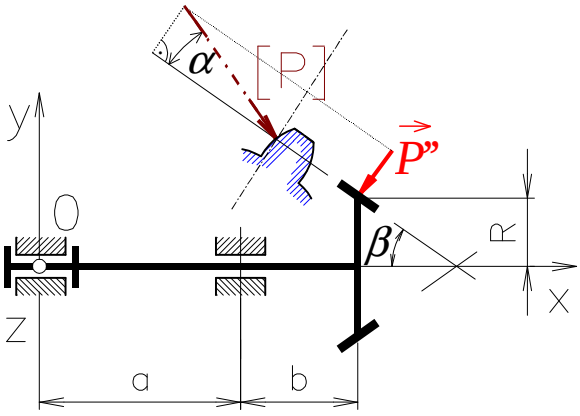
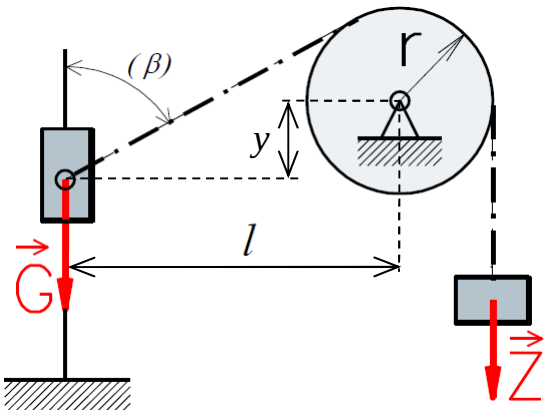
Příklad

Vypočítejte moment síly P = 4500 N k osám x, y, z, je-li a = 0,25 m, b = 0, 03 m, R = 0,06 m, β = 60°.
Nositelka síly P svírá s tečnou ke kružnici o poloměru R úhel α = 20°.



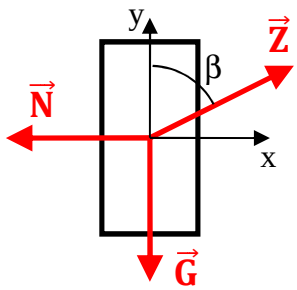
Příklad



Vypočítejte rovnovážnou polohu objímky tíhy G spojené se závažím tíhy Z lanem vedeným přes kladku.

Dáno: G = 300N, Z = 400N, r = 0,2m, l = 1m

Uvolnění:



Rovnice rovnováhy:

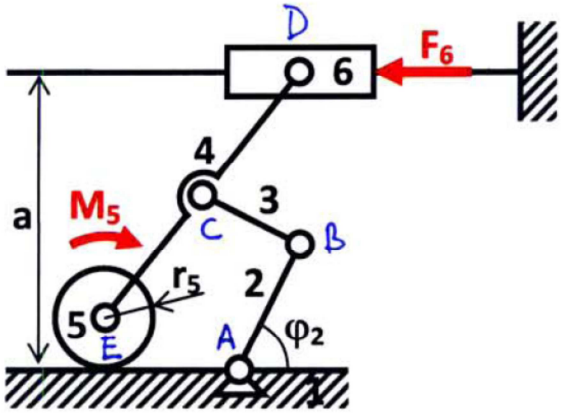
$$\vec{N} + \vec{Z} + \vec{G} = \vec{0}$$

x : $Z \cdot sin\beta - N = 0$

y : $Z \cdot cos\beta - G = 0$

$$cos\beta = \frac{G}{Z} = 0{,}75 \quad \rightarrow \quad \beta = 41{,}41°$$

$$y + r \cdot sin\beta = \frac{l - r \cdot cos\beta}{tg\beta} \quad \rightarrow \quad y = \frac{l - r \cdot cos\beta}{tg\beta} - r \cdot sin\beta = 0{,}83\ m$$

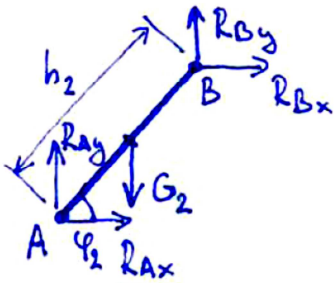


Určete pohyblivost a statickou určitost soustavy, uvolněte jednotlivá tělesa a sestavte rovnovážné rovnice v poloze popsané úhlem φ_2. Uvažujte vliv tíhy na všech tělesech a odvalovaní tělesa 5.

Dáno: $G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, M_5, F_6$,
a, r_5,
h_2, h_3, h_4 (délky těles 2,3,4)

Pohyblivost a statická určitost:

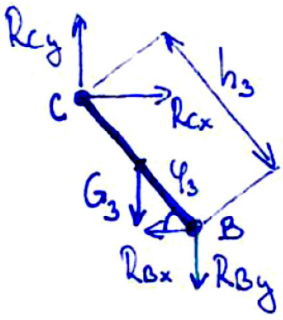
$$n = 3(telesa - 1) - 3 \cdot pevne - 2(rotacni + posuvne + valive) - 1 \cdot obecne$$

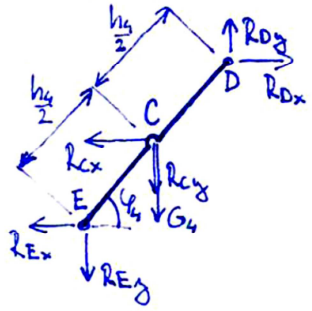


$x: \; R_{Ax} + R_{Bx} = 0$

$y: \; R_{Ay} + R_{By} - G_2 = 0$

$M_A: \; R_{By} \cdot \cos\varphi_2 \cdot h_2 - R_{Bx} \cdot \sin\varphi_2 \cdot h_2 - G_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \frac{h_2}{2} = 0$

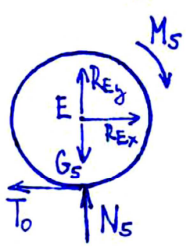




$x: \; R_{Dx} - R_{Cx} - R_{Ex} = 0$

$y: \; R_{Dy} - R_{Cy} - R_{Ey} - G_4 = 0$

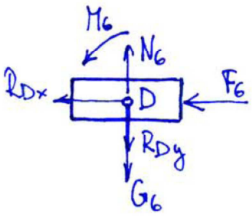
$M_C: \; R_{Dy} \cdot \cos\varphi_4 \cdot \frac{h_4}{2} - R_{Dx} \cdot \sin\varphi_4 \cdot \frac{h_4}{2} + R_{Ey} \cdot \cos\varphi_4 \cdot \frac{h_4}{2} - R_{Ex} \cdot \sin\varphi_4 \cdot \frac{h_4}{2} = 0$



$x: \; R_{Ex} - T_0 = 0$

$y: \; R_{Ey} + N_5 - G_5 = 0$

$M_E: \; -M_5 - T_0 \cdot r_5 = 0$



$x: \; -R_{Dx} - F_6 = 0$

$y: \; N_6 - R_{Dy} - G_6 = 0$

$M_D: \; M_6 = 0$

Vztahy pro výpočet pomocných parametrů

$$r_5 + h_4 \cdot \sin\varphi_4 = a \rightarrow \quad \sin\varphi_4 = \frac{a - r_5}{h_4} \rightarrow \varphi_4$$

$$h_2 \cdot \sin\varphi_2 + h_3 \cdot \sin\varphi_3 + \underbrace{\frac{h_4}{2}\sin\varphi_4}_{\frac{a-r_5}{2}} = a$$

$$\rightarrow h_3 \cdot \sin\varphi_3 = a - \frac{a - r_5}{2} - h_2 \cdot \sin\varphi_2 = \frac{a + r_5}{2} - h_2 \cdot \sin\varphi_2$$

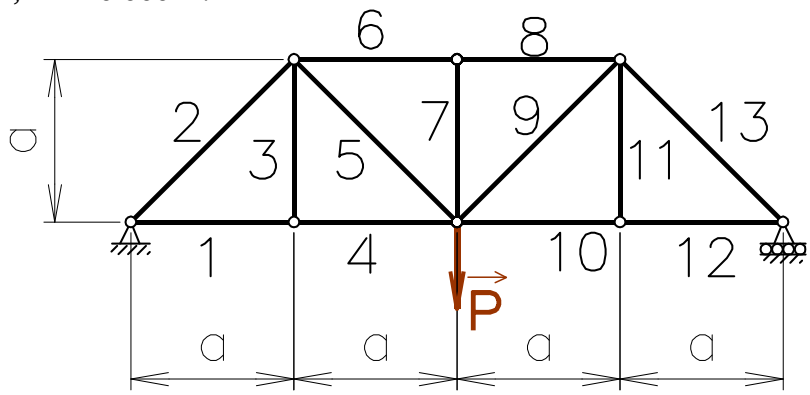
$$\sin\varphi_3 = \frac{a + r_5 - 2h_2 \cdot \sin\varphi_2}{2h_3} \rightarrow \varphi_3$$

Příklad

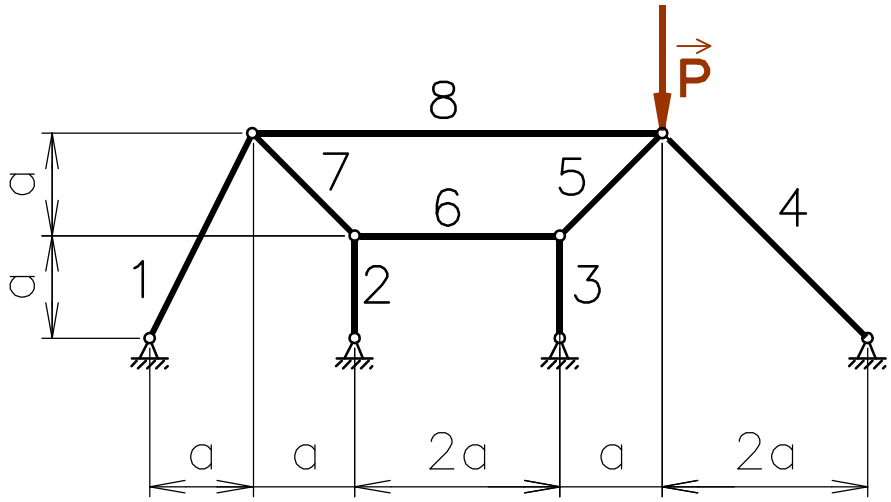
Prutová soustava je zatížena silou ***P***.

Vyšetřete statickou určitost soustavy a určete sílu v prutech 4, 5 a 6 průsečnou metodou.

Dáno: a = 2 m, P = 10 000 N.



Příklad
Prutová soustava je zatížena silou ***P***.
Vyšetřete statickou a tvarovou určitost soustavy a síly v prutech styčníkovou metodou.
Dáno: a = 1 m, P = 1000 N.



Řešení:

Statická a tvarová určitost:
$(2s\ ?\ p + m, \quad 2s\ ?\ p + 3)$

I) x: $S_8 + S_7 \cos(\alpha) - S_1 \cos(\gamma) = 0$
y: $-S_1 \sin(\gamma) - S_7 \sin(\alpha) = 0$

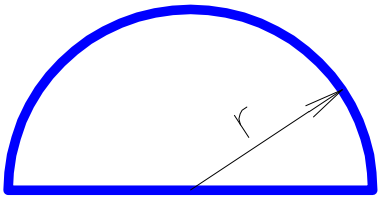
II) x: $-S_8 + S_5 \cos(\beta) + S_4 \cos(\delta) = 0$
y: $-S_5 \sin(\beta) - S_4 \sin(\delta) = 0$

III) x:
y:

IV) x: $S_6 - S_7 \cos(\alpha) = 0$
y: $S_7 \sin(\alpha) - S_2 = 0$

Příklad

Vypočítejte polohu těžiště křivky podle obrázku.
Dáno: r = 0,05 m.



$$x_T = 0$$

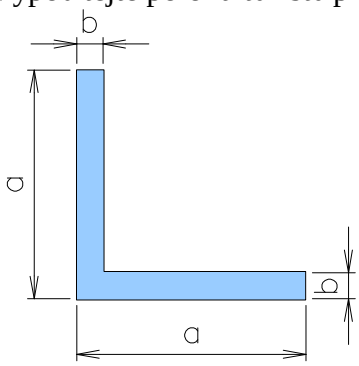
$$y_T = \frac{y_{T_1} l_1 + y_{T_2} l_2}{l_1 + l_2} = \frac{\frac{2}{\pi} r \cdot \pi r + 0 \cdot 2r}{\pi r + 2r}$$

$$y_{T_1} = \frac{\int_s y ds}{\int_s ds} = \frac{\int_0^\pi r \cdot \sin\varphi \cdot r d\varphi}{\int_0^\pi r d\varphi} =$$

$$= \frac{r^2[-\cos\varphi]_0^\pi}{r[\varphi]_0^\pi} = \frac{r^2(1+1)}{r \cdot \pi} = \frac{2r}{\pi}$$

Příklad

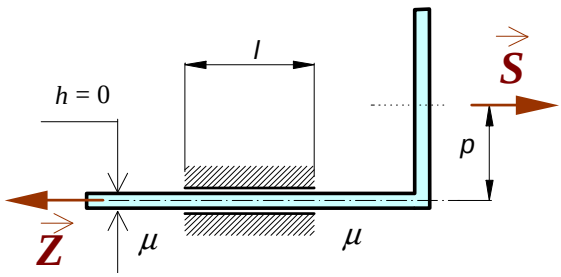
Vypočítejte polohu těžiště plochy úhelníku podle obrázku.



Dáno:
a = 50 mm,
b = 5 mm.

Příklad

Posuvně uložené těleso zatížené silou ***Z*** je taženo lanem.
Vypočítejte sílu *S* v laně, závislost síly *S* v laně na vzdálenosti *p [S(p)]* a vzdálenost p_{min} pro vzpříčení tělesa.
Dáno:
$Z = 60$ N, $l = 0{,}3$ m, $p = 0{,}2$ m, $\mu = 0{,}2$.



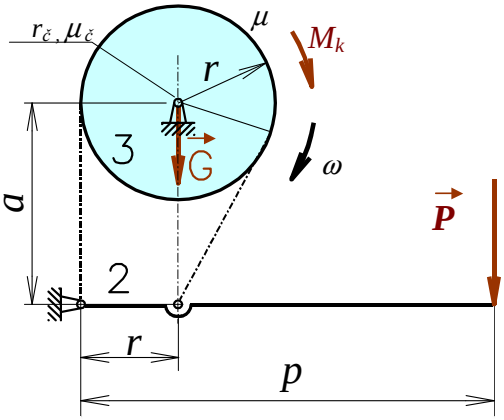
Třecí síla: $T = \mu|N|$

x: $S - T_A - T_C - Z = 0$
y: $N_C - N_A = 0$
z: $N_C l - S_P = 0$

$$S = \frac{Z}{1 - \frac{2p\mu}{l}} \quad \rightarrow \quad p_{min} = \qquad\qquad p \geq p_{min}$$ … těleso je vzpříčeno

Příklad

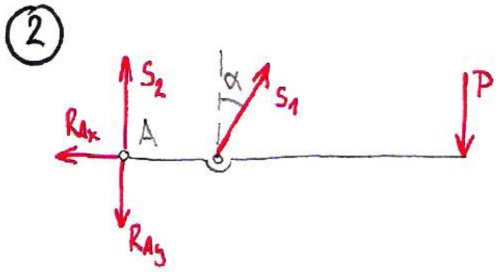
Na hřídel bubnu 3 působí silová dvojice o momentu M_k.
Vypočítejte sílu P na páce 2 pásové brzdy tak, aby se buben otáčel konstantní úhlovou rychlostí ω.
Dáno:
$a = 0{,}3$ m, $r = 0{,}2$ m, $r_č = 0{,}03$ m,
$\mu_č = 0{,}002$, $p = 0{,}6$ m, $\mu = 0{,}2$, $M_k = 20$ Nm,
$G = 150$ N.



$$x: \quad R_{ox} - S_1 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$y: \quad R_{oy} - G - S_2 - S_1 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$M_o: \quad S_2 \cdot r - S_1 \cdot r + M_č - M_k = 0 \qquad (3)$$



Moment čepového tření:

$$M_č = r_č \cdot \mu_č \cdot (0{,}96|R_{oy}| + 0{,}4|R_{ox}|)$$

(obecně:
$$M_č = r_č \mu_č \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \doteq r_č \mu_č (0{,}96|R_x| + 0{,}4|R_y|)$$
Ponceletův vztah pro $|R_x| > |R_y|$)

Pohyb vlákna po drsné ploše:

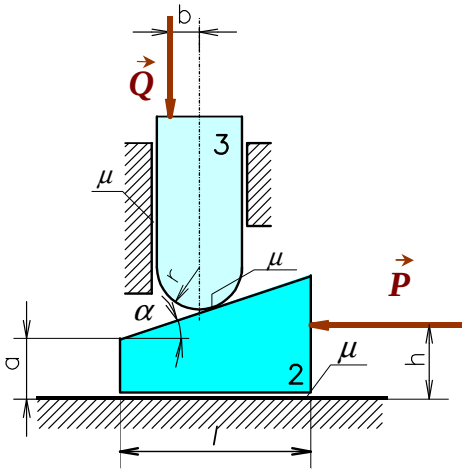
$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu(\pi + \alpha)}$$

(obecně:
$$\frac{S_2}{S_1} = e^{\mu\beta}$$
β...úhel opásání
Eulerův vztah pro $S_2 > S_1$)

$$P = \frac{r}{p} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{M_k - r_č \mu_č \cdot 0{,}96\, G}{r\left(e^{\mu(\pi+\alpha)} - 1\right) + r_č \mu_č \left(0{,}4 \cdot \sin\alpha + 0{,}96\left(e^{\mu(\pi+\alpha)} + \cos\alpha\right)\right)}$$

Příklad
Na člen 3 klínové soustavy působí síla ***Q***.
Vypočítejte sílu *P* působící na člen 2
pro rovnoměrný pohyb klínu v obou smyslech.
Stanovte podmínku samosvornosti soustavy.

Dáno: a , l , r, h , Q , b , α , μ .



Řešení: (pohyb klínu ve směru síly $\vec{P}$)

$$x: \; -P + T_1 + T_2 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \sin\alpha = \emptyset$$
$$y: \; N_1 - N_2 \cdot \cos\alpha + T_2 \cdot \sin\alpha = \emptyset$$

M: pokud mne nezajímá velikost n_1, není momentová rovnovážná rovnice potřeba

$$x: \; N_3 - N_2 \cdot \sin\alpha - T_2 \cdot \cos\alpha = \emptyset$$
$$y: \; -Q + N_2 \cdot \cos\alpha - T_2 \cdot \sin\alpha - T_3 = \emptyset$$

M: pokud mne nezajímá velikost n_3, není momentová rovnovážná rovnice potřeba

Pasivní odpory: $T_1 = \mu N_1$; $T_2 = \mu N_2$; $T_3 = \mu N_3$

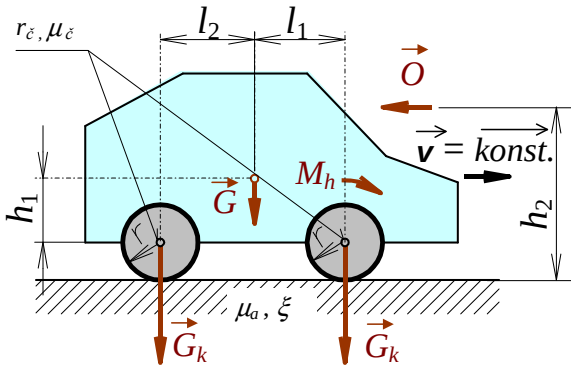
dosazení:

$$-P + \mu \cdot N_1 + \mu \cdot \cos\alpha \cdot N_2 + \sin\alpha \cdot N_2 = \emptyset$$
$$N_1 - \cos\alpha \cdot N_2 + \mu \cdot \sin\alpha \cdot N_2 = \emptyset$$
$$-\sin\alpha \cdot N_2 - \mu \cdot \cos\alpha \cdot N_2 + N_3 = \emptyset$$
$$\cos\alpha \cdot N_2 - \mu \cdot \sin\alpha \cdot N_2 - \mu \cdot N_3 = Q$$

maticově:

$$\begin{bmatrix} -1 & \mu & (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) & \emptyset \\ \emptyset & 1 & (-\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & (-\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) & 1 \\ \emptyset & \emptyset & (\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha) & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \\ Q \end{bmatrix}$$

Příklad



Automobil jede po rovině konstantní rychlostí.
Proti pohybu působí odpor vzduchu ***O***.
Vypočítejte velikost hnací silové dvojice M_h.
Dáno:
$G, G_k, l_1, l_2, r, h_1, h_2, r_č, \mu_č, \xi, \mu_a, O.$

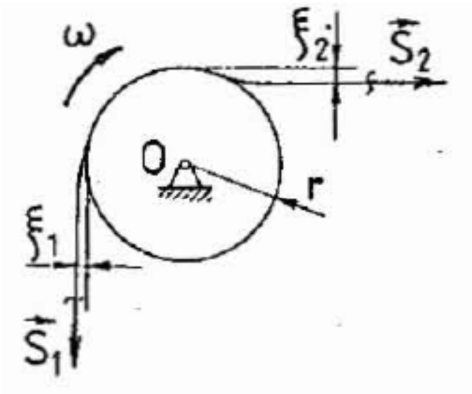
Rovnice pro celou soustavu:

Rovnice pro nápravy

Odpor proti valení: $M_V = \xi|N|$
Pro zjednodušení: $M_{č2} = r_č \mu_č R_{2y}$, $M_{č4} = r_č \mu_č R_{4y}$

Po úpravách: $M_h = (r_č \mu_č + \xi) \cdot G + O \cdot r$

Pozn: vliv tuhosti lan



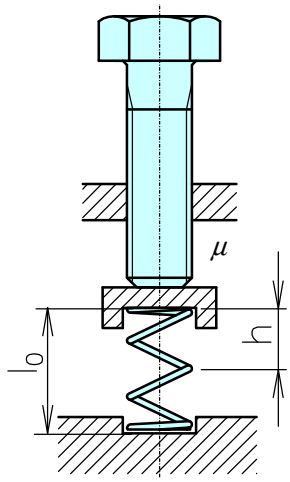
$$M_O = -S_1(r + \xi_1) + S_2(r - \xi_2) = 0$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(r + \xi_1)}{(r - \xi_2)}$$

Součinitel neohebnosti: $\tau = \frac{\xi}{r}$

Příklad

Vypočítejte práci *W* silové dvojice *M* potřebnou ke stlačení pružiny volné délky l_0, konstanty tuhosti *k* o míru *h*.
Určete okamžitou účinnost šroubu.
Dáno: l_0 = 100 mm, *k* = 20 N/mm, *h* = 30 mm
Parametry šroubu: střední ∅ *d* = 8,7 mm, stoupání *s* = 1,5 mm, trojúhelníkový profil s úhlem 60°, součinitel tření μ = 0,1.



Pozn: Účinnost

Kinematika

Příklad
Odvoďte vztahy pro rychlost a odlehlost bodu při přímočarém pohybu rovnoměrně zrychleném či zpožděném a při obecných počátečních podmínkách.

Počáteční podmínky: pro $t = t_0$ je $x = x_0$, $v = v_0$.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Příklad
Nákladní zdviž se rozjíždí konstantním zrychlením a_1, potom jede konstantní rychlostí v_2 a zastavuje se konstantním zpožděním a_3. Vypočtěte rychlost zdviže ve středním úseku, je-li dáno: $a_1 = 4\ \mathrm{ms}^{-2}$, $a_3 = 5\ \mathrm{ms}^{-2}$, celková výška $H = 32{,}1$ m, celkový čas $T = 6{,}7$ s.

Řešení:

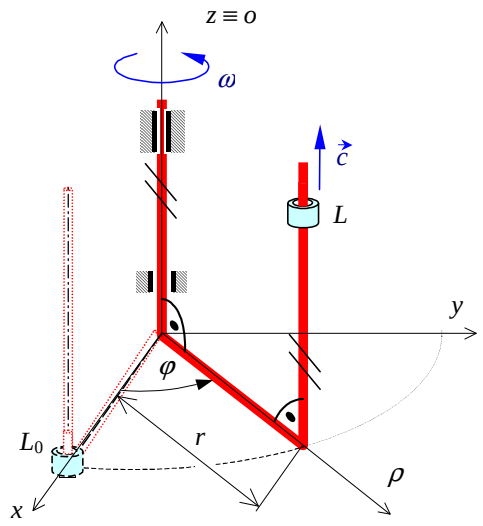
1.fáze:

2.fáze:

3.fáze:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_2t_2 + (v_2t_3 - \frac{1}{2}a_3t_3^2)$$

Příklad



Těleso tvořené dvěma rovnoběžnými tyčemi spojenými kolmou příčkou o délce r se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω okolo osy o.
Po druhé tyči se rovnoměrně pohybuje objímka L rychlostí c = konst.

Počáteční podmínky: pro $t = 0$ je $L \equiv L_0$ na ose x.

Vyšetřete trajektorii, rychlost a zrychlení bodu L v základním nehybném prostoru (v pravoúhlém souřadnicovém systému, v přirozeném s.s.) .
Vyjádřete délku proběhnuté dráhy jako funkci času.

$r = 0{,}05$ m

$c = 0{,}1$ ms^{-1}

$\omega = 4\pi$ s^{-1}

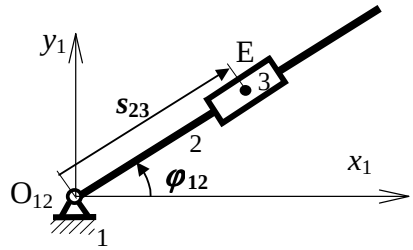
$x_L =$	$v_{xL} =$	$a_{xL} =$
$y_L =$	$v_{yL} =$	$a_{yL} =$
$z_L =$	$v_{zL} =$	$a_{zL} =$

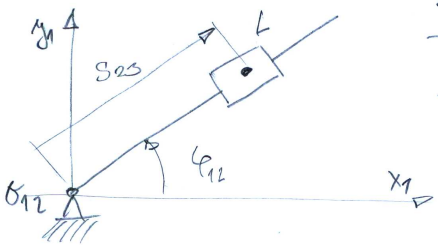
Příklad
Těleso spojené pružinou s rámem kmitá tak, že jeho výchylka s [m] se mění s časem harmonicky.
Dáno: úhlová frekvence $\omega = 60$ [s^{-1}], počáteční fáze $\varphi_0 = \pi/4$ [rad] ,
výchylka $s_1 = 0{,}1$ [mm] v čase $t_1 = 0{,}02$ [s] .
Určit: amplitudu r pohybu , rychlost v_1 a zrychlení a_1 v čase t_1 , periodu T pohybu.

Příklad

Dáno: Relativní pohyby $\varphi_{12}(t)$ a $s_{23}(t)$ jsou popsány obecnými časovými funkcemi.

Určete: Absolutní zrychlení bodu E pomocí derivace vektoru absolutní polohy a pomocí teorie současných pohybů. Porovnejte oba výsledky.





Poloha:

Rychlost:

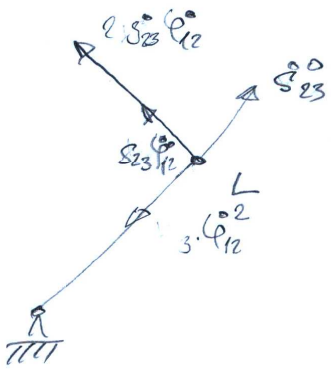
zrychlení

$$a_{1xL} = \ddot{s}_{23}\cos\varphi_{12} - \dot{s}_{23}\sin\varphi_{12}\dot{\varphi}_{12} - \dot{s}_{23}\sin\varphi_{12}\dot{\varphi}_{12} - s_{23}\cos\varphi_{12}\cdot\dot{\varphi}_{12}^2 - s_{23}\sin\varphi_{12}\ddot{\varphi}_{12}$$

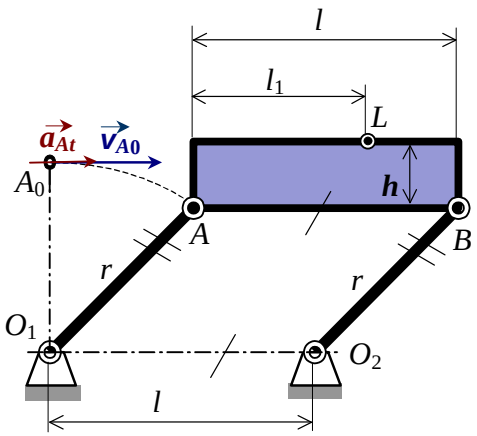
$$a_{1yL} = \ddot{s}_{23}\sin\varphi_{12} + \dot{s}_{23}\cos\varphi_{12}\cdot\dot{\varphi}_{12} + \dot{s}_{23}\cos\varphi_{12}\dot{\varphi}_{12} - s_{23}\sin\varphi_{12}\cdot\dot{\varphi}_{12}^2 + s_{23}\cos\varphi_{12}\cdot\ddot{\varphi}_{12}$$

$$a_{1xL} = \ddot{s}_{23}\cos\varphi_{12} - s_{23}\sin\varphi_{12}\cdot\ddot{\varphi}_{12} - s_{23}\dot{\varphi}_{12}^2\cos\varphi_{12} - 2\dot{s}_{23}\dot{\varphi}_{12}\sin\varphi_{12}$$

$$a_{1yL} = \underbrace{\ddot{s}_{23}\sin\varphi_{12}}_{\text{relativní}} + \underbrace{s_{23}\cos\varphi_{12}\cdot\ddot{\varphi}_{12}}_{\text{tečné unášivé}} \underbrace{- s_{23}\sin\varphi_{12}\dot{\varphi}_{12}^2}_{\text{normálové unášivé}} + \underbrace{2\dot{s}_{23}\dot{\varphi}_{12}\cos\varphi_{12}}_{\text{Coriolisovo}}$$



Příklad



Vyřešte trajektorii a závislosti rychlosti a zrychlení bodu L plošiny paralelogramu na čase. Bod A se pohybuje se stálým tečným zrychlením a_{At}.

Dáno:

Počáteční podmínky: $t = 0$; $A \equiv A_0$; $v_A = v_{A0}$.

$l = 0{,}6$ m ;

$|AO_1| = |BO_2| = r = 0{,}4$ m ;

$l_1 = 0{,}4$ m ; $h = 0{,}08$ m ;

$v_{A0} = 0{,}5$ ms^{-1} ;

$a_{At} = 10$ ms^{-2} .

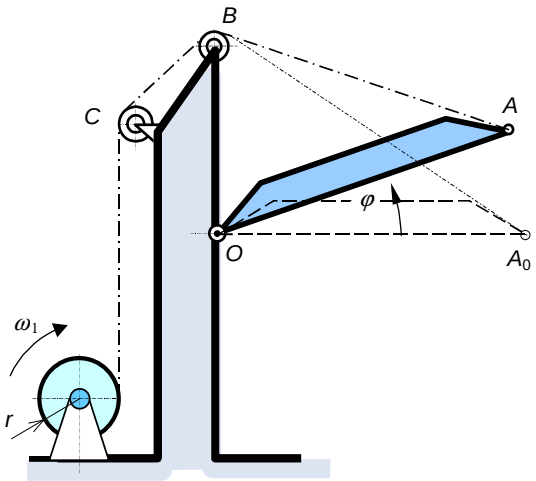
Příklad

V počáteční poloze je rameno jeřábu vodorovné. Dále se otáčí prostřednictvím lana navíjeného konstantní úhlovou rychlostí ω_1 na buben o poloměru r.

Dáno: $|BO| = h = 4$ m ; $|AO| = l = 5$ m ; $r = 0{,}2$ m ; $\omega_1 = 5$ s^{-1} .

Velikost poloměru převáděcí kladky v bodě B zanedbejte.

Určete závislosti úhlu pootočení $\varphi = \varphi(t)$ a úhlové rychlosti $\omega = \omega(t)$ ramene jeřábu na čase.



$$\sqrt{l^2+h^2} - \sqrt{l^2+h^2-2lh\sin\varphi} = r\omega_1 t$$

$$\sqrt{l^2+h^2} - r\omega_1 t = \sqrt{l^2+h^2-2lh\cdot\sin\varphi}$$

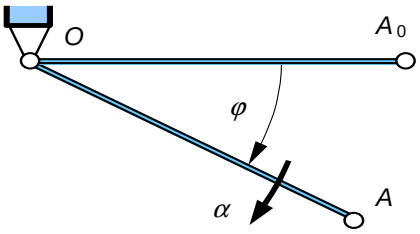
$$l^2+h^2 - 2\sqrt{l^2+h^2}\, r\omega_1 t + r^2\omega_1^2 t^2 = l^2+h^2-2lh\cdot\sin\varphi$$

$$\rightarrow \sin\varphi = \frac{r\omega_1 t\left(2\sqrt{l^2+h^2} - r\omega_1 t\right)}{2lh}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{r\omega_1 t\left(2\sqrt{l^2+h^2} - r\omega_1 t\right)}{2lh} = \xi(t)$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2(t)}}\cdot\dot{\xi}(t)$$

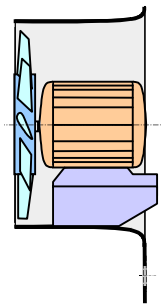
Příklad



Těleso je rotačně uloženo v bodě O.
Dáno: $\alpha = \alpha_0 \,.\, \cos\varphi$
$\alpha_0 = 50\ \mathrm{s}^{-2}$; $|AO| = l = 600$ mm .
Počáteční podmínky:
$t = 0 : A \equiv A_0$; $v_{A\,0} = 0$.
Určete rychlost v_A a zrychlení a_A pro $\varphi = 60^0$.

Příklad

Úhlové zrychlení α dobíhajícího rotoru ventilátoru je lineární funkcí úhlové rychlosti ω

$$\alpha = -\alpha_0 - k\,\omega,$$

kde α_0 a k jsou dané konstanty: $\alpha_0 = 0{,}5\ \mathrm{s}^{-2}$, $k = 0{,}01\ \mathrm{s}^{-1}$.
Vypočítejte závislosti $\omega = \omega(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\varphi = \varphi(\omega)$
pro počáteční podmínky $t = 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $\varphi(0) = 0$.
Počáteční otáčky jsou $n_0 = 300\ \mathrm{min}^{-1}$.
Určete čas T, za který klesnou otáčky na třetinu počátečních a příslušný úhel pootočení Φ.