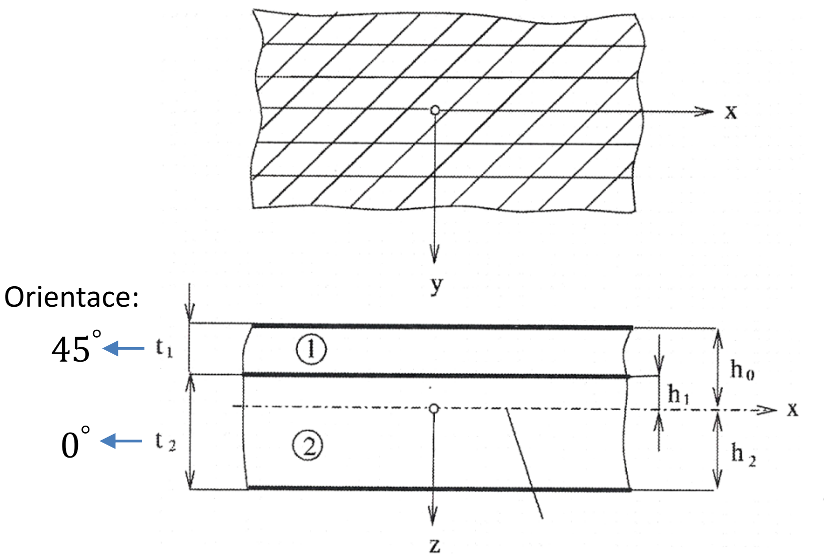
České Vysoké Učení Technické v Praze
Mechanika Kompozitních Materiálů

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Michael Andrango

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Příklad:
Vypočítejte zbytková napětí v laminátu uvedeném v obrázku. Laminát byl vyroben při teplotě 120°C a ochlazen na pokojovou teplotu 20°C.



$h_0 = -4\ mm$
$h_1 = -1\ mm$
$h_2 = 4\ mm$

D: a) Tloušťky t1= 3mm, t2=5mm
b) Koty h0, h1, h2
c) Teplotní součinitele roztažnosti

$$\alpha_L = 7 \cdot 10^{-6} K^{-1}$$
$$\alpha_T = 23 \cdot 10^{-6} K^{-1}$$

d) Matice tuhosti vztažena k (L,T)

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot 10^3\ [MPa]$$

U: Napětí σ (x,y,z) a σ (L,T,T´)

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Deformace od mechanického napětí:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^M = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ + z\,k_x \\ \varepsilon_{yy}^\circ + z\,k_y \\ \gamma_{xy}^\circ + z\,k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T$$

Napětí od teploty:

Tuhost a roztažnost počítáme pomocí Trasformace

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ + z\,k_x - \alpha_x\ \Delta T \\ \varepsilon_{yy}^\circ + z\,k_y - \alpha_y\ \Delta T \\ \gamma_{xy}^\circ + z\,k_{xy} - \alpha_{xy}\ \Delta T \end{bmatrix}$$

Neznámé: deformace střední roviny a křivost

Podmínka pro určení: Síly a momenty jsou nulové

N=0

M=0

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Síly a momenty:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\circ_{xx} \\ \varepsilon^\circ_{yy} \\ \gamma^\circ_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T}_{\mathbf{N}^T} = 0 \,,$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\circ_{xx} \\ \varepsilon^\circ_{yy} \\ \gamma^\circ_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T}_{\mathbf{M}^T} = 0 \,.$$

$\Rightarrow$

Lze přepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \cdots \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^\circ_m \\ \cdots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} N^T_x \\ N^T_y \\ N^T_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\alpha}\,\Delta T \ ,$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} M^T_x \\ M^T_y \\ M^T_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\alpha}\,\Delta T$$

$\Downarrow$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^\circ_m \\ \cdots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \vdots & \overline{\mathbf{B}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\mathbf{B}} & \vdots & \overline{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \cdots \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix}$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Matice mimoosové tuhosti

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}\ \boldsymbol{\varepsilon}' .$$

Pro prvky matice tuhosti **Q** platí

$$Q_{ij} = C'_{ij} - \frac{C'_{i3}\, C'_{3j}}{C'_{33}},$$

Všechny prvky matice mimoosové tuhosti jsou **nenulové !!**

přičemž

$$Q_{ij} = Q_{ji} \qquad i,\ j = 1, 2, 6 .$$

Prvky matice mimoosové tuhosti C´ij jsou funkce prvků matice tuhosti Cij.

C´ij = fce (Cij)

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Horní vsrtva:

$$Q_{11} = C'_{11} - \frac{C'_{13} - C'_{31}}{C'_{33}} = 6{,}55 \cdot 10^3$$

$$Q_{12} = C'_{12} - \frac{C'_{13} - C'_{32}}{C'_{33}} = 5{,}15 \cdot 10^3 \ ,$$

$$Q_{21} = Q_{12} \ ,$$

$$Q_{16} = C'_{16} - \frac{C'_{13} - C'_{36}}{C'_{33}} = 4{,}5 \cdot 10^3 \ ,$$

$$Q_{61} = Q_{16} \ ,$$

$$Q_{26} = C'_{26} - \frac{C'_{23} - C'_{36}}{C'_{33}} = 4{,}5 \cdot 10^3 \ ,$$

$$Q_{62} = Q_{26} \ ,$$

$$Q_{66} = C'_{66} - \frac{C'_{63} - C'_{36}}{C'_{33}} = 5{,}15 \cdot 10^3 \ .$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}5 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & 4{,}5 & 5{,}15 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \ [MPa] \ .$$

Dolní vrstva:

Pro dolní vrstvu, která je ve směru 0º jsou matice $\overline{\mathbf{C}}$ a $\mathbf{Q}$ totožné. Platí

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \ [MPa] \ .$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Vyšetření matic A, B,D

Vzdálenost od střední vrstvy: $h_0 = -4\ mm,\ h_1 = -1\ mm$ a $h_2 = 4\ mm$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) = (Q_{ij})_1 [(-1) - (-4)] + (Q_{ij})_2 [4 - (-1)]$$

$$A_{ij} = 3(Q_{ij})_1 + 5(Q_{ij})_2 \quad .$$

Potom

$$\mathbf{A} = 3 \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}50 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}50 \\ 4{,}50 & 4{,}50 & 5{,}15 \end{bmatrix} \cdot 10^3 + 5 \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot 10^3 ,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 119{,}65 & 18{,}95 & 13{,}50 \\ 18{,}95 & 29{,}65 & 13{,}50 \\ 13{,}50 & 13{,}50 & 18{,}95 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \ MPa\ mm \ .$$

Pro prvky matice vazbové tuhosti **B** platí

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(Q_{ij})_1 \left[(-1)^2 - (-4)^2\right] + \frac{1}{2}(Q_{ij})_2 \left[(4)^2 - (-1)^2\right] =$$
$$= 7{,}5 \left[-(Q_{ij})_1 + (Q_{ij})_2\right]$$

tedy

$$\mathbf{B} = 7{,}5 \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \cdot 10^3 - 7{,}5 \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}50 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}50 \\ 4{,}50 & 4{,}50 & 5{,}15 \end{bmatrix} \cdot 10^3 ,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 100{,}90 & -33{,}40 & -33{,}75 \\ -33{,}40 & -33{,}10 & -33{,}75 \\ -33{,}75 & -33{,}75 & -33{,}40 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \ MPa\ mm^2 \ .$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Vyšetření matic A, B,D

Vzdálenost od střední vrstvy: $h_0 = -4\ mm,\ h_1 = -1\ mm$ a $h_2 = 4\ mm$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(Q_{ij}\right)_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) = \frac{1}{3}\left(Q_{ij}\right)_1\left[(-1)^3 - (-4)^3\right] + \frac{1}{3}\left(Q_{ij}\right)_2\left[4^3 - (-1)^3\right] =$$

$$= 21\left(Q_{ij}\right)_1 + 21{,}67\left(Q_{ij}\right)_2$$

$$\mathbf{D} = 21\begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}50 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}50 \\ 4{,}50 & 4{,}50 & 5{,}15 \end{bmatrix}\cdot 10^3 + 21{,}67\begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix}\cdot 10^3$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 571 & 123 & 94{,}5 \\ 123 & 181 & 94{,}5 \\ 94{,}5 & 94{,}5 & 123 \end{bmatrix}\cdot 10^3\ MPa\ mm^3\ .$$

Výsledná matice tuhosti má tvar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vdots & \mathbf{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

tedy

$$\begin{bmatrix} 119{,}65 & 18{,}95 & 13{,}50 & & 100{,}90 & -33{,}40 & -33{,}75 \\ 18{,}95 & 29{,}65 & 13{,}50 & \vdots & -33{,}40 & -33{,}10 & -33{,}75 \\ 13{,}50 & 13{,}50 & 18{,}95 & & -33{,}75 & -33{,}75 & -33{,}40 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 100{,}90 & -33{,}40 & -33{,}75 & & 571 & 123 & 94{,}5 \\ -33{,}40 & -33{,}10 & -33{,}75 & \vdots & 123 & 181 & 94{,}5 \\ -33{,}75 & -33{,}75 & -33{,}40 & & 94{,}5 & 94{,}5 & 123 \end{bmatrix}\cdot 10^3$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Součinitel teplotní roztažnosti

Transformace vektoru deformace z (x,y) do (L,T):

$$\varepsilon^x = T_\varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon^L$$

$$\varepsilon^x = \begin{pmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & sin\theta cos\theta \\ 2sin\theta cos\theta & -2sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \varepsilon^L$$

Je znamo, že při změně teploty o ΔT dochází k teplotnímu přetvoření:

$$\varepsilon^T = \alpha\,\Delta T\,,$$

Pro součinitele teplotní roztažnosti platí obdobný vztah jako u deformace:

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{bmatrix},$$

Počítejme součinitele teplotní roztažnosti pro obě vrstvy:

Horní vrstva: $$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix} \cdot 10^{6}$$

Dolní vrstva: $$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_L \\ \alpha_T \\ 0 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Teplotní síly a momenty

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\alpha}\,\Delta T \ , \qquad A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left(Q_{ij}\right)_k \left(h_k - h_{k-1}\right)$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \mathbf{B}\,\boldsymbol{\alpha}\,\Delta T \qquad B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(Q_{ij}\right)_k \left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right)$$

Proveďme dílčí výpočty pro obě vrstvy :

$$\Delta T\ \mathbf{Q}_{0^\circ}\ \boldsymbol{\alpha}_{0^\circ} = -100 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{bmatrix} -15{,}61 \\ -5{,}01 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta T\ \mathbf{Q}_{45^\circ}\ \boldsymbol{\alpha}_{45^\circ} = -100 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}5 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & 4{,}5 & 4{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10{,}35 \\ -10{,}35 \\ -5{,}26 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Potom jsme schopni počítat síly a momenty:

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15{,}61 \\ -5{,}01 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \left[4 - (-1)\right] + \begin{bmatrix} -10{,}35 \\ -10{,}35 \\ -5{,}26 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \left[(-1) - (-4)\right]$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -109{,}1 \\ -56{,}5 \\ -15{,}8 \end{bmatrix} N\,mm^{-1} \ .$$

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15{,}61 \\ -5{,}01 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2}\left[4^2 - (-1)^2\right] + \begin{bmatrix} -10{,}35 \\ -10{,}35 \\ -5{,}26 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2}\left[(-1)^2 - (-4)^2\right]$$

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39{,}5 \\ 39{,}5 \\ 39{,}5 \end{bmatrix} N \ .$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Deformace střední roviny a křivosti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^\circ \\ \cdots \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \vdots & \overline{\mathbf{B}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{\mathbf{B}} & \vdots & \overline{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ \cdots \\ \mathbf{M}^T \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{*T}, \\ \overline{\mathbf{B}}^* &= \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1}, \\ \overline{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}^{*-1}, \\ \mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}0148 & -0{,}0065 & -0{,}0053 \\ -0{,}0065 & 0{,}0578 & -0{,}0196 \\ -0{,}0053 & -0{,}0196 & 0{,}1197 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0{,}0041 & 0{,}0021 & 0{,}0024 \\ 0{,}0021 & 0{,}0015 & 0{,}0060 \\ 0{,}0024 & 0{,}0060 & 0{,}0192 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} -0{,}0041 & 0{,}0021 & 0{,}0024 \\ 0{,}0021 & 0{,}0015 & 0{,}0060 \\ 0{,}0024 & 0{,}0060 & 0{,}0192 \end{bmatrix}$$

Po dosazení teplotních sil, momentů a matic A, B, D do maticového vztahu dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ \\ \varepsilon_{yy}^\circ \\ \varepsilon_{xy}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}14 \\ -20{,}20 \\ -6{,}99 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}58 \\ -1{,}00 \\ -2{,}35 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Potom můžeme počítat mechanické poměrné deformace pro obě vrstvy:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^\circ + z\,k_x \\ \varepsilon_{yy}^\circ + z\,k_y \\ \gamma_{xy}^\circ + z\,k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \Delta T$$

Spodní vrstva:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}14 + 0{,}58\,z + 7 \\ -20{,}20 - 1{,}00\,z + 23{,}0 \\ 6{,}99 - 2{,}35\,z + 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} -1{,}14 + 0{,}58\,z \\ 2{,}80 - 1{,}00\,z \\ 6{,}99 - 2{,}35\,z \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Horní vrstva:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}14 + 0{,}58\,z + 15{,}0 \\ -20{,}20 - 1{,}00\,z + 15{,}0 \\ 6{,}99 - 2{,}35\,z - 16{,}0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} 6{,}86 + 0{,}58\,z \\ -5{,}20 - 1{,}00\,z \\ -9{,}01 - 2{,}35\,z \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Deformace v tom kroku jsou funkce souřadnice „z“

Michael Andrango

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

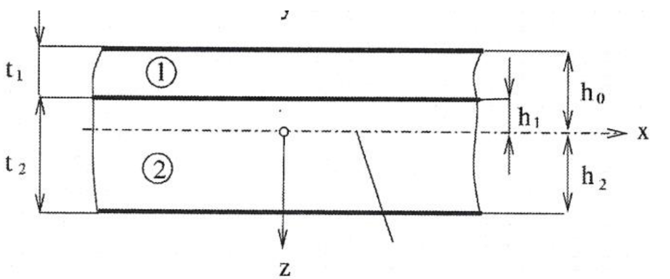
Výpočet zbytkových napětí

Vzhledem k tomu, že se po tloušťce laminátu mění deformace, mění se i napětí.
Napětí se po tloušťce mění lineárně, stačí proto vyšetřit napětí na povrchu lamin

Orientace:

45°

0°



$h_0 = -4\ mm$

$h_1 = -1\ mm$

$h_2 = 4\ mm$

Podle střední roviny:
Horní vrstva: z = -4
z = -1
Dolní vrstva: z = -1
z = 4

Pro horní vrstvu platí:

horní vrstva 45°, $z = -1\ mm$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 6{,}28 \\ -4{,}20 \\ -6{,}66 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}50 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}50 \\ 4{,}50 & 4{,}50 & 5{,}15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6{,}28 \\ -4{,}20 \\ -6{,}66 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}05 \\ -2{,}51 \\ -2{,}49 \end{Bmatrix} MPa$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L^T \\ \sigma_T^T \\ \sigma_{LT}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}05 \\ -2{,}51 \\ -2{,}49 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4{,}27 \\ 0{,}71 \\ -0{,}73 \end{Bmatrix} MPa,$$

horní vrstva 45°, $z = -4\ mm$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 4{,}54 \\ -1{,}20 \\ 0{,}39 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 6{,}55 & 5{,}15 & 4{,}50 \\ 5{,}15 & 6{,}55 & 4{,}50 \\ 4{,}50 & 4{,}50 & 5{,}15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4{,}54 \\ -1{,}20 \\ 0{,}39 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}53 \\ 1{,}73 \\ 1{,}70 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-1}\ MPa,$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L^T \\ \sigma_T^T \\ \sigma_{LT}^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2{,}53 \\ 1{,}73 \\ 1{,}70 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}83 \\ 0{,}43 \\ -0{,}40 \end{Bmatrix} MPa,$$

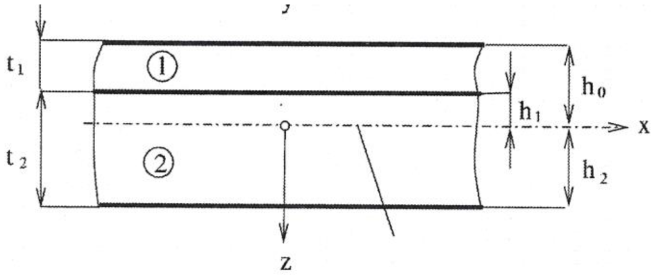
Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Výpočet zbytkových napětí

Orientace:

45°

0°



$h_0 = -4\ mm$
$h_1 = -1\ mm$
$h_2 = 4\ mm$

Pro dolní vrstvu platí:

spodní vrstva 0° , $z = 4\ mm$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 1{,}18 \\ -1{,}20 \\ -2{,}41 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}18 \\ -1{,}20 \\ -2{,}41 \end{Bmatrix} \cdot 10^3\ MPa,$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_L^T \\ \sigma_T^T \\ \sigma_{LT}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}28 \\ -0{,}16 \\ -0{,}17 \end{Bmatrix} MPa,$$

spodní vrstva 0° , $z = -1\ mm$

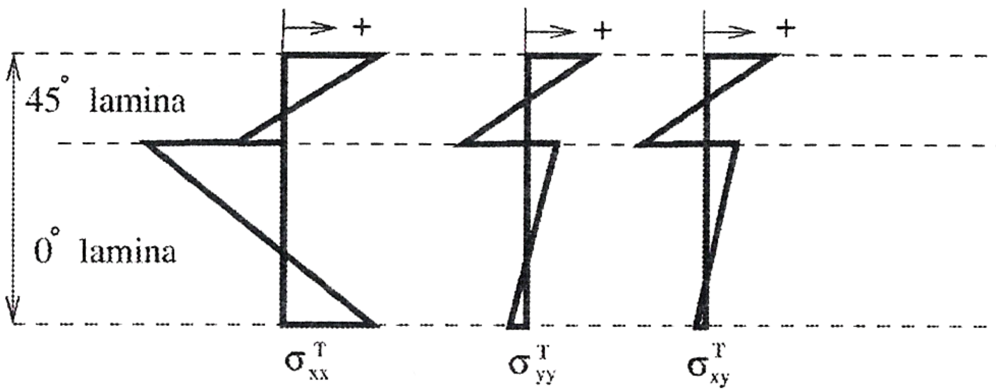
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^M \\ \varepsilon_{yy}^M \\ \gamma_{xy}^M \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} -1{,}72 \\ 3{,}80 \\ 9{,}34 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 20 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}72 \\ 3{,}80 \\ 9{,}34 \end{Bmatrix} \cdot 10^3\ MPa$$

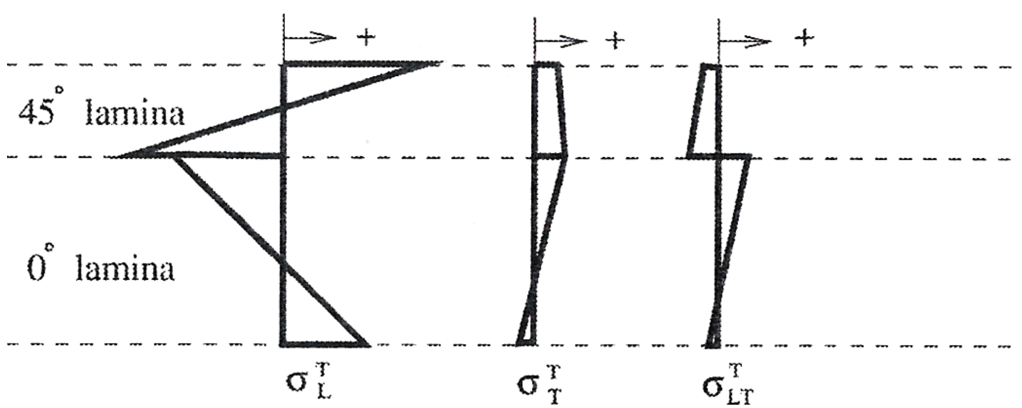
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^T \\ \sigma_{yy}^T \\ \sigma_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_L^T \\ \sigma_T^T \\ \sigma_{LT}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3{,}17 \\ 0{,}64 \\ 0{,}65 \end{Bmatrix} MPa,$$

Napětí v laminátu vzniklé změnou teploty

Průběh zbytkových napětí



Napětí v souřadnicovém systému (x,y,z)



Napětí v souřadnicovém systému (L,T,T´)