Dynamika hmotného bodu a soustav hmotných bodů

Hmotný bod není těleso – nemá žádný rozměr. Proto řešíme pouze jeho polohu, nikoliv natočení, a stačí nám pouze rovnice: $m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$ (Newton).

Příklad

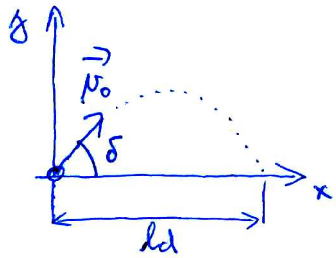
Šikmý vrh

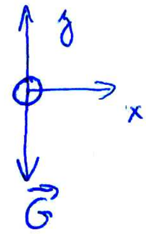
a) bez odporu vzduchu

$m = 5{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$

$v_0 = 200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$\delta = 45°$





$m\ddot{x} =$

$m\ddot{y} =$

p.p.: $t = 0 \ldots\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0 \cdot \cos\delta$

$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v_0 \cdot \sin\delta$

$\Rightarrow C_1 = v_0 \cdot \cos\delta,\ C_2 = 0$

$D_1 = v_0 \cdot \sin\delta,\ D_2 = 0$

výsledek:

$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\delta \qquad \dot{x} = v_0 \cdot \cos\delta$

$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin\delta \qquad \dot{y} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\delta$

místo dopadu:

Matlab:

převod na soustavu rovnic 1. řádu

$m\ddot{x} = 0$

$m\ddot{y} = -mg$

$z_1 = x$

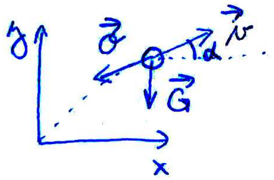
$z_2 = y$

$z_3 = \dot{x}$

$z_4 = \dot{y}$

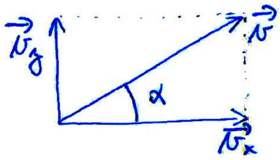
$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad \text{p.p. } z(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cdot \cos\delta \\ v_0 \cdot \sin\delta \end{bmatrix}$$

b) s odporem vzduchu: $O = k\cdot v^2$, $k = 2{,}4\cdot 10^{-5}\ kg\cdot m^{-1}$



$m\ddot{x} = -O_x$ $\qquad$ $O_x = O\cdot\cos\alpha$

$m\ddot{y} = -m\cdot g - O_y$ $\qquad$ $O_y = O\cdot\sin\alpha$



$v_x = v\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$

$v_y = v\cdot\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$

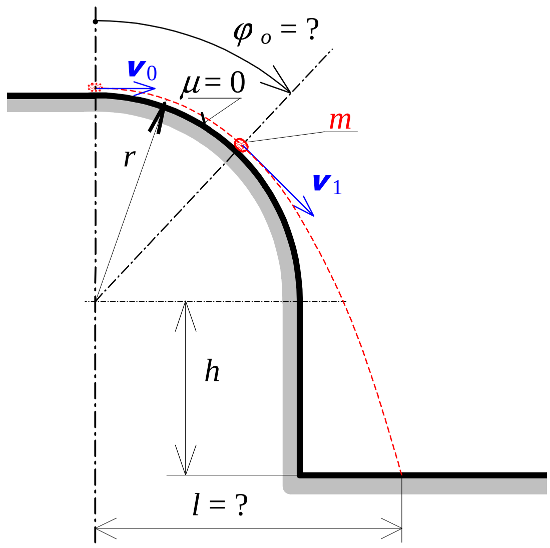
výsledek:

$$m\ddot{x} + k\cdot v^2\cdot\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = m\ddot{x} + k\cdot\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0$$

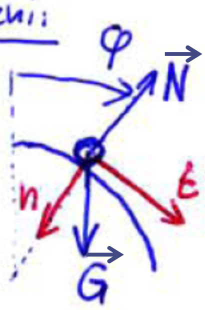
$$m\ddot{y} + k\cdot v^2\cdot\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + m\cdot g = m\cdot\ddot{y} + k\cdot\dot{y}\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} + m\cdot g = 0$$

→ soustava nelineárních rovnic → numerické řešení

Příklad
Určete místo odpoutání hmotného bodu od válcové plochy ($\varphi_o = ?$) a místo dopadu hmotného bodu na vodorovnou rovinu ($l = ?$).
Dáno: m , r, h , v_0 , $\mu = 0$.



Řešení:



$$m\cdot\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}$$

$$m\cdot a_t =$$

$$m\cdot a_n =$$

Odpoutání nastane pro $N =$

$N = mg\cos\varphi - m a_n = mg\cos\varphi - m\frac{v^2}{r}$ → potřebujeme znát průběh v^2

$\frac{d(v^2)}{2\,\underbrace{ds}_{=r\,d\varphi}} = a_t$ → $a_t = g\cdot\sin\varphi = \frac{d(v^2)}{2r\,d\varphi}$ → $\int_{v_0^2}^{v^2} d(v^2) = 2gr\int_0^{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$

$v^2 = v_0^2 + 2gr\left[-\cos\varphi\right]_0^{\varphi} = v_0^2 + 2gr(1-\cos\varphi)$

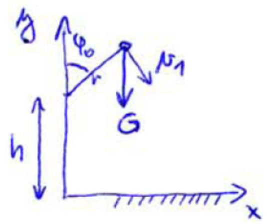
odpoutání: $N = 0 = mg\cos\varphi_0 - m\left[\frac{v_0^2 + 2gr(1-\cos\varphi)}{r}\right]$

$$0 = g\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{r} - 2g + 2g\cos\varphi_0$$

$$0 = 3g\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{r} - 2g \rightarrow \underline{\underline{\cos\varphi_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr}}}$$

rychlost při odpoutání: $v_1^2 = v_0^2 + 2gr(1-\cos\varphi_0) = v_0^2 + 2gr\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gr}\right) = \frac{2gr + v_0^2}{3}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gr + v_0^2}{3}}$$



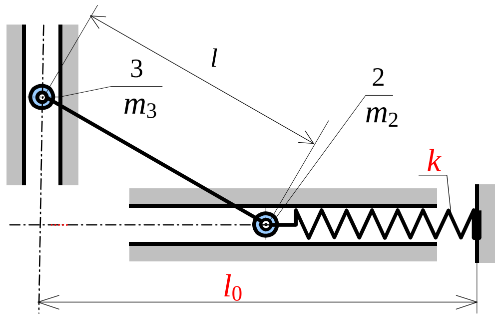
$$m\underline{a} = \underline{G}$$
$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$

$\ddot{x} = 0 \qquad \dot{x} = konst = v_1\cos\varphi_0 \qquad x = v_1\cos\varphi_0\cdot t + r\cdot\sin\varphi_0$

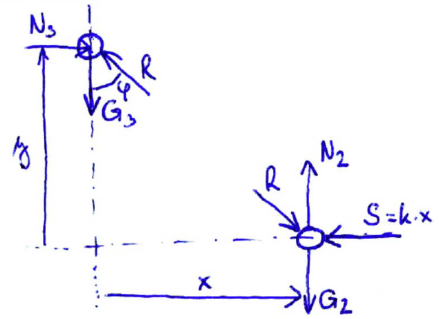
$\ddot{y} = -g \qquad \dot{y} = -g\cdot t - v_1\sin\varphi_0 \qquad y = -\frac{1}{2}g t^2 - v_1\sin\varphi_0\cdot t + h + r\cdot\cos\varphi_0$

Dopad ≡ $y = 0 \ldots \frac{1}{2}g t^2 + v_1\sin\varphi_0\cdot t - (h + r\cdot\cos\varphi_0) = 0 \rightarrow t_{1,2} = \begin{cases} + \\ - \end{cases}$ (nereálné)

Příklad
Dva hmotné body 2 a 3 jsou spojeny tyčí zanedbatelné hmotnosti a vedeny v drážkách bez pasivních odporů. Dáno: m_2, m_3, l, l_0, k. Určete vlastní pohybovou rovnici soustavy a statické rovnovážné polohy.



Řešení:



$m_2\underline{a_2} = \underline{G_2} + \underline{N_2} + \underline{R} + \underline{S} \ldots m_2 a_{2x} = R\cdot\sin\varphi - S$ (1)

$m_2 a_{2y} = \emptyset = N_2 - R\cdot\cos\varphi - G_2$ (2)

$m_3\underline{a_3} = \underline{G_3} + \underline{N_3} + \underline{R} \ldots m_3 a_{3x} = \emptyset = N_3 - R\cdot\sin\varphi$ (3)

$m_3 a_{3y} = R\cdot\cos\varphi - G_3$ (4)

Kinematika:

$x = l\cdot\sin\varphi \qquad y = l\cdot\cos\varphi$

$\dot{x} = l\cdot\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\cdot\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\ddot{x} = l\cdot\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\cdot\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \ddot{y} = -l\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\varphi - l\cdot\dot{\varphi}^2\cos\varphi$

$$① \Rightarrow R = \frac{m_2 \cdot \ddot{x} + k \cdot x}{\sin\varphi}$$

$$④ \rightarrow m_3 \ddot{y} = \overbrace{\frac{m_2\ddot{x} + kx}{\sin\varphi}}^{=R} \cos\varphi - G_3$$

$$m_3 \cdot \ddot{y} \cdot \sin\varphi - m_2 \ddot{x} \cdot \cos\varphi - k \cdot x \cdot \cos\varphi = -G_3 \sin\varphi$$

$$m_2\left(l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos^2\varphi - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right) + m_3\left(l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin^2\varphi + l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right) + k \cdot l \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = G_3 \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{(m_2 \cos^2\varphi + m_3 \cdot \sin^2\varphi)\, l \cdot \ddot{\varphi} + (m_3 - m_2)\, l \cdot \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi + k \cdot l \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = G_3 \cdot \sin\varphi} \quad \leftarrow \text{VPR}$$

VPR = **V**lastní **P**ohybová **R**ovnice … popisuje pohyb a neobsahuje reakce

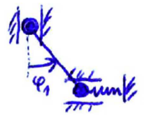
Statické rovnovážné polohy:

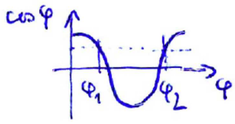
$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0 \rightarrow k \cdot l \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = G_3 \cdot \sin\varphi \rightarrow \underbrace{(k \cdot l \cdot \cos\varphi - G_3)}_{=0} \cdot \underset{0}{\overset{\parallel}{\sin\varphi}} = 0 \quad \vee$$

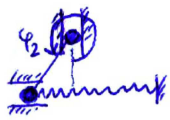
1. $k \cdot l \cdot \cos\varphi = G_3 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{G_3}{k \cdot l} = \frac{m_3 \cdot g}{k \cdot l}$

$\Rightarrow \varphi_1 = \ldots$

$\varphi_2 = \ldots$

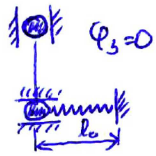


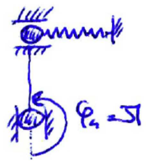




2. $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_3 = 0$

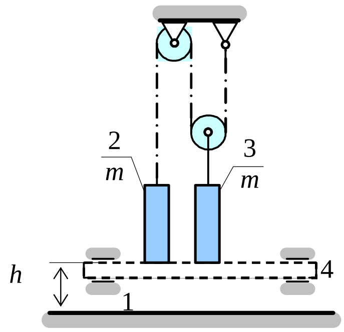
$\varphi_4 = \pi$





ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY
Odbor mechaniky a mechatroniky

Příklad
Dvě stejná závaží 2 a 3 zavěšená na laně a volné kladce jsou v nakreslené poloze držena v klidu vodorovnou zarážkou 4 ve výšce *h* nad podlahou.
Určete, jak se budou závaží pohybovat po odstranění zarážky.
Vypočítejte, jakou rychlostí narazí závaží pohybující se dolů na vodorovnou rovinu. Vliv hmotnosti kladek i lana a všech druhů odporů zanedbejte.
Dáno: *h*.

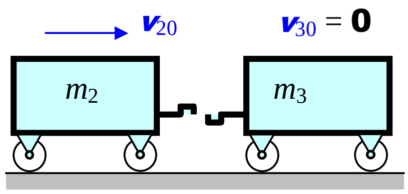


$$E_k - E_{k0} = W$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 = mg\left(h - \frac{h}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)v_2^2 = \frac{gh}{2} \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{4}{5}gh}$$

Příklad
Vůz 2 o hmotnosti m_2 narazí rychlostí v_{20} na stojící vůz 3 o hmotnosti m_3 a automatické spřáhlo oba vozy spojí. Vypočítejte, jakou rychlostí se budou oba vozy pohybovat po spřažení. Zanedbejte odpory proti pohybu i vliv hmotnosti kol.



$$\vec{H} - \vec{H}_0 = \sum_i \int_0^t \vec{F}_i^E \, dt$$

$$x: \quad (m_2 + m_3)v - m_2 v_{20} = 0 \qquad \rightarrow \qquad v =$$

Příklad
Určete pohyb zadaného mechanismu a reakce ve vazbách v časovém intervalu <0; t_1>.
Dáno:
l_1 = 600 mm, l_2 = 300 mm, l_4 = 1000 mm,
h_4 = 300 mm,
$I_{2S_2} = 0{,}012\,\mathrm{kgm}^2$, $I_{3S_3} = 0{,}015\,\mathrm{kgm}^2$,
$I_{4S_4} = 0{,}594\,\mathrm{kgm}^2$
$m_2 = 1.6$ kg, $m_3 = 1.4$ kg,
$m_4 = 5.2$ kg,
M_2 = 6,2 Nm, F_4 = 2,5 N, t_1 = 2 s,
t = 0 s, $\varphi_{120} = \pi / 3$, $\omega_{120} = 0{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$.