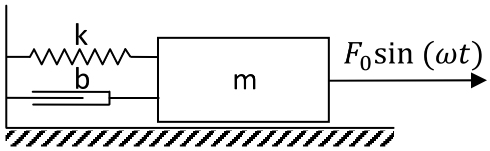
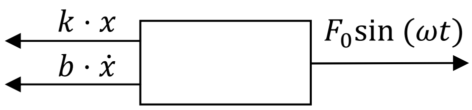



*Dáno: m, b, k, $F_0$, ω*
*Určete: amplitudu a fázi vynucených kmitů,*
*amplitudu síly přenášené do rámu*

==========================================================================




$$m\ddot{x} = F_0\, sin(\omega t) - b\dot{x} - kx \tag{1}$$
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\, sin(\omega t) \tag{2}$$
$$\ddot{x} + 2b_r\Omega\dot{x} + \Omega^2 x = \frac{F_0}{m} sin\,(\omega t) \tag{3}$$

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *...vlastní úhlová frekvence netlumené soustavy,* $b_r = \frac{b}{2\Omega m}$ *... poměrný útlum*

*Celkové řešení má tvar* $x = x_h + x_p$ *,kde* $x_h$ *je homogenní řešení a* $x_p$ *je řešení partikulární.*

*Homogenní řešení* $x_h$ *bychom dostali řešením charakteristické rovnice* $\lambda^2 + 2b_r\Omega\lambda + \Omega^2 = 0$. *Pro podkritické tlumení, tj. pro* $0 \le b_r \le 1$, *vychází* $\lambda_{1,2} = -b_r\Omega \pm i\Omega_b$, *kde* $\Omega_b = \Omega\sqrt{1 - b_r^2}$ *… vlastní úhlová frekvence tlumené soustavy. Homogenní řešení tak můžeme psát ve tvaru:*

$$x_h = e^{-b_r\Omega t}(Acos(\Omega_b t) + Bsin(\Omega_b t)) \tag{4}$$

*Nás v tomto příkladu ale zajímá ustálené kmitání, tj. kmity vynucené buzením, které popisuje partikulární řešení. Podle pravé strany rovnice (buzení) hledáme i partikulární řešení ve tvaru:* $x_p = r \cdot sin\,(\omega t - \varphi)$, *kde musíme určit* $r$ *… amplituda kmitů a* $\varphi$ *… fázové posunutí.*

$$x_p = r \cdot sin\,(\omega t - \varphi) \tag{5}$$
$$\dot{x}_p = r \cdot \omega \cdot cos\,(\omega t - \varphi) \tag{6}$$
$$\ddot{x}_p = -r \cdot \omega^2 \cdot sin\,(\omega t - \varphi) \tag{7}$$

*Dosadíme* $x_p$ *a derivace za x do rovnice (3)*

$$-r\omega^2 \cdot sin(\omega t - \varphi) + 2b_r\Omega r\omega \cdot cos(\omega t - \varphi) + \Omega^2 r \cdot sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} sin(\omega t)$$
$$= \frac{F_0}{m} sin\,[(\omega t - \varphi) + \varphi] = \frac{F_0}{m}[sin(\omega t - \varphi) \cdot cos\,\varphi + cos(\omega t - \varphi) \cdot sin\,\varphi] \tag{8}$$

*"Finta" s přičtením nuly* *umožňuje upravit pravou stranu a porovnat koeficienty u sin a cos.*

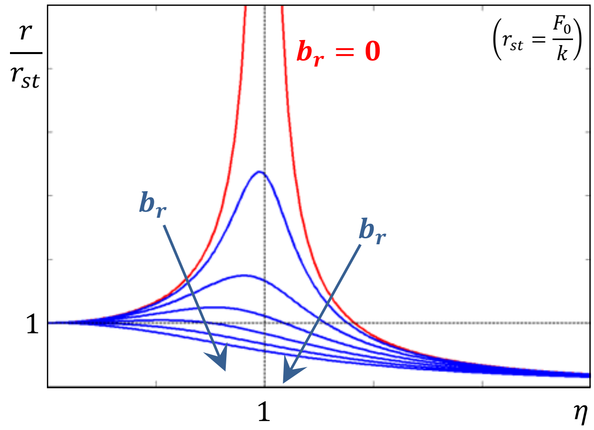
$$(\Omega^2 - \omega^2)r = \frac{F_0}{m} cos\,\varphi \tag{9}$$
$$2b_r\Omega r\omega = \frac{F_0}{m} sin\,\varphi \tag{10}$$

*Tak jsme získali dvě rovnice pro dvě hledané neznámé* $r$, $\varphi$. *Ty teď určíme ze vztahů:*

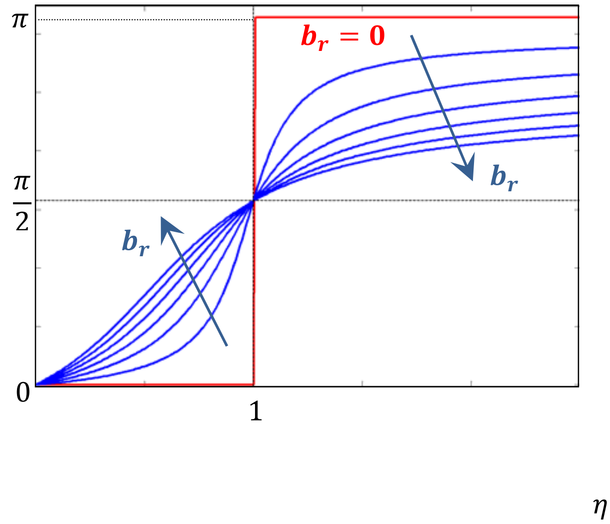
$$tg(\varphi) = \frac{2b_r\Omega\omega}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{2b_r\eta}{1 - \eta^2} \qquad (\eta = \tfrac{\omega}{\Omega} \text{ … činitel naladění}) \tag{11}$$

$$r = \sqrt{\frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2b_r\Omega\omega)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\Omega^2\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}} \tag{12}$$

*Amplitudová charakteristika*




*Fázová charakteristika*



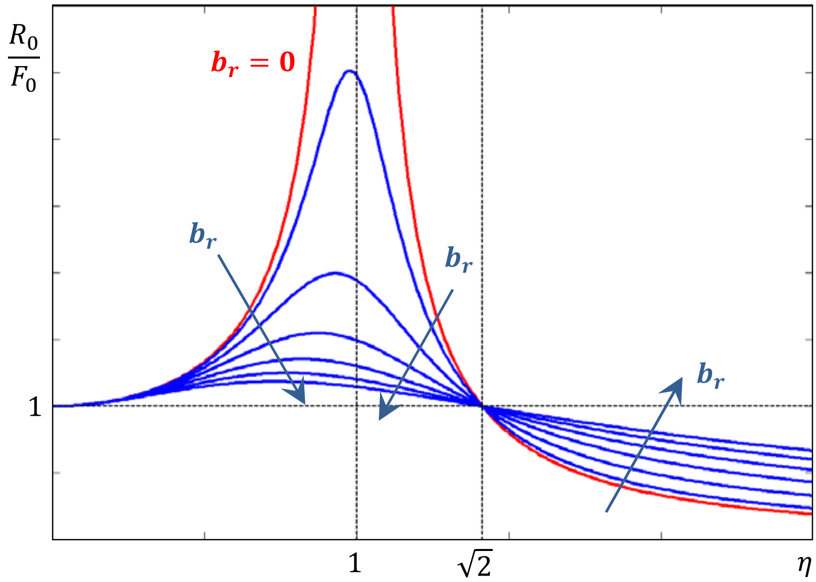

*Amplituda síly do rámu*

$$R = kx + b\dot{x} = \underbrace{k \cdot r}_{R_0 \cdot cos(\varphi_R)} \cdot sin(\omega t - \varphi) + \underbrace{b \cdot \omega \cdot r}_{R_0 \cdot sin(\varphi_R)} \cdot cos(\omega t - \varphi) = R_0 \cdot sin(\omega t - \varphi + \varphi_R) \qquad (13)$$

$$R_0 = \sqrt{(k^2 r^2 + b^2 \omega^2 r^2)} = \frac{\frac{F_0}{k}\sqrt{(k^2+b^2\omega^2)}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} = \frac{F_0\sqrt{1+\left(\frac{2b_r\Omega m\omega}{k}\right)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} = \frac{F_0\sqrt{1+(2b_r\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} \qquad (14)$$

$$\frac{R_0}{F_0} = \frac{\sqrt{1+(2b_r\eta)^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2b_r\eta)^2}} \qquad (15)$$

*Amplituda síly do rámu*



*Průběh výchylky v závislosti na čase (tj. celkové řešení):*

$$x = x_h + x_p = e^{-b_r\Omega t}\big(A\cos(\Omega_b t) + B\sin(\Omega_b t)\big) + r \cdot \sin(\omega t - \varphi) \tag{16}$$

$$\dot{x} = e^{-b_r\Omega t}[(-Ab_r\Omega + B\Omega_b)\cos(\Omega_b t) - (Bb_r\Omega + A\Omega_b)\sin(\Omega_b t)] + r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi) \tag{17}$$

*Pro zjištění konstant A, B dosadíme počáteční podmínky:* $t = 0,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$

$$x_0 = A + r \cdot \sin(-\varphi) \tag{18}$$

$$v_0 = -Ab_r\Omega + B\Omega_b + r \cdot \omega \cdot \cos(-\varphi) \tag{19}$$

*Z toho plyne:*

$$A = x_0 + r \cdot \sin(\varphi) \tag{20}$$

$$B = \frac{1}{\Omega_b}[v_o + (x_0 + r \cdot \sin(\varphi))b_r\Omega - r \cdot \omega \cdot \cos(\varphi)] \tag{21}$$

*Po dosazení vypočtených konstant dostáváme pro časový průběh výchylky vztah:*

$$x = e^{-b_r\Omega t}\left((x_0 + r \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(\Omega_b t) + \frac{1}{\Omega_b}(v_o + (x_0 + r \cdot \sin\varphi)b_r\Omega - r \cdot \omega \cdot \cos\ \varphi) \cdot \sin(\Omega_b t)\right) + \\ + r \cdot \sin(\omega t - \varphi) \tag{22}$$

*Průběh výchylky pro nulové počáteční podmínky*