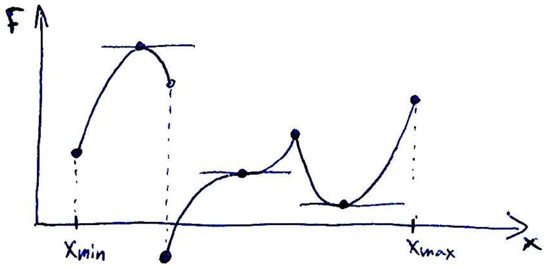
# Analytické metody vyšetřování extrémů funkcí

- Fce. jedné proměnné $F=F(x)$




extrém může ležet:

- uvnitř oblasti
  - ve stacionárním bodě
  - v bodě nespojitosti
    - funkce
    - některé derivace
- na hranici přípustné oblasti

→ lokální extrémy → globální extrém

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x^*} = F'(x^*) = 0 \;\ldots\; \text{podezření na extrém} \longrightarrow \begin{array}{l} F''(x^*) > 0 \ldots \text{lok. minimum} \\ F''(x^*) < 0 \ldots \text{lok. maximum} \end{array}$$

Pokud $F''(x^*) = 0$ je třeba počítat 3. derivaci → $F'''(x^*) \neq 0$ … sedlový bod

$F'''(x^*) = 0$ … počítám další derivace dokud není $F^{(n)}(x^*) \neq 0$

$n$ je liché → sedlový bod

$n$ je sudé → jako 2. derivace

- Fce. více proměnných $F=F(x_1, x_2 \ldots x_n)$

NP pro extrém ve stacionárním bodě $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow [x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*] = x^*$$

PP určíme z Hessiánu

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F(x^*)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

$H$ pozitivně definitní (tj. všechny hl. minory kladné) → v $x^*$ je lok. minimum

$H$ negativně definitní → v $x^*$ je lok. maximum

Jestliže neplatí ani jedna možnost a $\det(H) \neq 0$ → v $x^*$ je sedlový bod

# Analytické metody - příklady

- Fce. jedné proměnné

Př. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 5$, $x \in \langle -1; 6 \rangle$

nalezněte lok. a glob. extrémy

řešení: $f$ je všude spojitá, $f(-1) = 24$, $f(6) = -67$

$$f': 4x^3 - 24x^2 + 20x \stackrel{!}{=} 0 \qquad f'': 12x^2 - 48x + 20$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x \stackrel{!}{=} 0$$

$$x(x^2 - 6x + 5) \stackrel{!}{=} 0$$

$$x(x-1)(x-5) \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightarrow x_1^* = 0 \quad \ldots \quad f''(x_1^*) = 20 > 0 \rightarrow$ minimum

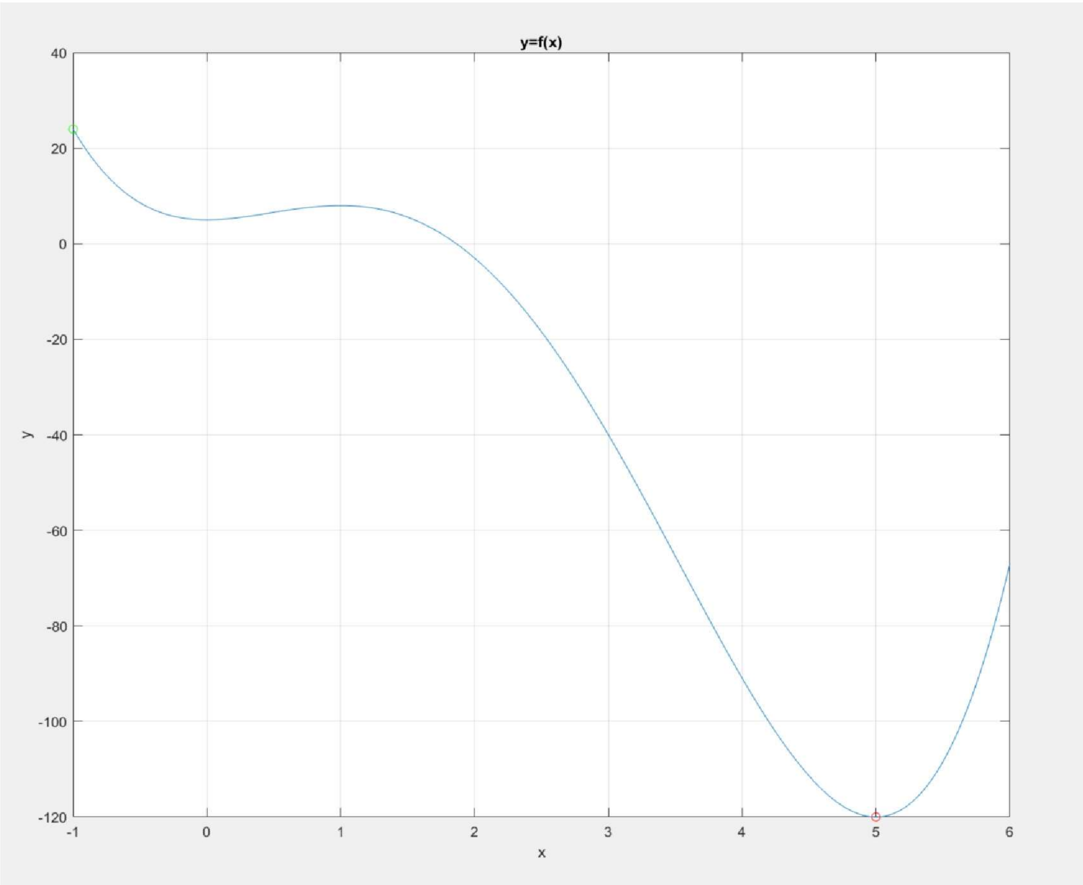
$x_2^* = 1 \quad \ldots \quad f''(x_2^*) = 12 - 48 + 20 = -16 < 0 \rightarrow$ maximum

$x_3^* = 5 \quad \ldots \quad f''(x_3^*) = 12 \cdot 25 - 48 \cdot 5 + 20 = 300 - 240 + 20 = 80 > 0 \Rightarrow$ minimum

$f(0) = 5$, $f(1) = 8$, $f(5) = -120$

$\rightarrow$ glob. maximum $f(-1) = 24$

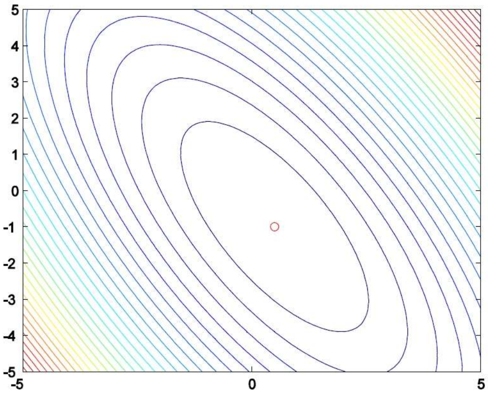
glob. minimum $f(5) = -120$



- Fce. více proměnných

Př: $F(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1$

vyšetřete extrém




řešení: NP. $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \emptyset$

$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \emptyset$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 8x_1 + 4x_2 \overset{!}{=} \emptyset \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 4x_2 + 4x_1 + 2 \overset{!}{=} \emptyset \qquad (2)$$

$(1)-(2)$: $8x_1 - 4x_1 - 2 = \emptyset \Rightarrow 4x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 0{,}5$

$x_2 = -1$

PP. $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

hl. minory: $8 > 0$ ; $8 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 16 > 0 \Rightarrow$ v $[0{,}5; -1]$ lok. minimum

Př. Rosenbrock

$F(x, y) = (1-x)^2 + 100(y - x^2)^2$

řešení: $F(x,y) = 1 - 2x + x^2 + 100(y^2 - 2x^2y + x^4)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 + 2x - 400xy + 400x^3 \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 200y - 200x^2 \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

$(1)$ $-2 + 2x - 2x\underbrace{(200y - 200x^2)}_{0\ (2)} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -2 + 2x = 0 \rightarrow x = 1$

$y = 1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x} = 2 - 400y + 1200x^2$

$\frac{\partial F}{\partial x \partial y} = -400x$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -400x$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} = 200$

$H(1,1) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix}$

hl. minory: $802 > 0$; $802 \cdot 200 - 400^2 = 160400 - 160000 > 0$

$\Rightarrow$ v $[1;1]$ lok. minimum