Numerická matematika A – 10.9.2015

A1.

a) Kvadratická odchylka polynomu nejvýše 1. stupně $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ je

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i \left(p_1(x_i) - y_i\right)^2 .$$

Optimální polynom $p_1^*(x)$ v daném případě má splňovat

$$\delta^2(p_1^*(x)) \leq \delta^2(p_1(x)),$$

tj. hledáme takový polynom pro který je kvadratická odchylka minimální. Všimněme si, že kvadratická odchylka pro tento případ je funkcí dvou proměnných (koeficientů a_0 a a_1).

$$\delta^2(p_1(x)) = \sum_i \left(p_1(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_i \left(a_0 + a_1 x_i - y_i\right)^2 = G(a_0, a_1)$$

b) Kvadratická odchylka je hladká funkce proměnných a_0 a a_1. Minimum kvadratické odchylky tedy může nastat pouze ve stacionárním bodě, tj. dostáváme podmínky $\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial a_a} = 0$. Tedy po zderivování

$$2\sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, 1 = 0,$$

$$2\sum_i (a_0 + a_1 x_i - y_i)\, x_i = 0.$$

Upravíme do tvaru

$$a_0 \sum_i 1 + a_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i$$

$$a_0 \sum_i x_i + a_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i$$

c) Nejprve vypočteme součty

$$\sum_i 1 = 5, \qquad \sum_i x_i = 4, \qquad \sum_i x_i^2 = 10, \sum_i y_i = 5.3, \qquad \sum_i x_i y_i = 14.1$$

Tedy řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 14.1 \end{pmatrix}$$

Řešení je $a_0 = -0.1$, $a_1 = 1.45$ a optimální polynom $p_1^*(x) = -0.1 + 1.45x$

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 3y^3 = \sin(5\pi x) \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

a) Rovnici zapíšeme

$$y'' = \underbrace{-y' - 3y^3 + \sin(5\pi x)}_{G(x,y,y')}$$

Vidíme, že G, G_y, $G_{y'}$ jsou spojité (ověřit výpočtem!?), tedy hledaná oblast je $\mathcal{G} = \mathbb{R}^3$.

b) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

$$\begin{aligned} z_1 &= y & z_1' &= z_2 \\ z_2 &= y' & z_2' &= \sin(5\pi x) - z_2 - 3z_1^3 \end{aligned}$$

Nebo také $Z' = F(x, Z)$, kde

$$F(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \sin(5\pi x) - z_2 - 3z_1^3 \end{pmatrix}$$

c) *Volte $h = 0.1$ a určete přibližnou hodnotu řešení $y(0.2)$ užitím Collatzovy metody.*

$$x_0 = 0, Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, h = 0.1$$

$$\boldsymbol{k}_1 = F(0, Z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(5 \cdot \pi \cdot 0) - 0 - 3 \cdot 0^3 \end{pmatrix}$$

$$Z_{pom} = Z^{(0)} + 0.05\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F(0.05, Z_{pom}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(5 \cdot \pi \cdot 0.05) - 0 - 3 \cdot 0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(1)} = Z^{(0)} + 0.1\boldsymbol{k}_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0707 \end{pmatrix}.$$

A3. Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4$, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1 \rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0 \qquad u(1, t) = 1 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Ověříme podmínky souhlasu:

$$\text{V bodě x = 0, t = 0 je podmínka splněna:} \quad 0 = 0^2,$$

$$\text{V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna:} \quad 1 = 1^2.$$

b) *Zapište jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem:*

Užijeme náhrady

$$\frac{\partial u}{\partial t}(P_i^k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \approx \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) = \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

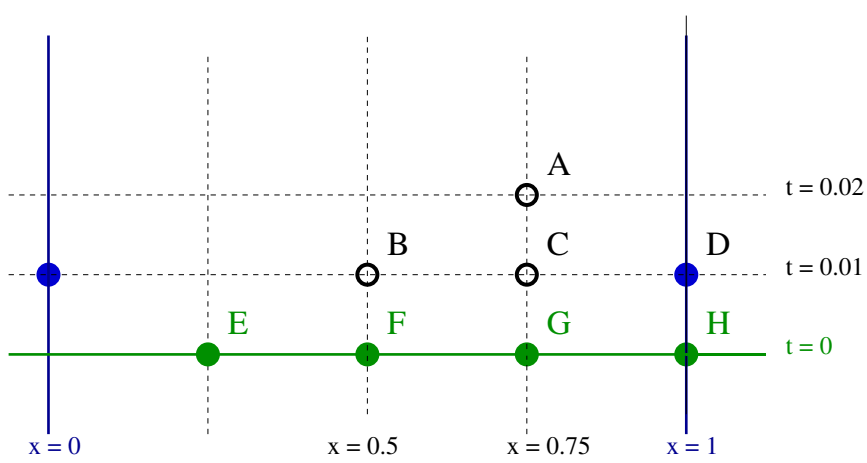
kde $U_i^k \approx u(P_i^k) = u(x_i, t_k)$.

c) *Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.75; 0.02]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.*

Pro danou volbu spočteme nejprve hodnotu σ, tedy

$$\sigma = \frac{2\tau}{h^2} = \frac{2 \cdot 0.01}{0.25^2} = 0.32 \leq \frac{1}{2},$$

(podmínka stability je splněna). Načrtneme si obrázek sítě:



Hodnotu v bodě A pak spočteme dle explicitního schematu

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + 0.01 f(C).$$

Hodnoty U_B, U_C jsou hodnoty aproximací v bodech na první časové vrstvě a $U_D = 1$ je hodnota daná okrajovou podmínkou. Spočteme tedy nejprve hodnoty na 1. časové vrstvě:

$$\begin{aligned} U_B &= 0.32(0.25^2) + 0.36(0.5^2) + 0.32(0.75^2) + 0.01 \cdot f(0.5, 0) = 0.25, \\ U_C &= 0.32(0.5^2) + 0.36(0.75^2) + 0.32(1) + 0.01 \cdot f(0.75, 0) = 0.5625, \end{aligned}$$

kde jsme rovnou dosadili příslušné hodnoty z nulté časové vrstvy v bodech E, F, G, H. Dopočteme hodnotu aproximace v bodě A

$$U_A = 0.32(0.25) + 0.36(0.5625) + 0.32(1) - 0.04 = 0.5625$$

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

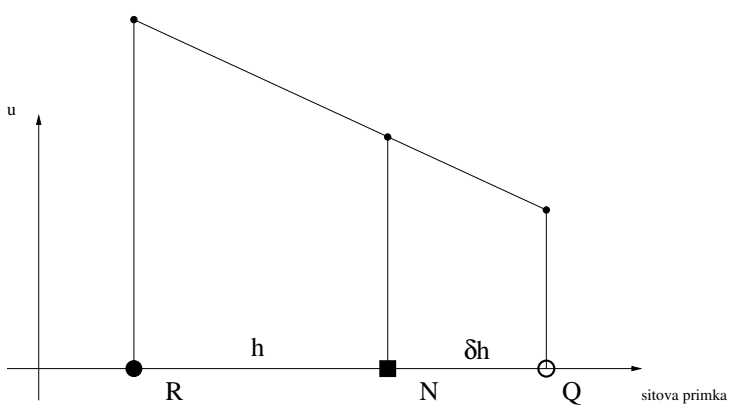
$$-\triangle u = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.5]$, $[1.5; 1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x, y) = xy$.

a) Symbol $\triangle$ je Laplaceův operátor defin.

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) Nejprve si nakreslíme schema pro neregulární uzel a sousední regulární uzel



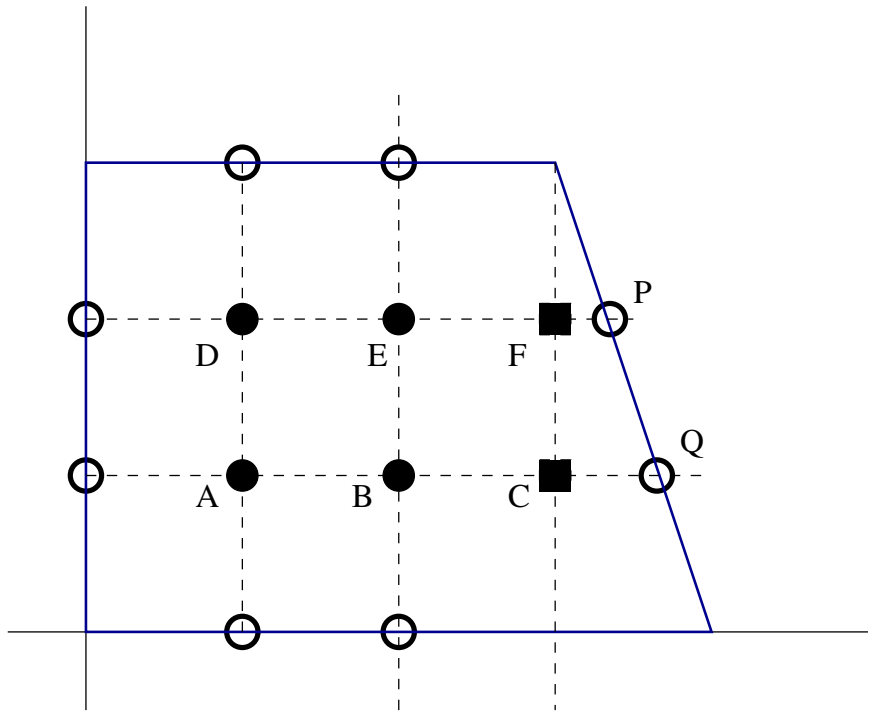
následně pak z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{U_N - U_R}{h} = \frac{\varphi(Q) - U_R}{(1 + \delta)h},$$

a tedy po úpravě

$$\varphi(Q) = (1 + \delta)U_N - \delta U_R.$$

d) *Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.*



Rovnice v regulárních uzlech

$$
\begin{aligned}
4U_A - U_B - U_D - (0 \cdot 0.5) - (0.5 \cdot 0) &= 0.5^2 \cdot 0.5, \\
4U_B - U_A - U_C - U_E - (1 \cdot 0) &= 0.5^2 \cdot 0.5, \\
4U_D - U_A - U_E - (0 \cdot 1) - (0.5 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot 1, \\
4U_E - U_D - U_B - U_F - (1 \cdot 1.5) &= 0.5^2 \cdot 1,
\end{aligned}
$$

a pak v uzlech neregulárních

$$
\begin{aligned}
(1 + \frac{2}{3})U_C - \frac{2}{3}U_B &= (0.5 \cdot (1.5 + \frac{2}{3} \cdot 0.5)) = 0.9167, \\
(1 + \frac{1}{3})U_F - \frac{1}{3}U_E &= (1 \cdot (1.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.5)) = 1.6667,
\end{aligned}
$$

Numerická matematika B – 10.9.2015

B1.

a) Matice je ostře diagonálně dominantní (pro řádky ne, neboť v druhém řádku neplatí $2 > 1 + |-1|$). Ve sloupcích ale ano:

$$\begin{array}{lcl} \text{1. sloupec} & 5 > & 1+1 \\ \text{2. sloupec} & 2 > & 1+0 \\ \text{3. sloupec} & 4 > & |-2|+|-1| \end{array}$$

Matice není symetrická, tedy není SPD (pozitivní definitnost již tedy nevyšetřujeme).

b) Jacobiho metoda je konvergentní, neboť dle a) je matice ODD.

Iterace počítáme dle

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 1\cdot x_2^k + 2\cdot x_3^k\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - 1\cdot x_1^k + 1\cdot x_3^k\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - x_1^k\right) \end{aligned}$$

Tedy z počáteční iterace $X^{(0)} = B$ dostaneme iteraci $X^{(1)}$

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \rightarrow \qquad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

c)

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{pmatrix} -11/5 \\ -2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \qquad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = 2$$

B2. Cauchyova úloha

$$y'' + y' + 10y = 1 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

a) *Určete interval maximálního řešení dané úlohy.*
Lineární ODR 2. řádu s konst. koeficienty a pravá strana také konstanta. Tedy $I = (-\infty, +\infty)$.

b) *Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $y'(1)$.*
Nejprve převedeme na soustavu ODR

$$\begin{array}{ll} y_1 = y, & y_1' = y_2, \\ y_2 = y' & y_2' = 1 - y_2 - 10y_1 \end{array}$$

nebo $Y' = F(x, Y)$, $Y = (y_1, y_2)^T$ a

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2, \\ 1 - y_2 - 10y_1 \end{pmatrix}.$$

Collatzova metoda

$$x_0 = 0, Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h = 1$$

$$\boldsymbol{k}_1 = F(x_0, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0, \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$Y_{pom} = Y^{(0)} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 0, \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4.5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F(x_0 + h/2, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 1 + 4.5 - 10 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} -4.5 \\ -4.5 \end{pmatrix}.$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -4.5 \\ -4.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ -4.5 \end{pmatrix}$$

Tedy vzhledem k tomu, že $Y = (y_1, y_2)^T = (y, y')^T$ máme

$$y'(1) = y_2(1) \approx -4.5$$

B3.

a) Nejprve podmínky souhlasu

V bodě x = -1, t = 0 je podmínka splněna: $2 \cdot (-1) + 2 = 0,$

V bodě x = 1, t = 0 je podmínka splněna: $2 \cdot 1 + 2 = 4 - 0.$

b) Explicitní schéma je dáno vzorcem:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k$$

Podmínka stability

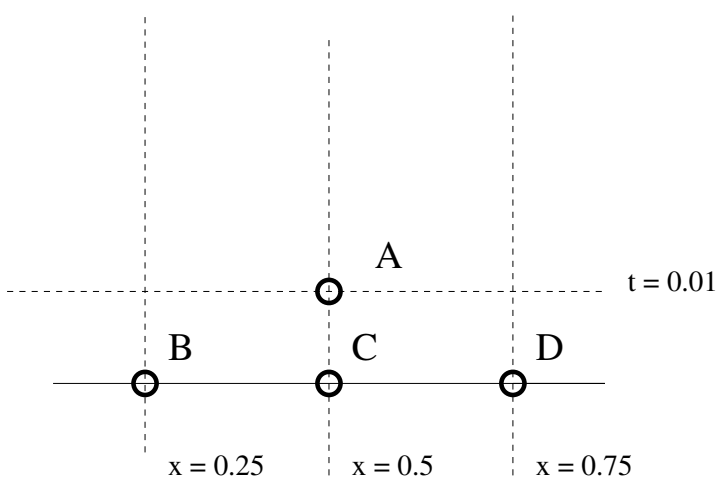
$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

v našem případě

$$\sigma = \frac{2 \cdot 0.01}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16 \cdot 0.02 = 0.32 \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy explicitní schéma je stabilní.

c) Nejprve si nakreslíme obrázek:



Hodnotu v bodě A počítáme dle vzorce

$$U_A = 0.32(U_B + U_D) + 0.36U_C + 0.01f(C),$$

kde hodnoty v bodech B, C, D nulté časové vrstvy jsou dány počáteční podmínkou $(2x + 2)$, tedy

$$\begin{aligned} U_B &= 2 \cdot 0.25 + 2 = 2.5, \\ U_C &= 2 \cdot 0.5 + 2 = 3, \\ U_D &= 2 \cdot 0.75 + 2 = 3.5. \end{aligned}$$

Dosazením dostáváme

$$U_A = 0.32(2.5 + 3.5) + 0.36 \cdot 3 + 0.01 \cdot 4 \cdot 0.5 = 1.92 + 1.08 + 0.02 = 3.02.$$

B4.

$$-\left(x^2y'\right)' + (x+1)y = -x^3 \qquad y(1) = 0, y(5) = 0.$$

a) Postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení jsou:

Podmínka I. Funkce p, p', q, f jsou spojité, tj. $p, p', q, f \in \mathcal{C}(\langle 1, 5\rangle)$.

Podmínka II. Funkce $p(x) > 0, q(x) \geq 0$ v intervalu $\langle 1, 5\rangle$.

Pro danou úlohu máme $p(x) = x^2$, $q(x) = x + 1$, a $f(x) = -x^3$. Vidíme, že podmínky I. a II. jsou splněny, existuje tedy právě jedno řešení dané úlohy.

b) Rovnice zapíšeme v uzlech $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, dle vzorce tedy máme

$$\begin{aligned}
-2.25 \cdot \underbrace{0}_{y_0} + (2.25 + 6.25 + 1^2(2+1))y_1 - 6.25y_2 &= -2^3, \\
-6.25y_1 + (6.25 + 12.25 + 1^2(3+1))y_2 - 12.25y_3 &= -3^3, \\
-12.25y_2 + (12.25 + 20.25 + 1^2(4+1))y_3 - 20.25 \cdot \underbrace{0}_{y_4} &= -4^3.
\end{aligned}$$

Hodnoty $y_0 = 0$ a $y_4 = 0$ jsou dány okrajovou podmínkou. Dosadíme a dostáváme v maticovém zápise

$$\begin{pmatrix} 11.5 & -6.25 & 0 \\ -6.25 & 22.5 & -12.25 \\ 0 & -12.25 & 37.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -27 \\ -64 \end{pmatrix}.$$

Snadno ukážeme, že matice této soustavy je ODD (např. v řádcích), tj.

$$11.5 > 6.25, \qquad 22.5 > 12.25 + 6.25, \qquad 37.5 > 12.25.$$