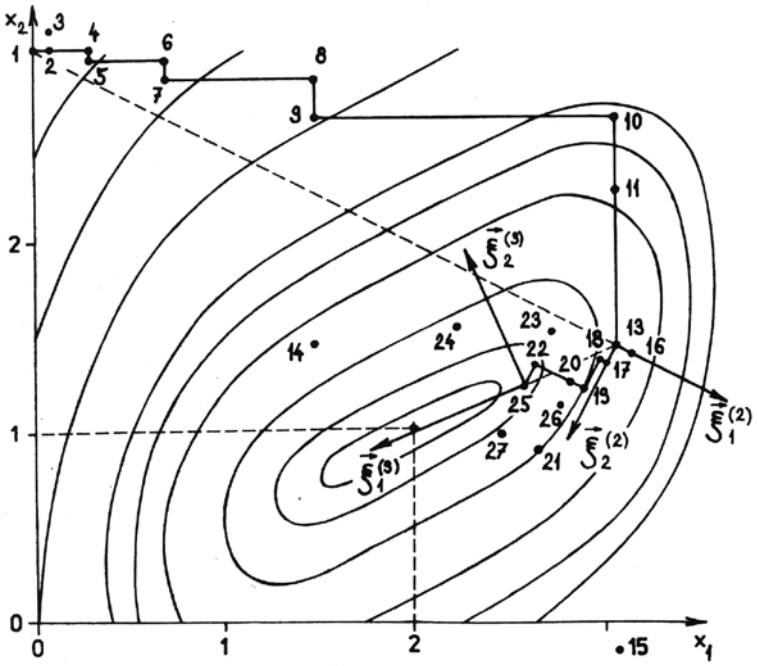
Rosenbrockova metoda

Vybráno z Lederer, P., Brousil, J.: Teorie a optimalizace mechanických systémů II, ČVUT, Praha, 1989



Výchozím bodem k-tého stadia optimalizace je bod se zatím nejnižší hodnotou cílové funkce, dále se již v předcházejícím stadiu určí n lineárně nezávislých směrů $\vec{\xi}_1^{(k)}$, $\vec{\xi}_2^{(k)}$, ... , $\vec{\xi}_n^{(k)}$ a předem jsou zvoleny výchozí hodnoty kroků s_1, s_2, ... , s_n v jednotlivých směrech /prakticky asi téměř vždy $s_1 = s_2 = \dots = s_n = s$/. V prvním stadiu se vychází ze zvoleného bodu $\vec{x}_0^{(1)}$ a směry

$$\vec{\xi}_1^{(1)} = [1,0,0,\dots\dots,0]^T$$
$$\vec{\xi}_2^{(1)} = [0,1,0,\dots\dots,0]^T$$
$$\vdots$$
$$\vec{\xi}_n^{(1)} = [0,0,0,\dots\dots,1]^T \quad .$$

Spočítá se cílová funkce ve výchozím bodě $F_0^{(k)}$ a dále v bodě na směru $\vec{\xi}_1^{(k)}$ vzdáleném o délku kroku s_1 od výchozího bodu. Je-li v novém bodě F nižší než $F_0^{(k)}$, nahradí tento bod v paměti bod $\vec{x}_0^{(k)}$ jako zatím nejlepší a pro další cyklus si zapamatujeme, že postup ve směru $\vec{\xi}_1^{(k)}$ byl úspěšný a krok s_1 nahradíme zvětšenou hodnotou $\alpha \cdot s_1$. Pokud je nový bod horší než bod $\vec{x}_0^{(k)}$, zůstává v paměti původní nejlepší bod a v příštím cyklu postupu ve směru $\vec{\xi}_1^{(k)}$ se bude pracovat s krokem $-\beta \cdot s_1$. Následuje pohyb ve směru $\vec{\xi}_2^{(k)}$ o s ... atd., až po směr $\vec{\xi}_n^{(k)}$ a přemístění ze zatím nejlepšího bodu o s_n. Tím končí první cyklus a okamžitě navazuje cyklus následující, ve kterém mají kroky buď zvětšenou velikost αs_i nebo redukovanou velikost $-\beta s_i$ podle výsledku testu na zlepšení či zhoršení hodnoty cílové funkce při pohybu v i-tém směru v cyklu předcházejícím. Popsaným způsobem probíhá výpočet tak dlouho, dokud v každém ze směrů $\vec{\xi}_1^{(k)}$ až $\vec{\xi}_n^{(k)}$ není dosaženo alespoň jednoho úspěšného a jednoho neúspěšného vyčíslení cílové funkce. Po splnění této podmínky se dokončí cyklus a k dovršení k-tého stadia zbývá ještě určit směry pro stadium (k + 1)-ní .

Označíme

$d_1 \ldots$ algebraický součet přemístění ve směru $\vec{\xi}_1^{(k)}$

$\vdots$

$d_n \ldots$ algebraický součet přemístění ve směru $\vec{\xi}_n^{(k)}$

a vytvoříme n pomocných vektorů

$$\vec{A}_l^{(k)} = \sum_{j=l}^{n} d_j \vec{\xi}_j^{(k)} \qquad \text{pro } l = 1,2,\ldots,n ,$$

tedy

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1^{(k)} &= d_1 \vec{\xi}_1^{(k)} + d_2 \vec{\xi}_2^{(k)} + \ldots\ldots + d_n \vec{\xi}_n^{(k)} \\
\vec{A}_2^{(k)} &= \qquad\qquad d_2 \vec{\xi}_2^{(k)} + \ldots\ldots + d_n \vec{\xi}_n^{(k)} \\
&\vdots \\
\vec{A}_n^{(k)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d_n \vec{\xi}_n^{(k)} .
\end{aligned}$$

Vektory $\vec{A}_l^{(k)}$ jsou n-rozměrné se složkami

$$A_{i,l}^{(k)} = \sum_{j=l}^{n} d_j \, m_{i,j}^{(k)} \qquad \text{pro } l = 1,2,\ldots,n , \quad i = 1,2,\ldots,n ,$$

kde $m_{i,j}^{(k)}$ je i-tá složka j-tého směrového vektoru $\vec{\xi}_j^{(k)}$.

K pomocným vektorům $\vec{A}_l^{(k)}$ se vytvoří soustava ortogonálních vektorů $\vec{D}_l^{(k)}$:

$$\begin{aligned}
\vec{D}_1^{(k)} &= \vec{A}_1^{(k)} \\
\vec{D}_2^{(k)} &= \vec{A}_2^{(k)} - \left(\vec{A}_2^{(k)} \cdot \vec{\xi}_1^{(k+1)}\right) \vec{\xi}_1^{(k+1)} \\
\vec{D}_3^{(k)} &= \vec{A}_3^{(k)} - \left(\vec{A}_3^{(k)} \cdot \vec{\xi}_1^{(k+1)}\right) \vec{\xi}_1^{(k+1)} - \left(\vec{A}_3^{(k)} \cdot \vec{\xi}_2^{(k+1)}\right) \vec{\xi}_2^{(k+1)} \\
&\vdots \\
\vec{D}_n^{(k)} &= \vec{A}_n^{(k)} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\vec{A}_n^{(k)} \cdot \vec{\xi}_j^{(k+1)}\right) \vec{\xi}_j^{(k+1)},
\end{aligned}$$

které se souběžně normují ze vztahů

$$\vec{\xi}_l^{(k+1)} = \frac{\vec{D}_l^{(k)}}{|\vec{D}_l^{(k)}|} \qquad \text{pro } l = 1,2,\ldots,n ;$$

$$\vec{\xi}_l^{(k+1)} = \left[m_{1,l}^{(k+1)}, \; m_{2,l}^{(k+1)}, \; \ldots , \; m_{n,l}^{(k+1)} \right]^T$$

$$m_{i,l}^{(k+1)} = \frac{D_{i,l}^{(k)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(D_{j,l}^{(k)}\right)^2}} \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots,n$$

Vektory $\vec{\xi}_1^{(k+1)}$ až $\vec{\xi}_n^{(k+1)}$ tvoří novou n-tici lineárně nezávislých jednotkových směrových vektorů pro $(k+1)$-ní stadium. Výchozím bodem $(k+1)$-ního stadia je samozřejmě bod, ve kterém skončila optimalizace ve stadiu k-tém a začíná se znovu se základními hodnotami kroků $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Volíme-li malé číslo $\varepsilon > 0$, pokračuje se v optimalizaci tak dlouho, dokud dochází k podstatným změnám optimalizačních proměnných a platí $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 > \varepsilon$.

Obvyklé hodnoty součinitelů α a β jsou $\alpha = 3$ a $\beta = 0{,}5$.