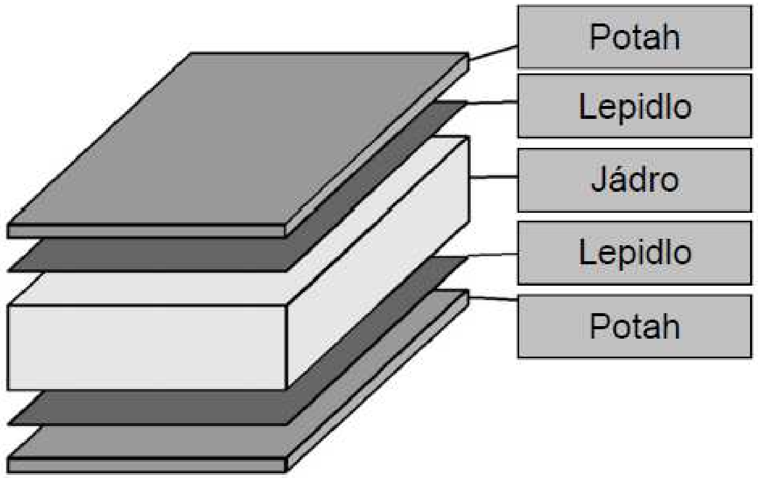
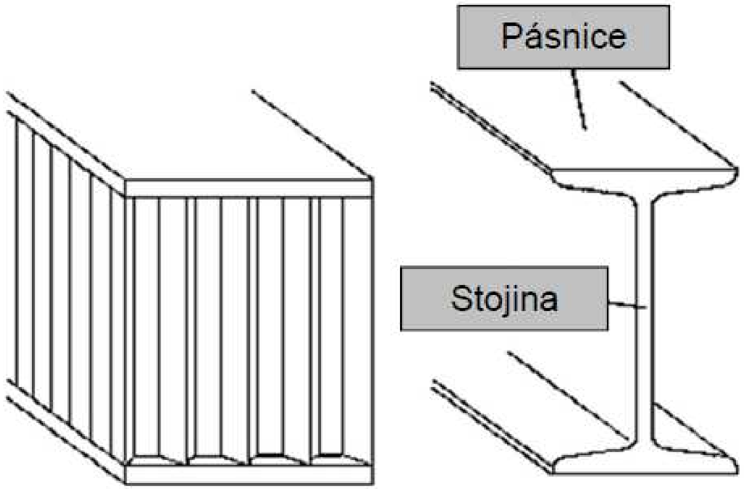
SENDVIČOVÉ KONSTRUKCE

Zdeněk Padovec

Sendviče

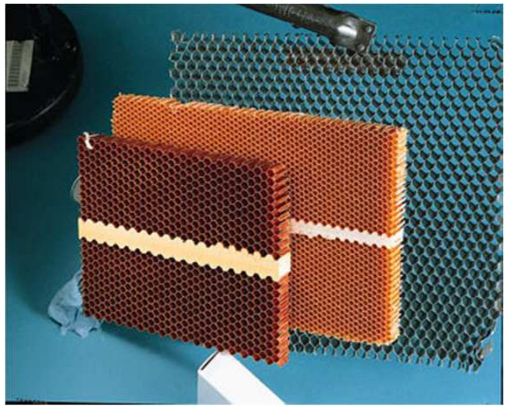
- ohybově namáhané konstrukce – úspora hmotnosti
- potahy (skiny) namáhané na ohyb, jádro (core) namáhané smykem
- analogie k I profilu

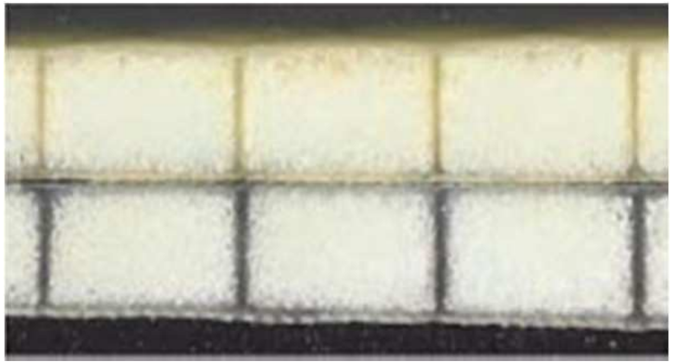




Sendviče

- potahy – kov, kompozit (tkanina, rohož,…)
- jádro – pěna, voština (honeycomb), balzové dřevo, korek…





Sendviče

- klasická laminátová teorie
  - neuvažujeme smykové deformace
- klasická laminátová teorie s uvažováním příčné smykové deformace
  - jádro přenáší jak smyk, tak i ohyb a nahlížíme na něj, jako na jednu z vrstev, uvažováno jako izotropní

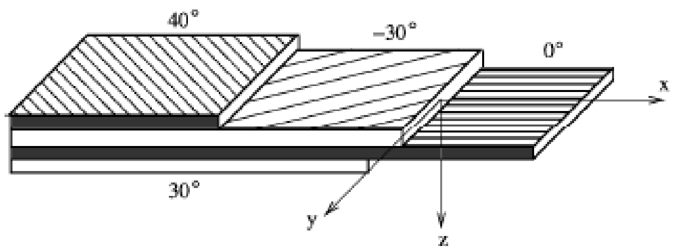
$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_{s} \end{bmatrix}$$

- sendvičová teorie
  - jádro přenáší pouze smyk a je uvažováno jako izotropní

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_{c} \end{bmatrix}$$

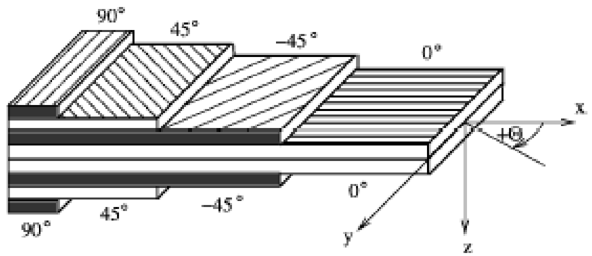
Klasická laminátová teorie

- vrstvené lamináty



Označení

$[40\,|-30|\,0\,|30]$



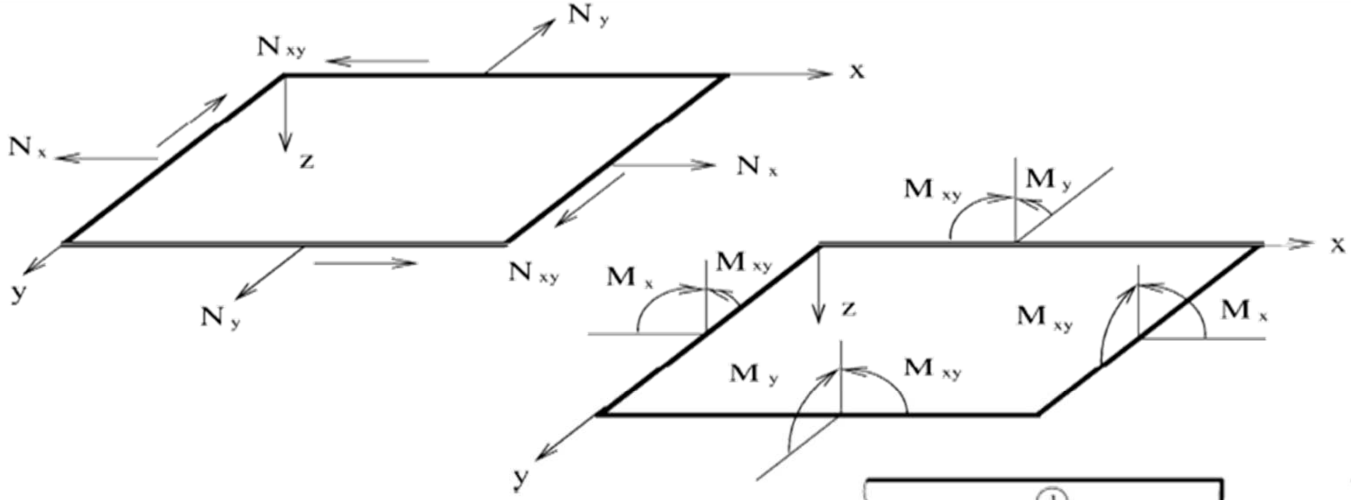
Označení

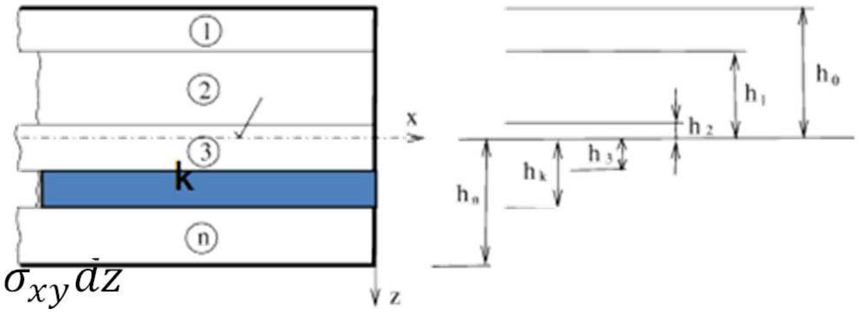
$[90\,|\pm 45|\,0]$

- každá lamina ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka << šířka, délka ⇨ rovinná napjatost
- posunutí jednotlivých bodů jsou velmi malá
- dokonalý, nekonečně tenký spoj mezi laminami – spojité posuvy, posunutí se mění v příčném směru lineárně
- Kirchhoffova hypotéza, přetvoření v příčném směru $\cong 0$
- lineární závislost mezi napětí a deformací

Klasická laminátová teorie

- síly a momenty působící na laminu





$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz\,, N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz$$

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz\,, M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz$$

Klasická laminátová teorie

- za σ dosadíme z Hookeova zákona

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^0 \\ \varepsilon_{yy}{}^0 \\ \gamma_{xy}{}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} zdz \right\}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^0 \\ \varepsilon_{yy}{}^0 \\ \gamma_{xy}{}^0 \end{bmatrix} zdz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2dz \right\}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}A_{12}A_{16}B_{11}B_{12}B_{16} \\ A_{21}A_{22}A_{21}B_{21}B_{22}B_{26} \\ A_{61}A_{62}A_{66}B_{61}B_{62}B_{66} \\ B_{11}B_{12}B_{16}D_{11}D_{12}D_{16} \\ B_{21}B_{22}B_{26}D_{21}D_{22}D_{26} \\ B_{61}B_{62}B_{66}D_{61}D_{62}D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}{}^0 \\ \varepsilon_{yy}{}^0 \\ \gamma_{xy}{}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k ({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (Q_{ij})_k ({h_k}^3 - {h_{k-1}}^3)$$

Klasická laminátová teorie

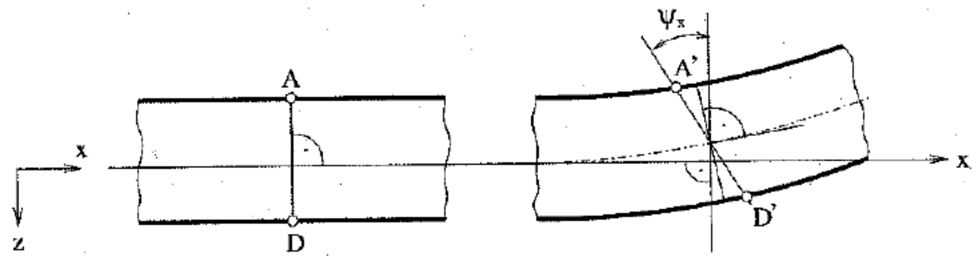
- A...matice tahové tuhosti
- B...matice vazbové tuhosti
- D...matice ohybové tuhosti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \overline{\mathbf{B}} \\ \overline{\mathbf{B}} & \overline{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Laminátová teorie s uvažováním příčné smykové deformace

- kolmice na střední rovinu NEZŮSTANE kolmicí po deformaci – NEPLATÍ Kirchhoffova hypotéza



$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{Q}_s$ výslednice vnějších sil působících kolmo na desku a způsobujících smykové deformace (index $\boldsymbol{s}$ – celý sendvič)
- $\boldsymbol{\gamma}_s$ jsou zkosy vzniklé vlivem smyku

Laminátová teorie s uvažováním příčné smykové deformace

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\gamma_{yz}}^0 \\ {\gamma_{zx}}^0 \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^{h} (h_k - h_{k-1})\left({C_{ij}}^{\prime}\right)_k, i, j = 4, 5.$$

- jádro přenáší jak smyk, tak i ohyb a nahlížíme na něj, jako na jednu z vrstev, uvažováno jako izotropní

Sendvičová teorie

- lineární závislost mezi napětí a deformací
- tloušťka jádra mnohem větší než tloušťka potahů
- posunutí jádra *u* a *v* ve směru *x* a *y* se mění po tloušťce lineárně
- posunutí potahů *u* a *v* jsou konstantní po celé jejich tloušťce
- příčné posunutí *w* je nezávislé na souřadnici *z* - $\varepsilon_{zz} = 0$
- jádro přenáší JEN příčná smyková napětí
- malá tloušťka potahů - příčná smyková napětí a normálové ve směru *z* = 0

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_c \end{bmatrix}$$

Sendvičová teorie

- index 1 – horní potah, index 2 – dolní potah

$$A_{ij} = {A_{ij}}^1 + {A_{ij}}^2, B_{ij} = \frac{h}{2}\left({A_{ij}}^2 - {A_{ij}}^1\right), C_{ij} = {C_{ij}}^1 + {C_{ij}}^2, D_{ij} = \frac{h}{2}\left({C_{ij}}^2 - {C_{ij}}^1\right)$$

$${A_{ij}}^1 = \sum_{k=1}^{n_1} \left(Q_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1})$$

$${A_{ij}}^2 = \sum_{k=1}^{n_2} \left(Q_{ij}\right)_k (h_k - h_{k-1})$$

$${C_{ij}}^1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_1} \left(Q_{ij}\right)_k \left({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2\right)$$

$${C_{ij}}^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_2} \left(Q_{ij}\right)_k \left({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2\right)$$

$$F_{ij} = h{C_{ij}}^{\prime c}$$

- nesymetrická sendvičová deska, anizotropní jádro

Sendvičová teorie

- index 1 – horní potah, index 2 – dolní potah

$$A_{ij} = 2{A_{ij}}^1, B_{ij} = 0, C_{ij} = 0, D_{ij} = h{C_{ij}}^2$$

$$\boldsymbol{A_{ij}}^{\mathbf{1}} = \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) = \boldsymbol{A_{ij}}^{\mathbf{2}} = \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$\boldsymbol{C_{ij}}^{\mathbf{1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij})_k \left({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2\right) = -\boldsymbol{C_{ij}}^{\mathbf{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k \left({h_k}^2 - {h_{k-1}}^2\right)$$

$$F_{ij} = h{G_{ij}}^c,$$

$$F_{44} = F_{55} = hG_c, F_{45} = 0$$

- symetrická sendvičová deska, izotropní jádro
  - vymizí vazba mezi výslednými silami *N* a modifikovanými křivostmi *k* a zároveň mezi momenty *M* a deformací stř. roviny ${\varepsilon_m}^0$

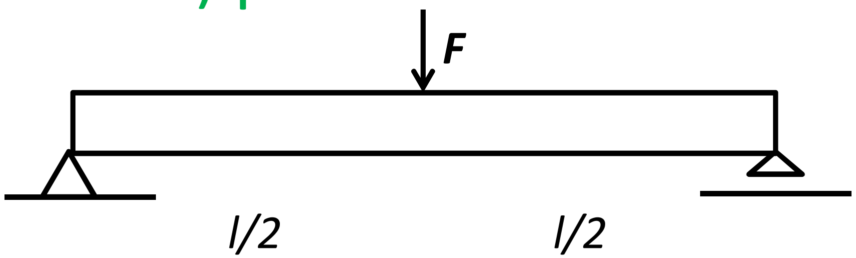
Sendvičová teorie

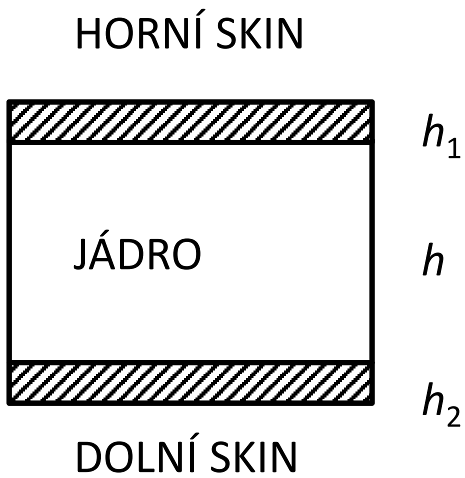
- symetrická sendvičová deska, izotropní jádro
  - vymizí vazba mezi výslednými silami *N* a modifikovanými křivostmi *k* a zároveň mezi momenty *M* a deformací stř. roviny ${\varepsilon_m}^0$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {\varepsilon_\mathrm{m}}^0 \\ \mathrm{k} \\ \gamma_c \end{bmatrix}$$

Příklad

- F = 100 N, l = 400 mm, b= 40 mm, $h_1 = h_2$ = 3 mm, skiny jsou symetrické vůči střední rovině, 7 vrstev každý potah [0|±30|90|-+30|0], $h_k \cong 0{,}428$ mm, C vlákna, epoxidová matrice, $E_L=1{,}299\cdot10^5$ MPa, $E_T=0{,}1399\cdot10^5$ MPa, $G_{LT}=0{,}045\cdot10^5$ MPa, $G_{TT'}=0{,}03\cdot10^5$ MPa, $\nu_{LT}=0{,}28$. Tloušťka jádra h = 10 mm, izotropní materiál $E_C=75$ MPa, $\nu_C=0{,}34$. Průhyb pod silou = ?
  - a) pomocí sendvičové teorie
  - b) pomocí laminátové teorie





Příklad

- a) SENDVIČOVÁ TEORIE
  - jádro jen smyk, skiny jen ohyb
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}{}^{*} \left(1 + 12 \frac{F_{55}{}^{*}}{D_{11}{}^{*}} \frac{1}{l^2}\right)$
  - nutno vyšetřit prvky $D_{11}{}^{*}$ a $F_{55}{}^{*}$
  - symetrický sendvič – **B = 0**
  - $D_{ij} = hC_{ij}{}^{2}, C_{ij}{}^{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij})_k (h_k{}^{2} - h_{k-1}{}^{2})$
  - platí $\mathbf{D}^{*} = \mathbf{D}^{-1}$
  - $(Q_{ij})_k$ …matice mimoosové tuhosti pro každou vrstvu laminátového skinu
  - $D_{11}{}^{*} = 6{,}67984056 \cdot 10^{-5} \mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

Příklad

- a) SENDVIČOVÁ TEORIE
  - jádro jen smyk, skiny jen ohyb
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} {D_{11}}^* \left(1 + 12 \frac{{F_{55}}^*}{{D_{11}}^*} \frac{1}{l^2}\right)$
  - nutno vyšetřit prvky ${D_{11}}^*$ a ${F_{55}}^*$
  - symetrický sendvič – **B = 0**
  - matice smykové tuhosti **F** závisí na parametrech jádra - $\frac{E_c}{G_c} = 2(1 + \upsilon_c) \rightarrow G_c = 27{,}985\ \mathrm{Mpa}$
  - $F_{44} = F_{55} = hG_c = 2{,}7985\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}, F_{45} = 0$
  - ${F_{55}}^* = \frac{F_{44}}{\Delta F} = 3{,}573 \cdot 10^{-6}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{N}, \Delta F$...determinant **F**

$$\boxed{w_F = 1{,}12\ \mathrm{mm}}$$

Příklad

- a) SENDVIČOVÁ TEORIE
  - Jádro NULOVÁ SMYKOVÁ TUHOST, skiny jen ohyb
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} {D_{11}}^*$
  - ${D_{11}}^* = 6{,}67984056 \cdot 10^{-5} \mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

$$\boxed{w_F = 0{,}22\ \mathrm{mm}}$$

Příklad

- b) LAMINÁTOVÁ TEORIE
  - jádro je jedna z vrstev laminátu a má ohybovou a smykovou tuhost
  - symetrický laminát – **B = 0**
  - $\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix}$
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}{}^* \left(1 + 12 \frac{F_{55}{}^*}{D_{11}{}^*} \frac{1}{l^2}\right)$
  - $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(Q_{ij}\right)_k \left(h_k{}^3 - h_{k-1}{}^3\right)$
  - platí **D*= D⁻¹**
  - $D_{11}{}^* = 5{,}015552603 \cdot 10^{-5} \mathrm{N}^{-1} \mathrm{m}^{-1}$

Příklad

- b) LAMINÁTOVÁ TEORIE
  - $$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\gamma}_s \end{bmatrix}$$
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}{}^* \left(1 + 12 \frac{F_{55}{}^*}{D_{11}{}^*} \frac{1}{l^2}\right)$
  - $F_{ij} = \sum_{k=1}^{h} (h_k - h_{k-1}) \left(C_{ij}{}'\right)_k, i,j = 4,5$
  - $F_{44} = 2{,}085127931 \cdot 10^7 \mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}, F_{55} = 2{,}470842217 \cdot 10^7 \mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}, F_{45} = 0$
  - $F_{55}{}^* = \frac{F_{44}}{\Delta F} = 4{,}047203 \cdot 10^{-8} \mathrm{m}^{-1}\mathrm{N},$
  - ΔF...determinant **F**

$$\boxed{w_F = 0{,}18 \text{ mm}}$$

Příklad

- b) LAMINÁTOVÁ TEORIE
  - jádro je jedna z vrstev laminátu a má ohybovou tuhost, příčné smykové síly NEUVAŽUJEME
  - symetrický laminát – **B = 0**
  - $\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{m}}{}^{\mathbf{0}} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
  - dá se odvodit $w_F = \frac{Fl^3}{48b} D_{11}{}^*$
  - $D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \left(Q_{ij}\right)_k \left(h_k{}^3 - h_{k-1}{}^3\right)$
  - platí $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^{-1}$
  - $D_{11}{}^* = 5{,}015552603 \cdot 10^{-5}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

Příklad

- b) LAMINÁTOVÁ TEORIE
  - jádro je jedna z vrstev laminátu a má ohybovou tuhost, příčné smykové síly NEUVAŽUJEME
  - symetrický laminát – **B = 0**

$$\boxed{w_F = 0{,}17\ \mathrm{mm}}$$

Shrnutí

- **průhyb sendvičového nosníku**

	s uvažováním smyku [mm]	bez smyku [mm]
Sendvičová teorie	1,12	0,22
Laminátová teorie	0,18	0,17
Experiment	0,51	
FEM (solid)	0,71	