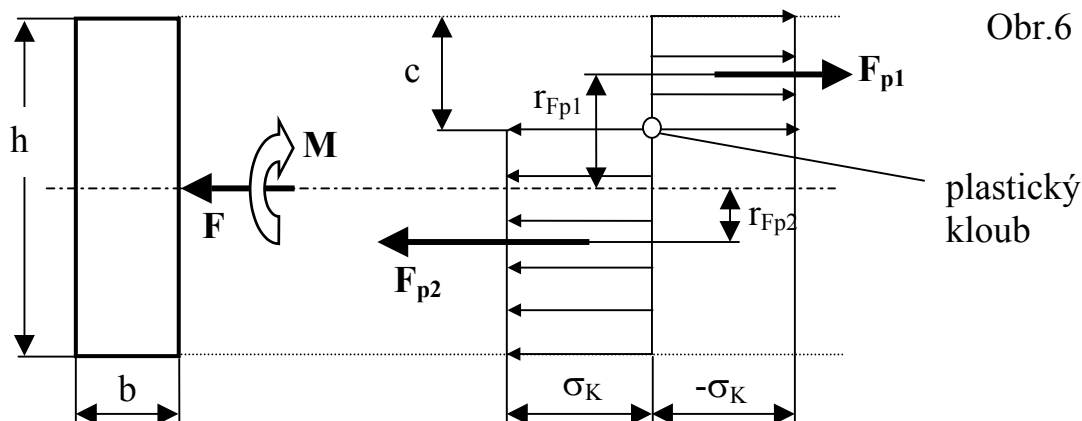
$$F_{PO} = h * b * \sigma_K \quad (\text{plocha na které působí napětí x max. napětí } \sigma_K)$$

Mezní moment při zatížení pouze momentem  $M_{PO}$

$$M_{PO} = W_p * \sigma_K = W_o * C_p * \sigma_K = 1/4 * b * h^2 * \sigma_K$$

$$(\text{=} 1/6 * b * h^2 * 1,5 * \sigma_K) \quad (\text{viz výše ohyb profilu resp. tabulka})$$

Průběh napětí v profilu při společném zatížení za mezního stavu je na následujícím obr.6 (superpozice obou zatížení musí být na mezi kluzu = mezní stav)



Ve vzdálenosti  $c$  od okraje dojde ke vzniku plastického kloubu. Určíme jednotlivé mezní síly a jejich momenty k ose profilu a celkové mezní hodnoty.

$$F_{P1} = c * b * \sigma_K \quad F_{P2} = (h - c) * b * \sigma_K$$

$$F_P = F_{P2} - F_{P1} = (h - c) * b * \sigma_K - c * b * \sigma_K = (h - 2c) * b * \sigma_K$$

Ramena na kterých působí síly  $F_{P1,2}$

$$r_{FP1} = h/2 - c/2 = (h - c) / 2 \quad r_{FP2} = c/2$$

$$M_P = F_{P1} * r_{FP1} + F_{P2} * r_{FP2} =$$

$$M_P = c * b * \sigma_K * (h - c) / 2 + (h - c) * b * \sigma_K * c/2 = c * (h - c) * b * \sigma_K$$

Poměr mezních hodnot pro samostatné a společné působení zatížení je po úpravě

$$F_P / F_{PO} = 1 - 2c/h \quad M_P / M_{PO} = 4 c/h * (1 - c/h)$$

Eliminací poměru  $c/h$  z obou rovnic dostaneme rovnici

$$M_P / M_{PO} + (F_P / F_{PO})^2 = 1$$

Pro výše uvedený případ platí

pro pružný stav	$M = \sigma_M * W$	$F = \sigma_F * S$
pro plastický stav	$M_P = 1,5 * \sigma_K * W$	$F_P = \sigma_K * S$

a dosazením do výše uvedené rovnice dostaneme

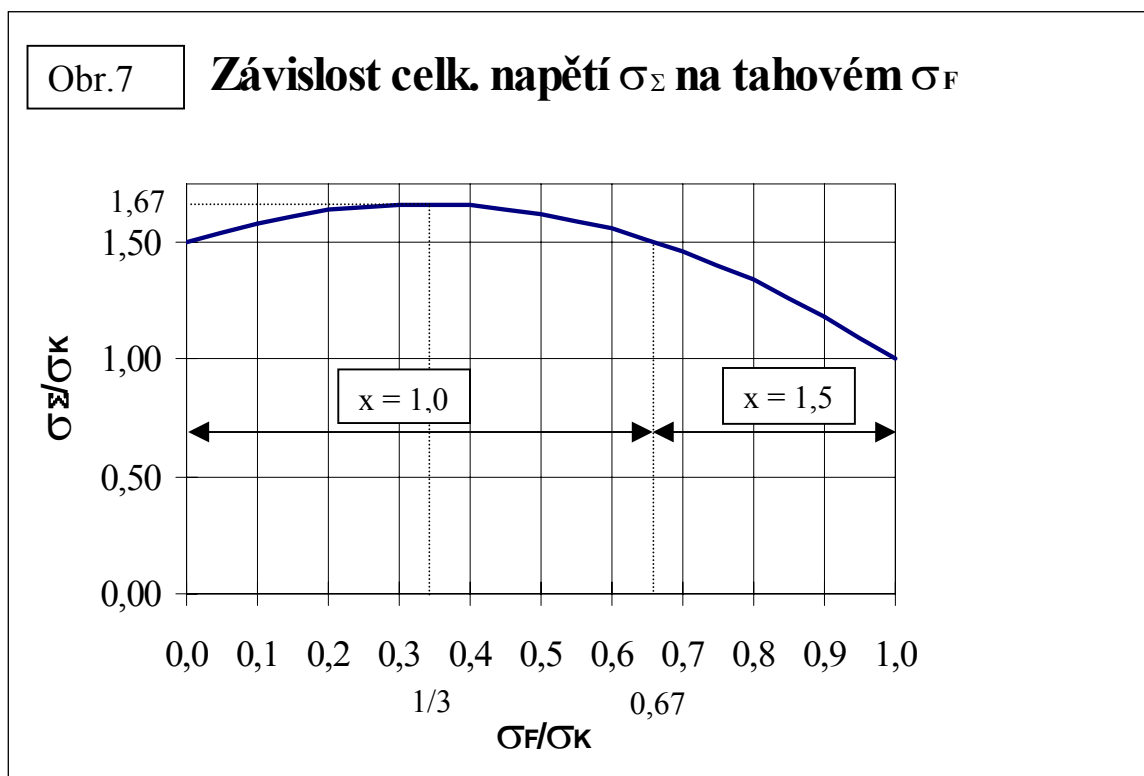
$$\frac{\sigma_M}{1,5 * \sigma_K} + \left( \frac{\sigma_F}{\sigma_K} \right)^2 = 1$$

Zavedeme celkové napětí  $\sigma_\Sigma = \sigma_M + \sigma_F$  a dělením rovnice  $\sigma_K$  dostaneme

$$\frac{\sigma_\Sigma}{\sigma_K} = 1,5 + \frac{\sigma_F}{\sigma_K} - 1,5 * \left( \frac{\sigma_F}{\sigma_K} \right)^2$$



Závislost  $\sigma_{\Sigma} / \sigma_K$  na  $\sigma_F / \sigma_K$  si vyneseme do následujícího grafu (obr.7).



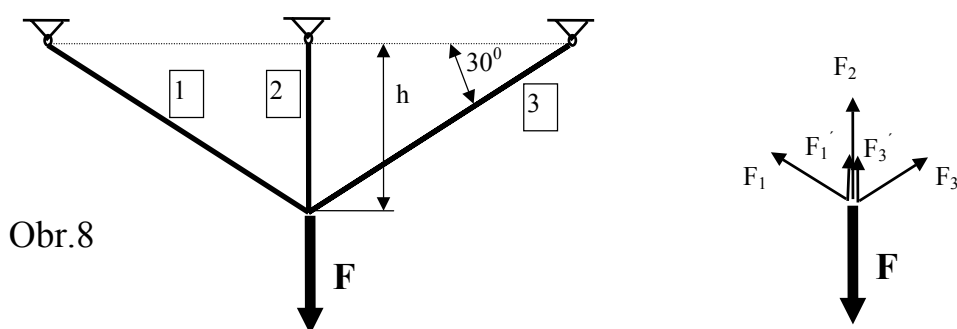
Z této závislosti vyplývá, **při zatížení pouze ohybem dosahuje celkové mezní napětí hodnoty 1,5 x mez kluzu.** Při kombinovaném zatížení (tah + ohyb) s převládajícím ohybovým napětím roste celkové mezní napětí a dosahuje maxima **při  $\sigma_F / \sigma_K = 1/3$ , kdy je celk. mezní napětí  $\sigma_{\Sigma} = 1,67 * \sigma_K$ .** **Poté klesá až při čistém tahu dosáhne hodnoty  $\sigma_{\Sigma} = \sigma_K$ .**

**Tento poznatek lze využít při volbě součinitele bezpečnosti .**

Ke zhroucení konstrukce při tahovém (tlakovém) namáhání dojde při dosažení  $\sigma_F = \sigma_K$ . Při membránové napjatosti se volí součinitel bezpečnosti  $x = 1,5$  ( $\sigma_{DF} = \sigma_K / x = \sigma_K / 1,5$ ). Při prostém ohybu lze volit  $x = 1,0$  (máme rovněž rezervu 50 % vůči meznímu stavu -  $\sigma_{DM} = \sigma_K / x = \sigma_K$ ). Při kombinaci tahu a ohybu je tato rezerva větší než při prostém ohybu. Proto i pro tento případ lze až do poměru  $\sigma_F / \sigma_K = 0,67$  volit souč. bezpečnosti  $x = 1$ . Pro vyšší hodnoty se musí volit  $x = 1,5$ .

## 5. Plasticita u staticky neurčitých konstrukcí s jednoosým čistě tahovým zatížením

Budeme uvažovat tříprutovou staticky neurčitou soustavu zobrazenou na obr.8.



Parametry soustavy jsou následující:

Délky prutů:  $l_2 = h$        $l_1 = l_3 = 2 \cdot h$   
 Průřezy prutů:  $A_2 = A$        $A_1 = A_3 = 4 \cdot A$

Tuto soustavu zatížíme silou  $F$  v rozsahu  $F_e < 0; 2 \cdot A \cdot \sigma_K >$ . Střední prut 2 se bude při zatěžování i odlehčování chovat elasticky.

$$F_1 = F_3 \quad F_1' = F_3' = F_1 \cdot \sin \alpha = F_1 / 2$$

$$F = F_1' + F_2 + F_3' = F_1 / 2 + F_2 + F_1 / 2 = F_1 + F_2$$

Při zatížení silou  $F = 2 \cdot A \cdot \sigma_K$  bude v prutu 2 napětí (za předpokladu, že  $F_2 = F_1$  - určeno z požadavku stejného prodloužení prutů ve směru síly  $F$  a tuhostí prutů)

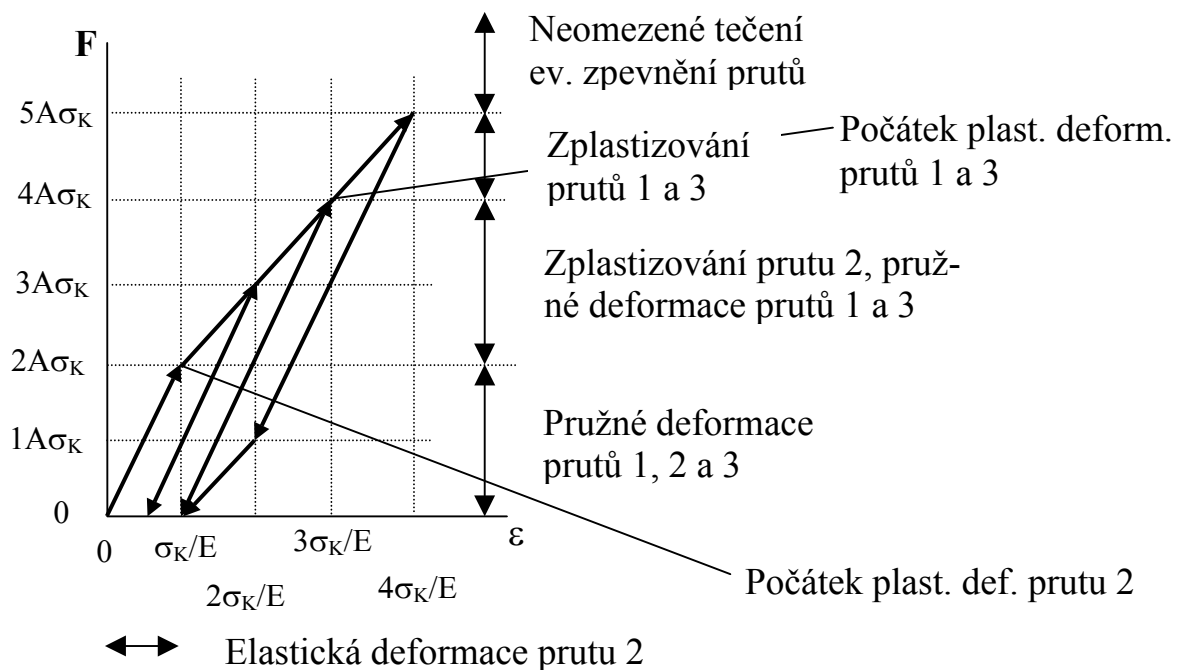
$$F_2 = F / 2 = 2 \cdot A \cdot \sigma_K / 2 = A \cdot \sigma_K \rightarrow \sigma_2 = F_2 / A = A \cdot \sigma_K / A = \sigma_K$$

Z toho vyplývá, že až do této síly se prut 2 deformuje elasticky.

Nyní budeme uvažovat zatížení soustavy zvýšenou silou  $F$  v rozsahu  $F_{pI} < 2 \cdot A \cdot \sigma_K; 4 \cdot A \cdot \sigma_K >$ . Za těchto podmínek se začne prut 2 deformovat plastic-  
ky, pruty 1 a 3 se stále deformují elasticky. Po odlehčení se pruty 1 a 3 vrací do  
původní polohy. V tom jim však brání trvalá deformace prutu 2. Proto v prutu 2  
vznikne po odlehčení tlakové předpětí a v prutech 1 a 3 tahové. Při opakovaném  
zatížení silou vzrůstající od 0 do  $F_{pI}$  se proto bude soustava chovat jako pružná v  
celém tomto rozsahu (viz obr.9).

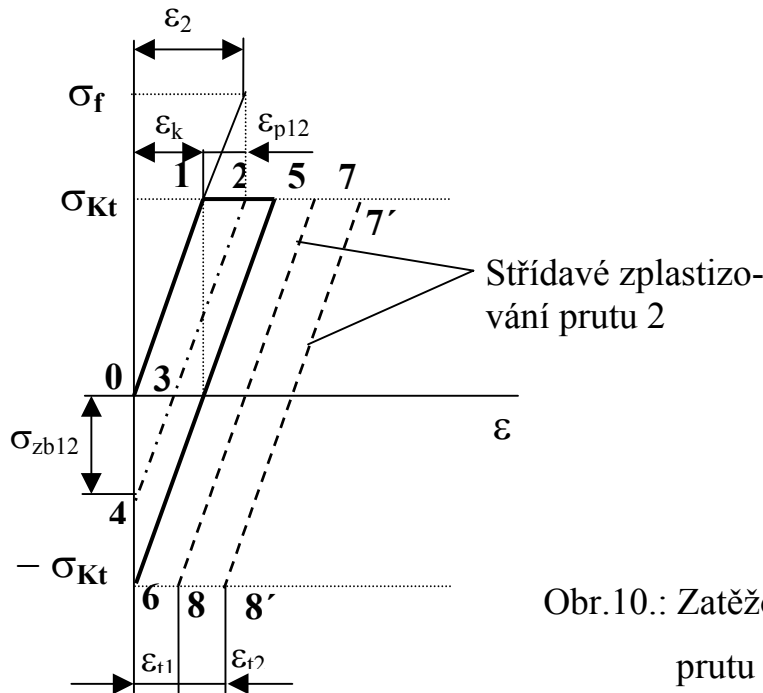
Při zatěžování soustavy silou  $F$  ještě větší ( $F_{pII} < 4 \cdot A \cdot \sigma_K; 5 \cdot A \cdot \sigma_K >$ ) dochází  
k plastickým deformacím i v prutech 1 a 3. Po odlehčení dochází k tlakové plas-  
tické deformaci v prutu 2 (střídavé zplastizování).

Při dalším zvýšení zatížení na  $F_{pIII} > 5 \cdot A \cdot \sigma_K$  se soustava dostává do oblasti  
nekontrolovatelného tečení. U zpevňujících materiálů lze ještě takto soustavu za-  
tížit, v praxi se však s tímto zpevněním nepočítá.



Obr. 9: Zatěžování tříprutové soustavy dle obr.8. Stav středního prutu 2.

Nyní budeme uvažovat ideálně pružně-plastický materiál, t.zn., že se prut 2 po dosažení meze kluzu bude plasticky deformovat (po čáře  $\sigma_K = \text{konst.}$ ). Průběh střídavého zatěžování a odlehčování si ukážeme v t.zv. Planckově diagramu (obr.10).



Obr.10.: Zatěžovací diagram středního prutu při střídavém zatěžování tříprutové soustavy

V oblasti pružné deformace se stav prutu 2 pohybuje na čáře 0 – 1. Po dosažení meze kluzu v tahu se začne plasticky deformovat po čáře 1 – 2. Po odlehčení (čára 2 – 4) vznikne v prutu 2 tlakové předpětí

$$\sigma_{zb12} = - E * \varepsilon_{p12}$$

Pokud jsme soustavu zatížili tak, že  $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_k + \varepsilon_{p12} \leq 2/E * \sigma_K$  bude opakované zatížení probíhat v pružné oblasti po čáře 4 – 2. Přitom nezáleží na tom, kolikrát jsme se dostali do bodu 2 (nezávisle na historii zatěžování). **V tomto případě se soustava uvedenému přetížení přizpůsobila.**

K opětovnému dosažení meze kluzu (bodu 2) bude zapotřebí napětí

$$\sigma = \sigma_K + \sigma_{zb12} = \sigma_{fiktivní}$$

Pokud zvýšíme zatížení soustavy tak, že plastické deformace dosáhnou hodnoty  $\varepsilon_p = \varepsilon_k$  (celkové deformace  $\varepsilon = \varepsilon_5 = 2 * \varepsilon_k$  – bod 5), stoupne hodnota zbytkového předpětí po odlehčení na hodnotu  $\sigma_{zb12} = \sigma_{Kt}$  (bod 6). Při dalším zvětšování plastické deformace (bod 7) se začne prut plasticky deformovat i v tlakové oblasti po odlehčení (bod 8). Při vyšším zatížení body 7' a 8'. **Další střídavé zatěžování a odlehčování (po čárách 6–5–7–8–6) vede ke střídavému zplastizování s mezním únavovým lomem.** Konstrukce již není schopna se tomuto přetížení přizpůsobit.

K přizpůsobení konstrukce vůči přetížení může dojít pouze v oblasti deformací  $\langle \varepsilon_k; 2\varepsilon_k \rangle$ .

O možnostech přizpůsobení rozhoduje bezrozměrná veličina nazvaná součinitel přizpůsobení  $k_p$  (shake down, Einspieltheorem), který je dán poměrem zatížení v druhém cyklu  $F_2$ , kdy právě začíná střídavé zplastizování, k zatížení  $F_1$ , kdy konstrukce poprvé překročila mez kluzu v tahu:

$$k_p = \frac{F_2}{F_1} = \frac{56}{01} \leq 2$$

Pozn.: Tyto vztahy platí pouze pro jednoosou napjatost. Pro trojosou napjatost jsou vztahy složitější, princip a závěry jsou však obdobné.

Zatěžování staticky neurčitých konstrukcí s náhlými tvarovými změnami či jinými nespojitostmi vede ke vzniku místních sekundárních a špičkových napětí.

Ta jsou v průřezu stěny rozložena nerovnoměrně. Špičky napětí mají lokální charakter. Proto se plastické deformace nešíří do okolí, takže ani větší překročení meze kluzu nemusí mít vliv na celkovou pevnost konstrukce (soustavy, nádoby atp.). **Proto se při statickém zatížení špičková napětí neuvažují.**

Pro ocel a skořepinu zatíženou převážně membránovým napětím se uvádí dosah přechodových ohybových napětí  $L$

$$L = \sqrt[4]{\frac{R^2 * s^2}{3 * (1 - \mu^2)}} \approx 0,78 * \sqrt{R * s}$$

kde  $R$  je poloměr křivosti v uvažovaném místě a  $s$  je tloušťka stěny membrány (skořepiny).

Př.:  $R = 1000 \text{ mm}$ ;  $s = 10 \text{ mm}$ ;  $L = 0,78 * \sqrt{1000 * 10} = 78 \text{ mm}$

## **6. Kategorie napětí v konstrukci (stěně membrány)**

**1. Primární napětí** = tahová a tlaková napětí (membránová) ve stěně rozdělená rovnoměrně nebo ohybová napětí vyvolaná vnějšími silami. Po vzniku plastické deformace některých vláken průřezu (po překročení meze kluzu) se příliš nezmenšují. Proto jsou primární tahová a tlaková napětí omezena součinitelem bezpečnosti  $x = 1,5$  (po překročení zatížení vlivem provozních podmínek či chybným dimenzováním by mohly vzniknout značné plastické deformace s následným lomem). Ohybová napětí a napětí kombinovaná (ohyb + tah) mají souč. bezpečnosti  $x = 1$ . Hodnota dovoleného primárního napětí by teoreticky neměla překročit mez kluzu.

**2. Sekundární napětí** = napětí, která i po překročení meze kluzu nevyvolávají větší plastické deformace a po určité hodnotě zplastizování se mohou díky své statické neurčitosti přizpůsobit přetížení. Do této skupiny patří např. napětí vyvolané místními vnějšími silami, tvarovými přechody, změnou teploty. Velikost sekundárních napětí samotných nebo jejich součtu s napětími primárními jsou omezena podmínkou, že jejich max. hodnota v libovolném směru a vlákne nesmí překročit dvojnásobek meze kluzu.

Při správném konstrukčním návrhu lze očekávat v místech nejvyšších napětí částečnou plastizaci a vznik zbytkových předpětí. Pokud tato předpětí dosáhnou meze kluzu vzniká nebezpečí střídavého zplastizování, které vede k lomu s velkými kontrakcemi.

Přizpůsobení se konstrukce přetížení se využívá při tlakových zkouškách nádob (odstranění možných špiček napětí). Vzdálenost na kterou se projevují sekundární napětí je úměrná rozměru nádoby a její tloušťky.

**3. Špičky napětí** = napětí lokálního charakteru, která jsou pouze v některých vláknech průřezu. Místní plastické deformace vyvolané těmito špičkami nemají prakticky žádný vliv na konstrukci. Uvažují se jen na nízkocyklovou únavu, t.zn. v závislosti na očekávaném počtu cyklického zatěžování konstrukce.

## **7. Podmínky plasticity pro víceosou napjatost**

V tomto případě musíme určit ekvivalentní napětí  $\sigma_e$ , které budeme porovnávat s mezí kluzu  $\sigma_K$ . Ekvivalentní napětí je dáno 6 složkami tenzoru napětí. Podmínky plasticity určené na základě různých teorií se liší ve volbě tohoto ekvivalentního napětí. Protože k plastické deformaci dochází převážně smykem, používají se při stanovení podmínek plasticity různé formy smykových napětí.

V inženýrské praxi se pro víceosou napjatost používají následující podmínky (předpoklad, že  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ). Podle nich určené ekvivalentní napětí potom porovnááme s mezí kluzu.

### 1. Hypotéza maximálního normálního napětí $\sigma_{\max}$ (tah nebo tlak)

Lameé	2 osá napjatost	$\sigma_e = \sigma_1$
	3 osá napjatost	$\sigma_e = \sigma_1$ (tah) nebo $\sigma_e = \sigma_3$ (tlak)
		(v závislosti na $\sigma_{\text{ktahu}}$ a $\sigma_{\text{ktlaku}}$ )

### 2. Hypotéza maximálního smykového napětí

Guest	2 osá napjatost	$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \tau_K$
-------	-----------------	---

Podle této teorie dojde k porušení konstrukce tehdy, když max. smykové napětí  $\tau_{\max}$  dosáhne hodnoty odpovídající smykovému napětí při porušení prostým tahem. V normálních napětích je tato podmínka vyjádřena vztahem  $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_K$ . V případě dvojosé napjatosti je  $\sigma_3 = 0$ . Potom je oblast bezpečného namáhání určena podmínkami:

$$\left| \sigma_1 - \sigma_2 \right| \leq \sigma_K \qquad \left| \sigma_1 \right| \leq \sigma_K \qquad \left| \sigma_2 \right| \leq \sigma_K$$

Aby byly splněny podmínky stability konstrukce musí maximální hodnota výsledného napětí rovinné napjatosti ležet uvnitř t.zv. Trescova šestiúhelníku (obr.11).



Uvedeme si několik příkladů různých zatížení a jim odpovídajících napětí v Trescově šestiúhelníku.

a) Jednoosý tah ve směru osy  $\sigma_1/\sigma_K$ ;  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2 = 0$

ve směru osy  $\sigma_2/\sigma_K$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_1 = 0$

b) Jednoosý tlak ve směru osy  $-\sigma_1/\sigma_K$ ;  $-\sigma_1$ ;  $\sigma_2 = 0$

ve směru osy  $-\sigma_2/\sigma_K$ ;  $-\sigma_2$ ;  $\sigma_1 = 0$

c) Čistý smyk  $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ ;  $\sigma_1 = -\sigma_2$

d) Tenkostěná kulová skořepina s vnitřním přetlakem

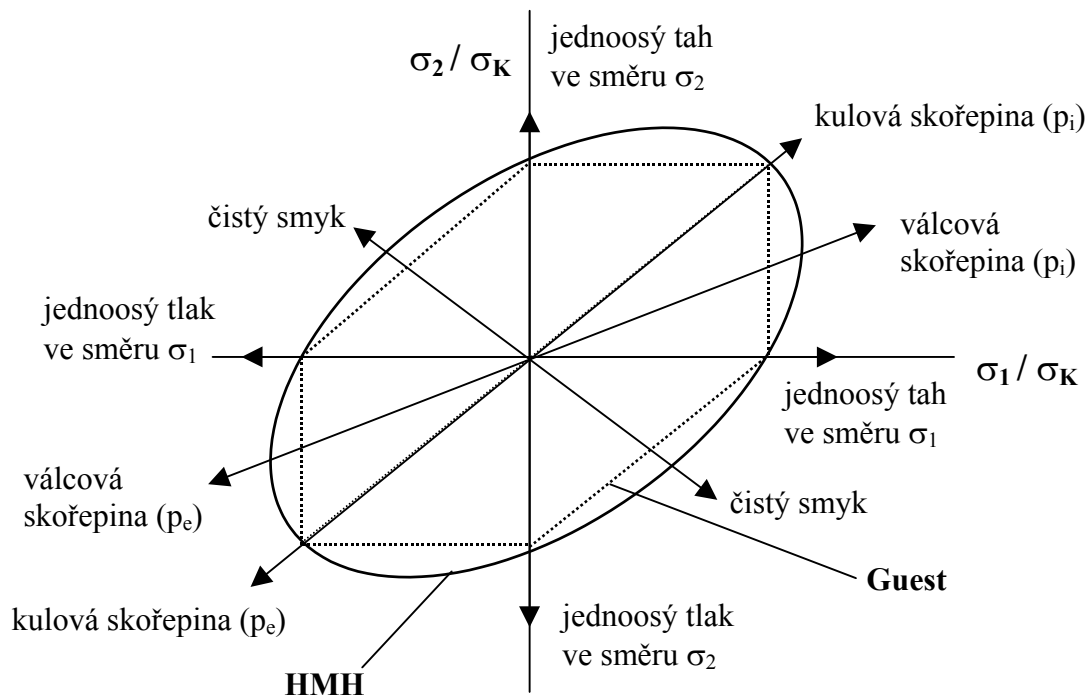
obvodové (tangenciální, tečné) napětí = osové napětí

$$\sigma_o = \sigma_1 = \sigma_t = \sigma_2 = p * r / s$$

e) Tenkostěnná válcová skořepina s vnitřním přetlakem

obvodové napětí = 2\*osové napětí

$$\sigma_o = \sigma_1 = p * r / 2s; \sigma_t = \sigma_2 = p * r / s = 2*\sigma_1$$



Obr.11. Podmínky plasticity pro dvojosou napjatost

### 3. Hypotéza HMH (energetická hypotéza Huber – Mises – Hencky)

Tato hypotéza přisuzuje největší vliv na porušení konstrukce měrné energii napjatosti na změnu tvaru. Pro případ rovinné napjatosti platí že

$$\sigma_e^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2 \quad \text{resp.} \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2}$$

Podělíme-li obě strany rovnice hodnotou  $\sigma_K$  a vyneseme v grafu na obr.11 dostaneme elipsu, která prochází vrcholy Trescova šestiúhelníka. Porovnáním obou hypotéz vidíme, že Guestova hypotéza maximálního smykového napětí leží na straně větší bezpečnosti. Hypotéza HMH lépe (hospodárněji) využívá pevnost materiálu.

V případě trojosé napjatosti je prostor bezpečného zatížení (mezní prostor) tvořen při uvažování Guestovy hypotézy rotačním elipsoidem, v případě hypotézy HMH „šestibokým hranolem“.

Příklad:

Uvažujeme tenkostěnnou válcovou nádobu s vnitřním poloměrem  $r = 500$  mm a tloušťkou stěny  $s = 20$  mm, která je namáhána vnitřním přetlakem  $p_i$ . Mez kluzu materiálu je  $\sigma_K = 230$  MPa. Úkolem je určit tečné a osově membránové napětí v plastickém stavu.

Platí, že

tečné napětí	$\sigma_t = p*r/s;$	osové napětí	$\sigma_o = p*r/2s;$
radiální napětí	$\sigma_r = -p$		$\sigma_t > \sigma_o > \sigma_r$

Podle podmínky  $\sigma_{\max}$  (Lameé) je

$$\sigma_t = p * r / s \leq \sigma_K / x \rightarrow p_D = \sigma_K * s / (x * r) = 230 * 20 / (1,5 * 500) = 6,13 \text{ MPa}$$

Podle energetické podmínky HMM je

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} * \sqrt{(\sigma_t - \sigma_o)^2 + (\sigma_o - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_t)^2}$$

Pro snazší výpočet zavedeme

$$a = \sigma_o / \sigma_t = 0,5;$$

$$b = \sigma_r / \sigma_t = p / (p * r / s) = -230 * 20 / (230 * 500) = -0,04$$

a po dosazení a úpravě dostaneme

$$\sigma_e = \frac{\sigma_t}{\sqrt{2}} * \sqrt{(1 - a)^2 + (a - b)^2 + (-b - 1)^2} = \dots = 0,901 * \sigma_t$$

$$\sigma_e = 0,901 * \frac{p * r}{s} \leq \frac{\sigma_K}{x} \quad x = 1,5$$

Potom bude maximální vnitřní přetlak určený z hlediska podmínky plasticity

$$p_p = \frac{\sigma_K * s}{0,901 * r} = \frac{230 * 20}{0,901 * 500} = 10,21 \text{ MPa}$$

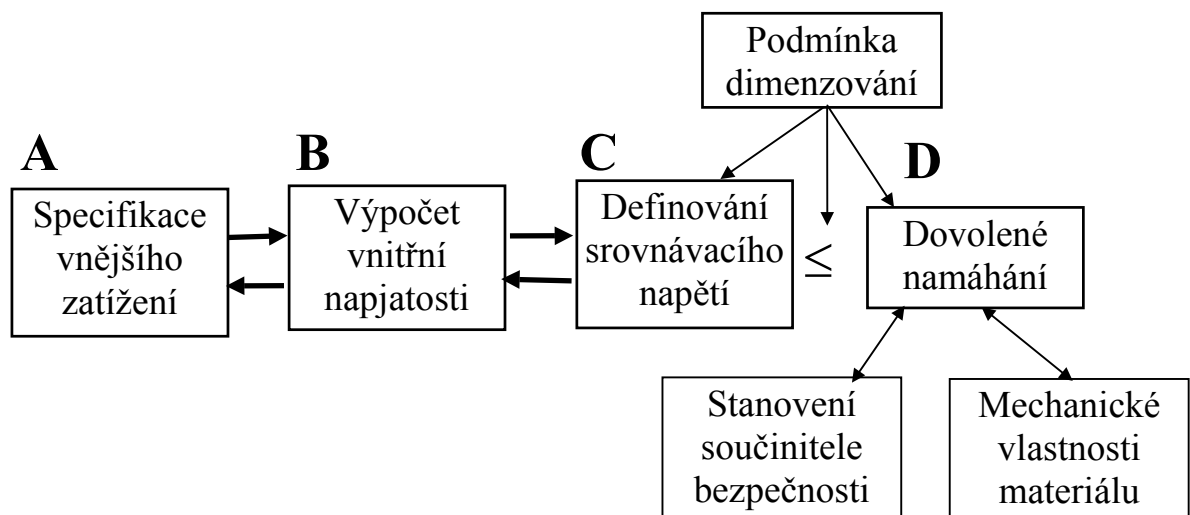
a dovolený přetlak  $p_D = p_p / x = 10,21 / 1,5 = 6,81 \text{ MPa}$  ( $x$  Guest 6,13 MPa)

## 8. Základní metody dimenzování konstrukcí (součástí atp.)

### Předpoklady pro dimenzování zařízení:

- Popis procesů ke kterým dochází v zařízení
- Vstupy a výstupy hmot a energií
- Řídicí systém (regulace, čidla, akční členy, snímače)
- Umístění ve výrobní lince (vlivy okolí, patky, připojovací příruby atp.)

Obr.12.: Schéma dimenzování zařízení (strojní součásti)



### A) Specifikace vnějšího zatížení

Při této specifikaci musí konstruktér řešit následující problémy:

- Možnost rozložení kombinovaného zatížení na jednoduchá zatížení a následné použití zákonů superpozice napětí a posunů.
- Působící síly jsou povrchové nebo objemové?

- Účinek zatížení je monotónní nebo proměnný (periodický nebo náhodný); způsob provozu.
- Podmínky daného charakteru zatěžování a přechodové stavy (způsob provozu a jeho omezující podmínky, způsob najíždění a odstavování (po každé směně či v delších intervalech), údržba zařízení atp.)
- Další provozní podmínky či omezení (práce při sníženém či zvýšeném výkonu, povolené kolísání provozních teplot, rychlosti ohřevu či ochlazování a počet jejich změn, korozivní a abrazivní účinky pracovních médií, znečištění pracovních ploch během pracovního cyklu, podmínky čištění a sanitace atp.)

## **B) Vnitřní napjatost**

Pro specifikaci vnitřní napjatosti je třeba řešit tyto problémy:

- Lze součást nebo zařízení nahradit jednoduchými geometrickými tvary (koule, válec, deska, prut, prutová soustava, rám atp.) či jejich kombinací?
- Lze součást nebo zařízení rozložit na prvky u kterých známe výpočtová řešení vnitřních sil a momentů a dokážeme stanovit okrajové podmínky pro jejich spojení?
- Lze pro dimenzování použít předepsané metodiky výpočtu podle normy, výpočtových předpisů atp.?
- Pokud ne, lze použít zjednodušující předpoklady a tak problém přibližně vyřešit? Jaká je chyba přibližného řešení?
- Je konstrukce staticky určitá (vnitřní síly lze stanovit jen z rovnováhy s vnějšími silami) nebo je staticky neurčitá (pro určení vnitřních sil potřebujeme ještě deformační podmínky)?
- Je známa přesnost výpočtu? Jsou výsledky na straně větší či menší bezpečnosti?

- Bude nutno při výpočtu vycházet z provozních parametrů nebo poruchových (mimořádných) stavů?
- Vznikají vlivem vytvarování zařízení, opracování nebo spojování dílů vnitřní pnutí? Jak jsou velká a jak ovlivňují společně s vnějšími silami vnitřní napjatost?
- Jaké jsou okrajové podmínky, t.zn. způsob uložení či spojení s ostatními částmi linky (podepření, zavěšení, způsob vetknutí atp.)? Jedná se o důležitý parametr, který ovlivňuje přesnost výsledků výpočtů.
- Jsou k dispozici podklady pro řešení problematiky únavy, tečení, volby součinitele bezpečnosti či pro výpočty podle pravděpodobnostní teorie provozní spolehlivosti?
- Lze použít pro složitější případy metodu konečných prvků atp. či některý výpočetní program?

### **C) Definování srovnávacího napětí**

Vypočtenou víceosou napjatost porovnááme s pevnostmi materiálu získanými z tahové zkoušky jednoosé napjatosti. Výsledky musí být srovnatelné a reprodukovatelné. Z výsledků tahové zkoušky získáme pro okamžik počátku tečení tyto charakteristické veličiny:

- Osové hlavní napětí dosáhne smluvní meze kluzu ( $\sigma_K$ ;  $\sigma_{0,2}$ )

$$\text{Lamée ..... } \sigma_{\text{omax}} \leq \sigma_K$$

- Maximální smykové napětí dosáhne meze pružného smyku materiálu za předpokladu, že

$$\text{Guest ..... } \tau_{\text{max}} = 0,5 * \sigma_K$$

- Osové tahové prodloužení  $\varepsilon_{\text{omax}}$  dosáhne maximální hodnotu  $\varepsilon_K$  na mezi kluzu, t.zn že

$$\text{St. Venant ..... } \varepsilon_{\text{omax}} = \sigma_K / E$$

- Celková energie na prodloužení, kterou může objemová jednotka materiálu absorbovat, dosáhne své maximální hodnoty na mezi kluzu

$$\text{Haigh-Beltrami} \dots\dots (E_{\Delta\epsilon})_{\max} = 1/2 * \sigma_K^2 / E$$

- Energie na změnu tvaru, kterou je schopna objemová jednotka materiálu absorbovat, dosáhne své maximální hodnoty na mezi kluzu

$$\text{HMH} \dots\dots\dots (E)_{\max} = (1+\mu)/2 * \sigma_K^2 / E \quad (\text{Huber-Mises-Hencky})$$

Poissonova konstanta pro ocel  $\mu = 0,3$

- Oktohedrální smykové napětí dosáhne své maximální hodnoty, která je vyjádřena ve tvaru

$$\tau_{\max} = \sqrt{2/3} * \sigma_K = 0,47 * \sigma_K$$

Každá z těchto 6 veličin tvoří základ určité pevnostní hypotézy pro jedno- či víceosou napjatost a její správná volba má význam z hlediska provozní bezpečnosti konstrukce i hospodárného využití materiálu.

## **D) Dovolená namáhání**

**Jsou dána jako podíl ověřené materiálové charakteristiky určené jednoduchými zkouškami (např. mez kluzu) a součinitele bezpečnosti x.**

Součinitele bezpečnosti jsou pro různé strojní součásti, konstrukce a zařízení určeny normami a předpisy pro jejich návrh, stavbu a provoz. Pro běžné inženýrské výpočty se počítá s tabulkovými hodnotami mechanických vlastností materiálů a s konstantními normovanými součiniteli bezpečnosti.

Při náročnějších případech se může např. uvažovat i vliv změny vlastností materiálů s časem atp. (spolehlivostní teorie kumulativního narůstání poškození, pravděpodobnostní metody určení součinitele spolehlivosti, matematické modely časové změny vlastností materiálů atp.).

V některých případech nedimenzujeme součást z pevnostního hlediska, ale např. z požadavků technologie výroby (odlitek, svařenec atp.).

### **Proč se liší vypočtené hodnoty od navržených (předimenzování konstrukce)?**

- Rozptyl pevnostních charakteristik materiálu oproti tabelovaným průměrným hodnotám ze zkoušek → atesty konkrétních dodávaných materiálů.
- Změny mechanických vlastností materiálu v průřezu součásti (u silnějších profilů = tloušťek je odchylka od průměrných hodnot větší než u slabých).
- Změna pevnosti materiálu v závislosti na charakteru zatížení (např. rychlosti zatěžování – zpevnění materiálu x únava).
- Rozdíl mezi vypočtenými a skutečnými zatěžovacími podmínkami konstrukce.
- Ovlivňování dalšími vzájemně spojenými součástmi konstrukce atp. (tuhost či pružnost systému a jednotlivých dílů, vzájemné vazby přenosu sil atp.).
- Vliv koncentrátorů napětí ve vetknutí, spojení, změn tvaru (patky, podpory, hrdla, nosníky a držáky atp.).
- Vliv přídavných sil způsobených technologií výroby nebo montáží (svařování, předepětí, nedostatečně vyžíhaný odlitek atp.).
- Vliv přetížení způsobených v provozu technologickou nekázní atp.
- Vliv vnitřních pnutí způsobených mikro- a makronerovnostmi povrchu.
- Vhodností či nevhodností hypotézy použité pro řešení konkrétního případu.

### **Příklad vhodnosti či nevhodnosti různých hypotéz použitých pro dimenzování silnostěnné válcové nádoby namáhané vnitřním přetlakem**

Dáno:  $r_i$  – vnitřní průměr;  $r_e$  – vnější průměr;  $p_i$  - přetlak  
 $k = r_e / r_i$  – bezrozměrná tloušťka stěny

Úkolem obvykle bývá stanovení následujících 3 tlaků (vnitřních přetlaků):



- Vnitřní přetlak  $p_i$ , při kterém zplastizuje pouze vnitřní vlákno, zatímco v celém ostatním průřezu materiálu jsou pružné deformace. Zde je podmínka, že srovnávací napětí ve vnitřním vlákne právě dosáhlo meze kluzu. Jestliže převedeme tlak na bezrozměrnou veličinu  $(p_i / \sigma_K)_{i=K}$  můžeme pro jednotlivé hypotézy získat závislost tohoto poměru  $(p_i / \sigma_K)$  na bezrozměrné tloušťce  $k$  (viz. obr.13).
- Stanovení vnitřního přetlaku  $(p_i)_{e=K}$  při kterém se idealizovaný materiál právě zplastizuje v celém průřezu (tloušťce). Tento postup se používá při creepu.
- Stanovení vnitřního přetlaku  $(p_i)_{i=P}$  při kterém dojde k porušení pevnosti materiálu přetržením, roztržením atp. V některých případech se bere v úvahu zpevnění materiálu.

### Odvození závislosti $(p_i / \sigma_K) - k$ pro membránovou teorii nádob

Obvodové (tangenciální, tečné) napětí je ve válcové membráně 2 x větší než osové (viz výše – u koule jsou stejná). Proto budeme uvažovat jako rozhodující toto napětí. Podle membránové teorie se v membráně (tenkostěnné skořepině) vyskytují při vnitřním přetlaku pouze tahová napětí. Uvažujeme první případ, t.zn. dosažení meze kluzu pouze ve vnitřním vlákne.

$$\sigma_t = p_i * r_i / s \leq \sigma_K \quad s = r_e - r_i \quad k = r_e / r_i$$

po dosazení a úpravě dostaneme membránový vzorec

$$\sigma_t = p_i * r_i / (r_e - r_i) = p_i * r_i / (k * r_i - r_i) = p_i / (k - 1) \leq \sigma_K$$

$$(p_i / \sigma_K) = k - 1$$

Obdobné vztahy mohou být odvozeny pro ostatní hypotézy.

Lamée  $(p_i / \sigma_K) = (k^2 - 1) / (k^2 + 1)$  (ASME pro  $k > 1,5$ )

Guest  $(p_i / \sigma_K) = (k^2 - 1) / 2k^2$

St. Venant  $(p_i / \sigma_K) = (k^2 - 1) / (1,3k^2 + 0,4)$

H – B  $(p_i / \sigma_K) = 2(k^2 - 1) / \sqrt{(6 + 10k^4)}$

H-M-H  $(p_i / \sigma_K) = (k^2 - 1) / (\sqrt{3} * k^2)$

ASME  $(p_i / \sigma_K) = (k - 1) / (0,6k + 0,4)$  pro  $k \leq 1,5$

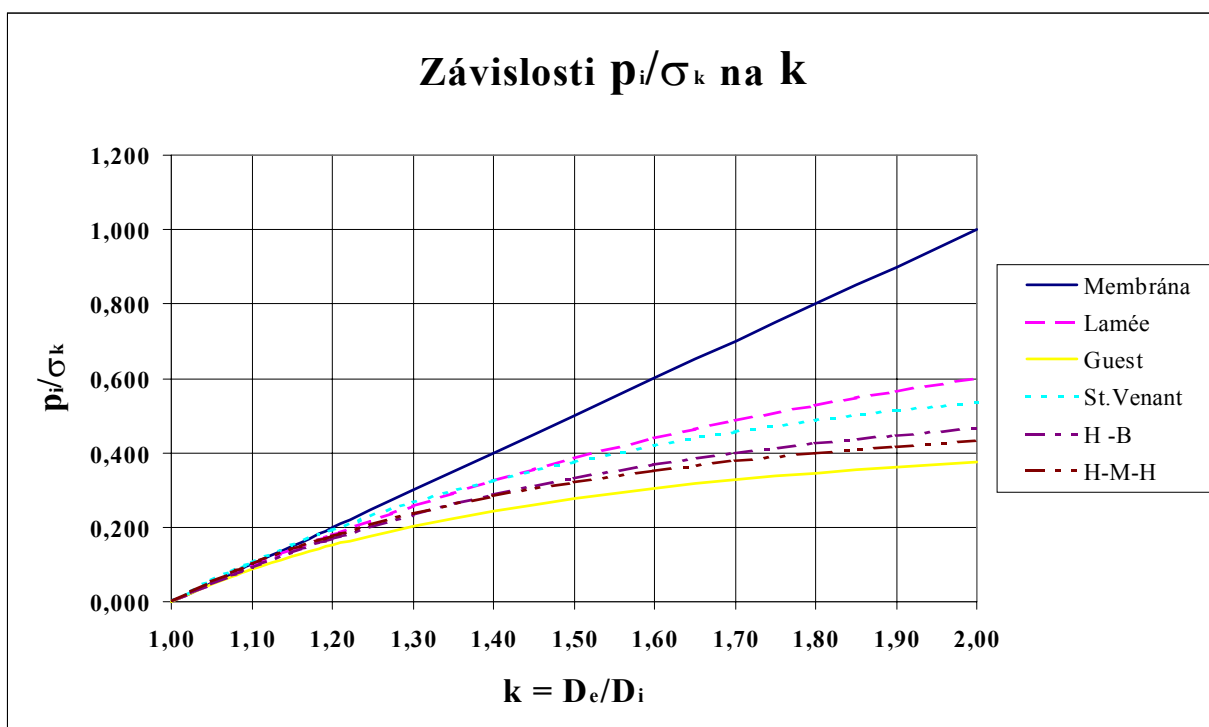
Pro plněplastický stav:

Guest  $(p_i / \sigma_K) = \ln(k)$

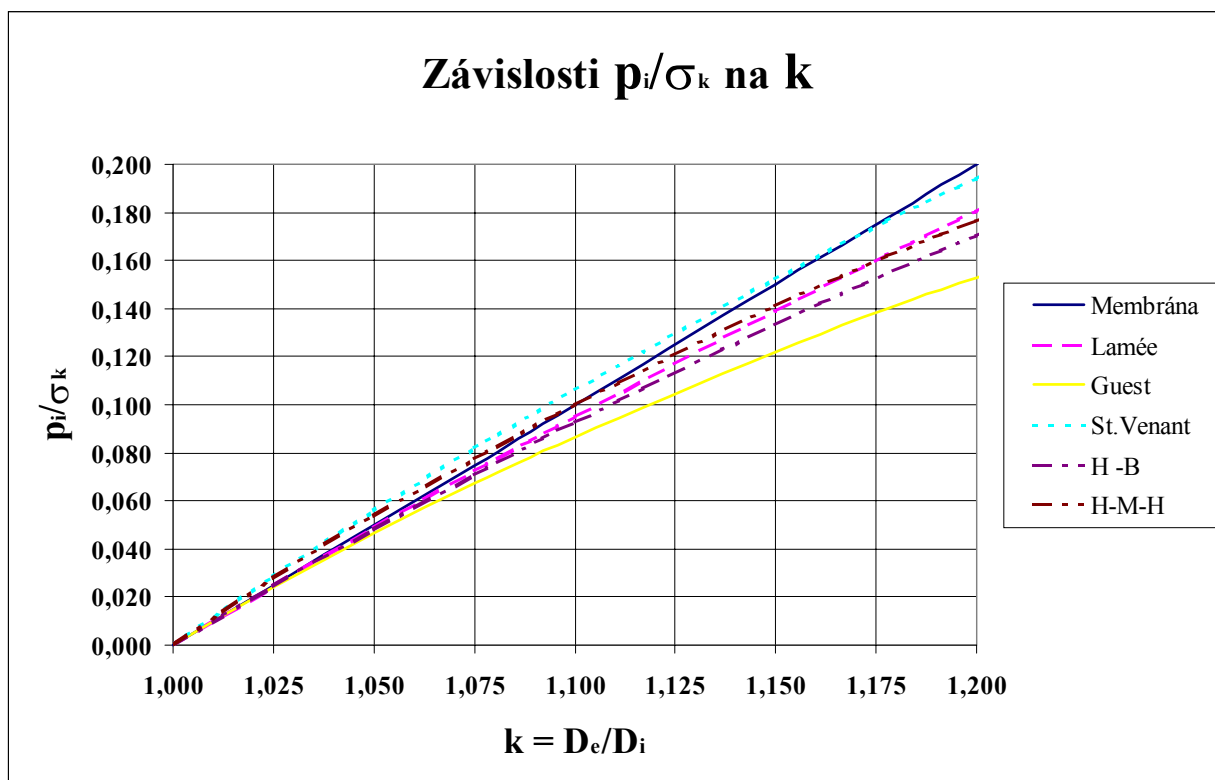
H-M-H  $(p_i / \sigma_K) = 2/\sqrt{3} * \ln(k)$

Výsledky těchto závislostí jsou uvedeny na obr.13. **Předěl mezi tenko- a silnostěnnými válci tvoří hodnota  $k = 1,17$ . V praxi se používá bezpečnější hodnota  $k = 1,1$ .**

V této oblasti se výsledky podle Guesta liší cca o 19 % ( $k \approx 1,17$ ) od skutečných hodnot na stranu bezpečnosti, t.zn., že je nádoba o 19 % předimenzována. Výsledky podle H-M-H jsou poněkud poddimenzovány. Membránová teorie dává nepatrně poddimenzované hodnoty.



Obr. 13 a, b: Závislosti maximálního bezrozměrného tlaku na bezrozměrné tloušťce válcové nádoby.



V oblasti  $k > 1,17$  dávají výsledky nejlépe vyhovující skutečným naměřeným hodnotám hypotézy H-B a H-M-H. Membránový vzorec povoluje značně vyšší tlak a neodpovídá skutečnosti (silně poddimenzováno), podle Lamée a St. Venanta poddimenzují nádobu. Naopak výsledky podle Guesta jsou předimenzovány (viz. obr.13).

## 9. Příklad:

**Dáno:** Válcová nádoba zatížená vnitřním přetlakem  $p_i = 0,6$  MPa, o vnějším průměru  $D_e = 1800$  mm, ocel s mezí kluzu  $\sigma_K = 230$  MPa.

**Úkol:** Určit potřebnou tloušťku stěny nádoby  $s = ?$ .

Pro zjednodušení uvažujeme dlouhý válec bez vlivu přechodových napětí u den či patek.

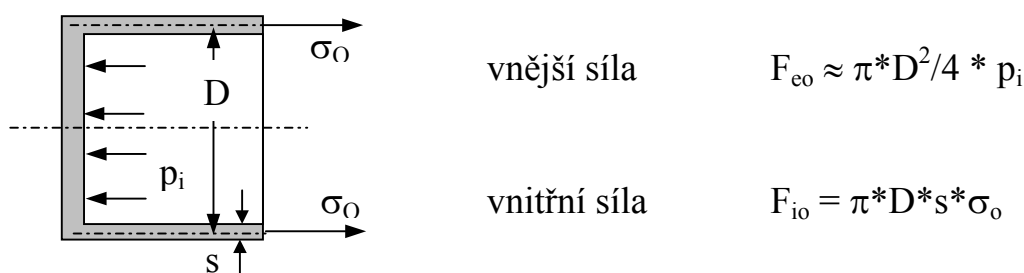
### A) Specifikace vnějších zatížení

Vnější zatížení (vnitřní přetlak) působí kolmo na vnitřní stěnu válce a vyvolává vnitřní napjatost ve stěně válce ve směru obvodovém a osovém. Žádné další síly na nádobu nepůsobí.

### B) Výpočet vnitřní napjatosti

Jedná se o staticky určitou konstrukci s membránovou napjatostí. Pro výpočet vnitřní napjatosti postačí pouze rovnováha sil ve stěně nádoby (t.zn. primární napětí – sekundární napětí a špičky se v nádobě nevyskytují).

Rovnováha sil v osovém směru (fiktivní řez kolmo na osu válce)



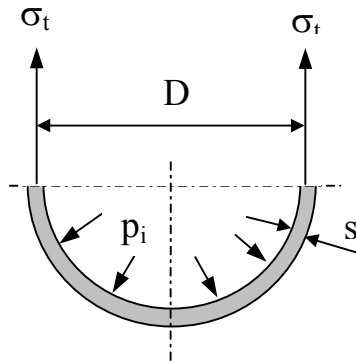
Rovnováha sil v řezu válcem

$$F_{e0} = F_{i0} \rightarrow \pi \cdot D^2 / 4 \cdot p_i \approx \pi \cdot D \cdot s \cdot \sigma_o$$

Osově napětí ve stěně válce

$$\sigma_o = p_i \cdot D / 4s = p_i \cdot r / 2s$$

Rovnováha sil v obvodovém (tangenciálním) směru (fiktivní řez v ose válce)



Délka válce L

vnější síla

$$F_{et} \approx p_i \cdot D \cdot L$$

vnitřní síla

$$F_{it} = 2 \cdot L \cdot s \cdot \sigma_t$$

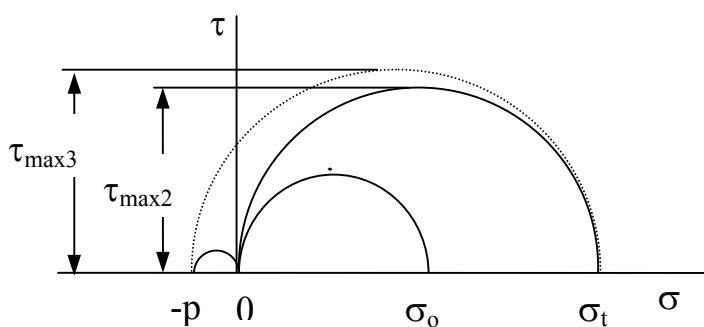
Rovnováha sil v řezu válcem

$$F_{et} = F_{it} \rightarrow p_i \cdot D \cdot L \approx 2 \cdot L \cdot s \cdot \sigma_t$$

Obvodové napětí ve stěně válce

$$\sigma_t = p_i \cdot D / 2s = p_i \cdot r / s$$

### C) Definování srovnávacího napětí podle Laméovy a Guestovy hypotézy



Pro dvojosou napjatost platí podle

Laméeho  $\sigma_e = \sigma_t \leq \sigma_K$

a podle Gesta

$$\tau_{max} = (\sigma_t - 0) / 2 \leq \tau_K = \sigma_K / 2$$

Pro oba případy platí

$$\sigma_e = \sigma_t$$

Podmínka dimenzování

$$\sigma_e \leq \sigma_D$$

Obr.14: Mohrovy kružnice zobrazující řešený případ válce

Pro trojosou napjatost (uvažování tlakového napětí ve stěně válce) budou vztahy pro definování srovnávacího napětí

$$\begin{array}{lll} \text{podle Laméeho} & \sigma_e = \sigma_t \leq \sigma_K & \sigma_e = \sigma_t \leq \sigma_D \\ \text{a podle Guesta} & \tau_{\max} = (\sigma_t - (-p)) / 2 \leq \tau_K = \sigma_K / 2 & \sigma_e = \sigma_t + p \leq \sigma_D \end{array}$$

#### D) Dovolené namáhání

Ve stěně jsou pouze tahová namáhání (v případě trojosé napjatosti je tlakové namáhání zanedbatelné), nevyskytují se žádné ohybové momenty. Proto musíme volit součinitel bezpečnosti  $x = 1,5$  (obr.7). Dovolené napětí je

$$\sigma_D = \sigma_K / 1,5 = 230 / 1,5 = 153,3 \text{ MPa}$$

Potřebná výpočtová tloušťka stěny (bez vlivu zeslabení ev. svarem a přídavek na korozi) bude pro jednotlivé případy:

*Dvojosá napjatost Lamée i Guest a trojosá napjatost Lamée ( $D = D_e - s \approx D_e$ )*

$$\sigma_e = \sigma_t = p_i * r / s = p_i * D / 2s \leq \sigma_D$$

$$s_{v1it} \geq p_i * D / (2 * \sigma_D) = 0,6 * 1800 / 2 * 153,3 = 3,52 \text{ mm} \quad (1.\text{iterace})$$

$$s_{v2it} \geq (0,6 * (1800 - 3,52)) / 2 * 153,3 = 3,52 \text{ mm} \quad (2.\text{iterace})$$

Pozn.: Použití středního průměru  $D$  nebo vnějšího průměru  $D_e$  v tomto případě neovlivňuje výslednou hodnotu výpočtové tloušťky stěny.

*Trojosá napjatost Guest ( $D = D_e - s \approx D_e$ )*

$$\sigma_e = \sigma_t + p_i = p_i * r / s + p_i = p_i * D / 2s + p_i \leq \sigma_D$$

$$s_{v1it} \geq p_i * D / (2 * (\sigma_D - p_i)) = 0,6 * 1800 / 2 * (153,3 - 0,6) = 3,54 \text{ mm} \quad (1.\text{iterace})$$

$$s_{v2it} \geq (0,6 * (1800 - 3,54)) / 2 * (153,3 - 0,6) = 3,53 \text{ mm} \quad (2.\text{iterace})$$

*Podle ČSN 690010*

$$s_v \geq p_i * D_e / (2 * \sigma_D * v - p_i) + c \quad (\text{pro } c = 0; v = 1 - \text{viz předpoklad výše})$$

$$s_v \geq p_i * D_e / (2 * \sigma_D - p_i) = 0,6 * 1800 / (2 * 153,3 - 0,6) = 3,53 \text{ mm}$$

Jednotlivé výsledky se z hlediska technické praxe neliší.

### Stanovení jednotlivých napětí ve stěně nádoby

Obvodové (tangenciální) napětí

$$\sigma_t = p_i * D / (2 * s) = 0,6 * (1800 - 3,53) / (2 * 3,53) = 152,7 \text{ MPa}$$

Osová napětí

$$\sigma_o = \sigma_t / 2 = 152,7 / 2 = 76,3 \text{ MPa}$$

Radiální napětí

$$\sigma_r = - p_i = -0,6 \text{ MPa}$$

Z tohoto porovnání lze usoudit, že Mohrovy kružnice (obr.14) pro  $\tau_{\max}$  pro případ dvojosé i trojosé napjatosti jsou prakticky totožné ( $p_i \ll \sigma_o$  i  $\sigma_t$ ). Kružnice procházející 0 a  $-p_i$  se prakticky redukuje na bod.

Při využití vztahů na základě kterých je vytvořen diagram obr. 13 lze rovněž stanovit minimální výpočtovou hodnotu tloušťky stěny nádoby. Místo  $\sigma_K$  se dosadí  $\sigma_D$ . Výsledky výpočtů podle různých hypotéz jsou uvedeny na následující straně.

## Určení tloušťky stěny pro daný tlak podle různých hypotéz

$$k = r_e / r_i = D_e / D_i = D_e / (D_e - 2s)$$

$$s = D_e * (k - 1) / 2k$$

### Membrána

$$p_i / \sigma_K = k - 1$$

$$k = p_i / \sigma_D + 1$$

$D_e$ (mm)	$\sigma_D$ (MPa)	$p_i$ (MPa)	$k$ (-)	$s$ (mm)
1800	153,3	0,6	1,00391	3,51
1800	153,3	20,0	1,13046	103,87

### Lamée - $\sigma_{max}$

$$p_i / \sigma_K = (k^2 - 1) / (k^2 + 1)$$

$$k = ((\sigma_D + p_i) / (\sigma_D - p_i))^{0,5}$$

$D_e$ (mm)	$\sigma_D$ (MPa)	$p_i$ (MPa)	$k$ (-)	$s$ (mm)
1800	153,3	0,6	1,00392	3,52
1800	153,3	20,0	1,14021	110,67

### Guest - $\tau_{max}$

$$p_i / \sigma_K = (k^2 - 1) / 2k^2$$

$$k = (\sigma / (\sigma - 2p_i))^{0,5}$$

$D_e$ (mm)	$\sigma_D$ (MPa)	$p_i$ (MPa)	$k$ (-)	$s$ (mm)
1800	153,3	0,6	1,00394	3,53
1800	153,3	20,0	1,1632	126,28

### St. Venant - $\varepsilon_{max}$

$$p_i / \sigma_K = (k^2 - 1) / (1,32k^2 + 0,4)$$

$$k = ((\sigma + 0,4 * p_i) / (\sigma - 1,3p_i))^{0,5}$$

$D_e$ (mm)	$\sigma_D$ (MPa)	$p_i$ (MPa)	$k$ (-)	$s$ (mm)
1800	153,3	0,6	1,00334	2,99
1800	153,3	20,0	1,12565	100,46

### H - M - H - $E_{max}$

$$p_i / \sigma_K = (k^2 - 1) / (3^{0,5} * k^2)$$

$$k = (\sigma / (\sigma - (3)^{0,5} * p_i))^{0,5}$$

$D_e$ (mm)	$\sigma_D$ (MPa)	$p_i$ (MPa)	$k$ (-)	$s$ (mm)	$(3)^{0,5}$ 1,73205
1800	153,3	0,6	1,0034	3,06	
1800	153,3	20,0	1,1366	108,19	



**Membrány:** Jsou v nich pouze tahové (tlakové) síly  
Nejběžnější typ membrán = rotačně symetrické membrány  
Tenkostěnné, s konstantním napětím v celém průřezu stěny  
Většinou spojitá křivost, tloušťka i zatížení

**Skořepiny:** Přenášejí i ohybové momenty atp.  
V průřezu stěny je ohybové napětí (mění se - viz výše)

**Zatížení:** Tlak tekutiny (vnitřní, vnější, hydrostatický)  
Vlastní váha  
Osamělé síly a momenty (uchycení, uložení ...)  
Vítr, sníh, seismicita

**Příklady:** Výměníky tepla, odparky  
Nádoby, zásobníky, sila  
Reaktory, kolony, absorbéry  
Potrubní systémy

## Laplaceova rovnice pro membrány

$$\frac{N_{\alpha}}{R_{\beta}} + \frac{N_{\beta}}{R_{\alpha}} + p_z = 0$$

$N_{\alpha}$  [N/m] ... normálová síla v řezu pro  $\alpha = \text{konst.}$  (úhel mezi osou rotace a rovinou řezu která protíná osu rotace); vztažena na 1 m délky membrány (v daném řezu)

$N_{\beta}$  [N/m] ... normálová síla v řezu pro  $\beta = \text{konst.}$  (úhel od zvolené počáteční roviny a rovinou řezu která prochází osou rotace)

$R_{\alpha}$  [m] .... poloměr křivosti membrány v řezu pro  $\alpha = \text{konst.}$

$R_{\beta}$  [m] .... poloměr křivosti membrány v řezu pro  $\beta = \text{konst.}$

### Př.1: Koule, polokoule – vnitřní přetlak p

$$R_{\alpha} = R_{\beta} = R; \quad p_z = -p \qquad \frac{N_{\alpha}}{R} + \frac{N_{\beta}}{R} = p$$

$N_{\alpha} = N_{\beta} = N$  ..... koule (osy lze volit libovolně, síly se nesmí měnit)

$$N = \frac{p * R}{2}$$

resp. pro membránu o tloušťce stěny  $s$  bude

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = \frac{N}{s} = \frac{p * R}{2 * s}$$

## Př.2: Válec – vnitřní přetlak $p$ , tloušťka stěny $s$

$$R_\alpha = \infty; R_\beta = R; p_z = -p$$

$$\frac{N_\alpha}{R_\beta} + \frac{N_\beta}{R_\alpha} = p = \frac{N_\alpha}{R}$$

$$N_\alpha = p^* R \quad \text{resp.} \quad \sigma_\alpha = \sigma_t = \frac{N_\alpha}{S} = \frac{p^* R}{S}$$

$N_\beta$  nelze z Laplaceova vztahu určit  $\rightarrow$  určí se např. z rovnováhy sil v řezu kolmém na osu válce (viz výše v části 9. Příklad ad C)