



Výzkumné centrum
pro strojírenskou výrobní techniku
a technologii

MKP a ortotropní materiály

Mechanika kompozitních materiálů

Viktor Kulíšek

Výzkumné centrum pro strojírenskou výrobní techniku a technologii
Horská 3, 128 00 Praha 2 | TEL 221 990 900 | FAX 221 990 999

www.rcmt.cvut.cz

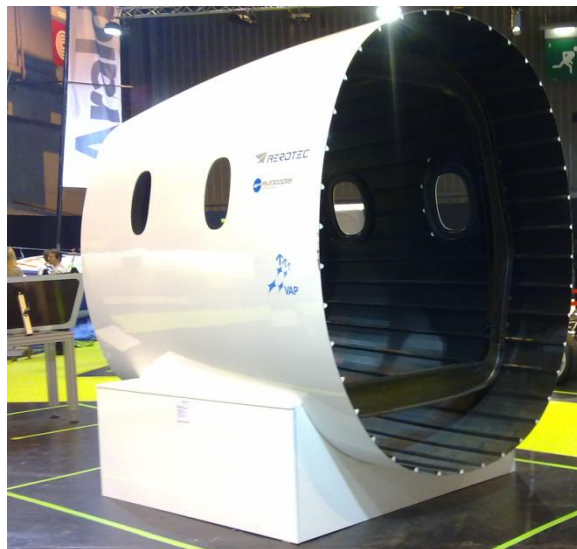
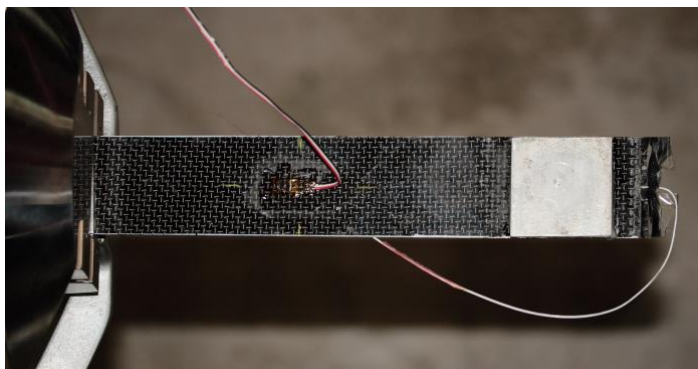
Obsah přednášky

- Úvod
 - Ukázky kompozitních konstrukcí
 - Kompozity a automobilový průmysl
- Jednosměrový kompozit
 - Rozdíl mezi izotropním a ortotropním materiálem
 - Výpočet materiálových konstant
- Laminát & Vrstvené struktury
 - Laminační teorie
 - Přístupy pro modelování laminátových stuktur
 - Přehled používaných elementů
 - Orientace materiálu
- Příklady

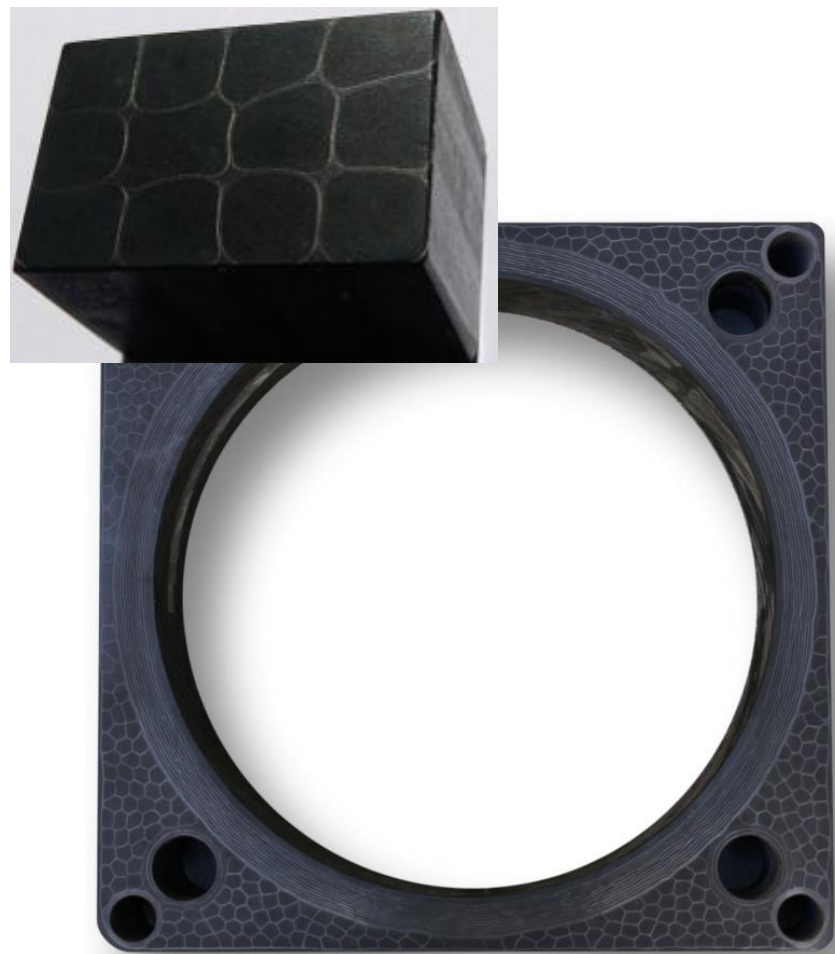
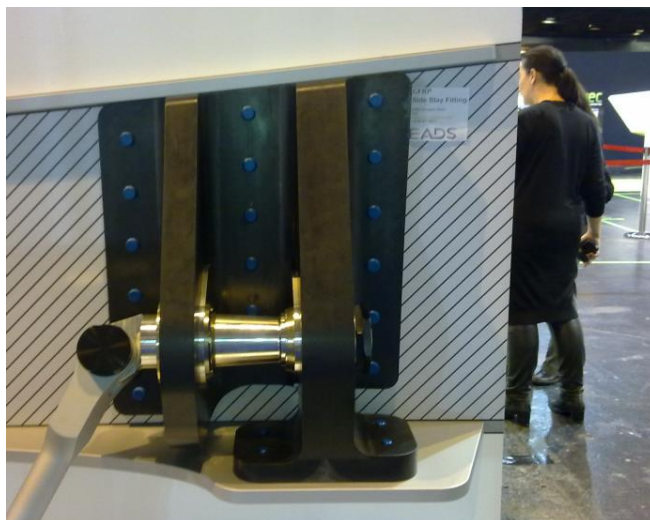
Úvod

- Přednáška zaměřena na výpočty kompozitních konstrukcí metodou konečných prvků
- Metoda konečných prvků (dále MKP) – princip stejný jako u izotropních materiálů
 - obecně je náročnější příprava modelu a vyhodnocení výsledků
- V porovnání s výpočty izotropních materiálů je podstatně důležitější si uvědomit:
 - co se modeluje
 - z jakého materiálu a jakou technologií je konstrukce vyrobena
 - za jakým účelem se výpočet provádí
 - jaká má být přesnost řešení

Úvod – typy kompozitních konstrukcí



Úvod – typy kompozitních konstrukcí



Úvod – typy kompozitních konstrukcí



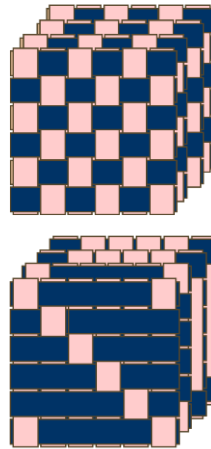
Úvod – materiály a polotovary

- Co se modeluje – z čeho je to vyrobeno?

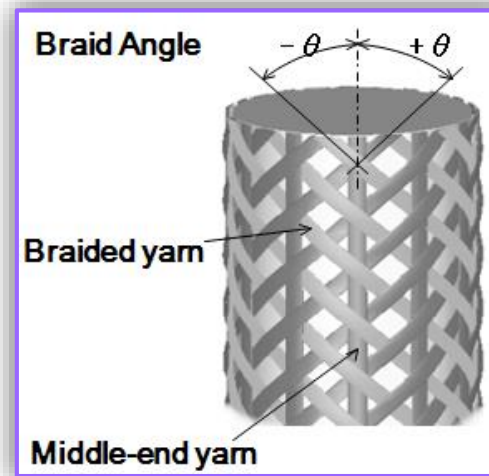
prepregy



textílie



braiding, navíjení



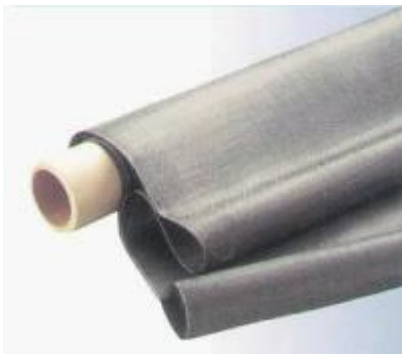
3D braiding



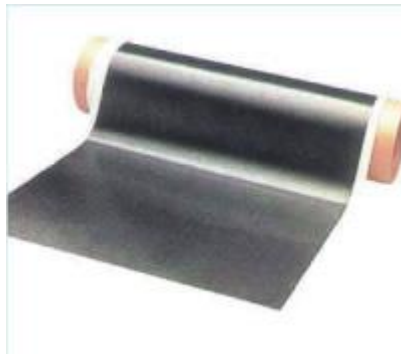
Úvod - kompozitní materiály - polotovary

- Rozdělení vláknových kompozitů dle polotovaru
 - suché textílie (tkaniny)
 - prepregy
 - rovingy
 - sekaná, mletá vlákna

textílie



prepregy



rovingy
(svazky vláken)

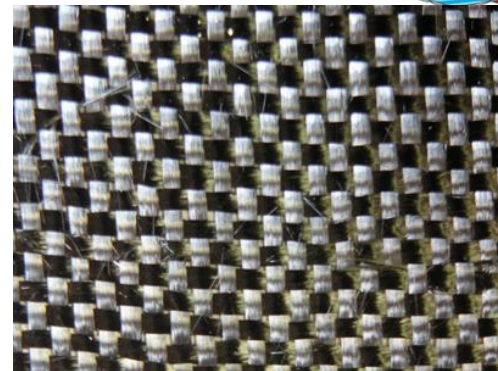
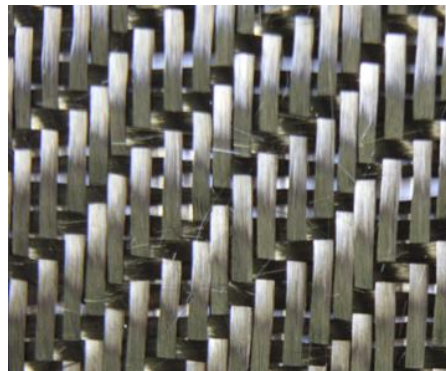
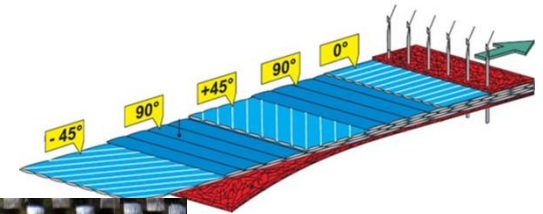
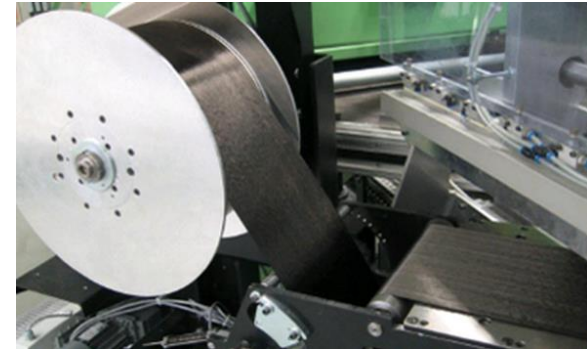


sekaná/mletá vlákna



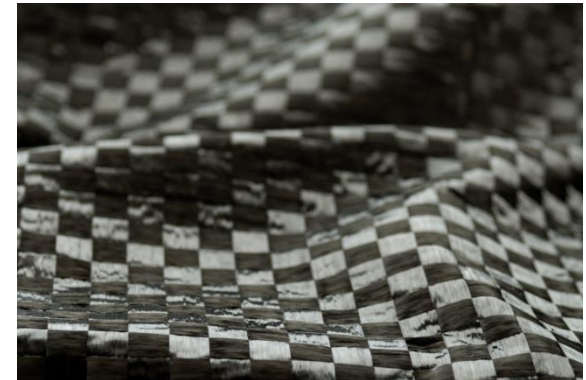
Úvod - kompozitní materiály - polotovary

- Textilie
 - *sestava dlouhých vláken do „plechu“ o jedné či více vrstev vláken*
 - jednosměrové
 - multiaxiální
 - křížené



Úvod - kompozitní materiály – polotovary*

- Nové typy *tkanin* - Oxeon, Švédsko
 - použití pásek místo svazků vláken
 - povrchová úprava
 - tuhost blížká postupně skládaným laminám
 - pevnost blížká tkaninám



TeXtreme®

Spread Tow Fabrics for ultra light composites

- 20% lighter than conventional carbon fabrics
- Tailor-made fabrics
- Unprecedented mechanical performance
- Superior surface finish

TeXtreme® carbon fabrics
(Spread Tow)



Conventional carbon fabrics
(Regular tow)



1 The Spread Tow structure makes it possible to achieve thinner laminates.

2 Straighter fibers with reduced crimp optimize and strengthen the composite.

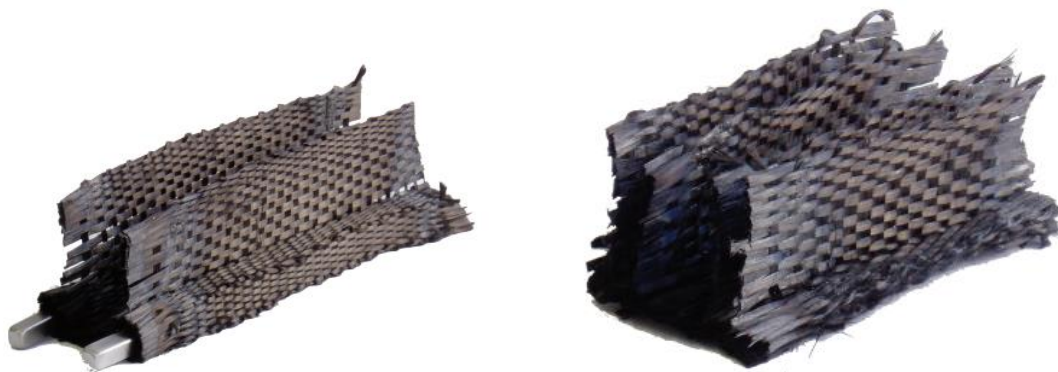
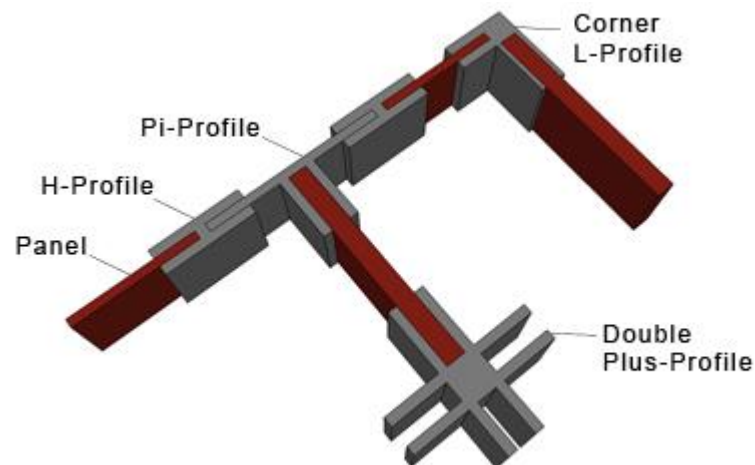
3 Fewer crimps reduce the amount of excess plastic, thereby minimizing weight.



Úvod - kompozitní materiály – polotovary*

- 3D tkané technologie

BITEAM



Úvod - vláknové kompozity – rozdělení dle materiálu

- Co se modeluje – z čeho je to vyrobeno?

- Typ vláken

- skleněná
- uhlíková
- aramidová
- bórová

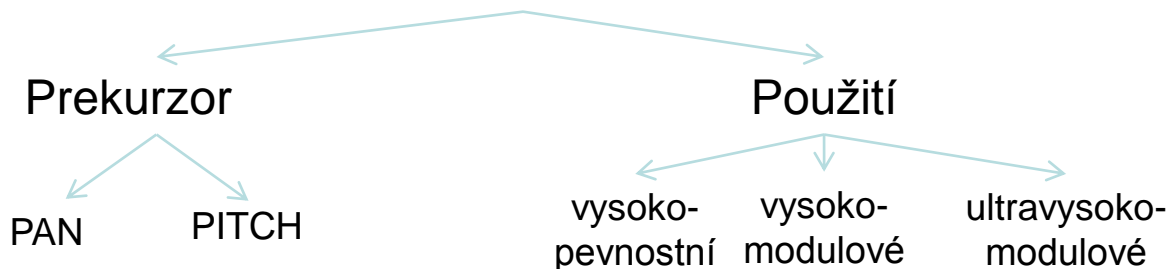


- Typ matrice

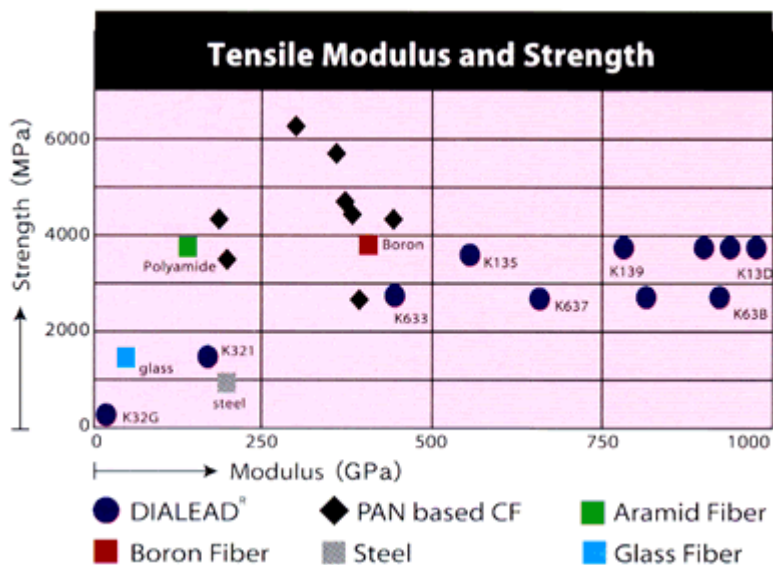
- termosetové
 - *epoxidové, polyesterové, fenolové, ...*
- termoplastové
 - *PA6, PA12, PPS, PEI, PEKK, PEEK, ...*

Úvod - vláknové kompozity – uhlíková vlákna

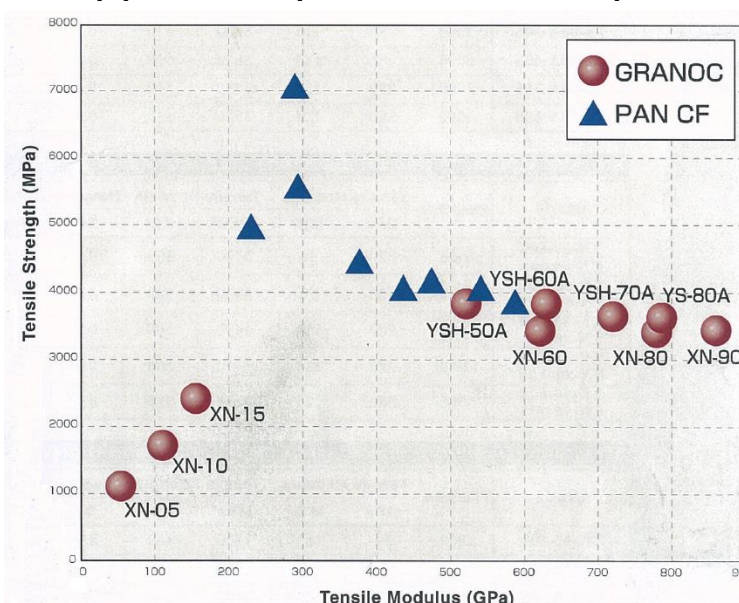
Uhlíková vlákna



DIALEAD - Mitsubishi Plastics



Nippon Graphite Fiber Corporation



Mechanické vlastnosti vláknových kompozitů

- Přehled nominálních parametrů základních typů vláken
 - E_L – modul pružnosti ve směru vláken
 - E_T – modul pružnosti kolmo na směr vláken
 - G_{LT} – modul pružnosti ve smyku vlákna
 - ν_{LT} – Poissonovo číslo vlákna
 - α_L – součinitel teplotní roztažnosti ve směru vláken
 - λ_L – součinitel vedení tepla ve směru vláken

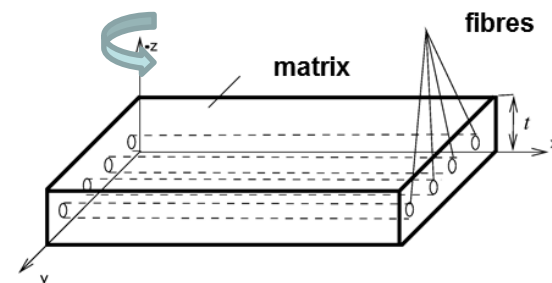
	ρ_L [kg.m ⁻³]	E_L [GPa]	E_T [GPa]	G_f [GPa]	ν_{LT} [-]	α_L [K ⁻¹]	λ_{Lf} [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
vysoko-pevnosní uhlík¹	1800	230	15	50	0,30	-0,38e-6	10
vysoko-pevnosní uhlík²	1600	234	15	50	0,30	0,5e-6	7
ultra vysokomodulový uhlík¹	2120	640	6	10	0,20	-1,38e-6	140
ultra vysokomodulový uhlík²	2170	780	5	20	0,35	-1,5e-6	320
E-sklo	2580	72	72	30	0,22	5,4e-6	1,35
S-sklo	2460	87	87	38	0,23	1,6e-6	1,45
Epoxidová matrice	1200	3-4,5	3-4,5	1,6	0,4	40÷60e-6 (110e-6)	0,2

Mechanické vlastnosti vláknových kompozitů

- Přehled nominálních parametrů základních variant kompozitní skladby a základních izotropních materiálů
 - efektivní parametry v rovině laminátu

	ρ	E_x	E_y	G_{xy}	α_x	α_y	λ_x	λ_y	Cena
	kg.m ⁻³	GPa	GPa	GPa	K ⁻¹	K ⁻¹	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Eu/kg
ocel	7850	210	210	80	13e-6	13e-6	50	50	3
tvárná litina	7050	169	169	66	10e-6	10e-6	55	55	1.5
dural	2850	73	73	28	23e-6	23-e6	121	121	
HS C/E: UD	1440	137	9	4	1e-6	32e-6	4,2	0,6	>20
HS C/E: [0/90]s	1440	73	73	3,8	3,4e-6	3,4e-6	2,4	2,4	>20
HS C/E: [45/-45]s	1440	15	15	35	3,4e-6	3,4e-6	3,3	3,3	>20
UHM C/E: UD	1750	380	5	3	-1,2e-6	31,4e-6	83	0,6	>60
UHM C/E: [0/90]s	1750	195	195	3,2	1,4e-6	1,4e-6	42	42	>60
UHM C/E: [45/-45]s	1750	12,5	12,5	97	1,4e-6	1,4e-6	59	59	>60

- Varianty
 - UD – všechny vrstvy shodně orientovány
 - [45/-45]s – max. tuhost ve smyku



Teplotně-mechanické vlastnosti vláknových kompozitů

Definice základních materiálů

Materiál	Rozměr 1 [mm]	Rozměr 2 [mm]	Rozměr 3 [mm]	Hmotnost g	Hustota [kg.m ⁻³]	Objemový podíl vláken [-]	Objemový podíl matrice [-]
t700_UD	30	20	705	613	1 449	0.46	0.54
cn80_UD	30	20	706	702	1 657	0.50	0.50
k63712_UD	30	20	706	730	1 723	0.59	0.41

Výpočet nominálních konstant

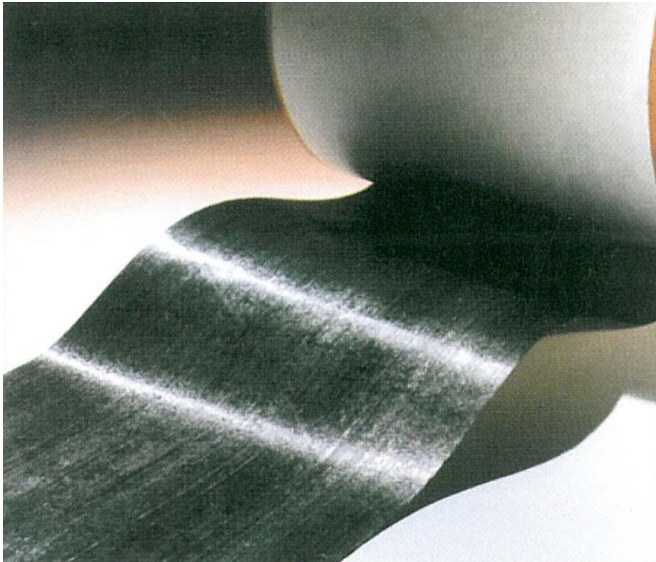
Označení	E ₁ [GPa]	E ₂ [GPa]	G ₁₂ [GPa]	ν ₁₂ [-]	α ₁ [K ⁻¹]	α ₂ [K ⁻¹]	λ ₁ [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]	λ ₂ [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]	c _p [J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]
t700/E_UD	107,6	5,8	3,0	0,35	1,36E-06	3,69E-05	4,7	0,455	858,8
cn80/E_UD	389,5	6,2	3,0	0,38	-1,05E-06	3,51E-05	159,2	0,491	841,8
k63712/E_UD	379,6	7,6	3,3	0,28	-1,00E-06	3,05E-05	82,8	0,600	818,2
ocel	210	210	81	0,3	13,0E-06	13,0E-06	50	50	470



Úvod

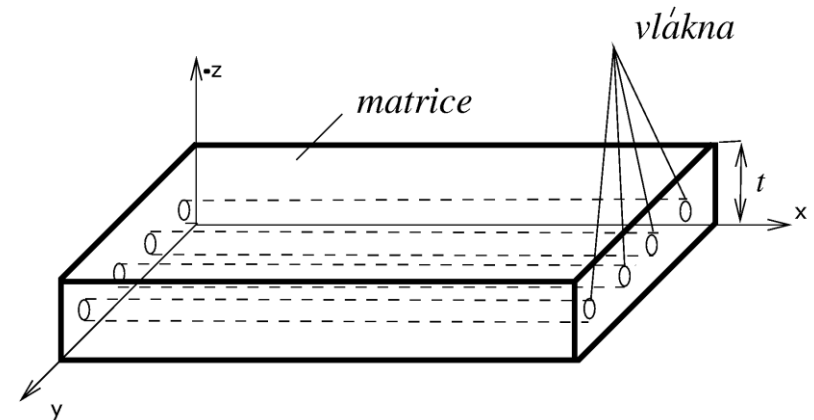
- Jaký je cíl výpočtu MKP?
 - predikce tuhosti
 - predikce napětí, pevnostní kritéria
 - teplotně-mechanické děje
 - predikce poškozování vlivem rostoucího zatížení
 - simulace mikro(mezo) úrovně za účelem stanovení materiálových konstant
 - simulace technologických procesů výroby kompozitních součástí (RTM)
- **Nutno uvědomit si, co modelují a jaké mají být výstupy výpočtu a jakou přesnost mohou mají vstupní data výpočtu. Po té zvolit potřebná zjednodušení modelu struktury.**
- **Je možné získat potřebné výstupy analytickým výpočtem?**

Výpočty kompozitních konstrukcí – jednosměrový kompozit



Jednosměrový vláknový kompozit

- Základní stavební (výpočtový) prvek
- Mechanické vlastnosti celku určuje
 - typ vláken
 - typ pojiva
 - objemový podíl vláken v kompozitu (V_f)
 - tloušťka vrstvy
- Technologie výroby kompozitu – ovlivňuje objemový podíl, tloušťku vrstvy
 - ruční kontaktní laminace ze suchých lamin ($V_f=30-40\%$)
 - autokláv – prepregy ($V_f=50-75\%$)
 - navíjení vláken ($V_f=55-70\%$)



Jednosměrový vláknový kompozit

- Rozdíl izotropní vs anizotropní materiál

izotropní materiálový model

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

parametry:

E, ν

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

podmínka stability řešení

$E > 0, G > 0$

$-1 < \nu < 0,5$

ortotropní materiálový model

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

parametry:

$E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$$

podmínka stability řešení

$E_i > 0, G_{ij} > 0 \quad i, j = x, y, z$

$$|\nu_{ij}| < \sqrt{E_i/E_j}$$

$$1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xz} - 2\nu_{yz}\nu_{zy}\nu_{xz} > 0$$

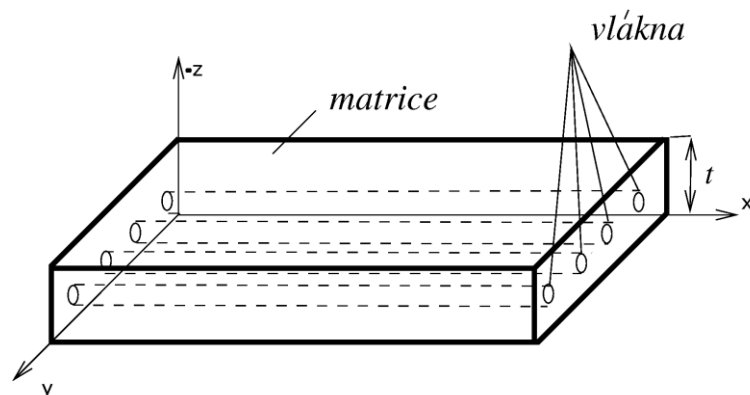
Materiálové modely jedno-směrové laminy

ortotropní materiálový model

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

parametry:

$E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$



materiálový model laminy pro stav RN (Abaqus)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

parametry:

$E_x, E_y, \nu_{xy}, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}$

● Získání materiálových konstant

- z experimentálních měření
- podkladů dodavatele materiálů (prepregů, tkanin)
- výpočtem pomocí směšovacích pravidel, nebo jiných mikromechanických modelů

Jednosměrový vláknový kompozit – výpočet materiálových konstant

- Základní výpočty z materiálových vlastností vláken (*index f*) a matrice (*index m*)
 - uvedené vztahy jsou nejjednodušší (nikoliv nejpřesnější)
- podélný modul pružnosti
- příčný modul pružnosti

$$E_L = V_f E_f + (1 - V_f) E_m$$

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_m}{E_f}\right)} \approx \frac{E_m}{1 - V_f}$$

- smykový modul v rovině laminy
- Poissonovo číslo v rovině laminy

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_m}{G_f}\right)} \approx \frac{G_m}{1 - V_f}$$

$$\nu_{LT} = V_f \nu_f + V_m \nu_m$$

Jednosměrový vláknový kompozit – výpočet materiálových konstant

Cíl - stanovení parametrů:

$$E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz}$$

Z uvedených vztahů:

$$E_x = E_L$$

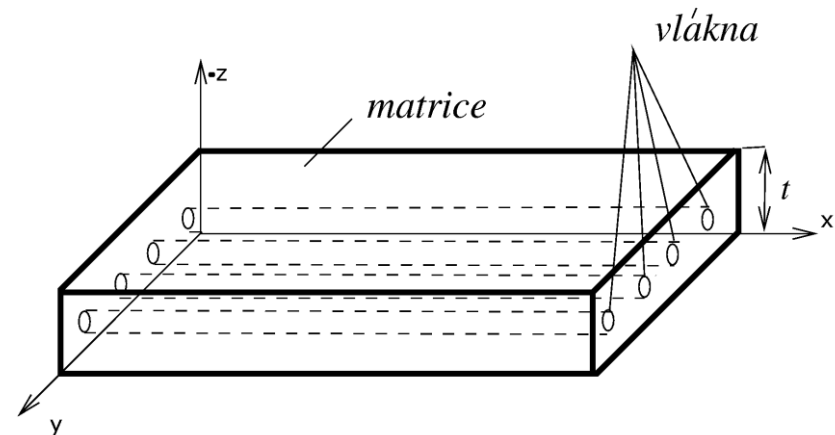
$$E_y = E_z = E_T$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{LT}$$

Neznámé parametry:

$$G_{yz} = G_{TT'}$$

$$\nu_{yz} = \nu_{TT'}$$



Jednosměrový vláknový kompozit – výpočet materiálových konstant

Stanovení G_{23}

modely vycházejí z cylindrického modelu vlákna a matrice

Tsai (A):

$$G_{23} = \frac{V_f + \delta(1-V_f)}{V_f / G_{f23} + \delta(1-V_f) / G_m} \quad \delta = \frac{3 - 4\nu_m + G_m / G_f}{4(1 - \nu_m)}$$

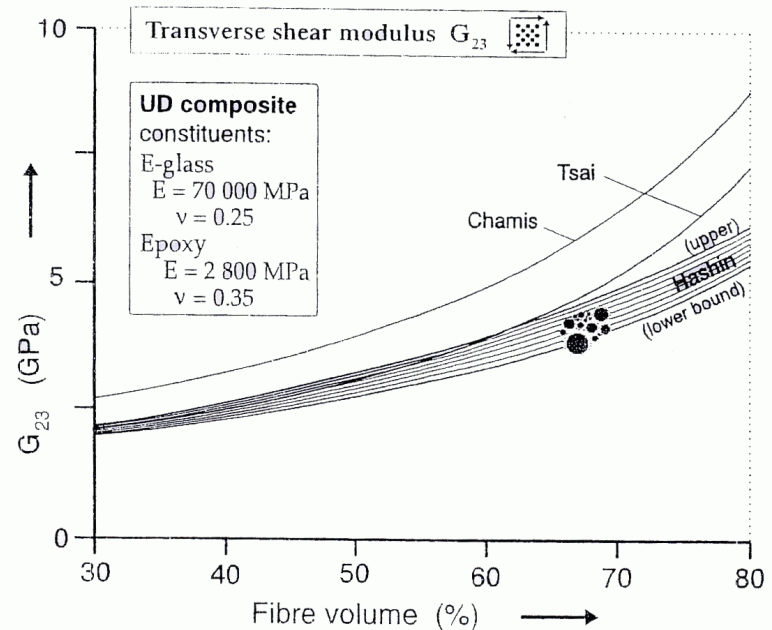
Chamis (B):

$$G_{23} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V} (1 - G_m / G_{f23})}$$

Hashin

$$G_{f23} > G_m \quad K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)}$$

$$G_{23}^{(-)} = G_m \left[1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_{f23} - G_m} + (1 - V_f) \frac{3K_m + 7G_m}{6K_m + 8G_m}} \right]$$



(C)

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{32})}$$

Jednosměrový vláknový kompozit – výpočet materiálových konstant

parametry vlákna

T300	
E_{f1} [GPa]	230
E_{f2} [GPa]	15
G_{f12} [GPa]	15
ν_{f12} [-]	0,2
G_{f23} [GPa]	7

parametry matrice

BSL914C epoxy	
E_m [GPa]	4
G_m [GPa]	1,481
ν_m [-]	0,25

parametry UD-kompozitu

T300/E	
V_f [%]	60
E_1 [GPa]	138
E_2 [GPa]	11
G_{12} [GPa]	5,5
ν_{12} [-]	0,28
ν_{23} [-]	0,4
G_{23} -A [GPa]	3,21
G_{23} -B [GPa]	3,81
G_{23} -C [GPa]	3,92

(B)

Jednosměrový vláknový kompozit - MKP

- MKP
 - Ansys - použití ortotropního materiálového modelu
 - nutnost přiřazení orientace materiálu
 - *Ansys- pokud není zadán, tak je materiálová orientace definována shodně s globálním souřadnicovým systémem*
 - *Ansys - ESYS pro orientaci dle zvoleného souřadnicového systému*
 - jinak se výpočet neliší od izotropního materiálu, nejsou nutné další definice
 - výpočet s běžnými prvky – stejně jako u izotropního materiálu
 - *klasické skořepiny*
 - *objemové skořepiny*
 - *objemové prvky*
 - *nosníkové prvky*

Vrstvené struktury

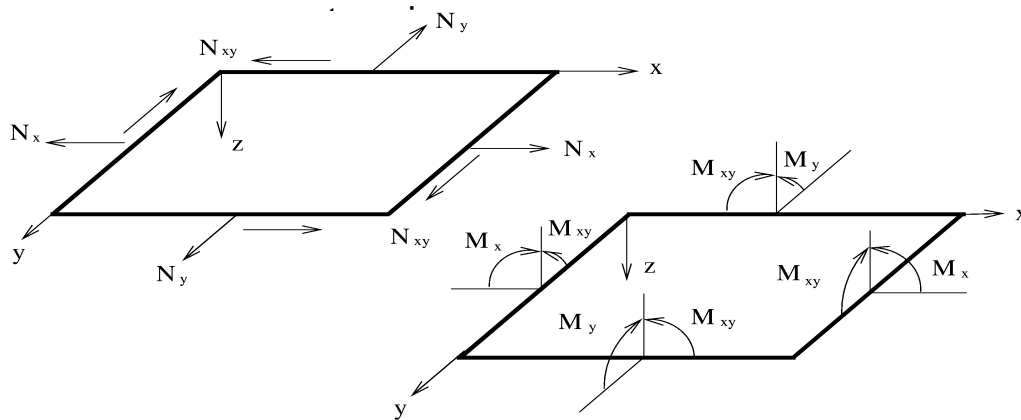
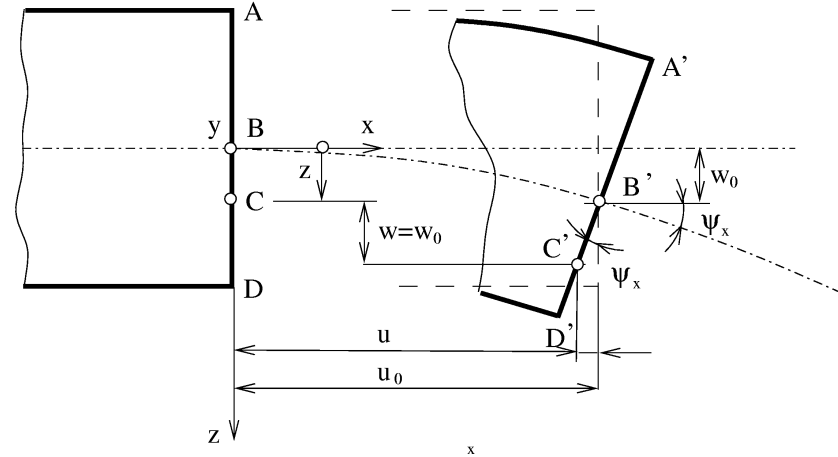


Lamináty & Vrstvené struktury

- Reálné konstrukce - vrstvené
 - lamináty
 - navíjené struktury
 - RTM produkty
- Postup stavby modelu se odlišuje oproti klasickým izotropním materiálům
- Náročnější na pre a post-processing
 - Omezení typu prvků pro výpočty
 - Časově náročnější příprava modelu
 - Náročnější na objem dat
 - Nutné mnohem více rozmyslet způsob modelování
 - Zjednodušení při stavbě modelu – možná, resp. nutná, ale také často zdrojem fatálních chyb (týká se i vyhodnocování)

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

- KLP – klasická laminační teorie
 - vztah mezi silovými účinky a deformacemi laminátu
 - stav rovinné napjatosti v lamině
 - zanedbává příčná smyková napětí
 - normála ke střednici zůstává normálou i po deformaci
 - tloušťka laminy podstatně menší než ostatní rozměry
 - dokonale tuhé rozhraní mezi

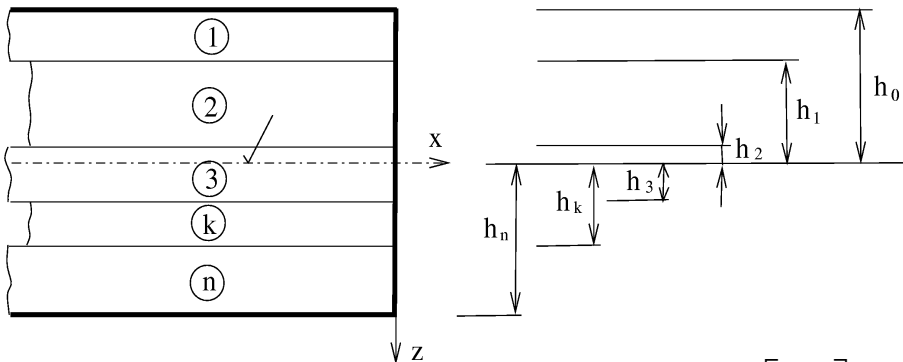


$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

- Vlastnosti laminátu
– matice ABD
- Pro obecný laminát obsahuje
všechny složky



$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{26} & \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} \\ \bar{A}_{61} & \bar{A}_{62} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{26} \\ \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{61} & \bar{D}_{62} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

- Inverzní matice – stanovení ekvivalentních materiálových konstant laminátu homogenizovaného do jedné vrstvy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{26} & \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} \\ \bar{A}_{61} & \bar{A}_{62} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{26} \\ \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{61} & \bar{D}_{62} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{26} & \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} \\ \bar{A}_{61} & \bar{A}_{62} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{21} & B_{22} & \bar{B}_{26} & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{26} \\ \bar{B}_{61} & \bar{B}_{62} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{61} & \bar{D}_{62} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{N_x}{A \cdot E_{x_tah}} = \varepsilon_{xx}^{\circ} = \bar{A}_{11} \cdot N_x$$

$$E_{x_tah} = \frac{1}{\bar{A}_{11} \cdot \sum t_i}$$

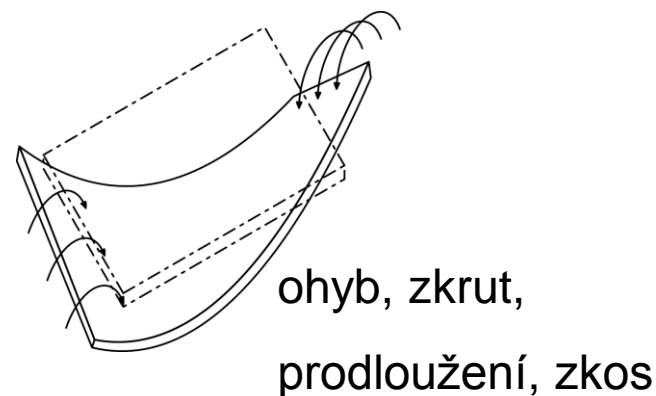
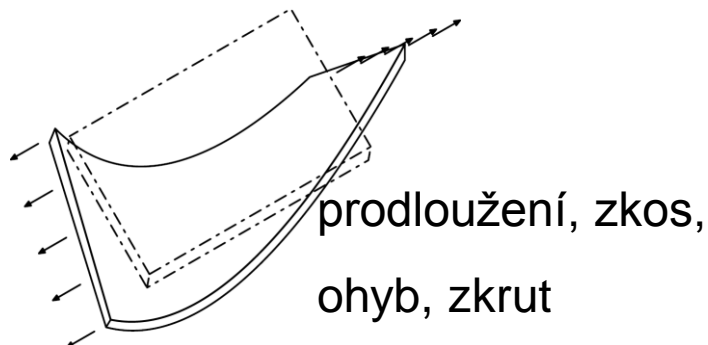
$$\frac{M_o(x)}{E_{x_ohyb} \cdot J} = k_x = \bar{D}_{11} \cdot M_x$$

$$E_{x_ohyb} = \frac{1}{\bar{D}_{11} \cdot \left(\sum t_i\right)^3}$$

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

- Význam matice ABD pro stanovení přístupu k modelování
 - pro jednotlivý silový účinek vede plná matice ABD (a tedy úplná inverzní matice) ke **kombinace prodloužení, zkosení, ohybu a krutu**
 - tyto vazby lze odstranit vhodně zvolenou kompozitní skladbou
 - modelování **laminátu homogenizovanou strukturou** o ekvivalentních materiálových konstantách E_i , G_{ij} , ν_{ij} tento problém **nemůže postihnout**

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$



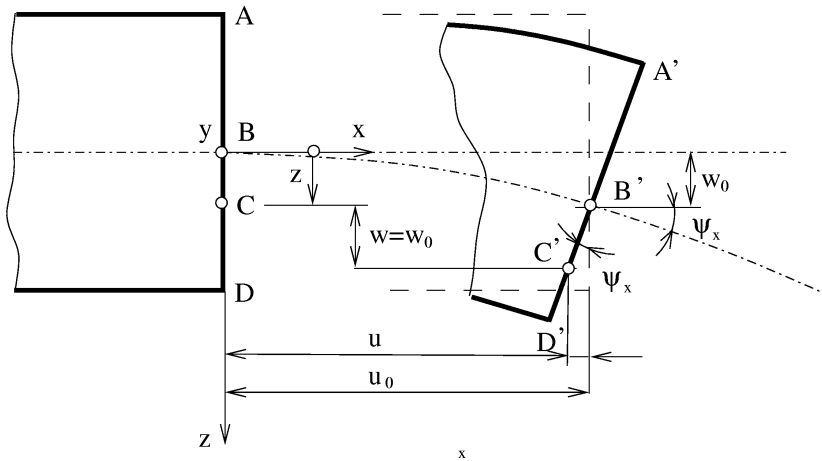
Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

- Vliv kompozitní skladby na ABD matici – možnosti výpočetní homogenizace

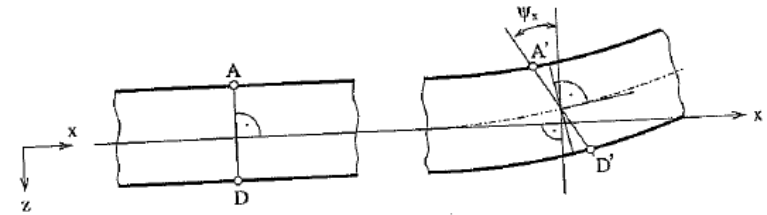
[A]	[B]	[D]	
Symetrické			
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$	$\text{Např.: } [45 \quad 90 \quad 0 \quad 60 -30]_S$
Vyrovnané			
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$	$\text{Např.: } [30 \quad -60 \quad 0 \quad 60 -30]$
Symetrické vyrovnané			
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}$	$\text{Např.: } [30 \quad -30 \quad 60 \quad -60]_S$
Symetrické křížově vrstvené			
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$	$\text{Např.: } [0 \quad 90 \quad 0_2 \quad 90 \quad 0 \quad]$
Antisymetrické křížově vrstvené			
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$	$\text{Např.: } [0 \quad 90 \quad 0 \quad 90 \quad 0 \quad 90 \quad]$

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

- KLP – klasická laminační teorie
– Kirchhoff



- Zahrnutí příčné smykové deformace



- Kolmice ke střednici se po deformaci natočí, zůstává dále přímá (Reisner-Mindlin, First order shear theory)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^\circ \\ \gamma_{xz}^\circ \end{bmatrix}$$

Lamináty & Vrstvené struktury - KLP

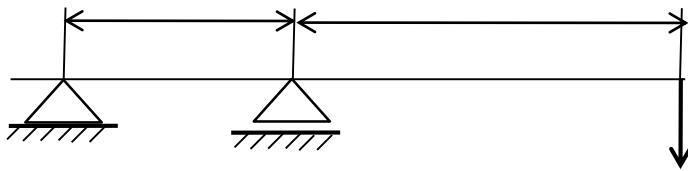
- Příčná smyková deformace
 - lze zanedbat u velmi tenkých desek
 - u kompozitů je poměr **délky/tloušťky**, od kterého je smykovou složku deformace možné zanedbat, výrazně vyšší než u běžných izotropních materiálů
 - v MKP – skořepiny – běžně s FOST

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^{\circ} \\ \gamma_{xz}^{\circ} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{54} & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}$$

Lamináty & Vrstvené struktury – příčná smyková tuhost

- Příklad:



$$u = \frac{F \cdot b^2 \cdot (a+b)}{3(EJ)_x} + \frac{\beta \cdot F \cdot (a+b) \cdot b/a}{(GA)}$$

Materiál	ρ_f [kg.m ⁻³]	E_1 [GPa]	G_{23} [GPa]
ocel	7850	210	80
K63712/E	1750	380	2

- nosník obdélníkového průřezu
 - (EJ) – modul E_1
 - (GA) – modul G_{23}
- ocel – nižší ohybová tuhost, ale značně vyšší smyková tuhost – vliv posouvající síly na deformaci lze zanedbat při $L/h > 10$
- kompozit – smyková tuhost nízká, projevuje se i při $L/h \sim 20 \div 30$

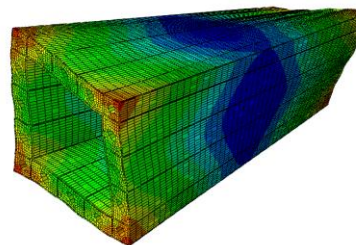
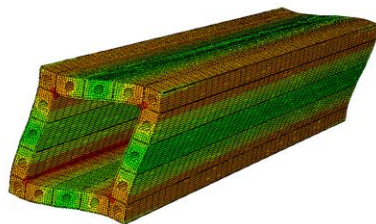
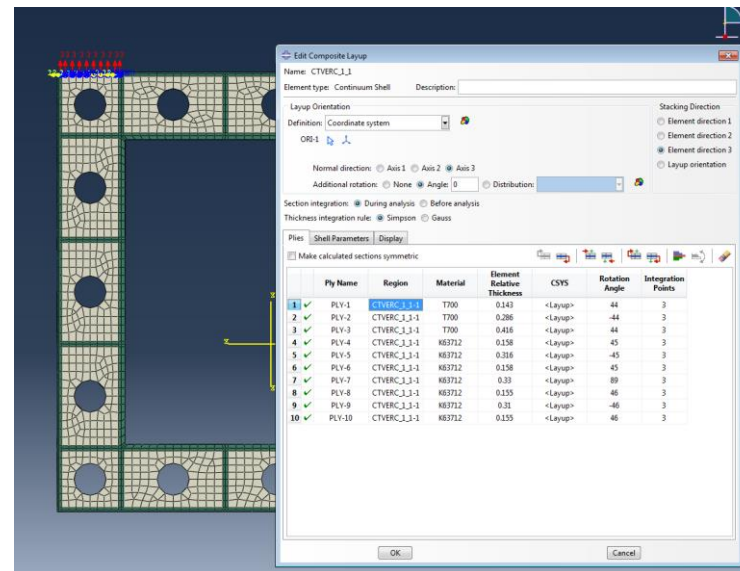
- Vyšší ohybová tuhost je u kompozitu degradována nízkou tuhostí smykovou. → Aplikace UHM kompozitů je účelná u dlouhých a štíhlých těles namáhaných na ohyb, u kterých se už smyková složka deformace neprojevuje.

Lamináty & Vrstvené struktury – přístupy pro modelování

- *klasické skořepiny (prvek na referenční ploše, 1 prvek na tloušťku, každý uzel 6xDOF)*
 - definice jednotlivých vrstev
 - zadání pomocí A, B, D matic (+ příčná smyková tuhost)
 - definice jediné vrstvy o ekvivalentních materiálových konstantách (s vědomím rizika nezachycení přídatných deformačních módů)
- *objemové skořepiny (objemová geometrie, možno zvyšovat počet prvků po tloušťce, každý uzel 3xDOF, kinematika&podmínky použití obdobná jako u klasických skořepin)*
 - laminát jako 1 vrstva
 - *definice jednotlivých vrstev*
 - *definice jedné vrstvy o ekvivalentních mat. konstantách*
 - sublamináty (zvýšení počtu prvků po tloušťce)
 - *definice jednotlivých vrstev*
 - *definice jedné vrstvy o ekvivalentních mat. konstantách*

Každá změna počtu prvků po tloušťce znamená nutnost předefinování kompozitní skladby jednotlivých sublaminátů !

Kompozity – výpočty metodou konečných prvků



ODB: prola_n1_v2.odb Abaqus/Standard 6.11-3 Fri Apr 13 12:19:27 GMT+02:00 2012



Step: Step-1
 Mode: 7 Value = 3.8665E+05 Freq = 217.45 (cycles/time)
 Primary Var: U, Magnitude
 Deformed Var: U, Deformation Scale Factor: +3.000E+02



ODB: prola_n1_v2.odb Abaqus/Standard 6.11-3 Fri Apr 13 12:19:27 GMT+02:00 2012

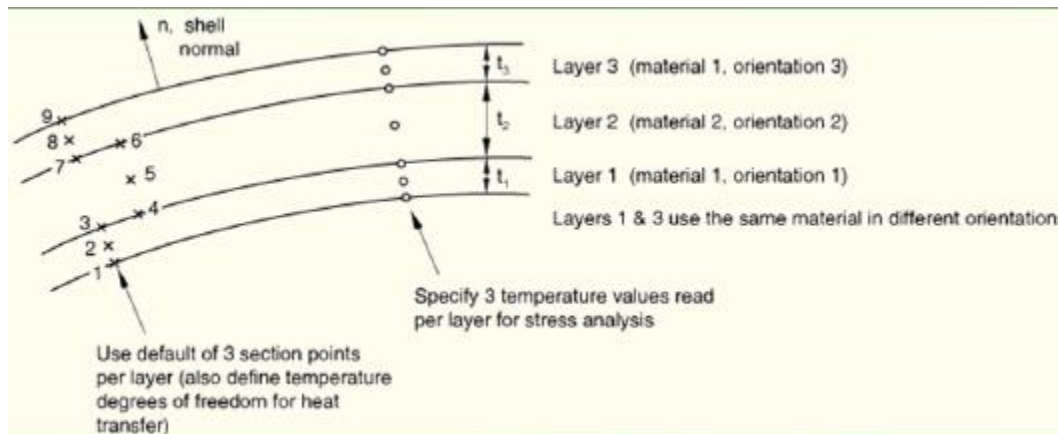
Step: Step-1
 Mode: 8 Value = 3.7120E+05 Freq = 336.68 (cycles/time)
 Primary Var: U, Magnitude
 Deformed Var: U, Deformation Scale Factor: +3.000E+02

Modelování kompozitních struktur - prvky

Objemové vs skořepinové prvky

Skořepiny

- umožňují snadnou definici počtu vrstev
- definici materiálu a natočení každé vrstvy
- nejčastěji používaný způsob modelování vzhledem ke geometrii kompozitních konstrukcí (tloušťka vs ostatní rozměry)



Modelování kompozitních struktur - prvky

Skořepiny

- podklady k modelování skořepin

http://mechanika2.fs.cvut.cz/old/pme/predmety/mkp1/podklady/skorepiny_ju.pdf

Zjednodušující předpoklady

- každá lamina je modelována jako homogenní, její tloušťka je ve srovnání s ostatními rozměry velmi malá
- rozhraní mezi vrstvami je modelováno jako dokonale tuhé, nekonečně tenké, posuvy jsou proto spojitě

Podmínky pro modelování

- splnění Kirchhoffových podmínek pro desky/skořepiny (s nástupem MKP - First-order shear theory)

Modelování kompozitních struktur - skořepiny

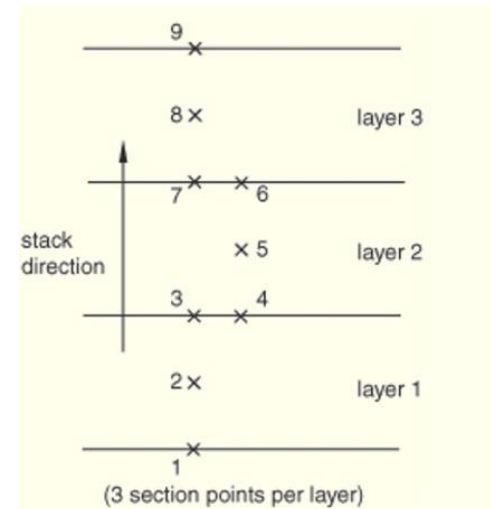
Podmínky - základní přehled

- Kirchhof vs FSDT (přímá čára přes tloušťku skořepiny se po deformaci natočí a zůstane přímá)
- tloušťka skořepiny se s deformací nemění
- poměr nejmenšího rozměru plochy skořepiny k její tloušťce je větší než 10
- tuhost laminátu v souřadnicích x, y, z skořepiny se **neliší o více než dva řády** (důležité při modelování sendvičových konstrukcí)

Modelování kompozitních struktur - prvky

Skořepiny

- vrstvy kladeny dle pořadí při zadání, první vrstva na spodní ploše skořepiny
- vrstva skořepiny – výsledky zobrazeny v integračních bodech, integračním bodům odpovídají sekční body rozmístěné po tloušťce vrstvy (defaultně 3 body po vrstvě)
- integrace po tloušťce - Simson, Gauss
- integrace sekce před vlastní analýzou (nemožné u nelineární analýzy) nebo v průběhu analýzy
- možnost modelování skoku v počtu vrstev (shell offset)



Modelování kompozitních struktur - prvky

Objemové prvky

- zřídka využívané
- problém se zachycením vlivů příčného smyku (lineární vs kvadratické elementy) – nedostatečná interpolace deformace pro zachycení změny v tloušťce laminátu – nutná hustá síť po tloušťce
- použití v speciálních analýzách – delaminace (dnes už opouštěno)
- kompozity je možno modelovat pomocí vrstvených nebo nevrstvených prvků

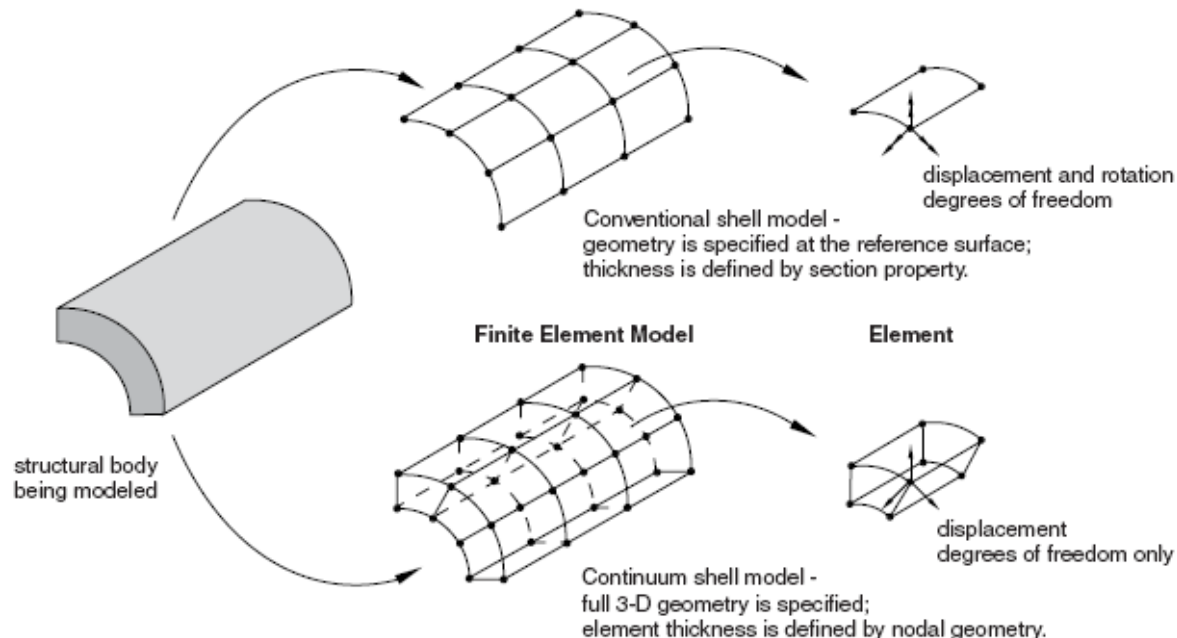
Modelování kompozitních struktur - prvky

Abaqus

pro modelování kompozitů je možné použít dva typy skořepin:

- konvenční skořepiny (conventional shell elements)
- objemové skořepiny (continuum shell elements)

v ojedinělých případech - modelování objemovými prvky



Modelování kompozitních struktur - prvky Konvenční skořepiny

- geometrie modelována na referenční ploše
- referenční plocha nemusí souhlasit se střednicí skořepiny, možnost specifikace - střednice, horní, spodní povrch, popř. vzdálenost "offsetu"
- tloušťka daná definicí kompozitní sekce (pomocí Composite Lay-Up manager, nebo dle klasické shellové sekce)
- tenké skořepiny (STR13, S8R5, S9R5)
- tlusté skořepiny (S8R)
- tenké i tlusté skořepiny S4R, S3R (S3R – konstatní deformace – velmi jemná síť v oblasti gradientů napětí)
- pro lineární elastické případy - S3R, S4R, S8R – výpočet příčné smykové tuhosti

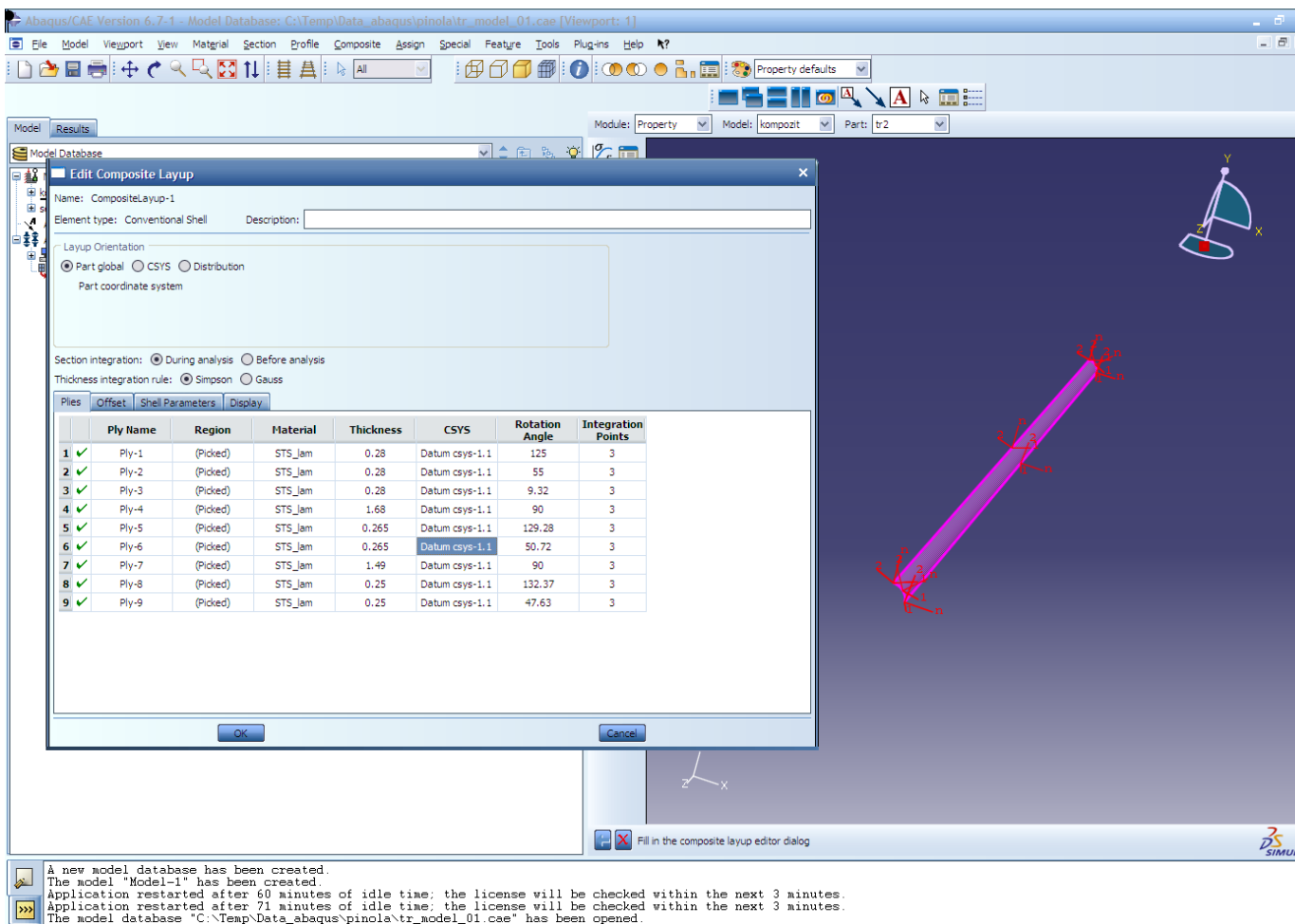
Modelování kompozitních struktur - prvky

Objemové skořepiny (continuum shell elements)

- možnost pracovat s objemovou geometrií
- tloušťka daná geometrií, při definici skladby laminátu se zadávají pouze relativní tloušťky lamin k celkové tloušťce
- umožňuje přesnější řešení kontaktu oproti konvenčním elementům
- umožňují přesnější řešení vlivu příčného smyku
- u tlustých konstrukcí – použití několika vrstev objemových skořepin
- elementy SC6R, SC8R
- nemohou být použity pro problémy heperelasticity
- pomalá konvergence pro velmi tenké skořepiny
- *síťování technikou sweep, nebo bottom-up*

Modelování kompozitních struktur - Abaqus

od verze Abaqus/CAE v6.7 - composite lay-up manager



Abaqus/CAE Version 6.7.1 - Model Database: C:\Temp\Data_abacus\pinola\tr_model_01.cae [Viewport: 1]

Module: Property Model: kompozit Part: tr2

Edit Composite Layup
 Name: CompositeLayup-1
 Element type: Conventional Shell Description:

Layup Orientation
 Part global CSYS Distribution
 Part coordinate system

Section integration: During analysis Before analysis
 Thickness integration rule: Simpson Gauss

Plies Offset Shell Parameters Display

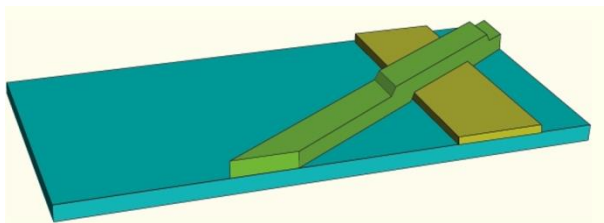
	Ply Name	Region	Material	Thickness	CSYS	Rotation Angle	Integration Points
1	✓ Ply-1	(Picked)	STS_lam	0.28	Datum csys-1.1	125	3
2	✓ Ply-2	(Picked)	STS_lam	0.28	Datum csys-1.1	55	3
3	✓ Ply-3	(Picked)	STS_lam	0.28	Datum csys-1.1	9.32	3
4	✓ Ply-4	(Picked)	STS_lam	1.68	Datum csys-1.1	90	3
5	✓ Ply-5	(Picked)	STS_lam	0.265	Datum csys-1.1	129.28	3
6	✓ Ply-6	(Picked)	STS_lam	0.265	Datum csys-1.1	50.72	3
7	✓ Ply-7	(Picked)	STS_lam	1.49	Datum csys-1.1	90	3
8	✓ Ply-8	(Picked)	STS_lam	0.25	Datum csys-1.1	132.37	3
9	✓ Ply-9	(Picked)	STS_lam	0.25	Datum csys-1.1	47.63	3

A new model database has been created.
 The model "Model-1" has been created.
 Application restarted after 60 minutes of idle time; the license will be checked within the next 3 minutes.
 Application restarted after 71 minutes of idle time; the license will be checked within the next 3 minutes.
 The model database "C:\Temp\Data_abacus\pinola\tr_model_01.cae" has been opened.

Modelování kompozitních struktur - Abaqus

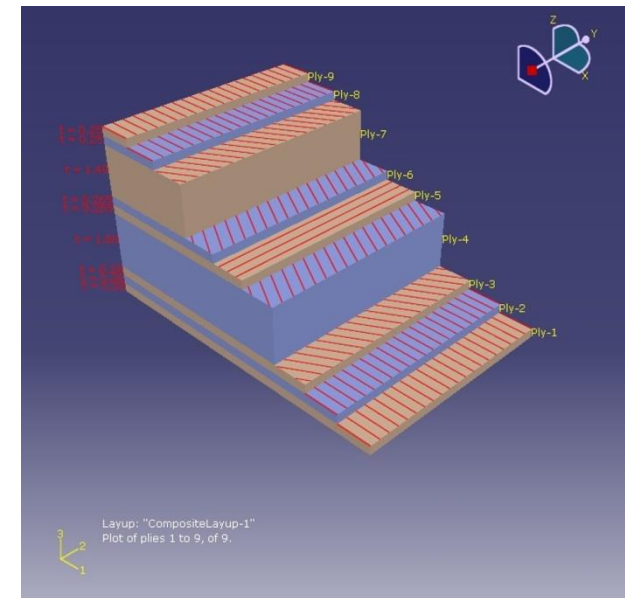
composite lay-up manager

- definice materiálu, tloušťky, orientace a počtu integračních bodů pro jednotlivou laminu
- umožňuje opustit přístup definice kompozitní skladby dle elementu
- místo toho lze definovat skladbu po jednotlivých laminátech



- definice offsetu skořepiny
- definice integračních pravidel skořepiny

zobrazení orientace vláken v CAE

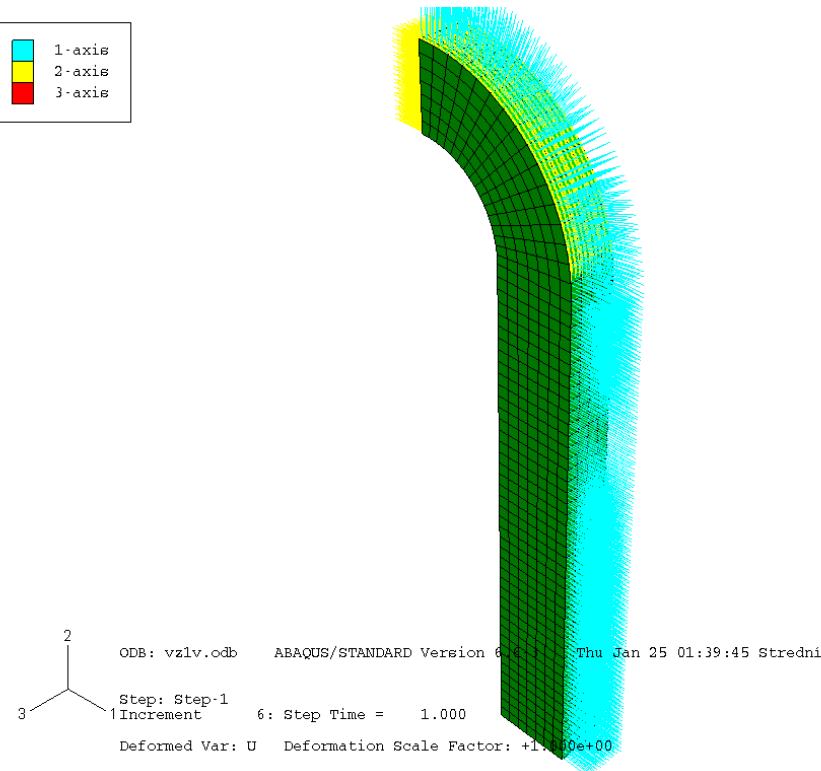
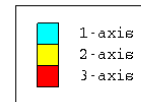


Modelování kompozitních struktur - Abaqus

Postprocessor

- pro kontrolu správné orientace materiálu umožňuje vykreslit materiálovou orientaci v postprocessoru
- možnost zobrazení nejnamáhanější vrstvy laminátu
- vykreslení průběhu výsledků po tloušťce elementu

Nevýhoda - ukládání velkého objemu dat



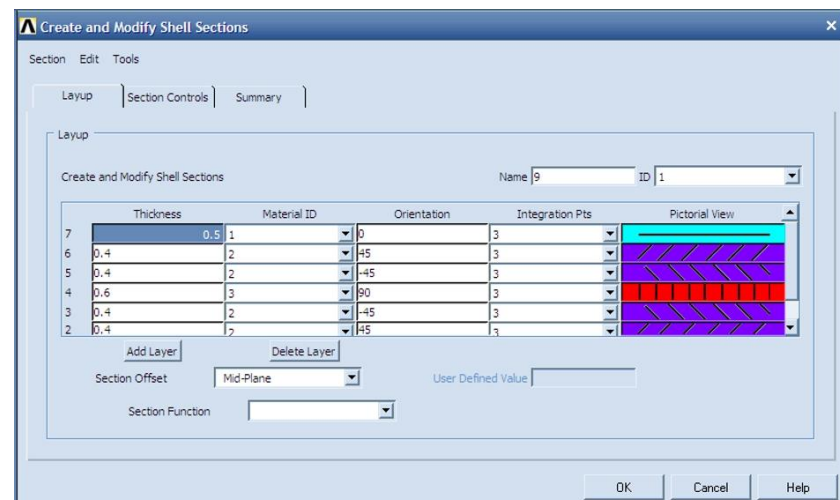
Modelování kompozitních struktur - Ansys

elementy pro modelování kompozitů

- vrstvené skořepiny (shell181, shell 281)
- vrstvené solidy (solid185, solid186)
- vrstvené solid-shell elementy (analogie objemových skořepin) (solsh1190)
- beamové elementy (beam188, beam189)

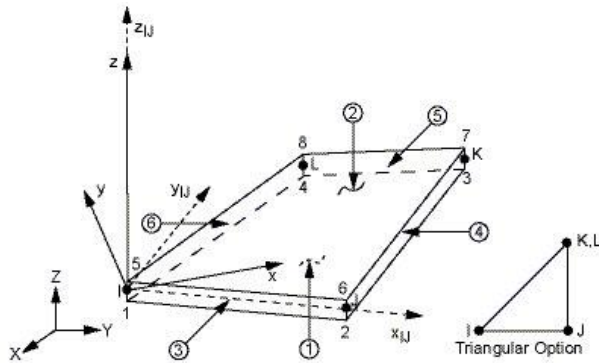
definice kompozitní skladby:

- reálné konstanty elementů (dnes opouštěno)*
- section tool
- Ansys Workbench
- ...



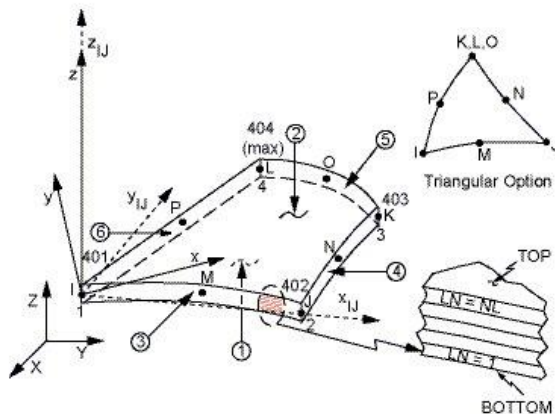
Modelování vrstvených kompozitních struktur - Ansys

Klasické skořepiny



x_{IJ} = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.



4-uzlový skořepinový prvek

Ansys: SHELL181

8-uzlový vrstvený skořepinový prvek

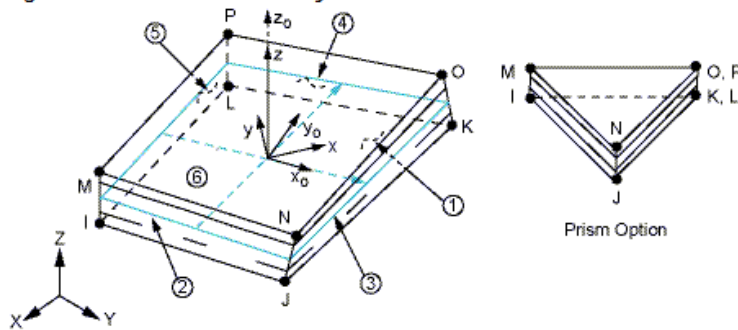
Ansys: **SHELL281** (SHELL91,
SHELL99)

Shell181, 281 - využitelné i pro modelování sendvičových konstrukcí.

Modelování vrstvených kompozitních struktur - Ansys

Objemové skořepiny

Figure 190.1: SOLSH190 Geometry



x_o = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.

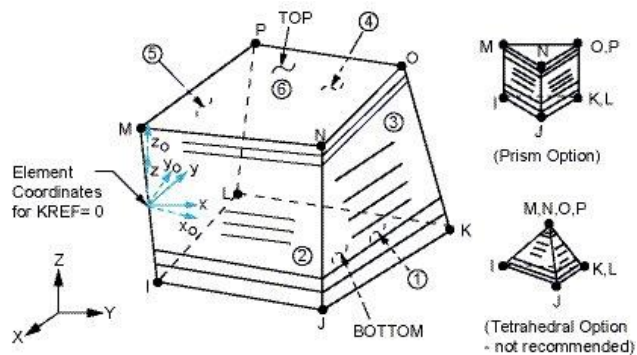
8-uzlový objemový prvek

Ansys: SOLSH190

- Pro konzistentní orientaci směru tloušťky v objemové síti
 - VEORIENT
 - EORIENT
- Přesnější u tlustých skořepin než klasické skořepiny
- Mindlin-Reissner (first order shear theory)
- Oproti klasickým lineárním objemovým skořepinám nejsou problémy s umělým vyztužením u ohybově namáhaných konstrukcích

Modelování vrstvených kompozitních struktur - Ansys

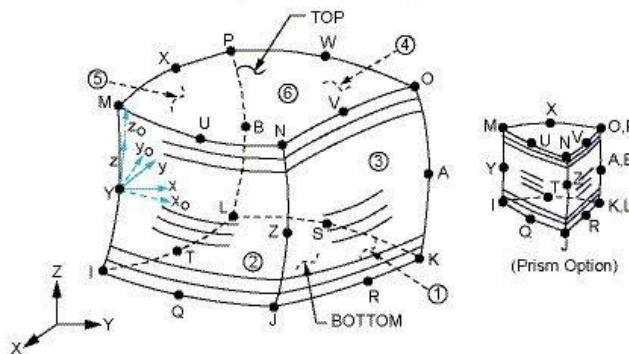
Objemové prvky



8-uzlový vrstvený prvek
Ansys: SOLID185

x_0 = Element x-axis if ESYS is not supplied.

x = Element x-axis if ESYS is supplied.



20-uzlový vrstvený prvek

Ansys: SOLID186

Materiálová orientace

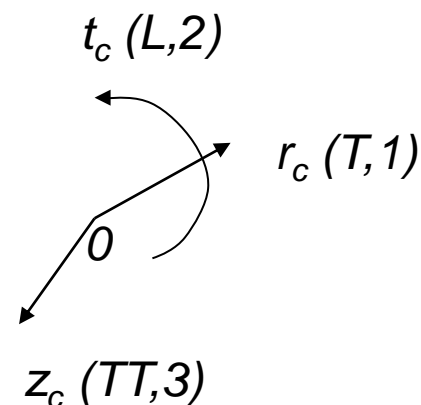
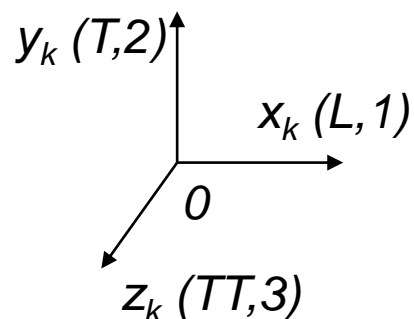
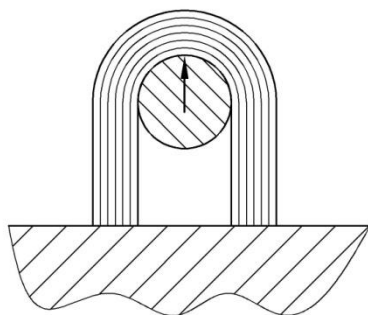
Při zadaném neizotropním materiálovém systému:

- Abaqus - požaduje se zadání materiálové orientace
- Ansys - defaultně stanovena dle globálního souřadnicového systému, pro správnou funkčnost nutno předefinovat

- Možnosti materiálové orientace:
 - Dle lokálních souřadnicových systémů
 - Kartézské s. ř.
 - Cylindrické s. ř.
 - Sférické s. ř.
 - Dle definice pomocí pořadí uzlů v elementu
 - Dle uživatelských sub-routin

Materiálová orientace

Transformace kartézského souřadnicového systému do systému cylindrického



$$\begin{aligned}
 E_{1c} &= E_{2k} \\
 E_{2c} &= E_{1k} \\
 E_{3c} &= E_{3k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{12c} &= G_{12k} \\
 G_{13c} &= G_{23k} \\
 G_{23c} &= G_{13k}
 \end{aligned}$$

$$v_{12c} = v_{21k} = v_{12k} \cdot E_{2k} / E_{1k}$$

$$v_{13c} = v_{23c}$$

$$v_{23c} = v_{13c}$$