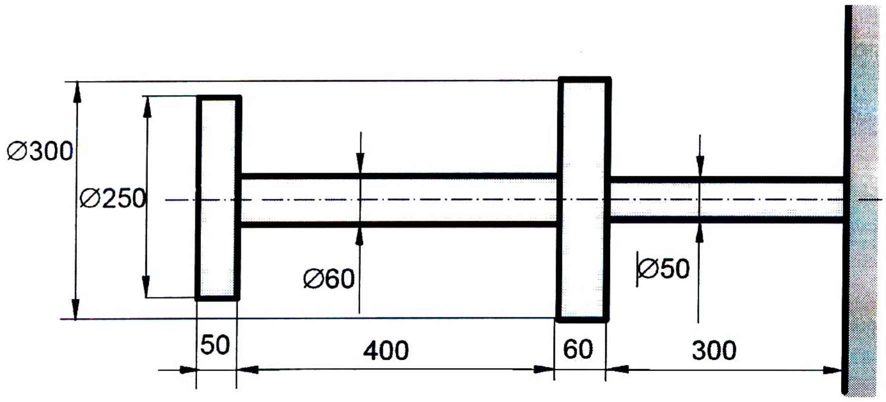
Kmitání se dvěma stupni volnosti

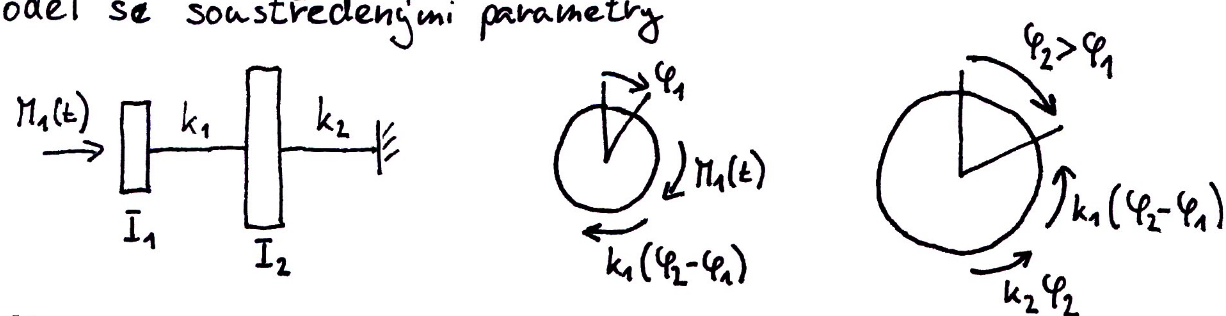
Vyřešte vlastní úhlové frekvence a vlastní tvary torzních kmitů a volné a vynucené ustálené torzní kmitání ocelové součásti podle obrázku.



Dáno: budicí silová dvojice *M1(t)* = *M* 0.sinw *t* , *M0* = 5 Nm , w = 1300 s-1;
Počáteční podmínky pro $t = 0$:
$\varphi_1(0) = \varphi_{10} = 0{,}001$ rad, $\varphi_2(0) = \varphi_{20} = 0{,}003$ rad,
$\omega_1(0) = \omega_{10} = 0\ s^{-1}$, $\omega_2(0) = \omega_{20} = 0\ s^{-1}$;
z rozměrů a měrné hmotnosti ocelové součásti vypočítáme :
$I_1 = 0{,}17$ kgm^2 , $I_2 = 0{,}38$ kgm^2 ,
$k_1 = 2{,}61.10^5$ Nm/rad , $k_2 = 1{,}68.10^5$ Nm/rad
Určete:
a) vlastní frekvence,
b) vlastní tvary kmitání,
c) volné kmitání pro dané počáteční podmínky,
d) vynucené kmitání způsobené budicí harmonickou silovou dvojicí *M* 0.sinw *t*, která působí na menší kotouč.

Řešení:

Model se soustředěnými parametry



$$I_1\ddot{\varphi}_1 = M_1(t) + k_1(\varphi_2-\varphi_1) \rightarrow I_1\ddot{\varphi}_1 + k_1\varphi_1 - k_1\varphi_2 = M_1(t)$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = -k_1(\varphi_2-\varphi_1) - k_2\varphi_2 \rightarrow I_2\ddot{\varphi}_2 - k_1\varphi_1 + (k_1+k_2)\varphi_2 = \emptyset$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & \emptyset \\ \emptyset & I_2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} M_0 \cdot \sin(\omega t) \\ \emptyset \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_0 \\ \emptyset \end{bmatrix}}_{\underline{f_0}} \sin(\omega t)$$

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{x}} + \underline{K}\,\underline{x} = \underline{f_0} \cdot \sin(\omega t)$$

$\underline{M}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\,\underline{x} = \underline{f_0}\cdot \sin(\omega t)$ ... soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Řešení budeme hledat ve tvaru:

$\underline{x} = \underline{x_h} + \underline{x_p}$

Volné kmitání

$\underline{M}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\,\underline{x} = \underline{\emptyset}$ (předpokládejme harmonický pohyb:

$$\underline{x_h} = \begin{bmatrix} x_{1h} \\ x_{2h} \end{bmatrix} = \underline{u}\cdot \sin \Omega t = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \sin \Omega t$$

stejná frekvence Ω, rozdílné amplitudy u_1, u_2

$\ddot{\underline{x}}_h = -\Omega^2 \underline{u}\cdot \sin \Omega t$

$\lambda = \Omega^2$ λ... vlastní číslo, Ω... vlastní úhlová frekvence

dosadíme $\rightarrow$ $(\underline{K} - \lambda \underline{M})\underline{u} = \underline{\emptyset}$ ... podmínka netriviálního řešení:

$\det(\underline{K} - \lambda \underline{M}) \overset{!}{=} \emptyset$

$$\det(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = \begin{vmatrix} k_1 - \lambda I_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 - \lambda I_2 \end{vmatrix} \overset{!}{=} \emptyset$$ (frekvenční determinant)

$$k_1^2 + k_1 k_2 - \lambda k_1 I_2 - \lambda k_1 I_1 - \lambda k_2 I_1 + \lambda^2 I_1 I_2 - k_1^2 =$$
$$= I_1 I_2 \cdot \lambda^2 - (k_1 I_1 + k_2 I_1 + k_1 I_2)\cdot \lambda + k_1 k_2 \overset{!}{=} \emptyset$$ (frekvenční rovnice)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\cdot A\cdot C}}{2A} \Rightarrow \begin{matrix} \Omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \\ \Omega_2 = \sqrt{\lambda_2} \end{matrix}$$ (pouze pro tyto frekvence může nastat předpokládaný harm. pohyb)

$A = I_1 I_2$, $B = -(k_1 I_1 + k_2 I_1 + k_1 I_2)$, $C = k_1 k_2$

Pro každé λ_i hledáme vektor amplitud harmonických výchylek $\underline{u_i}$.
(tj. výpočet vlastních vektorů)

$(\underline{K} - \lambda_i \underline{M})\,\underline{u_i} = \underline{\emptyset}$ $i = 1,2$

$\det[\ \ ] = \emptyset \rightarrow$ řádky jsou lineárně závislé, použijeme jen první rovnici

$(k_1 - \lambda_i I_1)\cdot u_{1i} - k_1 u_{2i} = \emptyset$ (jedna rovnice, dvě neznámé $\rightarrow$ získáme jen poměr amplitud $\rightarrow$ normujeme)

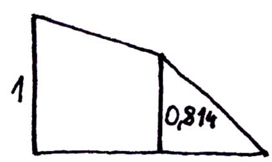
zavedeme např. $u_{1i} = 1 \rightarrow u_{2i} = \dfrac{k_1 - \lambda_i I_1}{k_1}$

$$\Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \underbrace{\frac{k_1 - \lambda_1 I_1}{k_1}}_{\underline{u}_1} & \underbrace{\frac{k_1 - \lambda_2 I_1}{k_1}}_{\underline{u}_2} \end{bmatrix}$$

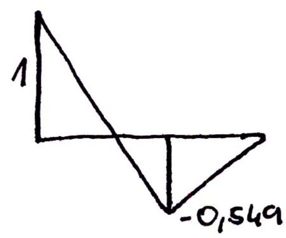
vlastní tvary kmitu pak můžeme i nakreslit.

(pro toto zadání vychází $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}814 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}549 \end{bmatrix}$

1. vl. tvar kmitu



2. vl. tvar kmitu



Příslušný vlastní tvar vybudíme, udělíme-li soustavě

- počáteční výchylky v poměru vl. tvaru a nulové počáteční rychlosti
- počáteční rychlosti v poměru vl. tvaru a nulové počáteční výchylky
- počáteční výchylky i rychlosti v poměru vl. tvaru

Výpočet vl. čísel a vektorů v Matlabu: $[u, v] = \mathrm{eig}(K, M)$

$\Omega_1 = \mathrm{sqrt}(v(1,1))$

$\Omega_2 = \mathrm{sqrt}(v(2,2))$

(vlastní vektory jsou v matici $\underline{u}$, pozor na to, že Matlab používá jiné normování, než bylo použito zde. V Matlabu je $\|\underline{u}_i\| = 1$)

Volné kmity při obecných počátečních podmínkách

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{u}} \begin{bmatrix} \cos \Omega_1 t & \emptyset \\ \emptyset & \cos \Omega_2 t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{u}} \begin{bmatrix} \sin \Omega_1 t & \emptyset \\ \emptyset & \sin \Omega_2 t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\underline{B}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2 \end{bmatrix} = -\left[\underline{u}\right] \begin{bmatrix} \Omega_1 & \emptyset \\ \emptyset & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \Omega_1 t & \emptyset \\ \emptyset & \sin \Omega_2 t \end{bmatrix} \left[\underline{A}\right] + \left[\underline{u}\right] \begin{bmatrix} \Omega_1 & \emptyset \\ \emptyset & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega_1 t & \emptyset \\ \emptyset & \cos \Omega_2 t \end{bmatrix} \left[\underline{B}\right]$$

$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ... určíme ze zadaných počátečních podmínek

Počáteční podm. $t=\emptyset$

$$\begin{bmatrix}\varphi_{01}\\ \varphi_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} \rightarrow \underline{A}=inv(\underline{u})\begin{bmatrix}\varphi_{01}\\ \varphi_{02}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_{01}\\ \dot{\varphi}_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{u}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\Omega_1 & \emptyset\\ \emptyset & \Omega_2\end{bmatrix}}_{\underline{\Omega}}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix} \rightarrow \underline{B}=inv(\underline{u}\,\underline{\Omega})\cdot\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_{01}\\ \dot{\varphi}_{02}\end{bmatrix}$$

(Samozřejmě lze řešit i "nematicově"

$$\varphi_1=a_1u_{11}\cos\Omega_1t+b_1u_{11}\sin\Omega_1t+a_2u_{12}\cos\Omega_2t+b_2u_{12}\sin\Omega_2t$$

$$\varphi_2=a_1u_{21}\cos\Omega_1t+b_1u_{21}\sin\Omega_1t+a_2u_{22}\cos\Omega_2t+b_2u_{22}\sin\Omega_2t$$

$\vdots$)

Vynucené kmitání

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{x}}+\underline{K}\,\underline{x}=\underline{f_0}\cdot\sin\omega t$$

$$\underline{x}_p=\underline{r}\cdot\sin\omega t=\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}\sin\omega t \rightarrow \underline{\ddot{x}}_p=-\underline{r}\,\omega^2\sin\omega t$$

$$\underbrace{(\underline{K}-\omega^2\underline{M})}_{\text{matice dynamické tuhosti}}\cdot\underline{r}=\underline{f_0} \rightarrow \underline{r}=\underbrace{(\underline{K}-\omega^2\underline{M})^{-1}}_{\text{matice dynamické poddajnosti}}\cdot f_0$$

(Matlab: $r=inv(K-\omega^2M)\cdot f_0$)

Bez počítače lze řešit např. použitím vztahu pro výpočet inverzní matice 2x2

$$r=\frac{1}{\det(K-\omega^2M)}\cdot\begin{bmatrix}k_1+k_2-\omega^2I_2 & k_1\\ k_1 & k_1-\omega^2I_1\end{bmatrix}\cdot\underline{f_0}$$

nebo pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{bmatrix}k_1-\omega^2I_1 & -k_1\\ -k_1 & k_1+k_2-\omega^2I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_0\\ \emptyset\end{bmatrix}$$

$$\Delta=(k_1-\omega^2I_1)(k_1+k_2-\omega^2I_2)-k_1^2=I_1I_2(\omega^2-\Omega_1^2)(\omega^2-\Omega_2^2)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}M_0 & -k_1\\ \emptyset & k_1+k_2-\omega^2I_2\end{vmatrix}=M_0(k_1+k_2-\omega^2I_2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_1 - \omega^2 I_1 & M_0 \\ -k_1 & \emptyset \end{vmatrix} = M_0 k_1$$

$$r_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{M_0(k_1 + k_2 - \omega^2 I_2)}{I_1 I_2 (\omega^2 - \Omega_1^2)(\omega^2 - \Omega_2^2)}$$

$$r_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{M_0 k_1}{I_1 I_2 (\omega^2 - \Omega_1^2)(\omega^2 - \Omega_2^2)}$$

antirezonance

$$r_1 = \emptyset \quad \text{pro} \quad \omega^* = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{I_2}}$$

Celkové řešení

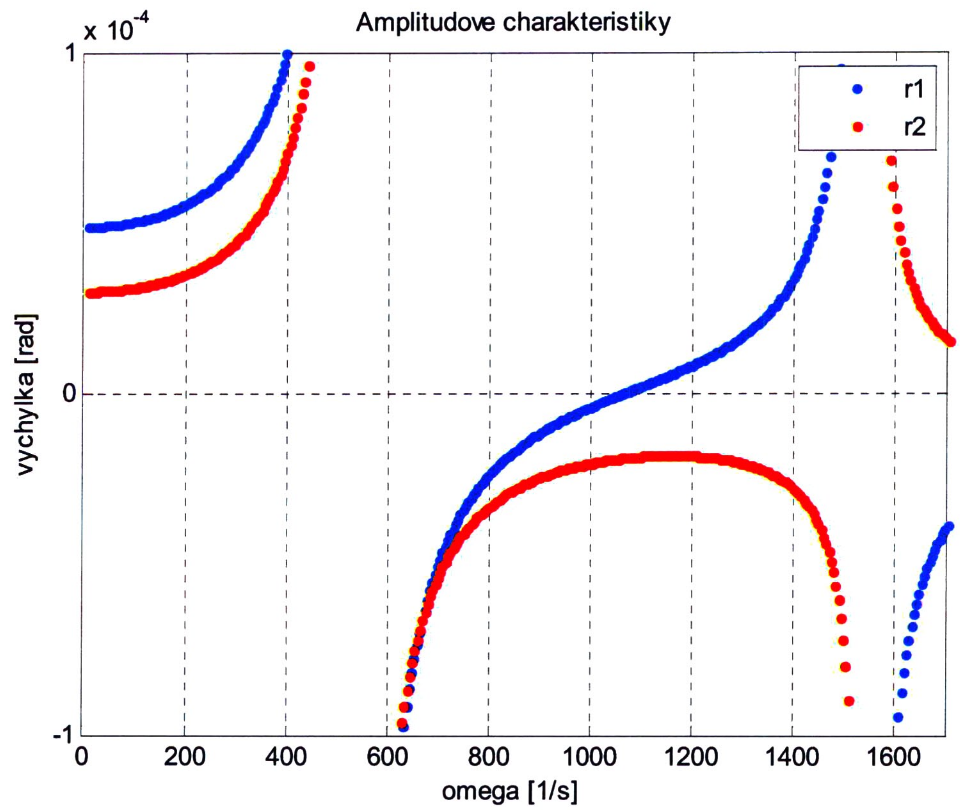
$$\varphi_1 = a_1 u_{11} \cos \Omega_1 t + b_1 u_{11} \sin \Omega_1 t + a_2 u_{12} \cos \Omega_2 t + b_2 u_{12} \sin \Omega_2 t + r_1 \sin \omega t$$

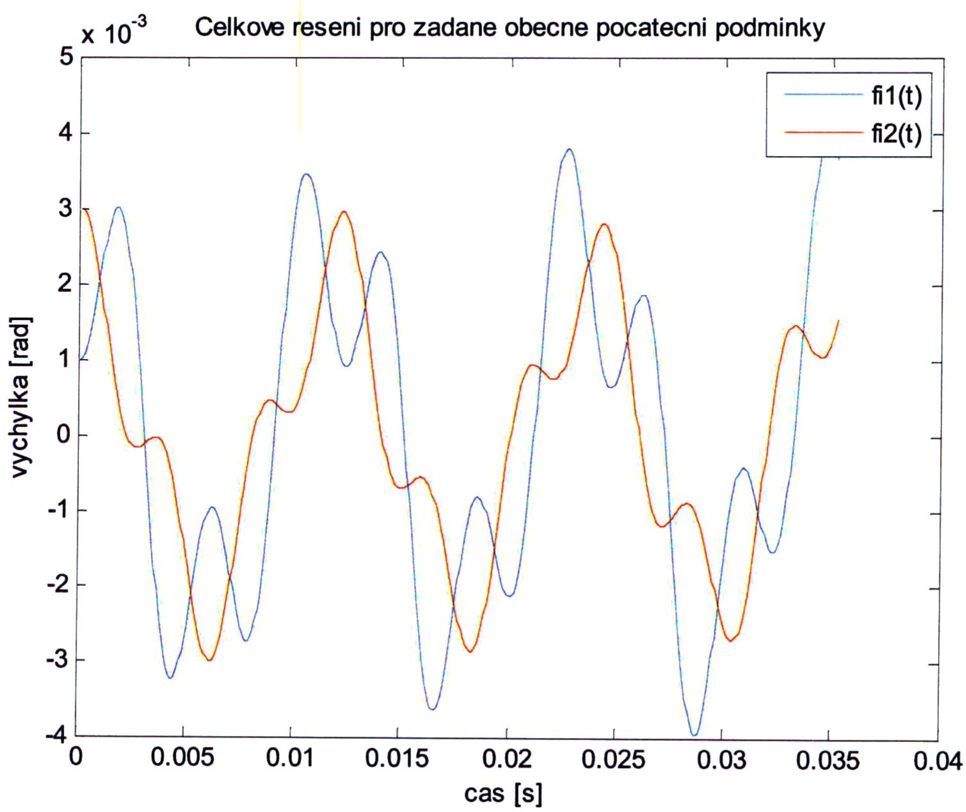
$$\varphi_2 = a_1 u_{21} \cos \Omega_1 t + b_1 u_{21} \sin \Omega_1 t + a_2 u_{22} \cos \Omega_2 t + b_2 u_{22} \sin \Omega_2 t + r_2 \sin \omega t$$

konstanty a_1, a_2, b_1, b_2 z počátečních podmínek

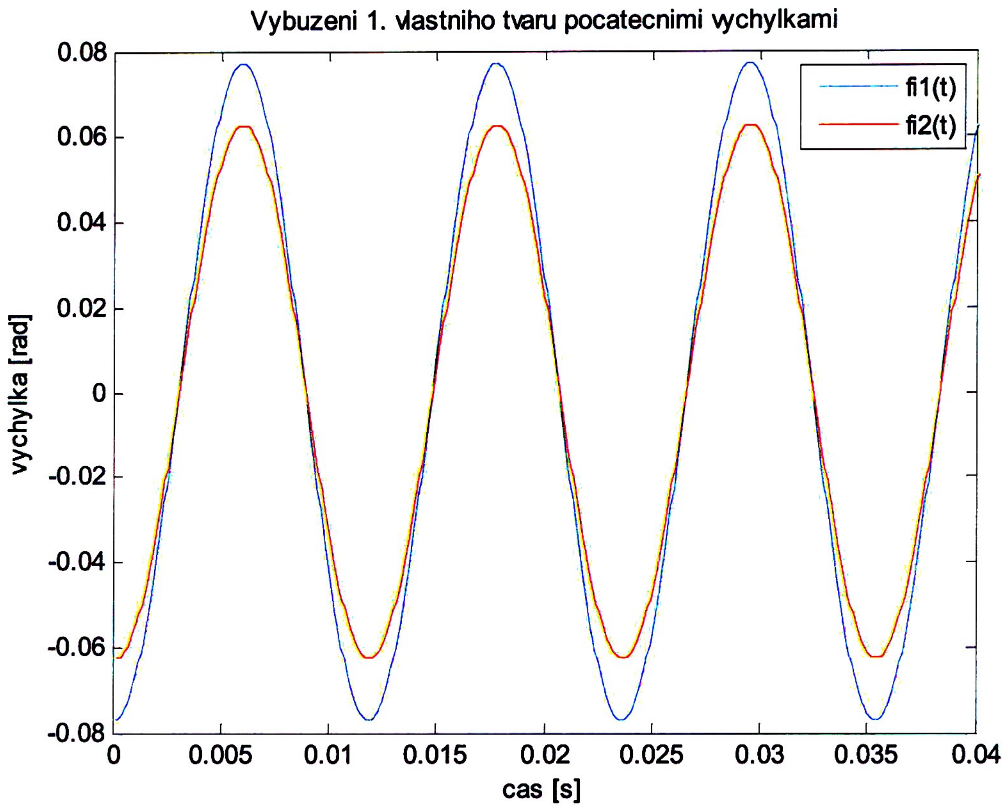
(Konstanty do homogenní části řešení se vždy počítají nakonec.)

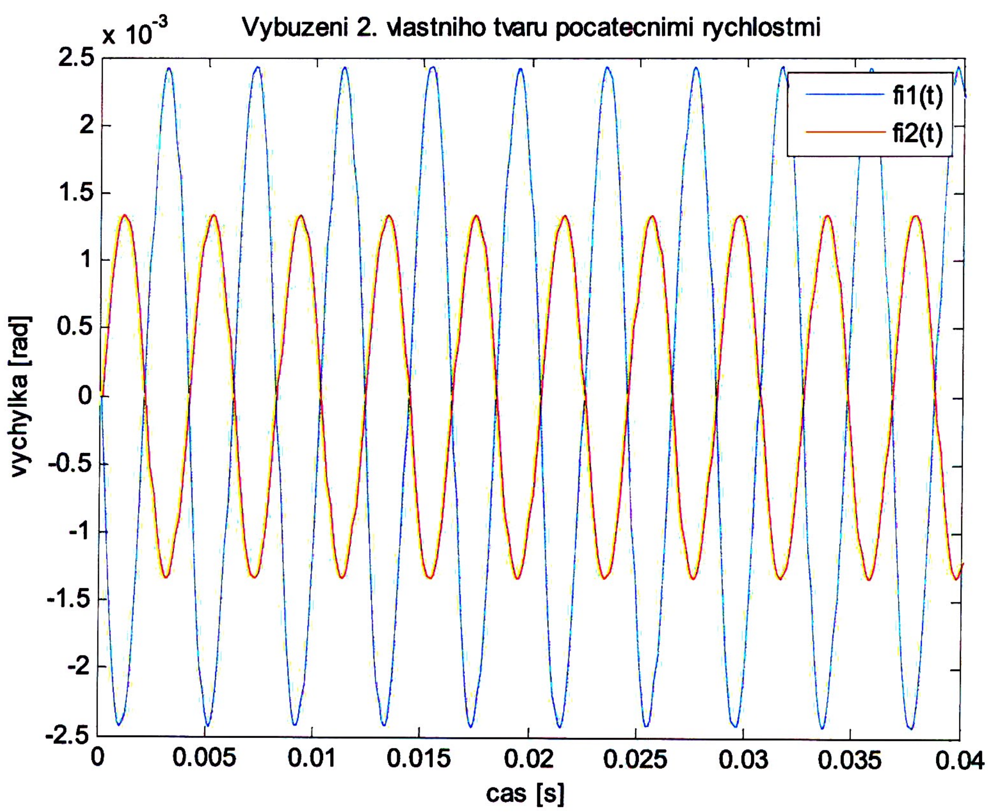
Tyto dva obrázky by měly být i v referátu

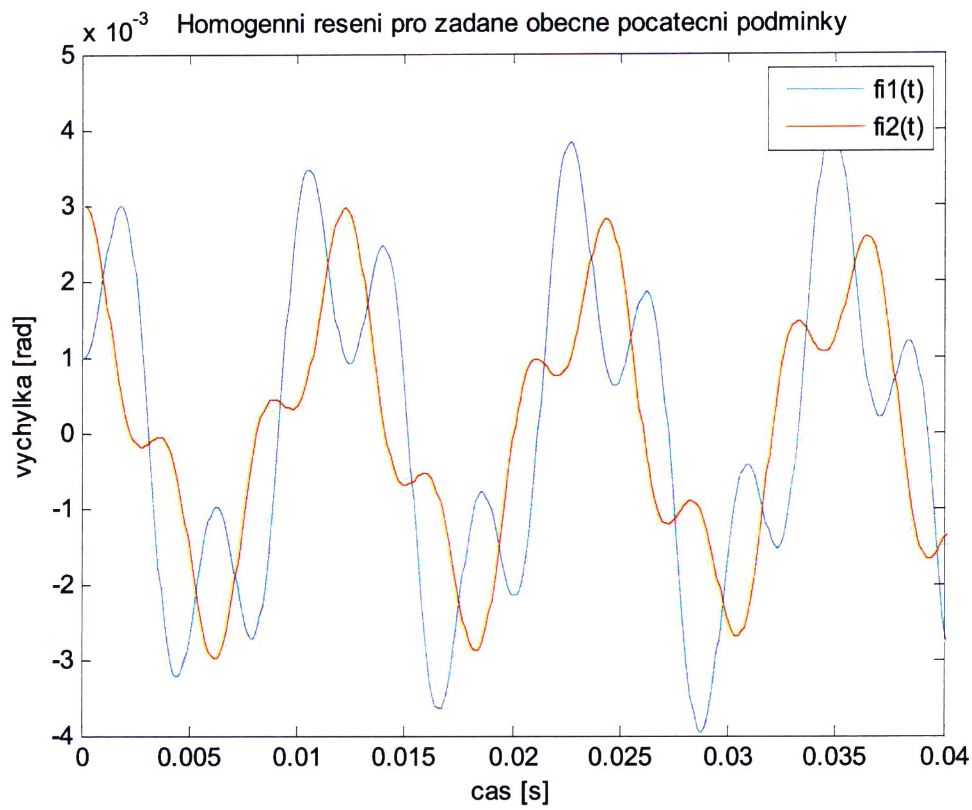




Tohle už v referátu být nemusí






x 10^-3
Homogenni reseni pro zadane obecne pocatecni podminky
fi1(t)
fi2(t)
vychylka [rad]
cas [s]
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
0.03
0.035
0.04