ZTRÁTA STABILITY KOMPOZITNÍCH DESEK

TOMÁŠ MAREŠ

ČVUT FAKULTA STROJNÍ

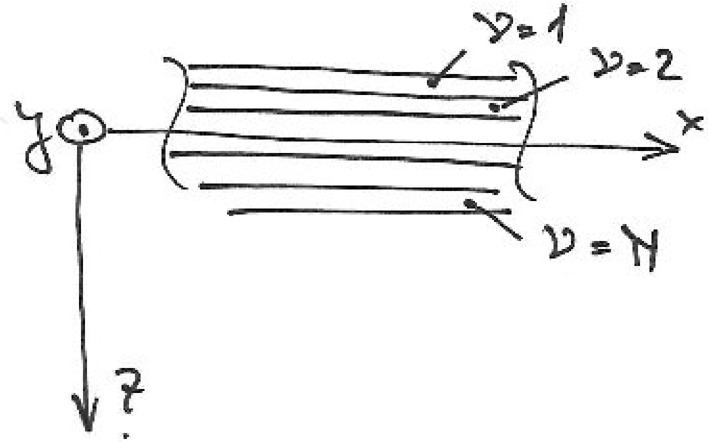
- DESKA LAMINÁTOVÁ (NĚKOLIK VRSTEV ORTOTROPNÍCH)
- DESKA TENKÁ (KIRCHHOFFOVA HYPOTÉZA)
- LINEÁRNÍ ELASTICKÁ

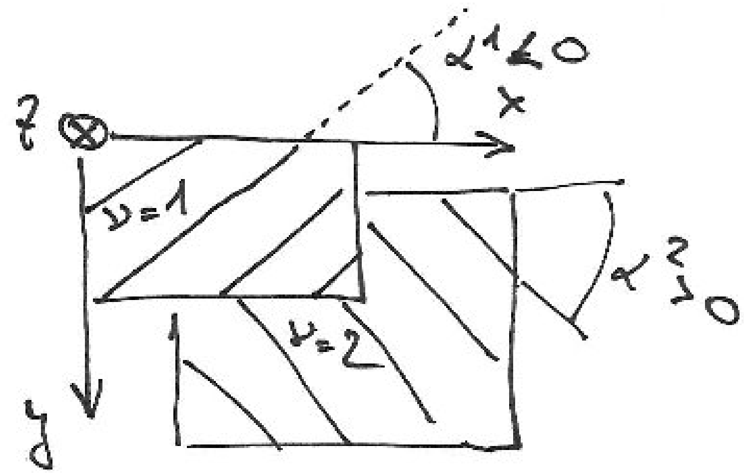
(KLASICKÁ LAMINAČNÍ TEORIE)

ANALÝZA ELASTICKÉHO TĚLESA

- ROVNICE ROVNOVÁHY
- DEFORMAČNÍ PODMÍNKY (POKUD NESTAČÍ ROVNICE ROVNOVÁHY)
- SVÁZÁNÍ DEFORMACÍ A SILOVÝCH ÚČINKŮ (KONSTITUTIVNÍ VZTAHY)

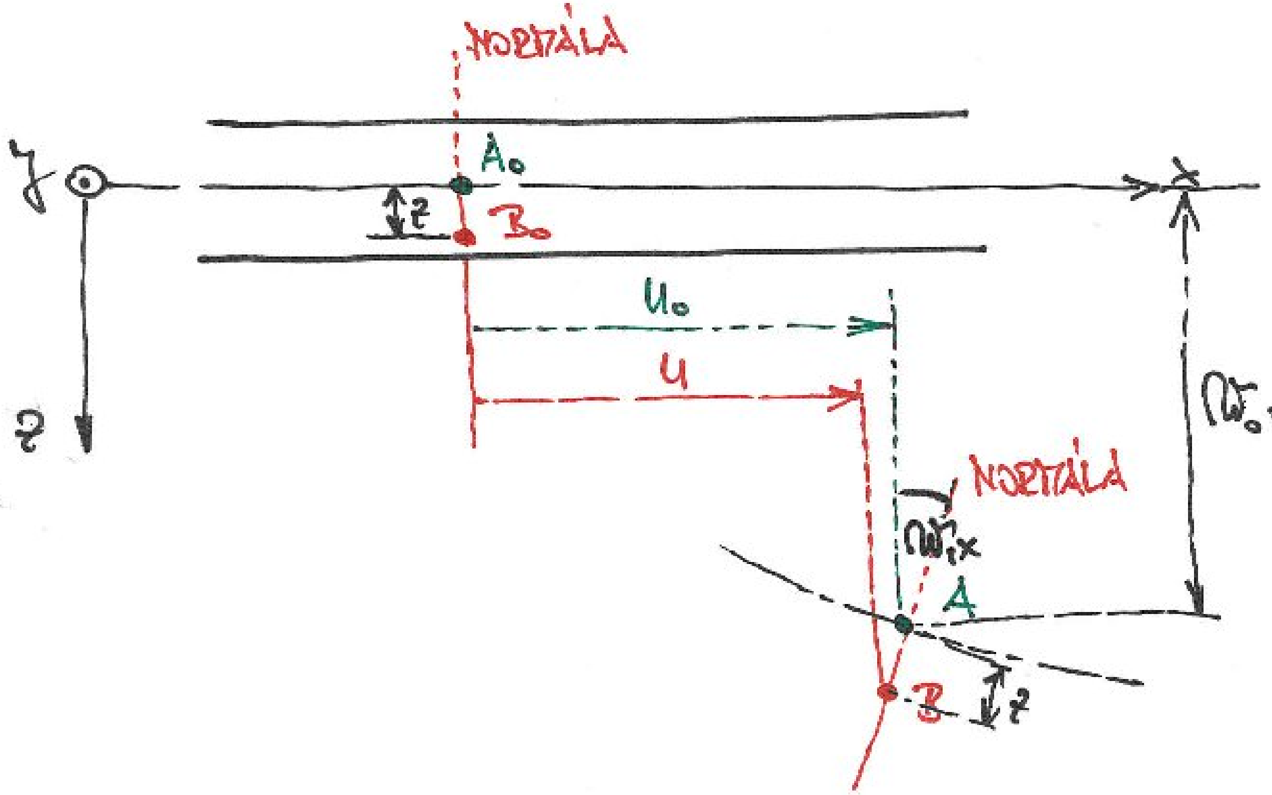
PRO NAŠÍ DESKU Z VRSTEV JEDNOSMĚRNÉHO KOMPOZITU





DEFORMAČNÍ PODMÍNKA

KIRCHHOFFOVA HYPOTÉZA



$w_0 = w(x,y)$, $u_0 = u_0(x,y)$
$v_0 = v_0(x,y)$

$$u = u_0 - z \cdot w_{,x}$$
$$v = v_0 - z \cdot w_{,y}$$

TENZOR MALÝCH DEFORMACÍ

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (i,j = 1,2,3)$$

$$\overset{\times}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u^{0}_{\alpha,\beta} + u^{0}_{\beta,\alpha}\right) - z \cdot w_{,\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,2)$$

$u \rightarrow u_1$
$u_0 \rightarrow u^{0}_1$
$v \rightarrow u_2$
$v_0 \rightarrow u^{0}_2$

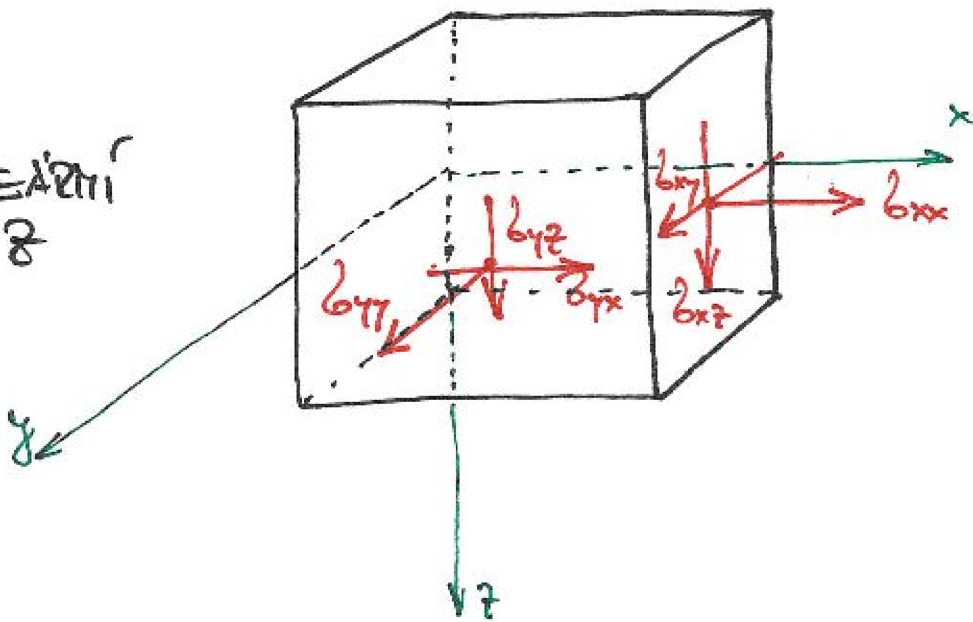
$\varepsilon_{xz} = 0$

$\varepsilon_{yz} = 0$

$\varepsilon_{zz} = -\nu\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)$ ... PŘÍČNÉ SÍLY JSOU MALÉ V POROVNÁNÍ ...

TENZOR NAPĚTÍ

$$\overset{\times}{\sigma}_{ij} = \overset{\times}{E}_{ijkl}\,\overset{\times}{\varepsilon}_{kl} = \text{PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE } z$$

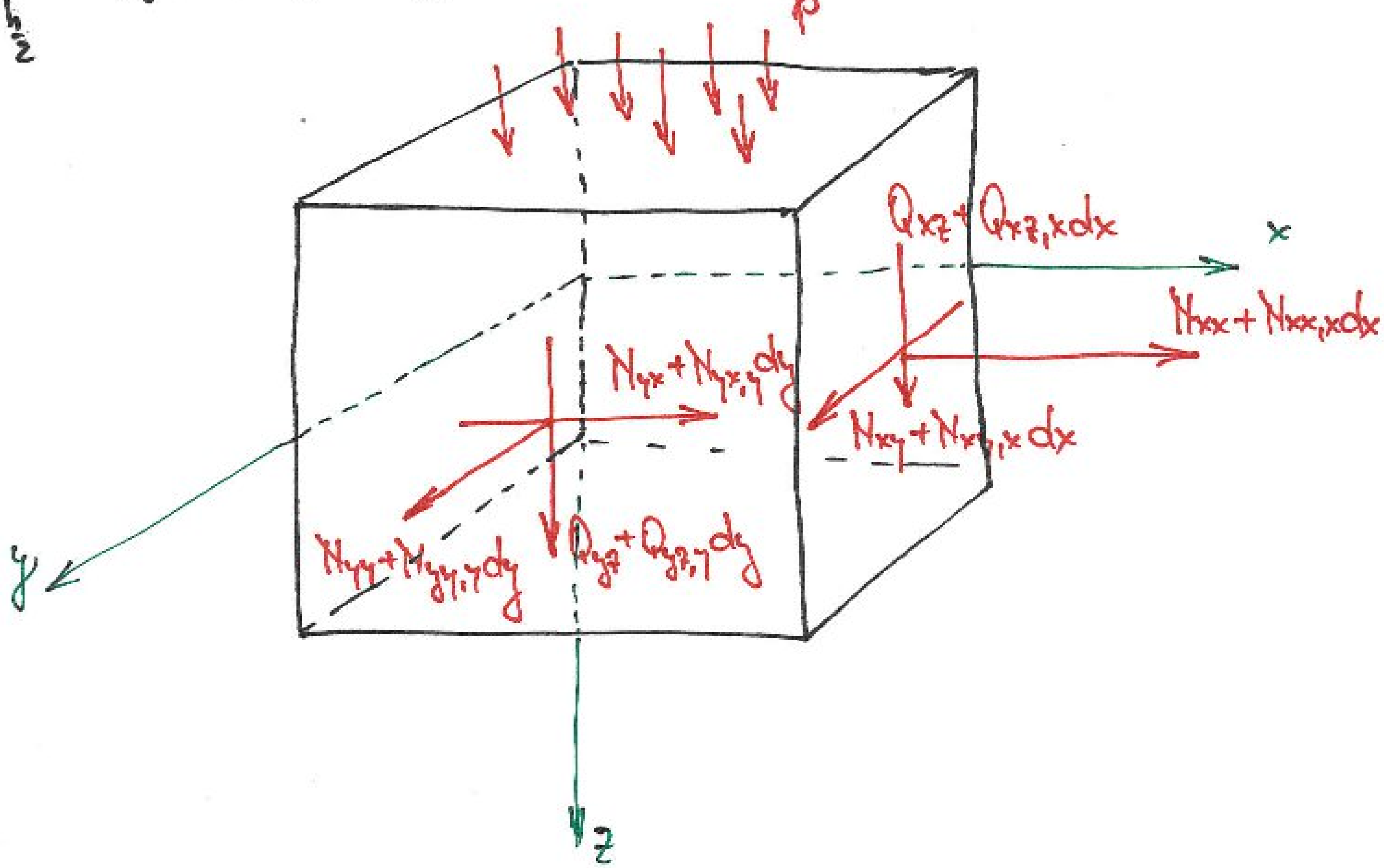


SILOVÁ ROVNOVÁHA ELEMENTU

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E^{x}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, dz \cdot \varepsilon^{0}_{\gamma\delta} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E^{x}_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot z\, dz \cdot w_{,\gamma\delta}$$

KŘIVOST $\quad \varkappa = -w_{,\gamma\delta}$

MATICOVĚ $\quad N = A \cdot \varepsilon^{0} + B \cdot \varkappa$



z:

(1) $\quad P + Q_{yz,y} + Q_{xz,x} = 0$

$y: \; N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0$

$x: \; N_{yx,y} + N_{xx,x} = 0$

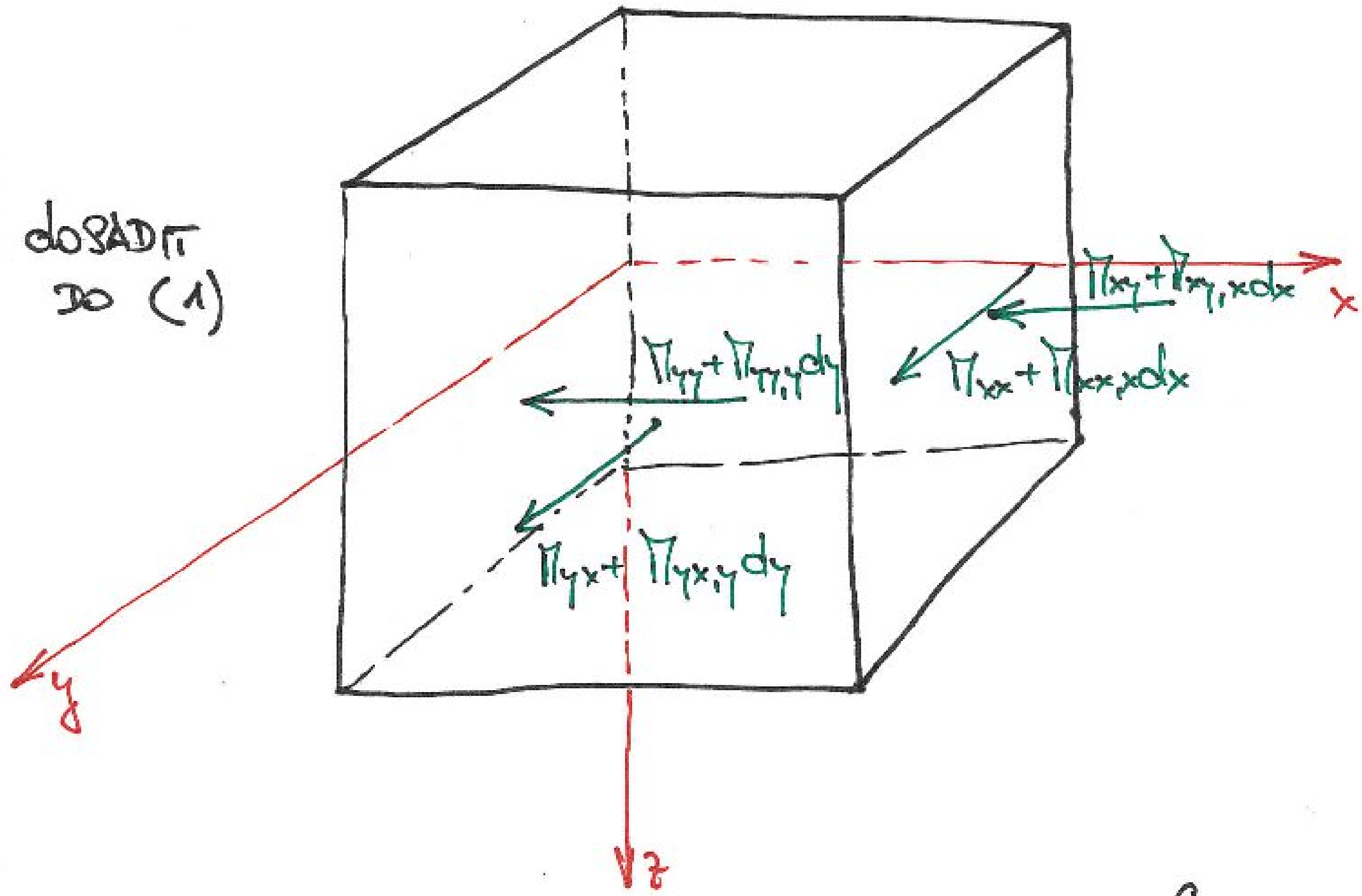
MOMENTOVÁ ROVNOVÁHA ELEMENTU

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E^{x}_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot z\,dz \cdot \varepsilon_{0\gamma\delta} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E^{x}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, z^2 dz\, w_{,\gamma\delta}$$

MATICOVĚ $\quad M = B \cdot \varepsilon_0 + D\kappa$

$$\left.\begin{aligned} x:&\ M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_{yz} = 0 \\ y:&\ M_{xx,x} + M_{yx,y} - Q_{xz} = 0 \end{aligned}\right\} \text{dosadit do (1)}$$

$$z:\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} \Rightarrow M_{yx} = M_{xy}$$



SYMETRICKÉ LAMINÁTY $\quad B = 0$

$N = A\,\varepsilon_0$

$M = D\,\varkappa$

DOSAZENÍM DO ROVNICE (1)

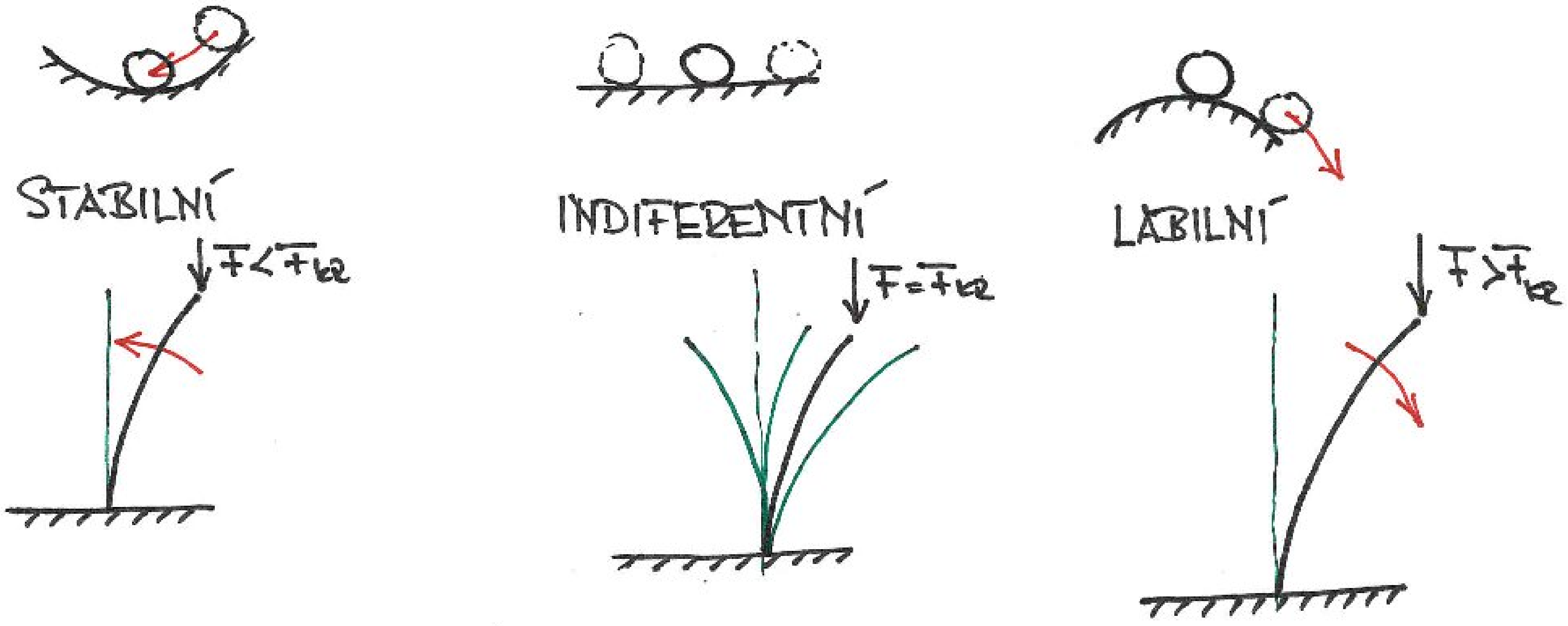
$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot w_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p \qquad \text{(DŮLEŽITÁ RCE)}$$

Z OSTATNÍCH ROVNIC

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}\, u^{0}_{\gamma,\delta\beta} = 0$$

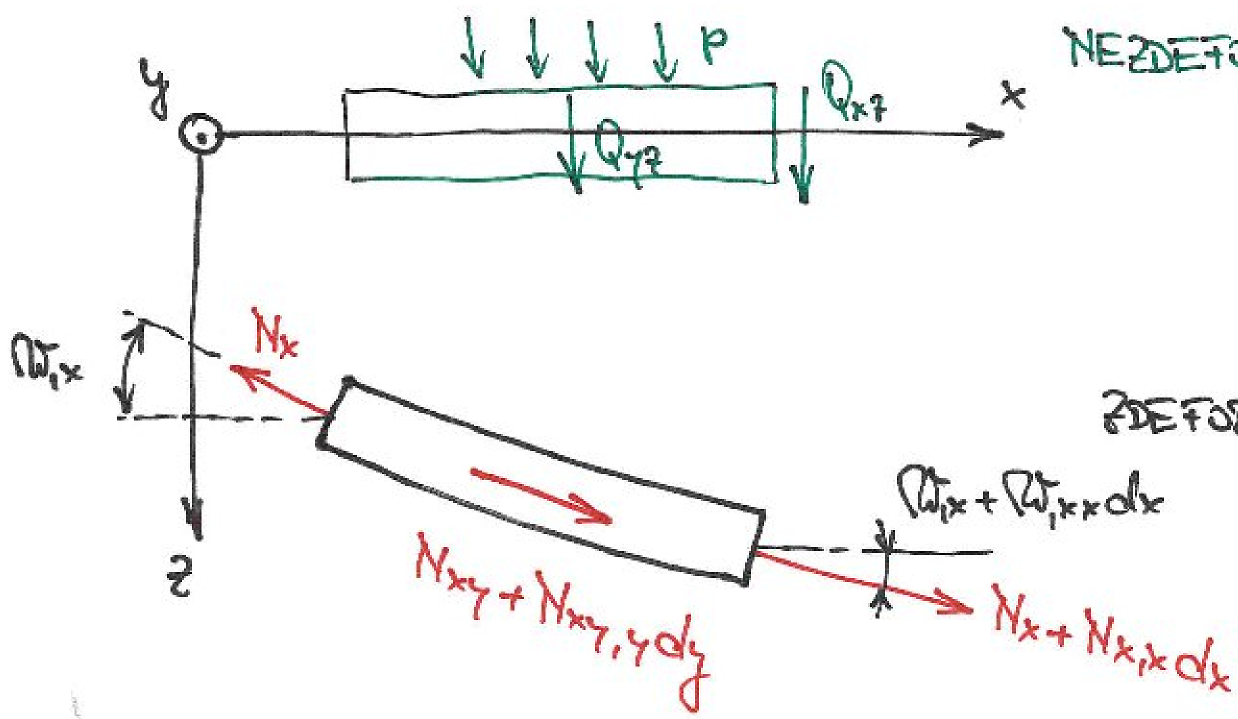
NYNÍ KE ZTRÁTĚ STABILITY

ROVNOVÁHA



ROVNOVÁHA JE ZACHOVÁNA
I VE ZDEFORMOVANÉM
STAVU

ROVNOVÁHA VE ZDEFORMOVANÉM STAVU



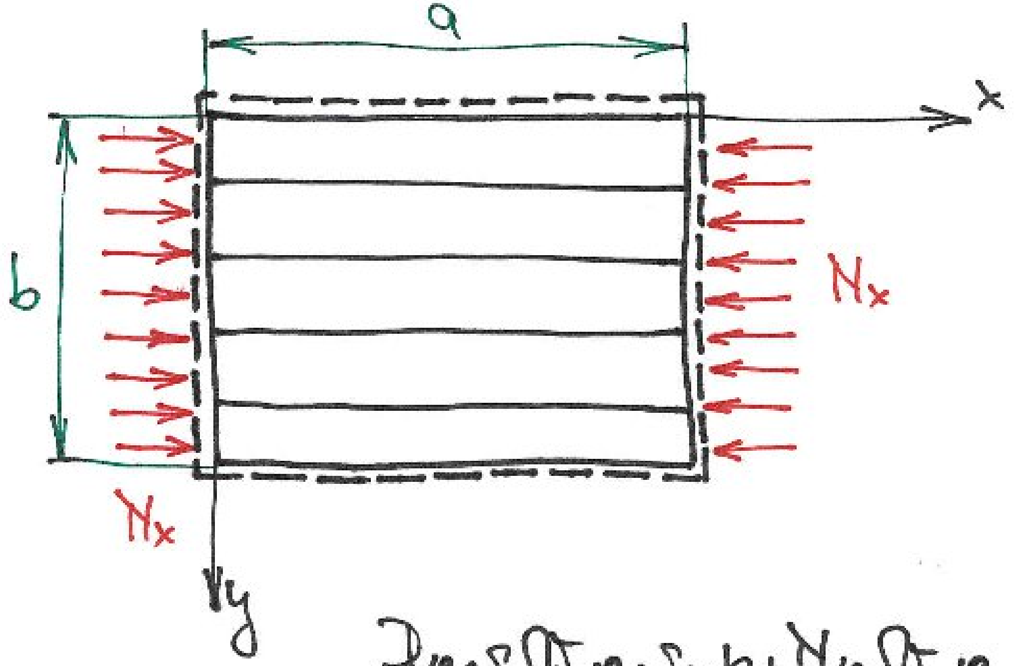
NEZDEFORMOVANÝ: $p + Q_{yz,y} + Q_{xz,x} = 0$

ZDEFORMOVANÝ: $p + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} = 0$

(DŮLEŽITÁ RCE) $D_{\alpha\beta\gamma\delta}\, w_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p$

PŘEJDE DO ROVNICE $D_{\alpha\beta\gamma\delta}\, w_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}$

PŘÍKLAD: ZTRÁTA STABILITY JEDNOSMĚRNÉHO LAMINÁTU



$\gamma \equiv x$

(JEDNA VRSTVA)

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{bmatrix} E_1^x & 0 & 0 & \nu_{21} E_1^x \\ 0 & G_{12} & G_{12} & 0 \\ 0 & G_{12} & G_{12} & 0 \\ \nu_{12} E^x & 0 & 0 & E_2^x \end{bmatrix} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha\beta\gamma\delta} = p + N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} \Rightarrow D_1 w_{,xxxx} + D_{12} w_{,xxyy} + D_2 w_{,yyyy} = N_x w_{,xx}$$

$$p = 0 \,, \quad D_1 = \frac{E_1^x h^3}{12} \,, \quad D_{12} = \frac{\nu_{21} E_1^x h^3}{12} + \frac{\nu_{12} E_2^x h^3}{12} + \frac{G_{12} h^3}{3} \,, \quad D_2 = \frac{E_2^x h^3}{12}$$

ROZVOJ VE FOURIEROVU ŘADU

$$w = \sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$$

DOSTÁVAME

$$\sum_{k,n} a_{kn}\left(D_1\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 + D_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 + D_2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^4 + N_{xx}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b} = 0$$

LN $\Rightarrow$

$$N_{x\,kn} = -\frac{D_1\left(\frac{\pi n}{a}\right)^4 + D_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 + D_2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^4}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

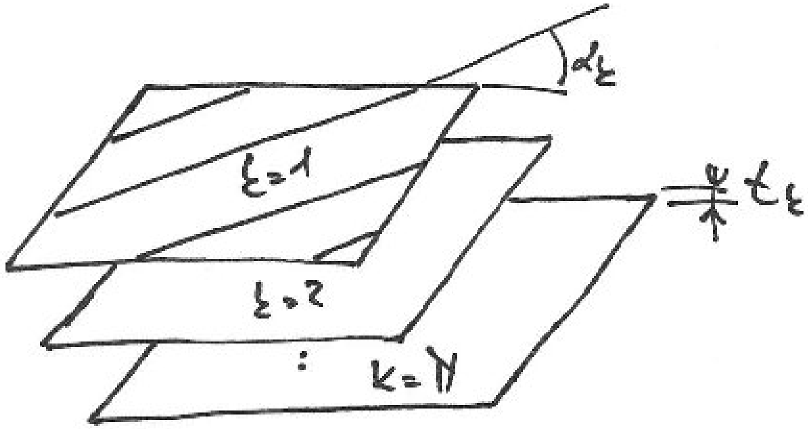
$\uparrow$

TLAK

$$N_{x\,min} = N_{x\,11} = \frac{D_1\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + D_{12}\frac{\pi^4}{a^2b^2} + D_2\left(\frac{\pi}{b}\right)^4}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

VLASTNÍ TVAR kn : $\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi x}{b}$

OPTIMALIZACE LAMINÁTŮ - ÚVOD



NÁVRHOVÉ PARAMETRY

$mat_k, \alpha_k, N, t_k, \ldots$

ROZDĚLIT (VŠECHNY FIXOVAT A OPT. VZHLEDEM K JEDINÉMU např. α_k)

CÍLE: $\sigma_{RED} = konst$

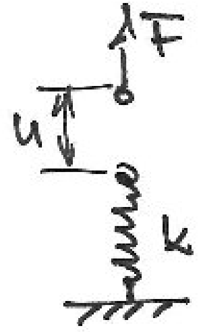
$V \rightarrow min$

$K \rightarrow max$

JSOU-LI VEDLEJŠÍ PODMÍNKY EKVIVALENTNÍ, PAK DOSTÁVÁTE SHODNÉ NÁVRHY

MAXIMALIZACE TUHOSTI MÁ POHODLNOU FORMULACI

MAXIMALIZACE TUHOSTI



$F = k \cdot u$

$u = \frac{F}{k}$

PRÁCE $W = F \cdot u = \frac{F^2}{k}$: $\max k \iff \min W$

$\min F \cdot u$

$\min (f, u)$

Variační počet x Variační metody řešení diferenciálních rovnic

$$A\hat{u} = f \iff \Pi(\hat{u}) = \min_{u \in \mathcal{U}} \Pi(u)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u)$$

$$\Pi(\hat{u}) = -\frac{1}{2}(f, \hat{u}) = -\frac{1}{2} W$$

TEDY ½

$$\max K \Leftrightarrow \min W \Leftrightarrow \max\left(-\frac{1}{2}W\right) \Leftrightarrow \max \Pi(\hat{u})$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{\alpha \in A} \min_{u \in \mathcal{U}} \Pi(u)$$ ... SEDLOVÝ BOD

NEPŘÍJEMNÉ PRO NUMERICKÉ (STOCHASTICKÉ) METODY

VARIAČNÍ POČET + METODA LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORŮ

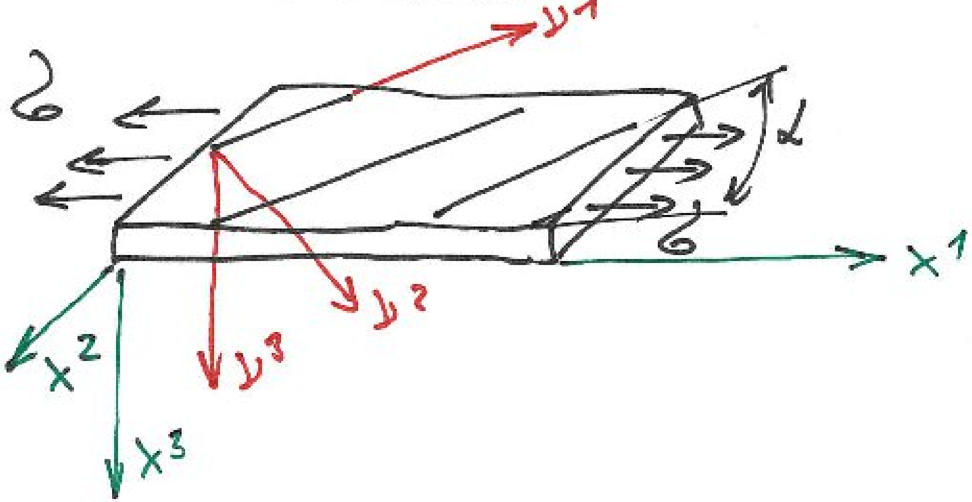
$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha} = \min_{\alpha \in A} \min_{\sigma \in \mathcal{R}} C$$, DOPLŇKOVÁ ENERGIE $C = \frac{1}{2}\sigma C \sigma$

TJ. FUNGUJE JEN V PŘÍPADĚ NULOVÝCH KINEMATICKÝCH VEDL. POD.

ÚPLNÁ DOPLŇKOVÁ ENERGIE

$$\Pi_c = C - W_2$$

NEJJEDNODUŠŠÍ PŘÍKLAD / SNAD JEDINÝ, KDE VYSTAČÍME BEZ NUMERIKY



$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \min_{\alpha \in A} \min_{\sigma \in RR} c$$

$$\min_{\sigma \in RR} c = V \cdot \sigma^2 \overset{x}{C}_{1111}$$

V SOUSTAVĚ SOUŘADNIC ORTOTROPIE y (ROVINNÁ NAPJATOST)

$$\overset{y}{C}_{abcd} = \begin{array}{c|c} {}_{ab}\,\backslash\,{}^{cd} & \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & & & -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ & \frac{1}{4G_{12}} & \frac{1}{4G_{12}} & \\ & \frac{1}{4G_{12}} & \frac{1}{4G_{12}} & \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & & & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overset{x}{C}_{ijkl} = \cos(x_i, y_a)\,\cos(x_j, y_b)\,\cos(x_k, y_c)\,\cos(x_l, y_d)\,\overset{y}{C}_{abcd}$$

$$\overset{x}{C}_{1111} = \cos(x_1, y_a)\,\cos(x_1, y_b)\,\cos(x_1, y_c)\,\cos(x_1, y_d)\,\overset{y}{C}_{abcd}$$

MATICOVĚ

$$\overset{x}{C}_{1111} = \left[c(x_1, y_a) \otimes c(x_1, y_b) \right]^T \begin{array}{c|c|} & ad \\ 11 & \\ 12 & \overset{y}{C} \\ 21 & \\ 22 & \end{array} \left[c(x_1, y_c) \otimes c(x_1, y_d) \right]$$

$$c(x_1, y_a) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

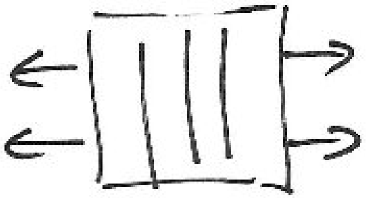
$$\overset{x}{C}_{1111} = c^4\alpha \cdot \frac{1}{E_1} + c^2\alpha\, s^2\alpha \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{21}}{E_2} \right) + s^4\alpha\, \frac{1}{E_2}$$

$$\alpha = \hat{\alpha} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow c^3\alpha\, s\alpha \left(-\frac{4}{E_1} + \frac{2}{G_{12}} - \frac{4\nu_{21}}{E_2} \right) +$$

$$+ c\alpha\, s^3\alpha \left(\frac{4}{E_2} - \frac{2}{G_{12}} + \frac{4\nu_{21}}{E_2} \right) = 0$$

1. $s\alpha = 0$

2. $c\alpha = 0$



3. $\frac{1}{c^3\alpha\, s\alpha} \cdot \square = \square$: $A_1 + A_2 \, tg^2\alpha = 0$ (α neexistuje či jde o inf. sol)