

REOLOGICKÉ MODELY MĚKKÝCH TKÁNÍ

1. ÚVOD

Výchozím principem mechaniky měkkých tkání (tj. kůže, cév, pojivových tkání, tkání vnitřních orgánů, šlach, vazů, chrupavek, sinoviální tekutiny) je reologie. Při modelování těchto tkání se někdy také používá teorie směsí, jejíž zvláštní částí je tzv. poroelasticita.

2. REOLOGIE

Reologie studuje deformování a tečení hmoty způsobené aplikovaným napětím.¹ Název byl zaveden roku 1920 profesorem Eugenem Binghamem z *Lehigh University* (Bethlehem, Pennsylvania). Inspirací mu byl výrok řeckého filosofa Hérakleita z Efesu (535–475, *Ἡράκλειτος ὁ Εφεσίου*) „Vše plyne“ (*πάντα ῥεῖ*, *panta rei*) proneseného ve významu „Nevstoupíš dvakrát do stejné řeky.“

Reologie rozšiřuje klasické disciplíny jako je teorie pružnosti,

$$\sigma = E \frac{du}{dx},$$

a mechanika newtonovských tekutin,

$$\tau = \eta \frac{d\dot{u}}{dy}$$

na materiály jiných vlastností. Reologie se také snaží předpovědět chování materiálu nazíraného jako kontinuum se znalostí jeho mikro a nanostruktury.

V každé látce je obsažena jak pružná tak viskozní deformace. Rozdíl je jen v rychlosti trvalé deformace. Pevné látky tečou pomaleji, tekutiny rychleji.

2.1. Základní reologické látky. Základní reologickou látkou je tzv. **Euklidova tuhá látka**, látka, která se může pohybovat, působí na ni setrvačné účinky, ale zůstává nedeformována ($\varepsilon = 0$). Pro tuto látku používáme následující symbolickou značku:



Další důležitou základní reologickou látkou je **Hookeova pružná látka**, kde závislost mezi napětím a deformací je lineární

$$\sigma = E\varepsilon.$$

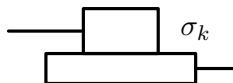
Symbolem této značky je pružina



a charakteristikou je tzv. modul tuhosti E .

Hookeova pružná látka představuje vůbec první známé vyjádření závislosti deformace na zatížení. Jako první ho nejspíše vyslovil roku 1660 Robert Hooke v práci vydané až roku 1678 v Londýně. Také v Londýně, avšak o čtyři roky dříve, tj. r. 1674, vyšla i práce Williama Pettyho, kde nezávisle na Hookeovi formuloval tentýž zákon o lineární závislosti deformace na zatížení.

St. Venantova plastická látka je látka, jejíž závislost napětí a deformace je charakterizována grafem z obrázku 2 a značena symbolem:



Tato látka je charakterizována veličinou σ_k zvanou mez kluzu.

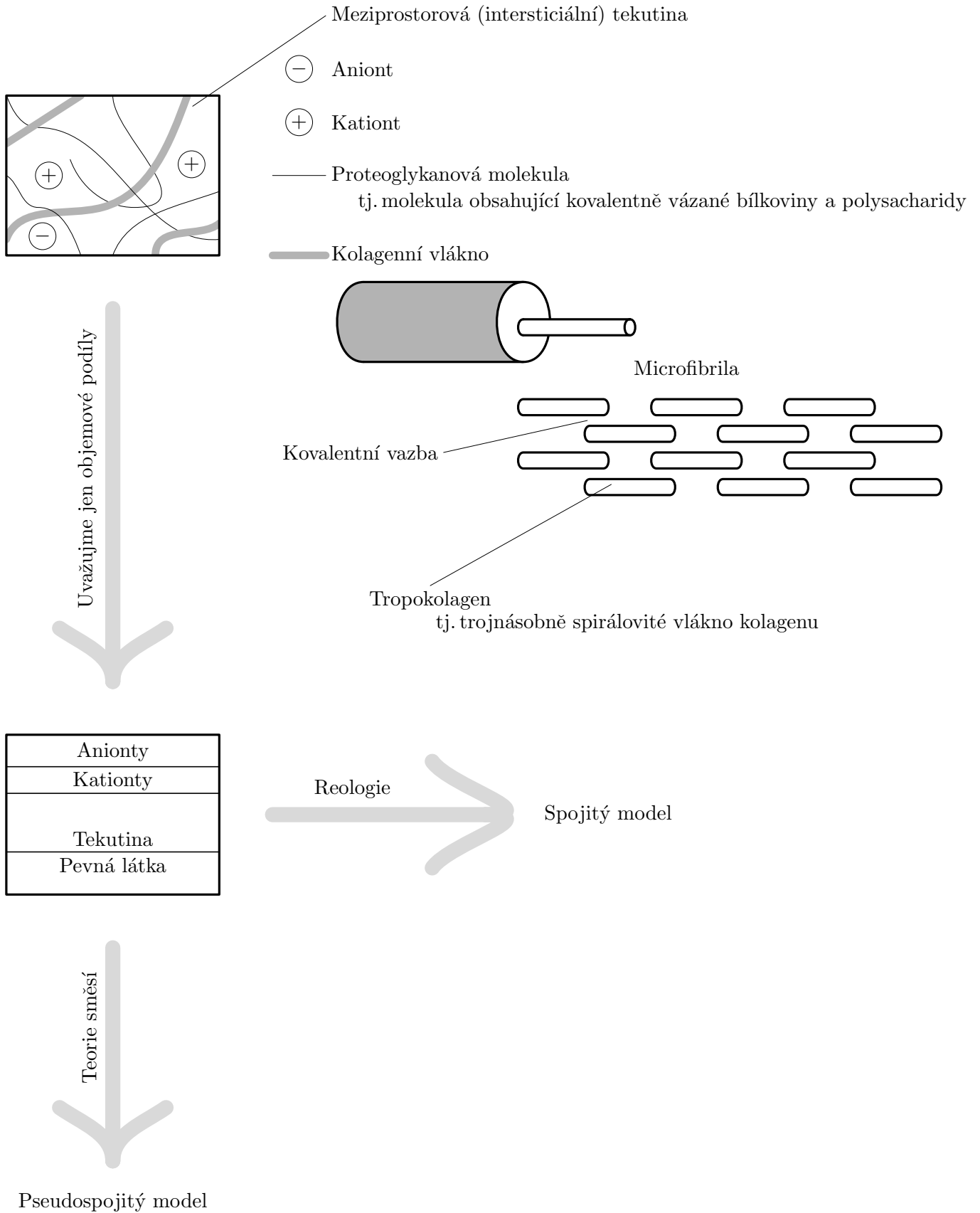
Newtonova vazká kapalina je charakterizována lineární závislostí mezi napětím a rychlostí deformace

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

a symbolizována obrázkem:



¹[Sob81]

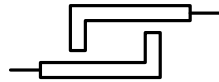


OBRÁZEK 1. Reologie a proelasticita v modelování měkkých tkání

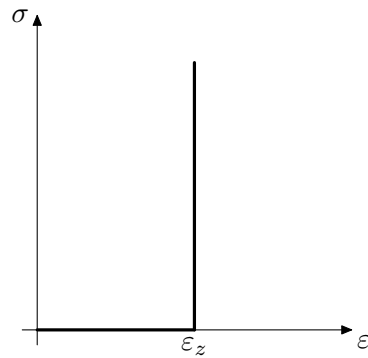


OBRÁZEK 2. Závislost napětí a deformace pro St. Venantovu látku



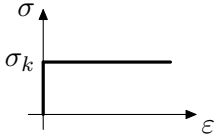
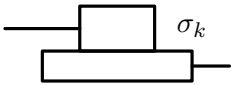

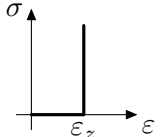
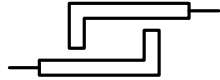
Zpevněná látka



je charakterizována závislostí napětí a deformace z obrázku 3.



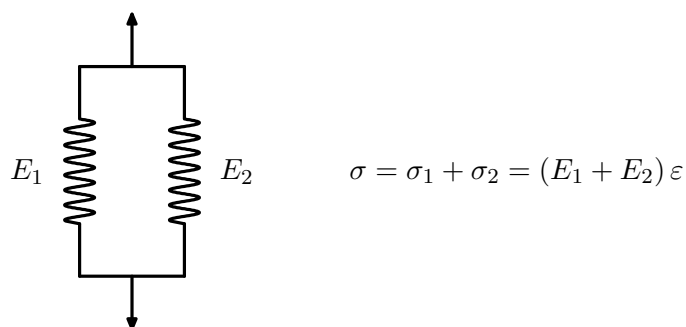
OBRÁZEK 3. Závislost napětí a deformace pro zpevněnou látku

Název látky	Charakteristika	Grafický symbol
Euklidova tuhá látka	$\varepsilon = 0$	
Hookeova pružná látka	$\sigma = E\varepsilon$	
St.-Venantova plastická látka		
Newtonova vazká kapalina	$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$	
Zpevněná látka		

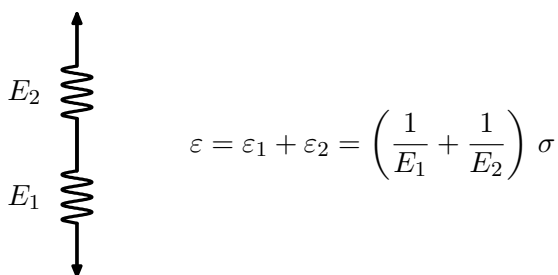
TABULKA 1. Základní reologické látky

2.2. Modelování látek skládáním látek základních.

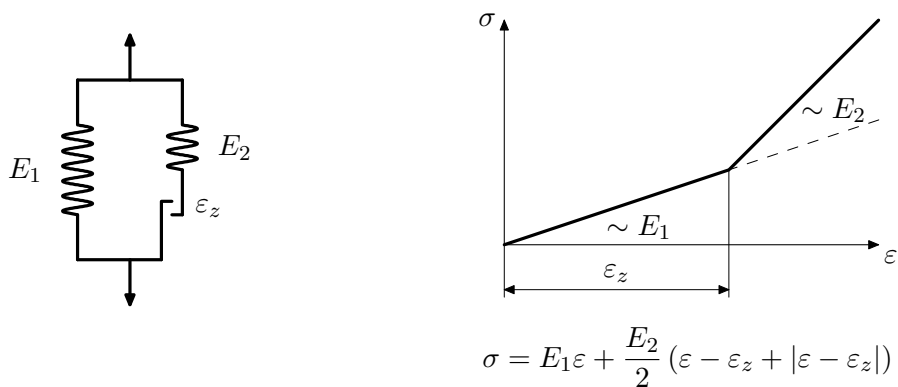
2.2.1. Látky pružné (elastické).



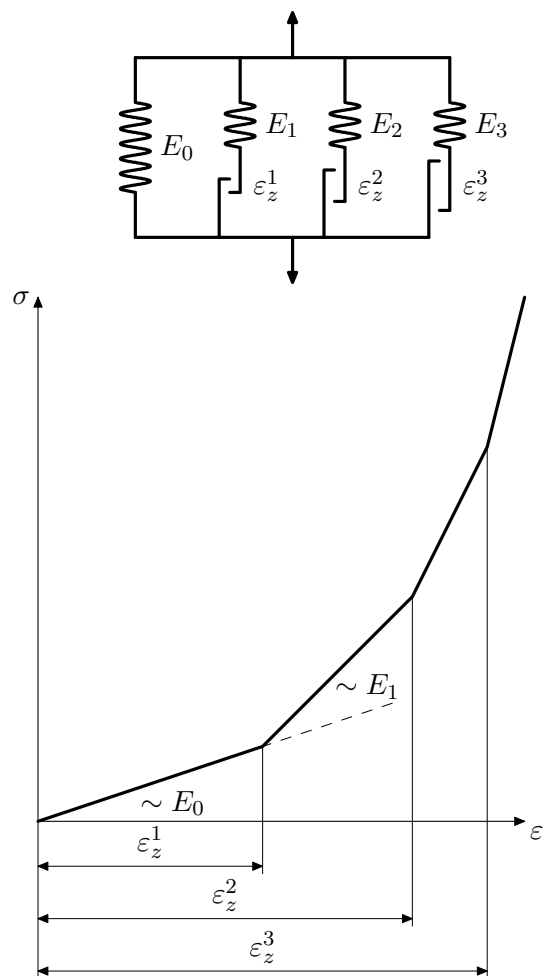
OBRÁZEK 4. Paralelní uspořádání elastických látek



OBRÁZEK 5. Seriové uspořádání elastických látek

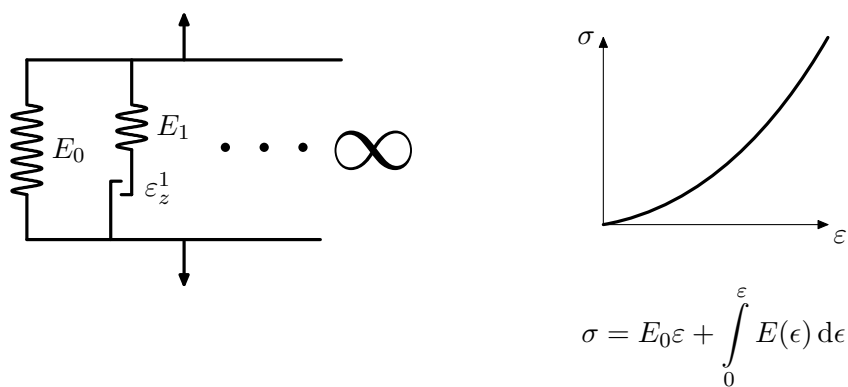


OBRÁZEK 6. Jednoduchá nadpružená látka



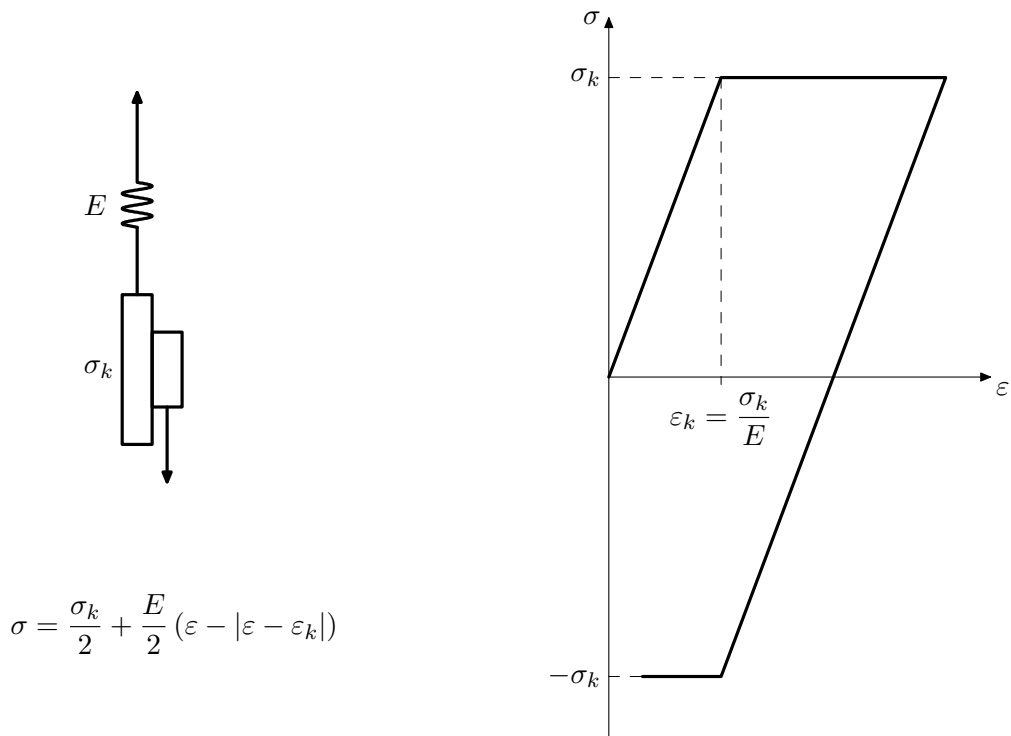
$$\sigma = E_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^3 \frac{E_k}{2} (\varepsilon - \varepsilon_z^k + |\varepsilon - \varepsilon_z^k|)$$

OBRÁZEK 7. Složená nadpružená látka



$$\sigma = E_0 \varepsilon + \int_0^\varepsilon E(\epsilon) d\epsilon$$

OBRÁZEK 8. Spojitá nadpružená látka



OBRÁZEK 9. Elastoplastická látka bez zpevnění

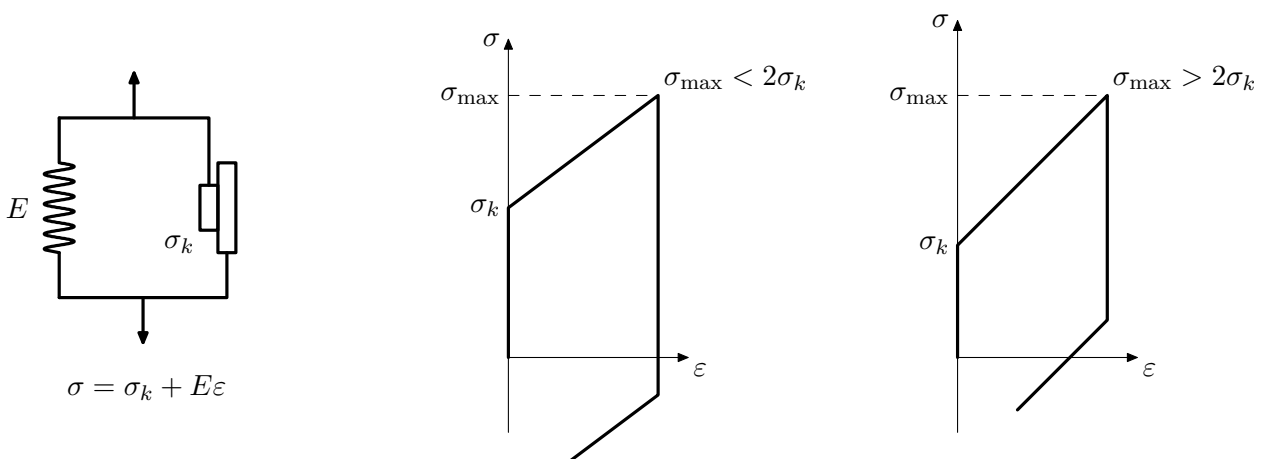
2.2.2. *Látky pružnoplastické (elastoplastické, pružnotvátné).* Vztah mezi napětím a deformací v případě elastoplastické látky bez zpevnění, viz obr. 9, získáme ze vztahu (6) platném pro jednoduchou nadpruženou látku, kde položíme $E_2 = -E$ a $E_1 = E$, tj.

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{-E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_k + |\varepsilon - \varepsilon_k|),$$

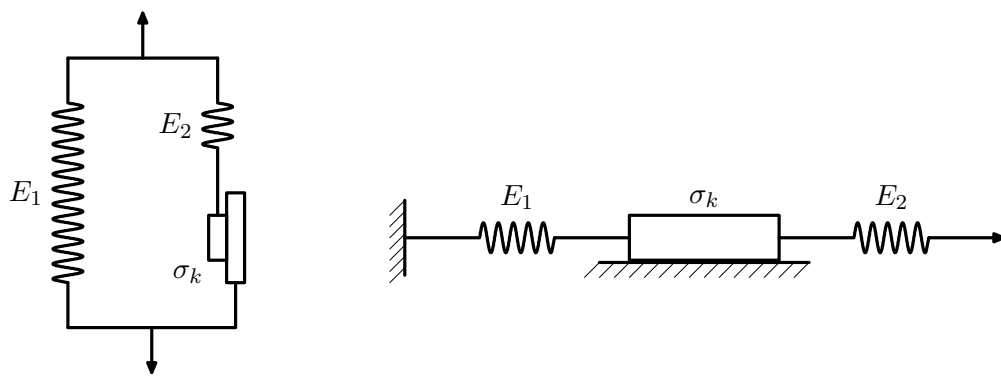
z čehož po úpravě dostáváme výsledný reologický vztah

$$\sigma = \frac{\sigma_k}{2} + \frac{E}{2} (\varepsilon - |\varepsilon - \varepsilon_k|),$$

kde $\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E}$.

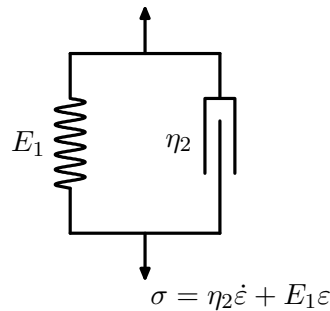


OBRÁZEK 10. Tuhoplastická látka se zpevněním



OBRÁZEK 11. Elastoplastické látky s přímkovým zpevněním

2.3. Látky viskoelastické (vazkopružné, pružnovláčné).



OBRÁZEK 12. Látka Kelvinova (Voitova)

2.3.1. *Látka Kelvinova (Voitova)*. Napětí přenášené látkou Kelvinovou (viz obrázek 12) je dáno součtem napětí přenášeného jeho elastickou složkou σ_1 a složkou vazkou σ_2 , tedy

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

zatímco deformace ε Kelvinovy látky je tatáž jako deformace složky elastické ε_1 i složky vazké ε_2 , tj.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Pro elastickou složku platí

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 \varepsilon$$

a pro složku vazkou

$$\sigma_2 = \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 = \eta_2 \dot{\varepsilon}.$$

Okamžitě tak přicházíme ke konstitutivní rovnici Kelvinovy látky

$$\sigma = \eta_2 \dot{\varepsilon} + E_1 \varepsilon.$$

Řešení diferenciální rovnici tohoto typu, tj. diferenciální rovnice

$$\dot{x} + ax = f(t),$$

můžeme vyjádřit v uzavřeném tvaru jako²

$$(1) \quad x(t) = e^{-at} \left(\int_{t_0}^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau + e^{at_0} x(t_0) \right)$$

anebo, pro $t_0 = 0$, užitím inverzní Laplaceovy transformace³

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(s) + x(0)}{s + a} \right),$$

kde $F(s)$ jest Laplaceův obraz funkce $f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Použitím vztahu (1) můžeme okamžitě psát závislost deformace Kelvinovy (jednorozměrné) látky na uvaleném napětí:

$$(2) \quad \varepsilon(t) = e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_1}{\eta_2} \tau} \frac{1}{\eta} \sigma(\tau) d\tau + e^{\frac{E_1}{\eta_2} t_0} \varepsilon(t_0) \right).$$

Průběh **dopružování Kelvinovy látky** vyšetříme ve dvou krocích. Prvním krokem je integrace výrazu (2) pro $\sigma = \sigma_{\text{konst}}$ v intervalu $0 < t < t_1$ ($t_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{konst}}}{E} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} \right).$$

²[Sob81]

³GNU MAXIMA

Pro rychlost deformace v tomto intervalu pak platí

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_{\text{konst}}}{\eta_2} e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t}.$$

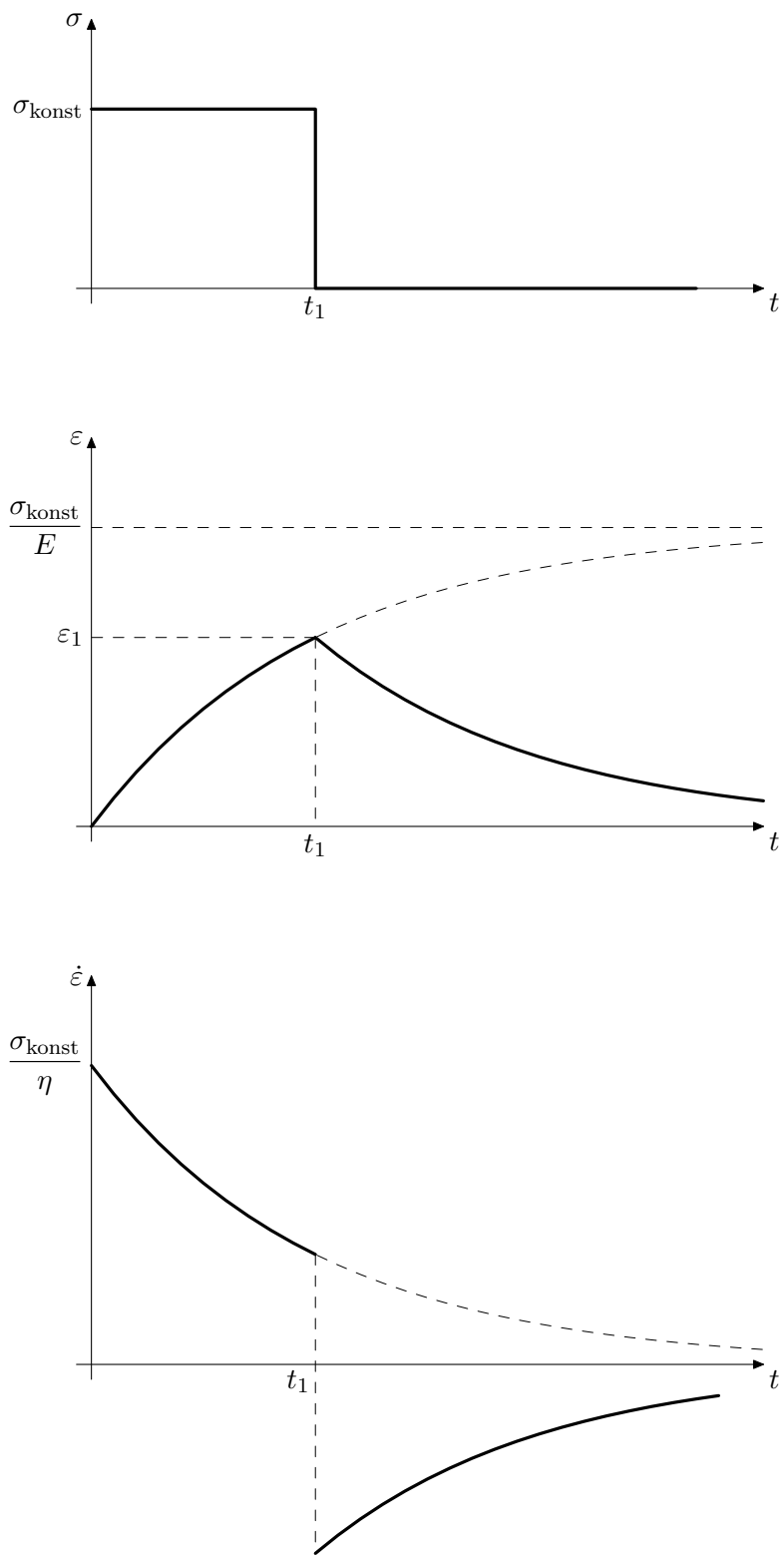
Druhým krokem je integrace v intervalu $t > t_1$, kde $\sigma = 0$ a $t_0 = t_1$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_{\text{konst}}}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t_1}\right)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{\text{konst}}}{E_1} \left(e^{\frac{E_1}{\eta_2} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t}.$$

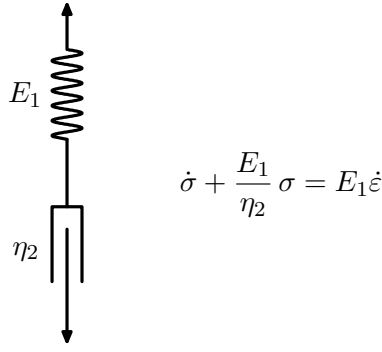
Rychlost deformace je pak dána vztahem

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\sigma_{\text{konst}}}{\eta_2} \left(e^{\frac{E_1}{\eta_2} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t}.$$

Grafické znázornění tohoto průběhu máme na obrázku 13.



OBRÁZEK 13. Průběh dopružování Kelvinovy látky



OBRÁZEK 14. Látka Maxwelllova

2.3.2. *Látka Maxwelllova.* Konstitutivní rovnici Maxwellovy látky získáme uvolněním struktury naznačené na obrázku 14. Napětí přenášené Maxwellovou hmotou je zjevně rovno napětí přenášenému složkou elastickou (σ_1) i napětí přenášenému složkou vazkou (σ_2):

$$(3) \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2.$$

Celková deformace ε je však součtem deformací obou složek Maxwellovy látky:

$$(4) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Použitím závislostí z tabulky 1 ve zderivovaném vztahu (4) máme

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{\eta_2},$$

nebo, použitím rovnosti (3),

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta_2} \sigma = E_1 \dot{\varepsilon}.$$

Prostou integrací získáme výraz pro deformaci Maxwellovy látky

$$(5) \quad \varepsilon(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \right) d\tau + \varepsilon(t_0).$$

Použitím vztahu (1) získáme přímou závislost napětí Maxwellovy látky na dané deformaci

$$(6) \quad \sigma(t) = e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_1}{\eta_2} \tau} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + e^{\frac{E_1}{\eta_2} t_0} E_1 \varepsilon(t_0) \right).$$

Creep (plouživost, dotváření). V případě, že na Maxwellovu látku působí konstantní napětí ($\sigma = \sigma_{\text{konst}}$, $t_0 = 0$), pak výraz (5) dostává tvar

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta_2} \sigma_{\text{konst}} t + \varepsilon(t_0),$$

kde

$$\varepsilon(t_0) = \frac{\sigma_{\text{konst}}}{E_1}.$$

Tento časový průběh deformace, zvaný creep (plouživost, dotváření) je znázorněn na obrázku 15

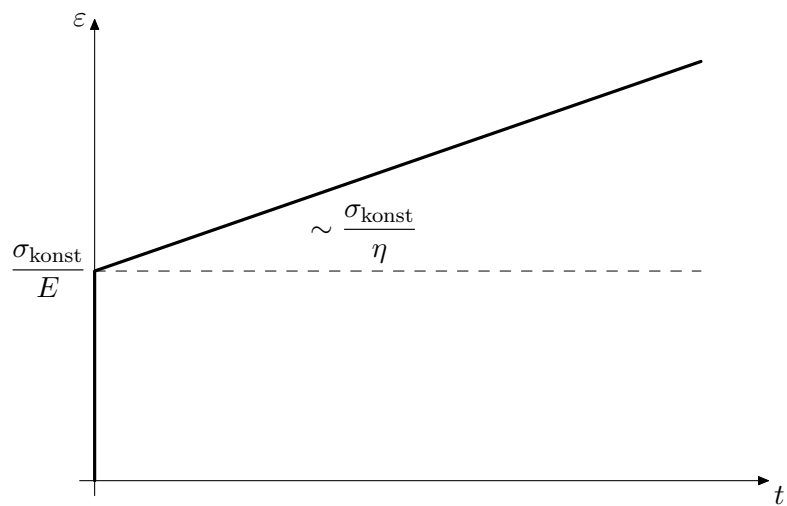
Relaxace (ochabování). Jestliže je na Maxwellovu látku uvalena konstantní deformace ($\varepsilon = \varepsilon_{\text{konst}}$, $\dot{\varepsilon} = 0$), pak vztah (6) přejde do vztahu

$$\sigma = e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} e^{\frac{E_1}{\eta_2} t_0} E_1 \varepsilon(t_0)$$

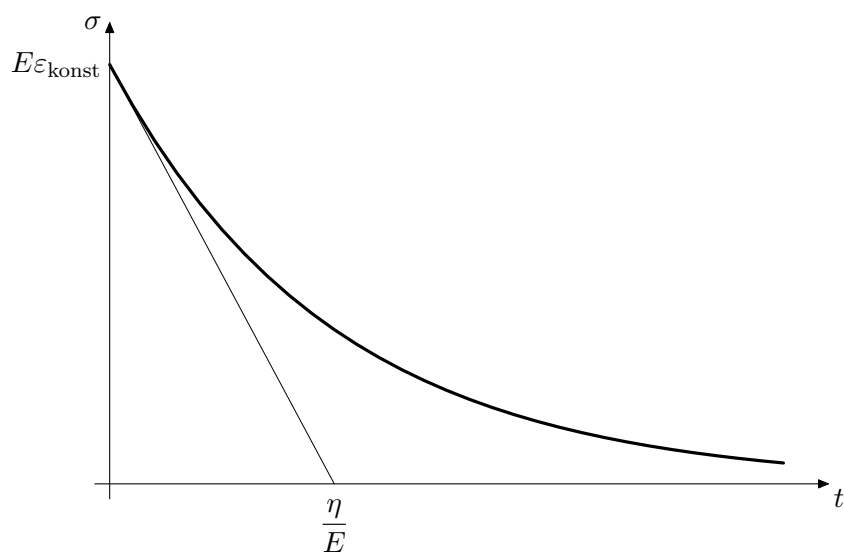
a pro $t_0 = 0$ a $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_{\text{konst}}$ dostáváme průběh napětí zvaný relaxace (či ochabování):

$$(7) \quad \sigma = e^{-\frac{E_1}{\eta_2} t} E_1 \varepsilon_{\text{konst}}$$

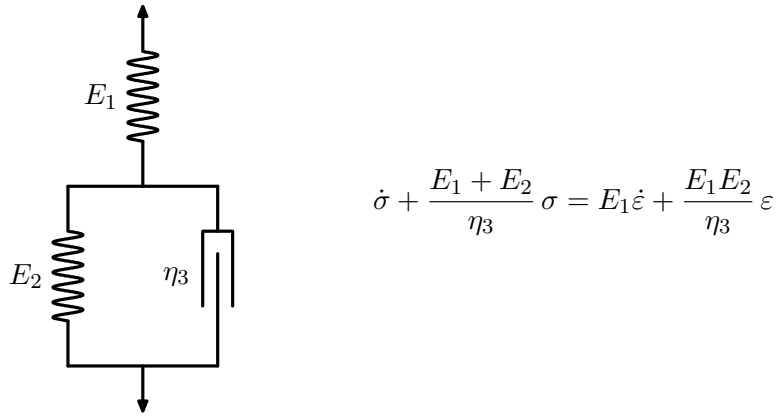
se znázorněným průběhem na obrázku 16.



OBRÁZEK 15. Creep



OBRÁZEK 16. Relaxace (ochabování)



$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \sigma = E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon$$

OBRÁZEK 17. Látka Poyntingova-Thompsonova

2.3.3. *Látka Poyntingova-Thompsonova.* Při sestavování konstitutivní rovnice Poyntingovy-Thompsonovy látky použijeme opět metodu uvolnění, kde napětí a deformace na jednotlivých složkách jsou označeny příslušným indexem, tak jak je naznačeno na obrázku 17. Zřejmě pak máme

$$(8) \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3$$

a

$$(9) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3.$$

Použitím vztahů z tabulky 1 do rovností (8) dostaneme

$$(10) \quad \sigma = E_1 \varepsilon_1$$

a

$$(11) \quad \sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta_3 \dot{\varepsilon}_2.$$

Z (9) a (11)

$$\sigma = E_2 (\varepsilon - \varepsilon_1) + \eta_3 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1)$$

a užitím (10) dostáváme (po uspořádání jednotlivých členů) konstitutivní rovnici Poyntingovy-Thompsonovy látky

$$(12) \quad \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \sigma = E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon.$$

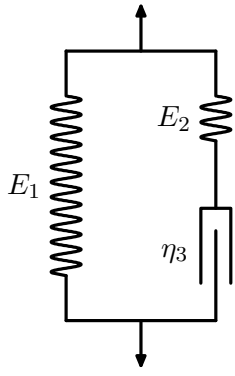
Užitím vztahu (1) můžeme vyjádřit napětí přenášené Poyntingovou-Thompsonovou látkou při předepsané deformaci jako

$$\sigma = e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta_3} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \tau} \left(E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon \right) d\tau + e^{\frac{E_1 + E_2}{\eta_3} t_0} \sigma(t_0) \right)$$

a deformaci při daném napětí jako

$$\varepsilon = e^{-\frac{E_2}{\eta_3} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_2}{\eta_3} \tau} \left(\frac{1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{E_1 \eta_3} \sigma \right) d\tau + e^{\frac{E_2}{\eta_3} t_0} \varepsilon(t_0) \right),$$

kde $\sigma(t_0) = E_1 \varepsilon(t_0)$.



$$\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \sigma = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon$$

OBRÁZEK 18. Látka Zenerova

2.3.4. *Látka Zenerova.* Konstitutivní rovnici Zenerovy látky získáme podobně jako v případech hořejších. Uvolněním jednotlivých členů s užitím značení v souladu s obrázkem 18 máme

$$(13) \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad \text{a} \quad \sigma_2 = \sigma_3.$$

Deformační podmínka má tvar

$$(14) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Užitím vztahů z tabulky 1 v časové derivaci jedné z rovností (14) máme

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{\eta_3}$$

a postupně s pomocí (13) a $\sigma_1 = E_1 \varepsilon$ a uspořádáním pořadí členů dostame konstitutivní rovnici Zenerovy látky

$$(15) \quad \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \sigma = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon.$$

Použitím vztahu (1) dostáváme opět vyjádření závislosti napětí na deformaci

$$\sigma = e^{-\frac{E_2}{\eta_3} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_2}{\eta_3} \tau} \left((E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon \right) d\tau + e^{\frac{E_2}{\eta_3} t_0} \sigma(t_0) \right)$$

a deformace na napětí

$$\varepsilon = e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta_3} t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta_3} \tau} \left(\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \sigma \right) \frac{d\tau}{E_1 + E_2} + e^{\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta_3} t_0} \varepsilon(t_0) \right),$$

kde v čase t_0 $\sigma(t_0) = (E_1 + E_2) \varepsilon(t_0)$.

3. REOLOGICKÉ MODELY TKÁNÍ

3.1. **Reologický model šlachy.** Šlacha představuje vláknovitou pojivovou tkáň, která spojuje sval s kostí. Kolagenní vlákna svalu spojitě přecházejí v kolagenní vlákna šlachy. Kolagenní vlákna v místě, kde je šlacha spojená s kostí, mineralizuje a je integrována s kostní tkání. Šlacha sama negeneruje sílu, pouze přenáší tahovou sílu vyvolanou zkracujícím se svalem. Šlacha musí mít značnou pevnost, aby byla schopná přenést tahovou sílu vyvinutou svalem. Šlacha však není schopná přenášet síly tlakové. Šlacha musí mít značnou poddajnost, aby dokázala zabránit poškození svalů.

K modelování reologického chování šlach se v literatuře převážně používají modely látky Zenerovy

$$\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \sigma = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon$$

a látky Poyntingovy-Thompsonovy

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \sigma = E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \varepsilon.$$

Oba tyto modely mají shodný charakter

$$\dot{\sigma} + a\sigma = b\dot{\varepsilon} + c\varepsilon$$



$$\dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_3} \sigma = (E_1 + E_2) \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \epsilon$$

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_3} \sigma = E_1 \dot{\epsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_3} \epsilon$$

OBRÁZEK 19. Reologické modely šlach

s vyjádřením napětí

$$(16) \quad \sigma = e^{-at} \left(\int_{t_0}^t e^{a\tau} (b\dot{\epsilon} + c\epsilon) d\tau + \sigma(t_0) e^{at_0} \right)$$

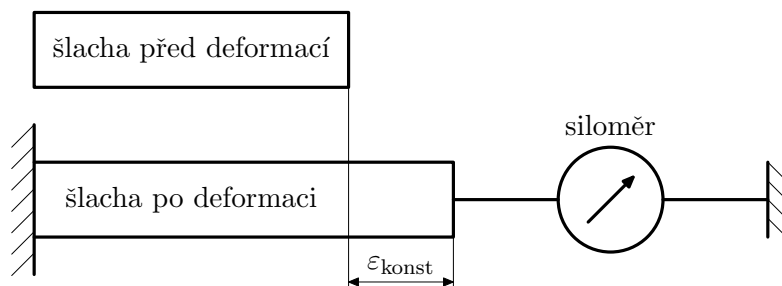
a deformace

$$(17) \quad \epsilon = e^{-\frac{c}{b}t} \left(\int_{t_0}^t e^{\frac{c}{b}\tau} (\dot{\sigma} + a\sigma) \frac{d\tau}{b} + \epsilon(t_0) e^{\frac{c}{b}t_0} \right),$$

kde

$$\sigma(t_0) = b\epsilon(t_0)$$

s $b = E_1 + E_2$ v případě Zenerovy látky a $b = E_1$ pro látku Poyntingovu-Thompsonovu.



OBRÁZEK 20. Experimentální uspořádání s konstantní deformací

3.2. Experimentální určení koeficientů reologického modelu šlach. Koeficienty reologického modelu šlach

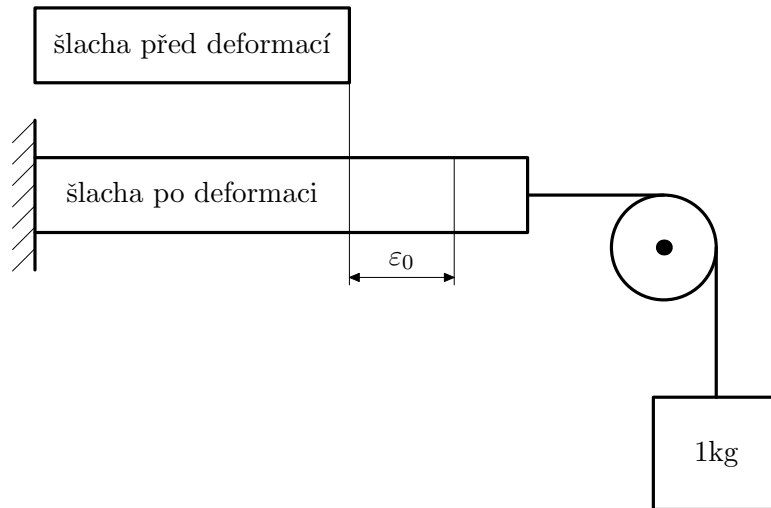
$$\dot{\sigma} + a\sigma = b\dot{\epsilon} + c\epsilon$$

určíme ve dvou experimentálních uspořádáních. V prvním experimentálním uspořádání vzorek šlachy zdeformujeme předepsanou deformací (viz obrázek 20)

$$\epsilon = \epsilon_{\text{konst}}$$

a s jistou časovou periodou budeme určovat velikost napětí. Tím obdržíme tabulku hodnot

$$(\mathbf{t} \ \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} t_0 & \sigma_0 \\ t_1 & \sigma_1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & \sigma_n \end{pmatrix}.$$



OBRÁZEK 21. Experimentální uspořádání s konstantním napětím

Integrací vztahu (16) pro konstantní $\varepsilon = \varepsilon_{\text{konst}}$ a $t_0 = 0$ máme

$$(18) \quad \sigma = (1 - e^{-at}) \frac{c}{a} \varepsilon_{\text{konst}} + \sigma_0 e^{-at},$$

přičemž

$$\sigma_0 = b \varepsilon_{\text{konst}}.$$

Koeficient b určíme okamžitě z posledního vztahu jako

$$b = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{\text{konst}}}$$

a výraz (18) napíšeme postupně pro všechny naměřené hodnoty

$$\sigma_k - (1 - e^{-at_k}) \frac{c}{a} \varepsilon_{\text{konst}} - \sigma_0 e^{-at_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ve tvaru maticovém jako

$$(19) \quad \mathbf{S}(a, c) = \mathbf{0}.$$

V druhém uspořádání experimentu zatížíme vzorek konstantním napětím $\sigma = \sigma_{\text{konst}}$ (viz obrázek 21) a měříme deformaci v různých časových okamžicích, čímž dostaneme tabulku hodnot

$$(\mathbf{t} \ \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} t_0 & \varepsilon_0 \\ t_1 & \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

kde opět $\sigma_{\text{konst}} = b \varepsilon_0$, kde b by mělo být shodné s údajem z předešlého experimentálního uspořádání. Samozřejmě tento koeficient b určíme z řady experimentálních měření provedených v obou uspořádáních, při použití pravidel o statistickém vyhodnocování experimentálně zjištěných dat. Naměřené hodnoty opět dosadíme do vztahu daného integrací výrazu (17) pro $\sigma = \sigma_{\text{konst}}$ a $t_0 = 0$:

$$\varepsilon_k - \frac{a}{c} \sigma_{\text{konst}} - \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{c} \right) \sigma_{\text{konst}} e^{-\frac{c}{b} t} \quad (k = 1, \dots, n),$$

což i zde zapíšeme maticově ve tvaru

$$(20) \quad \mathbf{E}(a, c) = \mathbf{0}.$$

Soustavu rovnic (19) a (20) rozřešíme ve smyslu nejmenších čtverců minimalizací funkce

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \sigma_{\text{konst}}^2 \mathbf{E}^T \mathbf{E} \longrightarrow \min,$$

kde faktor σ_{konst}^2 zajišťuje řádovou rovnost úlohy. Minimum této funkce lze však získat jen obtížně a jsme zde odkázáni na numerické metody, mezi nimiž se jako použitelné ukazují dnes mezi inženýry populární genetické algoritmy.

3.3. Dynamické uspořádání experimentu. V případě dynamického uspořádání experimentu, tj. experimentu, kde mám k dispozici úplnou tabulku dat

$$\begin{pmatrix} t_0 & \dot{\sigma}_0 & \sigma_0 & \dot{\varepsilon}_0 & \varepsilon_0 \\ t_1 & \dot{\sigma}_1 & \sigma_1 & \dot{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n & \dot{\sigma}_n & \sigma_n & \dot{\varepsilon}_n & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

je situace daleko jednodušší. Charakteristickou rovnicí

$$\dot{\sigma} + a\sigma = b\dot{\varepsilon} + c\varepsilon$$

napíšem pro jednotlivé časy

$$\dot{\sigma}_i + a\sigma_i = b\dot{\varepsilon}_i + c\varepsilon_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

nebo maticově

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -a\boldsymbol{\sigma} + b\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + c\boldsymbol{\varepsilon},$$

tj.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}\mathbf{a},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & \dot{\varepsilon}_0 & \varepsilon_0 \\ -\sigma_1 & \dot{\varepsilon}_1 & \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma_n & \dot{\varepsilon}_n & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Tuto přeurčenou soustavu rozřešíme ve smyslu nejmenších čtverců jako

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}},$$

čímž dostáváme hledané koeficienty a, b, c našeho modelu.

REFERENCE

[Sob81] Z. Sobotka, *Reologie hmot a konstrukcí*, Academia, Praha, 1981.