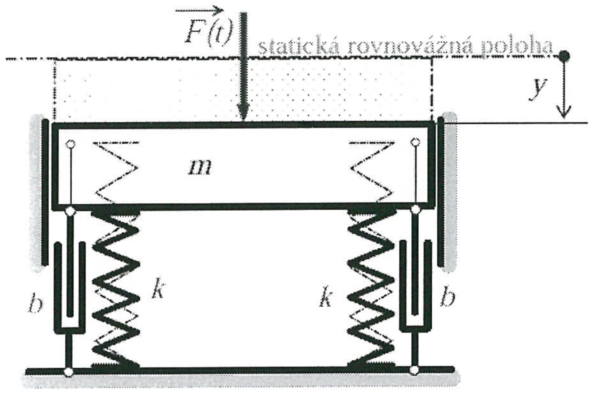
Příklad 1.

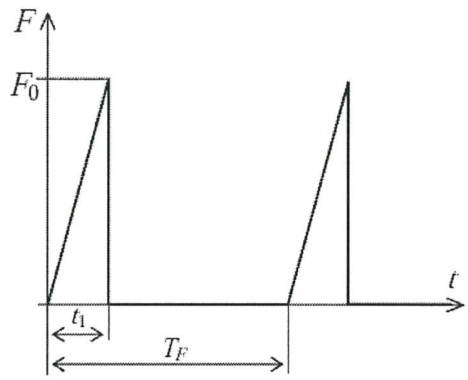
Periodicky proměnná síla $F(t)$ s průběhem dle obr. působí na stůl stroje o hmotnosti m, který je pružně uložený pomocí dvou stejných lineárních pružin o tuhosti k a s vnitřním tlumením, jehož konstanta je b. Na počátku pohybu v čase $t = 0$ byl stroj v klidu v rovnovážné poloze odpovídající jen působení tíhy.

Dáno:

$m = 1\,600$ kg, $k = 0{,}32$ MN.m^{-1}, $b = 3\,200$ kg.s^{-1}, $T_F = 0{,}8$ s, $t_1 = T_F/4$, $F_0 = 1\,200$ N.

1. Vyjádřete sílu $F(t)$ pomocí Fourierovy řady.
2. Vypočítejte $y(t)$. Pro výpočet partikulárního řešení použijte kromě konstantního členu prvních pět harmonických složek budící síly.
3. Vypočítejte sílu přenášenou do rámu v závislosti na čase.





$$m\ddot{y} = F(t) - 2\cdot F_p - 2\cdot F_b \quad , \quad F_p = k\cdot y \,,\; F_b = b\cdot \dot{y}$$

$$m\ddot{y} + 2b\dot{y} + 2ky = F(t)$$

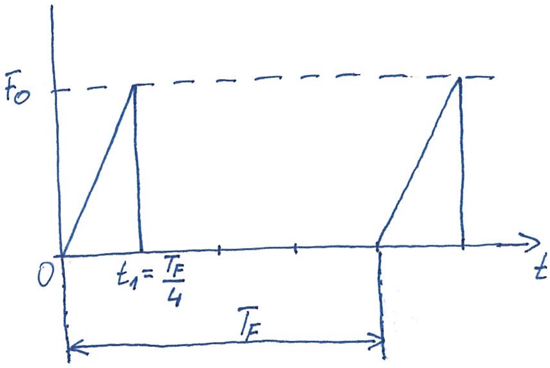
$$\ddot{y} + 2b_r\Omega\dot{y} + \Omega^2 y = \frac{F(t)}{m} \doteq \frac{A_0}{m} + \sum_{n=1}^{5}\frac{C_n}{m}\sin(n\omega t + \vartheta_n)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \,,\; b_r = \frac{b}{m\cdot\Omega} \,,\; \Omega_b = \Omega\sqrt{1-b_r^2}$$

Řešení bude ve tvaru:

$$y = y_h + y_{p0} + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot \sin(n\omega t + \vartheta_n - \varphi_n)$$

Vyjádření $F(t)$ pomocí Fourierovy řady:



$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos n\omega t + B_n \cdot \sin n\omega t\right) =$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(n\omega t + \vartheta_n\right)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad , \quad tg\,\vartheta_n = \frac{A_n}{B_n}$$

$$A_0 = \frac{1}{T_F}\int_0^{T_F} F(t)\,dt = \frac{1}{T_F}\left[\int_0^{t_1} \frac{F_0}{t_1} t\,dt + \int_{t_1}^{T_F} \emptyset\,dt\right] = \frac{1}{T_F}\int_0^{t_1} \frac{F_0}{t_1} \cdot t\,dt = \frac{F_0}{T_F \cdot t_1} \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_0^{t_1} = \frac{F_0 \cdot t_1}{2 \cdot T_F} = \frac{F_0}{8}$$

$$A_n = \frac{2}{T_F}\int_0^{T_F} F(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T_F}\int_0^{t_1} \frac{F_0}{t_1} \cdot t \cdot \cos(n\omega t)\,dt = \begin{vmatrix} v = t & v' = 1 \\ u' = \cos(n\omega t) & u = \frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[\frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t)\bigg|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} \frac{1}{n\omega} \cdot \sin(n\omega t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[\frac{t_1}{n\omega}\sin(n\omega t_1) + \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)\bigg|_0^{t_1}\right] =$$

$$T_F = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[\frac{t_1}{n\omega}\sin(n\omega t_1) + \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t_1) - \frac{1}{n^2\omega^2}\right] =$$

$$t_1 = \frac{T_F}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$= \frac{2F_0\omega^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n\omega} \cdot \frac{\pi}{2\omega} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2\omega^2} \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2\omega^2}\right] =$$

$$= \frac{2F_0}{\pi^2 n^2}\left[n\frac{\pi}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

$$B_n = \frac{2}{T_F}\int_0^{T_F} F(t) \cdot \sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T_F}\int_0^{t_1} \frac{F_0 t}{t_1}\sin(n\omega t)\,dt = \begin{vmatrix} v = t & v' = 1 \\ u' = \sin(n\omega t) & u = -\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[-\frac{1}{n\omega} t \cdot \cos(n\omega t)\bigg|_0^{t_1} + \int_0^{t_1} \frac{1}{n\omega} \cdot \cos(n\omega t)\,dt\right] = \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[-\frac{t_1}{n\omega}\cos(n\omega t_1) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t)\bigg|_0^{t_1}\right] =$$

$$= \frac{2F_0}{T_F t_1}\left[-\frac{t_1}{n\omega}\cos(n\omega t_1) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t_1)\right] = \frac{2F_0\omega^2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{n\omega} \cdot \frac{\pi}{2\omega}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2F_0}{\pi^2 n^2}\left[-n\frac{\pi}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$y = y_h + y_{po} + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot \sin(n\omega t + \vartheta_n - \varphi_n)$$

$$y_h = e^{-b_r \Omega t}\left(A \cdot \cos(\Omega_b \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega_b \cdot t)\right)$$

$$y_{po} = C \qquad \dot{y}_{po} = \ddot{y}_{po} = 0 \qquad \Omega^2 \cdot C = \frac{A_0}{m} \quad \longrightarrow \quad y_{po} = \frac{A_0}{\Omega^2 m} = \frac{A_0}{\frac{2 \cdot k}{m} \cdot m} = \frac{A_0}{2 \cdot k}$$

$$r_n = \frac{\frac{C_n}{m}}{\sqrt{(\Omega^2 - n^2\omega^2)^2 + 4 b_r^2 \Omega^2 n^2 \omega^2}} \quad , \quad tg\, \varphi_n = \frac{2 \cdot b_r \cdot \Omega \cdot n \cdot \omega}{\Omega^2 - n^2 \cdot \omega^2}$$

$$y = e^{-b_r \Omega t}\left(A \cos(\Omega_b t) + B \sin(\Omega_b t)\right) + y_{po} + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot \sin(n\omega t + \vartheta_n - \varphi_n)$$

$$\dot{y} = e^{-b_r \Omega t}\left[(-A b_r \Omega + B \cdot \Omega_b) \cdot \cos(\Omega_b t) - (B \cdot b_r \Omega + A \cdot \Omega_b) \sin(\Omega_b t)\right] + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot n \cdot \omega \cdot \cos(n\omega t + \vartheta_n - \varphi_n)$$

$t = 0$:

$$0 = A + y_{po} + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot \sin(\vartheta_n - \varphi_n)$$

$$0 = -A \cdot b_r \Omega + B \cdot \Omega_b + \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot n \cdot \omega \cdot \cos(\vartheta_n - \varphi_n)$$

$$\rightarrow A = -y_{po} - \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot \sin(\vartheta_n - \varphi_n)$$

$$B = \frac{1}{\Omega_b}\left[A \cdot b_r \cdot \Omega - \sum_{n=1}^{5} r_n \cdot n \cdot \omega \cdot \cos(\vartheta_n - \varphi_n)\right]$$