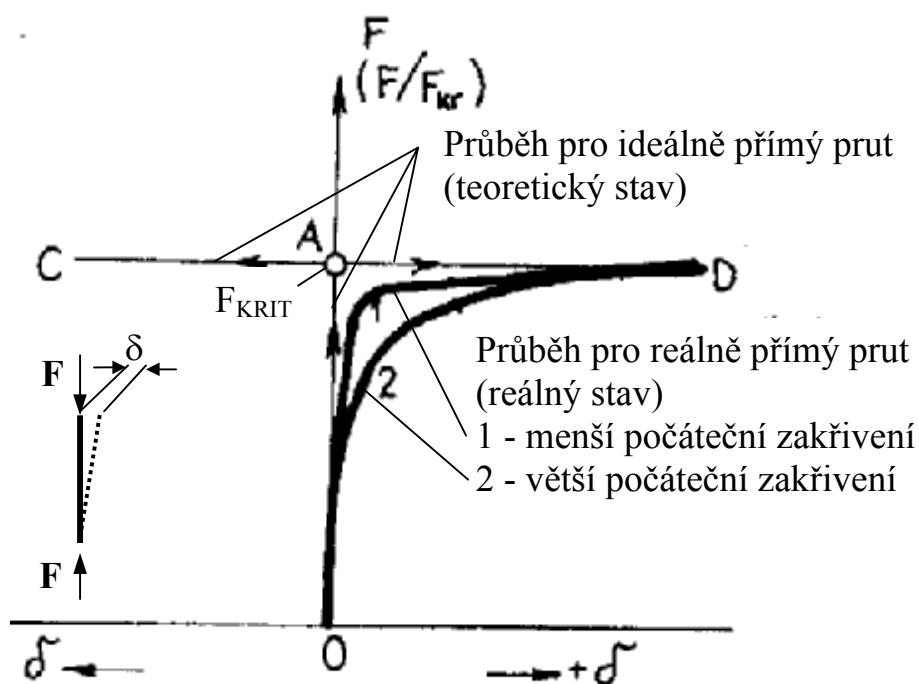


Stabilita prutu, desky a válce – vzpěr (osová síla)



Obr.1 - Závislost mezi průhybem δ a osovou silou F pro přímý prut

Při zvyšování osové síly z 0 na F_{KRIT} se ideálně přímý prut pouze stlačuje, nedochází však k žádnému vybočení od osy. Po dosažení či překročení F_{KRIT} (bod A) prut náhle vybočí do polohy D nebo C.

Protože reálný prut není ideálně přímý, dochází k vybočení dříve, t.zn. při $F < F_{KRIT}$. K vybočení nedochází skokem, ale plynule. Čím je větší počáteční zakřivení prutu, tím dříve dochází k jeho vybočení. Toto vybočení je větší.

Při odlehčení ideálního prutu se jeho tvar (stav) vrátí z bodu D (resp. C) skokem do bodu A a poté do bodu 0.

Při odlehčení reálného prutu se jeho tvar postupně vrací z bodu D (C) do bodu 0.

Toto platí, pokud není překročena mez kluzu. Pokud je překročena, dojde v prutu k trvalé deformaci δ_{trv} takže konečný stav po odlehčení leží vpravo či vlevo od bodu 0.

Odlehčení probíhá po čáře DEBG0 (pokud nevzniknou trvalé plastické deformace). V případě reálného válce probíhá zatěžování po čáře 0A'B'D'.

Obdobně se chová válec namáhaný vnějším přetlakem.

b) Deformace vně válce (vyboulení)

0A – bezohybová osová deformace válce při $F < F_{KR}$

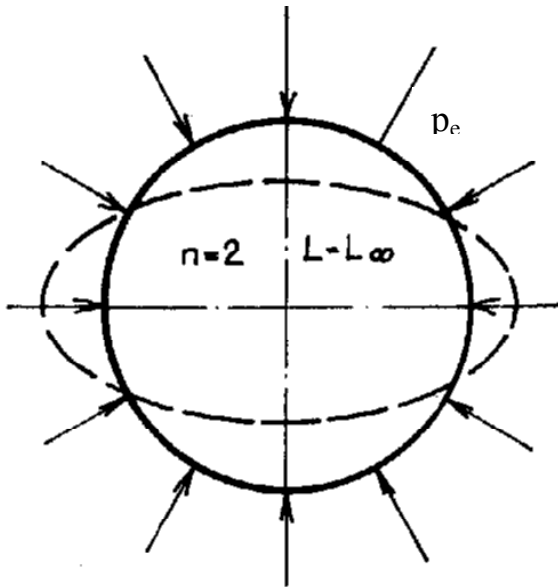
AC – průhyb válce vně

Odlehčení probíhá po čáře CA0. V případě reálného válce probíhá zatěžování po čáře 0C' (nemá ideální přímý tvar → deformuje se dříve).

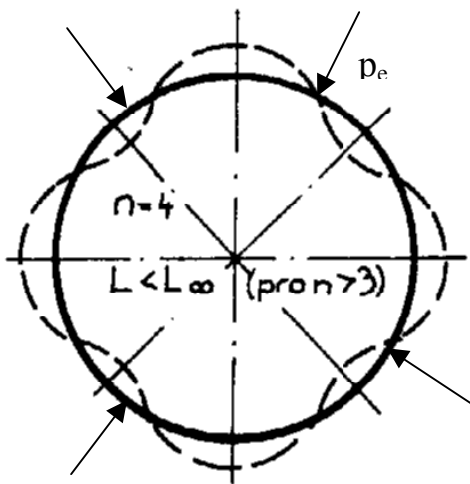
Válec namáhaný rovnoměrným vnějším přetlakem

Po překročení kritického tlaku p_{KR} dojde k deformaci (zvlnění) válce (obr. 4).

Zvlnění nekonečně dlouhého válce
 $n = 2$ vlny; $L \rightarrow \infty$



Zvlnění krátkého válce
 $n = 3, 4, 5 \dots$ vln; L



Obr. 4. Příklady zvlnění válce při překročení kritického vnějšího tlaku.

1. Nekonečně dlouhý válec

$$p_{KR} = \frac{3 * E * J}{R^3} = \frac{3}{8} * \frac{E * J}{D^3} \quad (J \text{ moment setrvačnosti}) \quad (1)$$

Hodnota kritického tlaku se stanoví ze vztahu

$$p_{KR} = \frac{2}{1-\mu^2} * E * \left(\frac{s}{D}\right)^3 \approx 2,2 * E * \left(\frac{s}{D}\right)^3 \quad (2)$$

pro ocel je $\mu = 0,3$ a $E = 206$ GPa

Dovolený tlak

$$p_D = \frac{p_{KR}}{x_s} \quad x_s = 2,4 \quad \text{souč.bezpečnosti proti ztrátě stability} \quad (2')$$

2. Válec konečné délky

Kritický tlak podle Misese

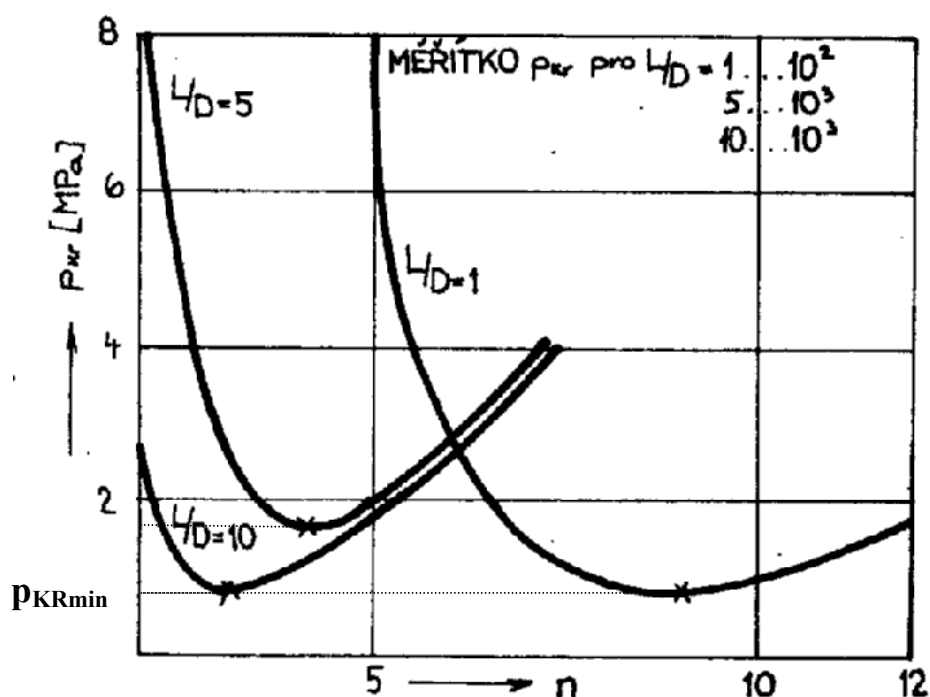
$$p_{KR} = \frac{2E}{(n^2 - 1)N^2} \frac{s}{D} + \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \left(\frac{s}{D}\right)^3 \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{N} \right) \quad (3)$$

V této rovnici je neznámý počet vln $n = ?$ ($n = 3, 4, \dots$); N je dáno vztahem

$$N = 1 + \left(\frac{2nL}{\pi D}\right)^2$$

Řešení lze provést pro různé hodnoty počtu vln a tak určit minimální hodnotu p_{KR} . Příklad průběhu takovéto závislosti pro různé poměry L/D je uveden na obr. 5. Z rovnice (3) lze po úpravě a zjednodušení získat vztah pro přibližné určení počtu vln při p_{KRmin} .

$$n \approx 0,63 * \sqrt[4]{\frac{D^3}{L^2 s}} \quad (4)$$



Obr. 5: Určení minimálních kritických tlaků p_{KRmin} pro různé poměry L/D v závislosti na počtu vln

Minimální hodnota kritického tlaku je

$$p_{KRmin} = 2,6 * E * \frac{D}{L} * \left(\frac{s}{D} \right)^{2,5} \quad (5)$$

Praktické hodnoty se od teoretických liší (0,7 až 1,1 krát). Proto se z důvodů bezpečnosti volí korekce 0,7. Vztah použitelný pro praxi, který platí pro $D \geq 200$ a $D/s \geq 10$ resp. $D < 200$ a $D/s \geq 3,33$, je $(0,7 * 2,6 = 1,8)$

$$p_{KRmin} = 1,8 * E * \frac{D}{L} * \left(\frac{s}{D} \right)^{2,5} \quad (6)$$

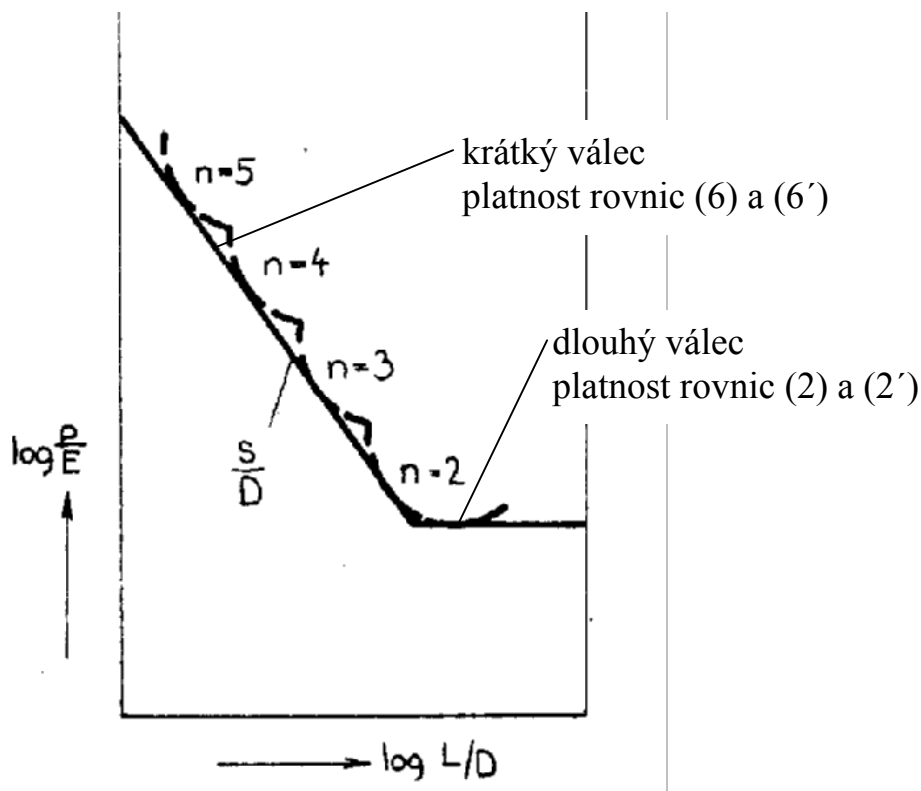
Dovolený tlak je

$$p_D = \frac{p_{KRmin}}{\chi_s} \quad (6')$$

$x_s = 2,4$ souč.bezpečnosti proti ztrátě stability pro válec konečné délky
Teoretická minimální tloušťka válcové skořepiny zatížené vnějším přetlakem

$$s_{teor\ min} = 0,7 * \sqrt[5]{\frac{p_{KR}^2 * D^3 * L^2}{E^2}} \quad (7)$$

Závislost mezi tlakem, L/D a s/D je uvedena na obr. 6. Obdobný graf je uveden v ČSN 690010 (obr. 8).



Obr.6: Závislost mezi L/D a p/E pro různé poměry s/D

Rovnice (2), (2'), (5) a (6) platí pro

$$\sigma_{KR} = p_{KR} * \frac{D}{2 * s} \leq \sigma_K$$

t.zn. oblast elastické stability. Pro silnostěnné válce se musí uvažovat i plastická stabilita.

Porovnáním vztahů pro nekonečný válec (2) a pro krátký válec (6) lze určit kritickou délku válce L_{KR} . Pro $L > L_{KR}$ se válec řeší jako dlouhý, pro $L < L_{KR}$ se řeší jako krátký.

$$p_{KR} \approx 2,2 * E * \left(\frac{s}{D}\right)^3 = 1,8 * E * \frac{D}{L} * \left(\frac{s}{D}\right)^{2,5}$$

$$L = L_{KR} = 0,82 * D * \sqrt{\frac{D}{s}} \quad (8)$$

Pro střední hodnoty tloušťek se používá elasticko – plastická rovnováha. Tento případ lze na základě poznatků z experimentů popsat rovnicí kružnice

$$\left(\frac{p_{KR}}{p_{KRel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{KR}}{p_{KRpl}}\right)^2 = 1 \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{p_D}{p_{Del}}\right)^2 + \left(\frac{p_D}{p_{Dpl}}\right)^2 = 1 \quad (9)$$

Z těchto rovnic lze určit dovolený vnější přetlak

$$p_D = \frac{p_{Dpl}}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_{Dpl}}{p_{Del}}\right)^2}} \quad (10)$$

$$\text{kde} \quad p_{Del} = \frac{2,2}{x_s} E \left(\frac{s}{D}\right)^3 \quad \text{pro dlouhý válec} \quad (2)$$

$$p_{Del} = \frac{1,8}{x_s} E \frac{D}{L} \left(\frac{s}{D}\right)^{2,5} \quad \text{pro krátký válec} \quad (6')$$

$$p_{Dpl} = \frac{2(s_p - c)\sigma_D}{D_i + (s_p - c)}$$

Provedená tloušťka se určuje jako maximální hodnota z elastického výpočtu (2), (3) nebo (6) a z plastického výpočtu.

Příklad:

Dáno: Vnější průměr válce	$D = 1500 \text{ mm}$
Maximální vnější přetlak	$p_e = 100 \text{ kPa}$
Délka válce	$L = 2000 \text{ mm}$
Provedená tloušťka stěny válce	$s_p = 7 \text{ mm}$
Přídavek na korozi atp.	$c = 1 \text{ mm}$
Dovolené namáhání při výpočtové teplotě	$\sigma_D = 140 \text{ MPa}$
Modul pružnosti	$E = 206 \text{ GPa}$
Poissonova konstanta	$\mu = 0,3$

$$\text{Tloušťka stěny bez přídavků} \quad s = s_p - c = 6 \text{ mm}$$

1. Uvažováno jako válec nekonečné délky

Podle (2)

$$p_{KR} = 2,2E \left(\frac{s}{D} \right)^3 = 2,2 * 206 * 10^9 * \left(\frac{6}{1500} \right)^3 = 29,0 \text{ kPa}$$

$$p_D = \frac{p_{KR}}{x_s} = \frac{29,0}{2,4} = 12,1 \text{ kPa} \quad \dots \text{ nevyhovuje (} p_e = 100 \text{ kPa)}$$

Určení kritické délky válce dle (8)

$$L_{KR} = 0,82 * D * \sqrt{\frac{D}{s}} = 0,82 * 1500 * \sqrt{\frac{1500}{6}} = 19448 \text{ mm}$$

Válec je nutno uvažovat jako krátký ($L = 2000 < L_{KR} = 19448$).

3. Uvažováno jako krátký válec

3.1. Výpočet podle vztahu Misese atp. (3)

Určení počtu vln pro minimální p_{KR} podle (4).

$$n \approx 0,63 * \sqrt[4]{\frac{D^3}{L^2 S}} = 0,63 * \sqrt[4]{\frac{1500^3}{2000^2 * 6}} = 2,2$$

Provedeme výpočet pro různý počet vln.

a) $n = 2$

$$N = 1 + \left(\frac{2nL}{\pi D} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2 * 2 * 2000}{\pi * 1500} \right)^2 = 3,882$$

$$p_{KR} = \frac{2 * 206 * 10^9}{(2^2 - 1) * 3,882} \frac{6}{1500} + \frac{2}{3(1 - 0,3^2)} 206 * 10^3 \left(\frac{6}{1500} \right)^3 \left(2^2 - 1 + \frac{2 * 2^2 - 1 - 0,3}{3,882} \right)$$

$$p_{KR} = 36,45 * 10^6 \text{ Pa} = 36450 \text{ kPa}$$

b) $n = 3$

$$N = 1 + \left(\frac{2 * 3 * 2000}{\pi * 1500} \right)^2 = 7,485$$

$$p_{KR} = \frac{2 * 206 * 10^9}{(3^2 - 1) * 7,485} \frac{6}{1500} + \frac{2}{3(1 - 0,3^2)} 206 * 10^3 \left(\frac{6}{1500} \right)^3 \left(3^2 - 1 + \frac{2 * 3^2 - 1 - 0,3}{7,485} \right)$$

$$p_{KR} = 3,68 * 10^6 \text{ Pa} = 3680 \text{ kPa}$$

c) $n = 4$

$$N = 1 + \left(\frac{2 * 4 * 2000}{\pi * 1500} \right)^2 = 12,53$$

$$p_{KR} = \frac{2 \cdot 206 \cdot 10^9}{(4^2 - 1) \cdot 12,53^2} \frac{6}{1500} + \frac{2}{3(1 - 0,3^2)} 206 \cdot 10^9 \left(\frac{6}{1500} \right)^3 \left(4^2 - 1 + \frac{2 \cdot 4^2 - 1 - 0,3}{12,53} \right)$$

$$p_{KR} = 0,700 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 700 \text{ kPa}$$

d) $n = 5$

$$N = 1 + \left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 2000}{\pi \cdot 1500} \right)^2 = 19,01$$

$$p_{KR} = \frac{2 \cdot 206 \cdot 10^9}{(5^2 - 1) \cdot 19,01^2} \frac{6}{1500} + \frac{2}{3(1 - 0,3^2)} 206 \cdot 10^9 \left(\frac{6}{1500} \right)^3 \left(5^2 - 1 + \frac{2 \cdot 5^2 - 1 - 0,3}{19,01} \right)$$

$$p_{KR} = 0,190 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 190 \text{ kPa}$$

Výpočet podle tohoto vztahu je pro praxi nepoužitelný. Pro stanovený počet vln vychází nereálně vysoké hodnoty kritických tlaků. Se zvoleným počtem vln hodnota p_{KR} klesá, avšak nelze rozhodnout jaký počet vln použít.

Pozn.: V Excelu byl proveden výpočet p_{KR} pro $n = 2$ až 1000. Minimální kritický tlak vyšel pro $n = 13$ a to pouze $p_{KR} = 2,3 \text{ kPa}$, což je nereálně nízká hodnota. Průběh závislosti odpovídal obr. 5.

3.2. Určení kritického tlaku podle vztahu (6)

$$p_{KRmin} = 1,8 \cdot E \cdot \frac{D}{L} \cdot \left(\frac{s}{D} \right)^{2,5} = 1,8 \cdot 206 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1500}{2000} \right) \cdot \left(\frac{6}{1500} \right)^{2,5}$$

$$p_{KRmin} = 281400 \text{ Pa} = 281,4 \text{ kPa}$$

$$p_D = p_{KRmin} / x_S = 281,4 / 2,4 = \mathbf{117,3 \text{ kPa}}$$

Tato hodnota odpovídá realitě. Vztah (6) je pro praxi použitelný.

3.3. Určení kritického tlaku podle tabulky uvedené ve skriptech

Závislost kritického vnějšího přetlaku p_{KR} (kPa) na poměrech L/D a D/s

(Tab. 3-3 str. 164 skripta Lukavský a kol.: Konstrukce výrobních zařízení)

p_{KRtab}	L/D	1	2	3	4	5	10	1000
D/s	100	3600	1800	1200	900	720	500	440
	500	64,4	32,2	21,5	16,1	12,9	6,44	3,52
	1000	1,14	0,569	0,379	0,285	0,228	0,114	0,044
	2000	0,201	0,101	0,0671	0,0503	0,0402	0,0201	0,0055

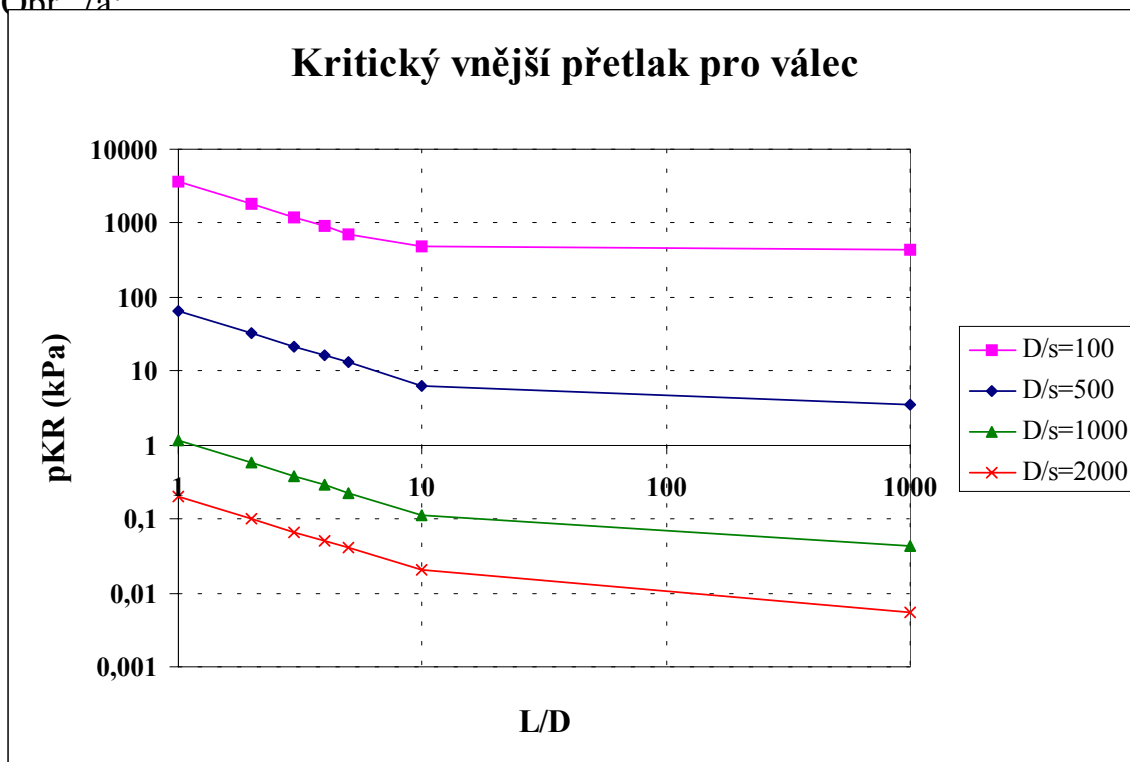
p_{KRvyp}	L/D	1	2	3	4	5	10	1,33
D/s	100	3412,0	1849,5	1292,6	1002,5	823,1	446,2	
	500	60,0	30,0	20,0	15,0	12,0	6,0	
	250							1654,0

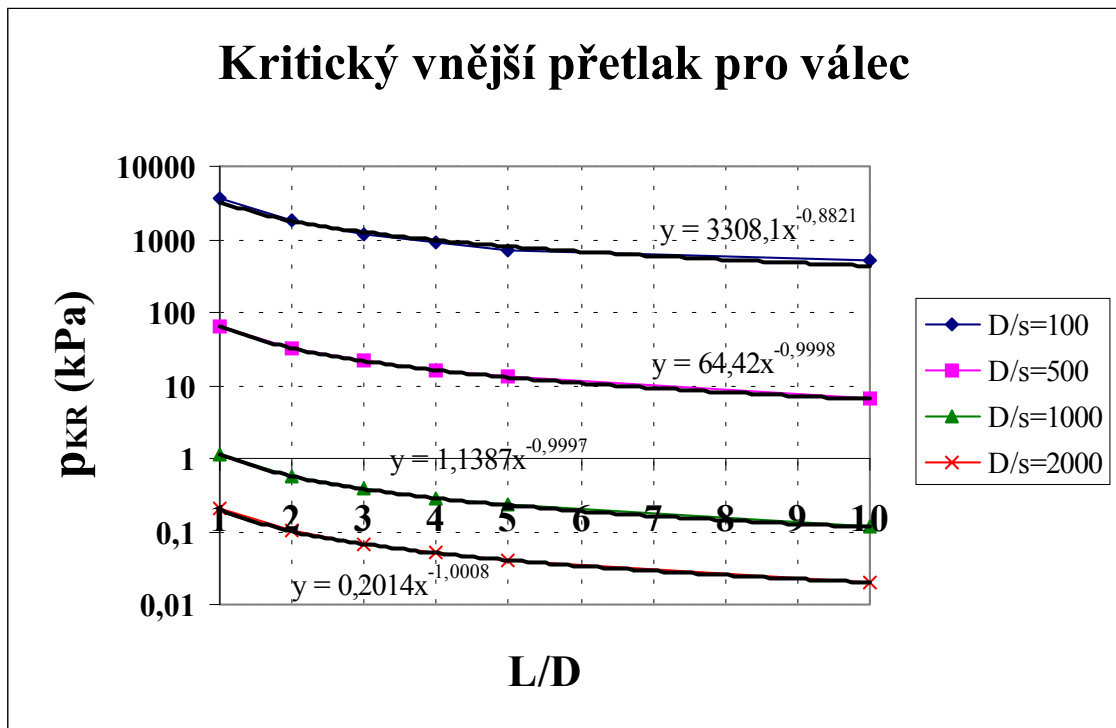
Pro $L/D = 1$ až 10 a $D/s = 100$ až 500 lze použít přibližný vztah

$$p_{KR} = (4250 - 8,38 * D/s) * \text{POWER}(L/D; -0,854 - 0,000295 * D/s) \quad [\text{kPa}]$$

Pro větší přehlednost byla tabulka upravena. Pro nejvíce se vyskytující poměry L/D a D/s byl určen vztah pro přibližný výpočet p_{KR} (viz výše) a závislost byla rovněž zpracována graficky (obr. 7a, b).

Obr. 7a:





Obr. 7b:

Lineární interpolací z hodnot uvedených v obr. 7b: dostaneme pro

$$D/s = 1500 / 6 = 250 \quad \text{a} \quad L/D = 2000 / 1500 = 1,33$$

$$p_{KR} \approx 650 \text{ kPa} \quad p_D = 650 / 2,4 = 271 \text{ kPa}$$

Z přibližné rovnice určíme obdobně

$$p_{KR} \approx 1650 \text{ kPa} \quad p_D = 1650 / 2,4 = 687 \text{ kPa}$$

Lineární interpolací z tabulky určíme

$$p_{KR} \approx 1880 \text{ kPa} \quad p_D = 1880 / 2,4 = 783 \text{ kPa}$$

Tyto hodnoty vykazují značné odchylky, což je dáno tím, že závislost p_{KR} na L/D a D/s je nelineární. Při interpolaci mezi tabelovanými hodnotami se dopouštíme značné chyby. Proto ani tento postup nedoporučuji používat.

3.4. Výpočet podle staré ČSN 690010

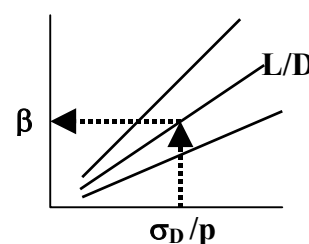
a) Určení základní výpočtové tloušťky z pevnostního hlediska

$$s_0 = \frac{p * D}{2 * \sigma_D + p} * \beta$$

Pro $L/D = 2000 / 1500 = 1,33$ a $\sigma_D / p = 140 / 0,1 = 1400$ určíme z diagramu 1 hodnotu $\beta = 4,8$

Potom bude zákl. výpočtová tloušťka určená z pevnostního hlediska

$$s_0 = \frac{0,1 * 1500}{2 * 140 + 0,1} * 4,8 = 2,6 \text{ mm}$$



b) Určení zákl. výpočtové tloušťky z hlediska stabilitního

Určíme pomocné parametry

$$A = (p / E) * 10^6 = (0,1 * 10^6 / 206 * 10^9) * 10^6 = 0,485 \quad \text{a} \quad L/D = 1,33$$

Z diagramu 2 určíme (v tomto diagramu je uvažována hodnota součinitele bezpečnosti vůči ztrátě stability $x_S = 3$)

$$s_0 / D = 0,0035$$

a z tohoto výrazu určíme tloušťku stěny z hlediska stabilitního

$$s_0 = 0,0035 * D = 0,0035 * 1500 = 5,25 \text{ mm}$$

Pozn.: Diagram 2 ve staré ČSN 690010 je obdobný jako diagram na obr. 8. Diagram na obr. 8 odpovídá závislosti na obr. 6.

Základní výpočtová tloušťka je větší z obou hodnot, t.zn. $s_0 \approx 5,3 \text{ mm}$

Provedená tloušťka stěny bez přídaveků $s = 6 \text{ mm}$ vyhovuje.

3.5. Výpočet podle nové ČSN 690010

Základní výpočtová tloušťka se určí jako vyšší hodnota ze vztahu

$$s_R = \text{Max} \left\{ K_2 * D * 10^{-2}; \frac{1,1 * p * D}{2 * \sigma_D} \right\}$$

Pro parametry

$$K_1 = \frac{n_U * p}{2,4 * 10^{-6} * E} = \frac{2,4 * 0,1 * 10^6}{2,4 * 10^{-6} * 206 * 10^9} = 0,485$$

$n_U = 2,4$ součinitel bezpečnosti proti ztrátě stability

$$K_3 = \frac{L}{D} = \frac{2000}{1500} = 1,33$$

určíme z diagramu 3 (viz obr. 8)

$$K_2 = \frac{100 * s_R}{D} = 0,35$$

Základní výpočtová tloušťka z hlediska stabilitního potom je

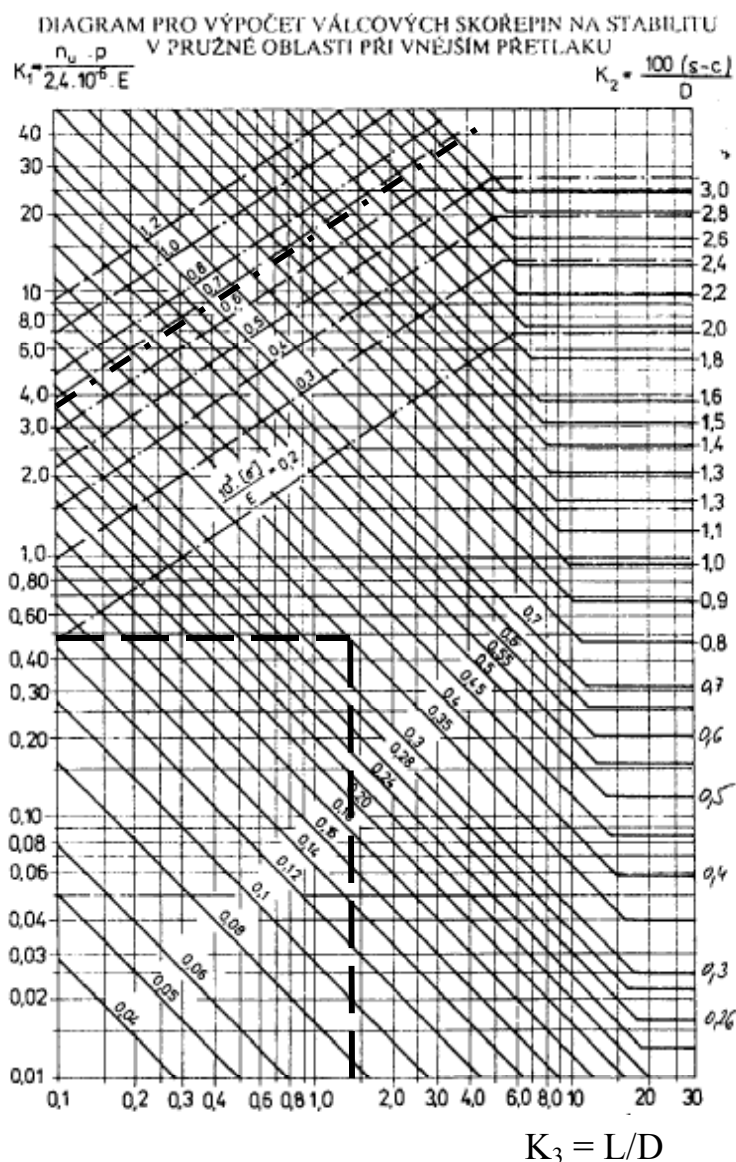
$$s_{R1} = K_2 * D * 10^{-2} = 0,35 * 1500 * 10^{-2} = 5,25 \text{ mm}$$

Základní tloušťka určená z pevnostního hlediska je

$$s_{R2} = \frac{1,1 * p * D}{2 * \sigma_D} = \frac{1,1 * 0,1 * 1500}{2 * 140} = 0,59 \text{ mm}$$

Základní výpočtová tloušťka je větší z obou hodnot, t.zn. $s_R \approx 5,3 \text{ mm}$

Provedená tloušťka stěny bez přídaveků $s = 6 \text{ mm}$ vyhovuje.



Obr. 8: Graf pro určení tloušťky stěny podle ČSN 690010 část 4.5

Kontrola na maximální dovolený vnější přetlak

Součinitel K_1 leží v diagramu 3 (obr. 8) pod čerchovanou čarou

$$10^3 \cdot [\sigma_D] / E = 10^3 \cdot 140 / 206 \cdot 10^3 = 0,68$$

Proto lze použít zjednodušený vztah

$$[p_D] = 2,4 \cdot \frac{K_1 \cdot 10^{-6} \cdot E}{n_u} = 2,4 \cdot \frac{0,485 \cdot 10^{-6} \cdot 206 \cdot 10^3}{2,4} = 0,1 \text{ MPa}$$

Tento tlak vyhovuje.

Podrobný výpočet prováděný za předpokladu, že by nebylo možné použít zjednodušený vztah.

Dovolený vnější přetlak (viz rovnice (10))

$$[p] = \frac{[p]_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{[p]_p}{[p]_E}\right)^2}}$$

Dovolený přetlak v plastickém oboru

$$[p]_p = \frac{2 * \sigma_D * (s - c)}{D + (s - c)} = \frac{2 * 140 * (7 - 1)}{1500 + (7 - 1)} = 1,1155 \text{ MPa}$$

Dovolený přetlak v elastickém oboru (viz též rovnice (5) a (6))

$$[p]_E = \frac{20,8 * 10^{-6} * E}{n_u * B_1} * \frac{D}{L} * \left[\frac{100 * (s - c)}{D} \right]^2 * \sqrt{\frac{100 * (s - c)}{D}}$$

$$B_1 = \text{Min} \left\{ 1,0; 9,45 * \frac{D}{L} * \sqrt{\frac{D}{100 * (s - c)}} \right\}$$

$$B_{11} = 1,0$$

$$B_{12} = 9,45 * \frac{1500}{2000} * \sqrt{\frac{1500}{100 * (7 - 1)}} = 11,206$$

$$B_1 = \text{Min} (1,0; 11,206) = 1,0$$

$$[p]_E = \frac{20,8 * 10^{-6} * 206 * 10^3}{2,4 * 1,0} * \frac{1500}{2000} * \left[\frac{100 * (7 - 1)}{1500} \right]^2 * \sqrt{\frac{100 * (7 - 1)}{1500}}$$

$$[p]_E = 0,1355 \text{ MPa}$$

Potom je maximální dovolený vnější přetlak

$$[p] = \frac{1,1155}{\sqrt{1 + \left(\frac{1,1155}{0,1355} \right)^2}} = 0,1345 \text{ MPa} \geq 0,1 \text{ MPa}$$

Navržený válec vyhovuje i podle přesného výpočtu.