Metoda vážené odchylky

(podle Lederer, P., Brousil, J.: Teorie a optimalizace mechanických systémů II., ČVUT, Praha 6, 1989)

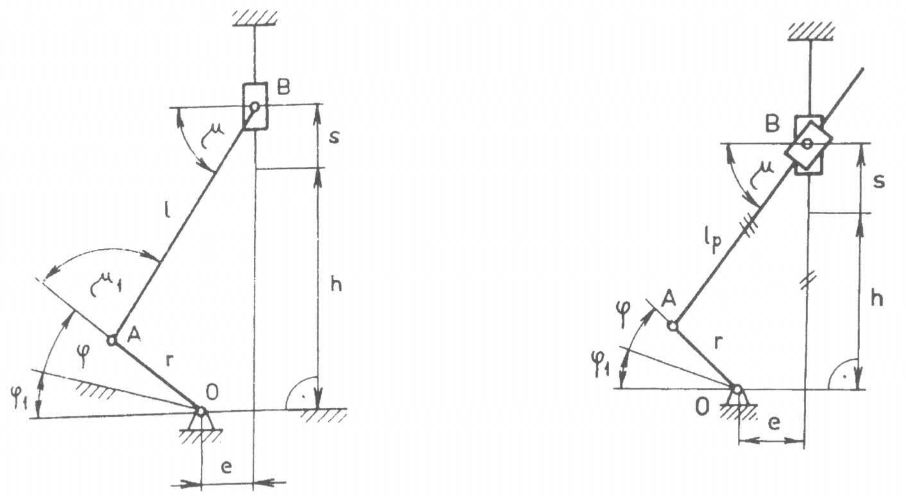
Jestliže $y = F(x)$ je požadovaná zdvihová závislost a $y = G(x)$ je generovaná zdvihová závislost, pak mírou jejich přiblížení je odchylka $\delta = \delta(x) = F(x) - G(x)$.

Vzhledem k tomu, že i pro jednoduché mechanismy může být zdvihová závislost značně komplikovaná, zavedeme *váženou odchylku* $\delta_q = q.\ \delta$, kde $q(x)$ je *váhová funkce* (váha). Váhovou funkcí může být libovolná spojitá funkce proměnné x, která nemá v uvažovaném intervalu nulovou hodnotu (!). Čím méně se pak její hodnoty v uvažovaném intervalu mění, tím lépe vyjadřuje vážená odchylka δ_q kvalitu přiblížení F a G.

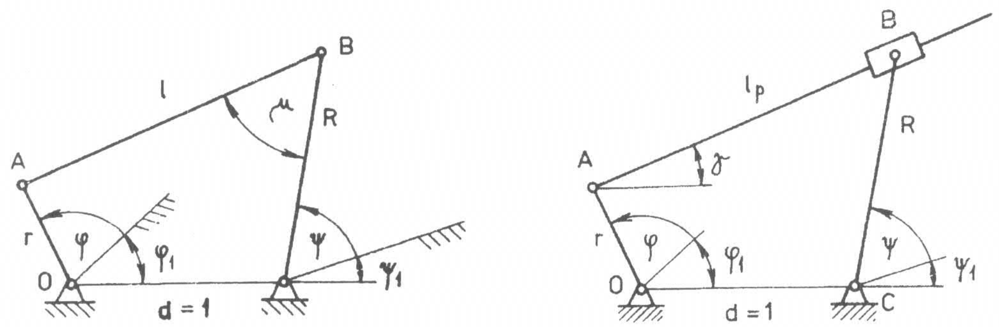
Obecněji můžeme uvažovat váhovou funkci závislou nejen na argumentu x, ale také na hodnotách parametrů (*parametrická váhová funkce*) $q_p = q_p(x, p_1, p_2, \dots, r_n)$.

Příklad: Vážená odchylka u klikového a čtyřkloubového mechanismu

V obou případech vyjdeme z představy nahrazení mechanismu s jedním stupněm volnosti mechanismem se dvěma stupni volnosti. Místo zdvihové závislosti $s = g_1(\varphi,r,l,e,h,\varphi_1)$ – klikový mech., resp. $\psi = g_2(\varphi,r,l,R,\varphi_1,\psi_1)$ – čtyřkloubový mech., pak při syntéze budeme pracovat s výpočtem vážené odchylky $\delta_q = l^2 - l_p^2$, viz obr.



1 stupeň volnosti ---> 2 stupně volnosti



Výpočet pro klikový mechanismus – syntéza pěti parametrů (r, l, e, h, φ_1)

$$l_p \cos\mu = e + r\cdot\cos(\varphi+\varphi_1)$$
$$l_p \sin\mu = h + s - r\cdot\sin(\varphi+\varphi_1)$$

$$l_p^2 \cos^2\mu = e^2 + 2\cdot e\cdot r\cdot\cos(\varphi+\varphi_1) + r^2\cdot\cos^2(\varphi+\varphi_1)$$
$$l_p^2 \sin^2\mu = (h+s)^2 - 2\cdot(h+s)\cdot r\cdot\sin(\varphi+\varphi_1) + r^2\cdot\sin^2(\varphi+\varphi_1)$$

$$l_p^2 = 2\cdot e\cdot r\cdot\cos(\varphi+\varphi_1) - 2\cdot r\cdot(h+s)\cdot\sin(\varphi+\varphi_1) + (h+s)^2 + e^2 + r^2$$

$$\delta_\varphi = l^2 - l_p^2$$
$$= 2\cdot r\cdot(h+s)\cdot\sin(\varphi+\varphi_1) - 2\cdot e\cdot r\cdot\cos(\varphi+\varphi_1) - (h+s)^2 + l^2 - e^2 - r^2$$
$$= 2\cdot r\cdot(h+s)\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\varphi_1 + \cos\varphi\cdot\sin\varphi_1) - 2\cdot e\cdot r\cdot(\cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1) - (h^2 + 2\cdot h\cdot s + s^2) + l^2 - e^2 - r^2$$

$$\delta_\varphi = -2\cdot h\cdot s +$$
$$+ 2\cdot r\cdot\sin\varphi_1\cdot s\cdot\cos\varphi +$$
$$+ 2\cdot r\cdot\cos\varphi_1\cdot s\cdot\sin\varphi +$$
$$+ l^2 - r^2 - e^2 - h^2 +$$
$$+ (2\cdot r\cdot h\cdot\sin\varphi_1 - 2\cdot e\cdot r\cdot\cos\varphi_1)\cdot\cos\varphi +$$
$$+ (2\cdot r\cdot h\cdot\cos\varphi_1 + 2\cdot e\cdot r\cdot\sin\varphi_1)\cdot\sin\varphi -$$
$$- s^2$$

Zavedeme

$$p_0 = -2\cdot h \qquad f_0 = s$$
$$p_1 = 2\cdot r\cdot\sin\varphi_1 \qquad f_1 = s\cdot\cos\varphi$$
$$p_2 = 2\cdot r\cdot\cos\varphi_1 \qquad f_2 = s\cdot\sin\varphi$$
$$p_3 = l^2 - r^2 - e^2 - h^2 \qquad f_3 = 1$$
$$p_4 = -\frac{p_0 p_1}{2} - p_2\cdot e \qquad f_4 = \cos\varphi$$
$$p_5 = -\frac{p_0\cdot p_2}{2} + p_1\cdot e \qquad f_5 = \sin\varphi$$
$$f_6 = s^2$$

$$\delta_\varphi = p_0 f_0(\varphi) + p_1 f_1(\varphi) + \ldots + p_5 f_5(\varphi) - f_6(\varphi)$$

Pro 5 bodů přesnosti dostáváme soustavu

$$p_0 A_1 + p_1 B_1 + p_2 C_1 + p_3 D_1 + p_4 E_1 + p_5 G_1 = H_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$p_0 A_5 + p_1 B_5 + p_2 C_5 + p_3 D_5 + p_4 E_5 + p_5 G_5 = H_5$$

$\rightarrow$ 5 rovnic pro parametry $p_0 \dots p_5$ $\rightarrow$ eliminací můžeme vyjádřit 5 z nich v závislosti na zbývajícím (např. na p_0)

① snadná cesta numerickým výpočtem:

Soustavu upravím do tvaru

$$p_1 B_1 + p_2 C_1 + p_3 D_1 + p_4 E_1 + p_5 G_1 = H_1 - p_0 A_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$p_1 B_5 + p_2 C_5 + p_3 D_5 + p_4 E_5 + p_5 G_5 = H_5 - p_0 A_5$$

tj.

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & G_1 \\ \vdots & & \dots & & \vdots \\ B_5 & C_5 & D_5 & E_5 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ H_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_5 \end{bmatrix} \cdot p_0$$

$$\underline{M} \cdot \underline{p} = \underline{H} - \underline{A} \cdot p_0$$

$$\rightarrow \quad \underline{p} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{H} - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot p_0$$

② pracná cesta postupnými analytickými úpravami

$$p_0 A_1 + p_1 B_1 + p_2 C_1 + p_3 D_1 + p_4 E_1 + p_5 G_1 = H_1$$

$$\begin{cases} p_0(A_1 \cdot G_2 - A_2 G_1) + p_1(B_1 G_2 - B_2 G_1) + p_2(C_1 G_2 - G_2 G_1) + p_3(D_1 G_2 - D_2 G_1) + p_4(E_1 G_2 - E_2 G_1) = H_1 G_2 - H_2 G_1 \\ p_0(A_1 \cdot G_3 - A_3 G_1) + p_1(B_1 G_3 - B_3 G_1) + p_2(C_1 G_3 - C_3 G_1) + p_3(D_1 G_3 - D_3 G_1) + p_4(E_1 G_3 - E_3 G_1) = H_1 G_3 - H_3 G_1 \\ p_0(A_1 \cdot G_4 - A_4 G_1) + p_1(B_1 G_4 - B_4 G_1) + p_2(C_1 G_4 - C_4 G_1) + p_3(D_1 G_4 - D_4 G_1) + p_4(E_1 G_4 - E_4 G_1) = H_1 G_4 - H_4 G_1 \\ p_0(A_1 \cdot G_5 - A_5 G_1) + p_1(B_1 G_5 - B_5 G_1) + p_2(C_1 G_5 - C_5 G_1) + p_3(D_1 G_5 - D_5 G_1) + p_4(E_1 G_5 - E_5 G_1) = H_1 G_5 - H_4 G_1 \end{cases}$$

$$p_0 a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + p_3 a_4 + p_4 a_5 = a_6$$
$$p_0 b_1 + p_1 b_2 + p_2 b_3 + p_3 b_4 + p_4 b_5 = b_6$$
$$p_0 c_1 + p_1 c_2 + p_2 c_3 + p_3 c_4 + p_4 c_5 = c_6$$
$$p_0 d_1 + p_1 d_2 + p_2 d_3 + p_3 d_4 + p_4 d_5 = d_6$$

$$p_0 a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + p_3 a_4 + p_4 a_5 = a_6$$

$$\begin{cases} p_0(a_1 b_5 - b_1 a_5) + p_1(a_2 b_5 - b_2 a_5) + p_2(a_3 b_5 - b_3 a_5) + p_3(a_4 b_5 - b_4 a_5) = a_6 b_5 - b_6 a_5 \\ p_0(a_1 c_5 - c_1 a_5) + p_1(a_2 c_5 - c_2 a_5) + p_2(a_3 c_5 - c_3 a_5) + p_3(a_4 c_5 - c_4 a_5) = a_6 c_5 - c_6 a_5 \\ p_0(a_1 d_5 - d_1 a_5) + p_1(a_2 d_5 - d_2 a_5) + p_2(a_3 d_5 - d_3 a_5) + p_3(a_4 d_5 - d_4 a_5) = a_6 d_5 - d_6 a_5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_0 g_1 + p_1 g_2 + p_2 g_3 + p_3 g_4 &= g_5 \\ p_0 h_1 + p_1 h_2 + p_2 h_3 + p_3 h_4 &= h_5 \\ p_0 i_1 + p_1 i_2 + p_2 i_3 + p_3 i_4 &= i_5 \end{aligned}$$

$$p_0 g_1 + p_1 g_2 + p_2 g_3 + p_3 g_4 = g_5$$

$$\begin{cases} p_0(g_1 h_4 - h_1 g_4) + p_1(g_2 h_4 - h_2 g_4) + p_2(g_3 h_4 - h_3 g_4) = g_5 h_4 - h_5 g_4 \\ p_0(g_1 i_4 - i_1 g_4) + p_1(g_2 i_4 - i_2 g_4) + p_2(g_3 i_4 - i_3 g_4) = g_5 i_4 - i_5 g_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_0 l_1 + p_1 l_2 + p_2 l_3 &= l_4 \\ p_0 m_1 + p_1 m_2 + p_2 m_3 &= m_4 \end{aligned}$$

$$p_0 l_1 + p_1 l_2 + p_2 l_3 = l_4$$

$$p_0(l_1 m_3 - m_1 l_3) + p_1(l_2 \cdot m_3 - m_2 l_3) = l_4 \cdot m_3 - m_4 l_3$$

$$p_0 \cdot n_1 + p_1 \cdot n_2 = n_3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} p_0 A_1 + p_1 B_1 + p_2 C_1 + p_3 D_1 + p_4 E_1 + p_5 G_1 &= H_1 \\ p_0 a_1 + p_1 a_2 + p_2 a_3 + p_3 a_4 + p_4 a_5 &= a_6 \\ p_0 g_1 + p_1 g_2 + p_2 g_3 + p_3 g_4 &= g_5 \\ p_0 l_1 + p_1 l_2 + p_2 l_3 &= l_4 \\ p_0 n_1 + p_1 n_2 &= n_3 \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{1}{n_2}(n_3 - n_1 \cdot p_0) = t_1 + t_2 \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{1}{l_3}(l_4 - p_0 l_1 - p_1 l_2) = \frac{1}{l_3}\left[l_4 - l_2 t_1 - p_0(l_1 + l_2 t_2)\right] = t_3 + t_4 \cdot p_0$$

$$p_3 = \frac{1}{g_4}(g_5 - g_1 p_0 - g_2 p_1 - g_3 p_2) = \frac{1}{g_4}\left[g_5 - g_2 t_1 - g_3 t_3 - p_0(g_1 + g_2 t_2 + g_3 t_4)\right] = t_5 + t_6 \cdot p_0$$

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{1}{a_5}(a_6 - a_1 p_0 - a_2 p_1 - a_3 p_2 - a_4 p_3) \\ &= \frac{1}{a_5}\left[a_6 - a_2 t_1 - a_3 t_3 - a_4 t_5 - p_0 \cdot (a_1 + a_2 t_2 + a_3 t_4 + a_4 t_6)\right] = t_7 + t_8 \cdot p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5 &= \frac{1}{G_1}(H_1 - A_1 p_0 - B_1 p_1 - C_1 p_2 - D_1 p_3 - E_1 p_4) \\ &= \frac{1}{G_1}\left[H_1 - B_1 t_1 - C_1 t_3 - D_1 t_5 - E_1 t_7 - p_0(A_1 + B_1 t_2 + C_1 t_4 + D_1 t_6 + E_1 t_8)\right] = t_9 + t_{10} \cdot p_0 \end{aligned}$$

(návrat ke značení ve skriptech)

$$p_5 = -\frac{p_0 p_2}{2} + p_1 \cdot e = k_1 + k_2 \cdot p_0 \qquad (1)$$

$$p_4 = -\frac{p_0 p_1}{2} - p_2 \cdot e = k_3 + k_4 \cdot p_0 \qquad (2)$$

$$p_3 = k_5 + k_6 \cdot p_0 \qquad (3)$$

$$p_2 = k_7 + k_8 \cdot p_0 \qquad (4)$$

$$p_1 = k_9 + k_{10} \cdot p_0 \qquad (5)$$

z (1) a (2) vyloučíme "e"

$$-\frac{p_0 p_2^2}{2} + p_1 p_2 e = k_1 \cdot p_2 + k_2 \cdot p_0 p_2$$

$$-\frac{p_0 p_1^2}{2} - p_1 p_2 e = k_3 p_1 + k_4 \cdot p_0 p_1$$

$$-\frac{p_0 p_1^2}{2} - \frac{p_0 p_2^2}{2} = k_1 p_2 + k_3 p_1 + k_2 p_0 p_2 + k_4 p_0 p_1$$

p_1, p_2 vyjádříme z (4), (5) a dosadíme

$$-p_0 (k_9 + k_{10} \cdot p_0)^2 - p_0 (k_7 + k_8 \cdot p_0)^2 = 2 \cdot k_1 (k_7 + k_8 \cdot p_0) + 2 \cdot k_3 (k_9 + k_{10} \cdot p_0) + 2 \cdot k_2 p_0 (k_7 + k_8 p_0) + 2 k_4 p_0 (k_9 + k_{10} \cdot p_0)$$

$$-p_0 \cdot k_9^2 - 2 k_9 k_{10} p_0^2 - k_{10}^2 p_0^3 - p_0 k_7^2 - 2 k_7 k_8 p_0^2 - k_8^2 p_0^3 = 2 k_1 k_7 + 2 k_1 k_8 p_0 + 2 k_3 k_9 + 2 k_3 k_{10} p_0 + 2 k_2 k_7 p_0 + \\ + 2 k_2 k_8 p_0^2 + 2 k_4 k_9 p_0 + 2 k_4 k_{10} p_0^2$$

$$\emptyset = p_0^3 (k_{10}^2 + k_8^2) + p_0^2 (2 k_9 k_{10} + 2 k_7 k_8 + 2 k_2 k_8 + 2 k_4 k_{10}) + p_0 (k_9^2 + k_7^2 + 2 k_1 k_8 + 2 k_3 k_{10} + 2 k_2 k_7 + 2 k_4 k_9) + 2 k_1 k_7 + 2 k_3 k_9$$

$\emptyset = A p_0^3 + B p_0^2 + C p_0 + D$ ... kubická rovnice pro p_0 → nalezneme kořeny

z rovnic (5), (4), (3) pak dopočítáme p_1, p_2, p_3.

<u>Hledané parametry mechanismu jsou:</u>

$$e = \frac{1}{p_1} \left(k_1 + k_2 p_0 + \frac{p_0 p_2}{2} \right)$$

$$h = -\frac{p_0}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{p_1}{p_2}$$

$$r = \frac{p_1}{2 \cdot \sin \varphi_1}$$

$$l = \sqrt{r^2 + e^2 + h^2 + p_3}$$