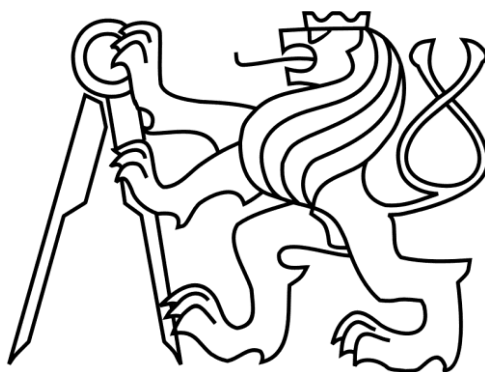


České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky



Bakalářská práce

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně, pouze za odborného vedení vedoucího doc. Ing. Tomáše Mareše, Ph.D.

Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpala, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

.....

podpis

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu práce doc. Ing. Tomáši Marešovi Ph.D. za odborné vedení této práce, za čas, který mi věnoval, a za rady, které mi velmi pomohly při psaní této práce.

Analytické výpočtové metody pro návrh
kompozitních elementů výrobních strojů

Analytical methods for the design of
composite elements of machine tools

Anotace:

Tato bakalářská práce se zabývá kompozitními materiály, popisem jejich vlastností a materiálových charakteristik. Dále jsou zde uvedeny příklady použití těchto materiálů při výrobě výrobních strojů a to především laminátů. Praktická část se zabývá analytickými metodami pro výpočet průhybu kompozitového nosníku.

Klíčová slova: *kompozitní materiál, laminát, výrobní stroj, nosník*

Abstract:

This Bachelor's thesis is focused on the composite materials, description of their properties and material characteristics. After that there are introduced examples of using this materials in production of machine tools, primarily using of fiber reinforced laminates. The practical part is focused on the analytical methods for the bending of composite beam.

Keywords: *composite material, laminate, machine tools, beam*

Obsah

Seznam použitých symbolů	3
1 Úvod	5
2 Teoretická část	5
2.1 Definice kompozitních materiálů.....	5
2.2 Vlastnosti kompozitních materiálů	6
2.3 Klasifikace a charakteristika kompozitních materiálů	6
2.3.1 Vláknové kompozity	6
2.3.1.1 Vláknno.....	6
2.3.1.2 Whisker.....	6
2.3.1.3 Matrice	7
2.3.2 Lamináty	7
2.3.2.1 Bimetaly.....	7
2.3.2.2 Plátované plechy	8
2.3.2.3 Laminované sklo.....	8
2.3.3 Částicové kompozitní materiály	8
2.3.3.1 Nekovové částice v nekovové matici	8
2.3.3.2 Kovové částice v nekovové matici	8
2.3.3.3 Kovové částice v kovové matici.....	9
2.3.3.4 Nekovové částice v kovové matici	9
2.3.4 Kombinace předchozích	9
2.3.4.1 Lamináty	10
2.4 Kompozitní materiály ve výrobních strojích	10
2.4.1 Vláknové kompozity.....	12
2.4.1.1 Výhodné vlastnosti	12
2.4.1.2 Příklady aplikací	13
3 Cíl práce.....	16
4 Zvolené metody zpracování	16
4.1 Transformace matice tuhosti.....	16
4.2 Výpočet pomocí ABD matic.....	17
4.3 Výpočet Timošenkovou metodou.....	18
4.4 Výpočet pomocí minima doplňkové energie	18
4.5 Výpočet pomocí minima deformační energie.....	19
4.6 Vstupy	19
4.6.1 Materiálové vlastnosti laminy.....	19
4.6.2 Geometrické parametry.....	20
4.6.3 Dané nosníky	20
5 Výsledky řešení a diskuse.....	21
5.1 Průhyby v místě zatížení a $(EJ)_{eq}$ daných nosníků - číselně	21

5.2	Průhyby v místě zatížení a $(EJ)_{eq}$ daných nosníků - graficky	22
5.3	Průhyby v místě zatížení - porovnání	28
5.4	Diskuse.....	29
6	Závěr	29
	Literatura	30
	Seznam obrázků.....	31
	Seznam tabulek	32

Seznam použitých symbolů

A	$[m^2]$	plocha průřezu nosníku
\tilde{A}	$[m^2]$	plocha průřezu nosníku
d	$[m]$	vnitřní průměr nosníku
D	$[m]$	vnější průměr nosníku
E	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti
E_L	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti v podélném směru
E_T	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti v příčném směru
$(EJ)_{eq}$	$[Nm^2]$	ekvivalentní ohybová tuhost
G_{LT}	$[Nm^{-2}]$	modul pružnosti ve smyku
F	$[N]$	síla
h	$[m]$	tloušťka stěny
J	$[m^4]$	kvadratický moment průřezu vzhledem k neutrální ose průřezu nosníku
L	$[m]$	délka nosníku
r_i	$[m]$	střední poloměr nosníku v i -té vrstvě
x	$[m]$	podélná souřadnice vetknutého nosníku
x_1, x_2, x_3	$[-]$	osy hlavního souřadného systému
t_i	$[m]$	tloušťka i -té vrstvy
t_1, t_2, t_3	$[-]$	osy transformovaného souřadného systému laminy
t_1, t_2, t_3, t_4	$[m]$	tloušťka vrstvy 1,2,3,4
w	$[m]$	průhyb nosníku
w_{ABD}	$[m]$	průhyb v místě zatížení metodou ABD matic
w_c	$[m]$	průhyb v místě zatížení metodou doplňkové energie
w_E	$[m]$	průhyb v místě zatížení metodou deformační energie
w_{Tim}	$[m]$	průhyb v místě zatížení Timošenkovou metodou
A	$[-]$	matice axiální tuhosti
$A(1,2)$	$[Nm^{-1}]$	prvek 1. řady a 2. sloupce matice axiální tuhosti apod.
C_{t_i}	$[-]$	matice poddajnosti v souřadném systému t_1, t_2, t_3
$C_{t_i}(1,2)$	$[N^{-1}m]$	prvek 1 řady a 2 sloupce matice poddajnosti v souřadném systému t_1, t_2, t_3

.		
D	[-]	matice ohybové tuhosti
E_{eq_ABD}	$[Nm^{-2}]$	ekvivalentní modul pružnosti dle ABD metody
E_{t_i}	[-]	matice tuhosti i-té vrstvy v t1,t2,t3
$E_{t_i}(1,2)$	$[Nm^{-2}]$	prvek 1. řady a 2. sloupce matice tuhosti i-té vrstvy v t1,t2,t3 apod.
E_v	[-]	matice v v1,v2,v3
G_{eq_ABD}	$[Nm^{-2}]$	ekvivalentní smykový modul dle ABD metody
T_{σ}^{tv}	[-]	transformační matice napětí z v1,v2,v3 do t1,t2,t3
T_{ε}^{vt}	[-]	transformační matice deformace z t1,t2,t3 do v1,v2,v3
α_i	$[^{\circ}]$	úhel natočení vláken v i-té vrstvě
κ	[-]	korekční součinitel smykové tuhosti
v1, v2, v3	[-]	hlavní souřadný systém ortotropie
ν_{LT}, ν_{TL}	[-]	Poissonovo číslo

1 Úvod

Výrobní stroje se tradičně konstruují a vyrábí z oceli, litiny, duralu a dalších konvenčních materiálů. Trendem se ale v poslední době stává snaha firm o náhradu těchto materiálů takzvanými nekonvenčními materiály. Jde o snahu získat komponenty s nižší měrnou hmotností při zachování vysoké statické tuhosti a zvyšování modálních vlastností. Stroj by pak mohl být lehčí a zároveň stejně nebo více funkční, než pokud by byl vyroben z tradičních materiálů.

Náhrada tradičních konstrukčních materiálů je technicky náročná. V této práci budou uvedeny některé možné aplikace, zejména aplikace vláknových kompozitů.

V praktické části této práce budou uvedeny přístupy k výpočtu vetknutého kompozitního nosníku mezikruhového průřezu zatíženého na volném konci osamělou silou. Jedná se o výpočty pomocí ABD matic, Timošenkovou metodou, metodou minima deformační energie a metodou minima doplňkové energie.

Tyto analytické výpočtové přístupy mají své oblasti platnosti, které nejsou dobře známé. Úkolem této práce je jejich porovnání v daných případech a pokus o predikci oblastí jejich platnosti.

2 Teoretická část

V teoretické části se budu zabývat definicí, vlastnostmi a klasifikací kompozitů; součástmi výrobních strojů vyrobených z kompozitů a to hlavně z laminátů.

2.1 Definice kompozitních materiálů

Kompozitní materiál je kombinací dvou či více materiálů v makroskopickém měřítku. Již pouhým okem jsou jednotlivé komponenty rozeznatelné. Jiné materiály mohou být kombinací v mikroskopickém měřítku, jako jsou slitiny kovů. Výsledkem je pak pro praktické využití homogenní materiál v makroskopickém měřítku. [1]

Pod pojmem kompozitní si představujeme složený ze dvou či více odlišných částí. Kompozitní materiál je tedy materiál mající dvě nebo více odlišných složek. Rozdílnost těchto složek a zároveň rozdílnost jejich mechanických vlastností je třeba chápat z hlediska makrostruktury, neboť kdybychom se na většinu materiálů podívali z hlediska mikrostruktury, byly by rovněž kompozity. [5]

2.2 Vlastnosti kompozitních materiálů

Výhodou kompozitních materiálů je možnost jejich konstrukce tak, aby byly co nejlépe využity vlastnosti jeho komponent. Vlastnosti materiálu, které můžeme ovlivnit vytvořením kompozitního materiálu, jsou např.:

- pevnost
- tuhost
- odolnost proti korozi
- odolnost proti opotřebení
- hmotnost
- únava
- teplotní závislost
- tepelná vodivost
- tepelná propustnost
- zvuková propustnost

Tyto vlastnosti nemohou být vylepšeny všechny najednou. Účelem je vytvořit materiál především s charakteristikami, které jsou požadovány.[1]

2.3 Klasifikace a charakteristika kompozitních materiálů

Kompozitní materiály dělíme na vláknové, částicové, lamináty a kombinace předchozích.

2.3.1 Vláknové kompozity

2.3.1.1 Vlákno

Vlákno je charakterizováno velmi vysokým poměrem jeho délky vůči jeho průměru a také průměrem velmi blízkým velikosti krystalu materiálu.

Jsou např. z hliníku, titanu, oceli, E-skla, S-skla, uhlíku, beryllia, boru, grafitu apod.
[1]

2.3.1.2 Whisker

Jsou stejného průměru jako vlákna, ale jsou kratší. Poměr jejich délky ku jejich průměru je v řádu stovek. Mají méně defektů než vlákna a tím i lepší vlastnosti.

Jsou např. z mědi, niklu, železa, uhlíku, karbidu boru, karbidu křemíku, korundu apod.
[1]

2.3.1.3 Matrice

Vlákna a whiskery pojí dohromady matrice. Úkolem matrice je podpora vláken a whiskerů, jejich ochrana, přenos napětí atd.

Obvykle je nižší pevnosti, hustoty a tuhosti než vlákna a whiskery.

Jsou např. z polymeru (termoplasty, termosety), keramiky, karbonu apod.

Spojením vláken příp. také whiskerů maticí vzniká materiál o vysoké pevnosti a tuhosti a stále nízké hustotě. [1]

Vláknové kompozity lze rozdělit na jednovrstvé a vícevrstvé. Jednovrstvé kompozity jsou buď tvořeny jednou vrstvou, nebo jsou složeny z několika samostatných vrstev, z nichž každá vrstva má stejnou orientaci a stejné vlastnosti. V praxi se nejčastěji používají vícevrstvé kompozity, které se skládají z několika tenkých různě orientovaných jednosměrových vláknových kompozitů. [5]

2.3.2 Lamináty

Lamináty se skládají z vrstev, které jsou tvořeny minimálně dvěma materiály spojenými dohromady. Laminací se zkombinují vlastnosti materiálů tak, aby byl vytvořen více užitný materiál. Může být dosaženo lepší pevnosti, tuhosti, váhy, odolnosti proti korozi, teplotní či zvukové propustnosti apod.[1]

2.3.2.1 Bimetal

Bimetal jsou lamináty dvou rozdílných kovů, zpravidla o různých tepelných roztažnostech. Užívají se tedy např. pro měření teploty. Pokud by nebyly spojeny, pak se při změně teploty změní délka každého kovu dle jeho teplotní roztažnosti. Pokud jsou spojeny, dojde při změně teploty k ohybu laminátu, každý chce totiž svoji délku měnit o jinou hodnotu. [1]

2.3.2.2 Plátované plechy

Plátování kovu s dalším kovem je používáno k dosažení lepších vlastností. Například vysokopevnostní slitiny hliníku nejsou odolné proti korozi. Čistý hliník a některé jeho slitiny naopak odolné proti korozi jsou, ale jsou také méně pevné. Jejich spojením vzniká kompozitní materiál o vysoké pevnosti a odolný proti korozi. [1]

2.3.2.3 Laminované sklo

Obdobně jako plátované plechy využívá laminované sklo konceptu ochrany jedné vrstvy vrstvou jinou. Jde o bezpečnostní skla např. u automobilů. Mezi dvě vrstvy skla je umístěna polyvinylbutyralová fólie. [1]

2.3.3 Částicové kompozitní materiály

Částicové kompozitní materiály se skládají z částic jednoho či více materiálů v matici z jiného materiálu. Částice mohou být kovové i nekovové stejně jako matrice. [1]

2.3.3.1 Nekovové částice v nekovové matici

Příkladem je beton. Jedná se o kamenivo spojené dohromady pomocí cementu smíchaného s vodou, který chemicky reaguje – dojde k hydrataci a zpevnění. Cementová matrice je pevnější než kamenivo. Můžeme tedy měnit vlastnosti matrice např. zpomalit rychlost chemické reakce.

Dalším kompozitním materiálem jsou lupínky nekovových materiálů, jako je slída nebo sklo rozptýlené ve skle nebo plastu. Lupínky mají primárně rovinnou geometrii s pevností a tuhostí ve dvou směrech, což je rozdílné oproti vláknům, kde se jedná jen o jeden směr. Je potřeba méně matrice ke spojení lupínků než vláken, výsledný materiál má pak vyšší hustotu než vláknový kompozit.

Např. slída ve skle je používána v elektrických aplikacích díky svým dobrým izolačním vlastnostem a dobré obrobiteľnosti. [1]

2.3.3.2 Kovové částice v nekovové matici

Kovové lupínky v suspenzi. Např. hliníková barva je suspenzí hliníkových lupínků v barvě. Po aplikaci jsou lupínky paralelně orientovány k rovině a dávají velmi dobré

pokrytí. Stejně tak mohou být aplikovány stříbrné lupínky k dosažení dobré elektrické vodivosti.

Studená pájka je kovový prášek rozptýlený v pryskyřici. Kompozit je pevný a tvrdý, vede teplo a elektřinu. Např. inkluzí mědi do epoxidové pryskyřice vzroste vodivost velmi významně. Mnoho kovových aditiv do plastů zvýší tepelnou vodivost, sníží koeficient tepelné roztažnosti a sníží opotřebení. [1]

2.3.3.3 Kovové částice v kovové matici

Narozdíl od slitin se nesmí kovové částice rozpustit v matici.

Olovené částice jsou používány do měděných slitin a oceli ke zlepšení mechanických vlastností, např. olovo je přírodním mazivem ložisek ze slitin hliníku.

Mnoho kovů se musí opracovávat za tepla, protože jsou za pokojové teploty křehké. Pokud ale suspendují např. částice chloru, molybdenu či wolframu do kujné matrice, pak je výsledkem kujný kompozit. Proces, kterým křehké částice suspendují do matrice, se nazývá slinování a má za následek pronikání materiálu matrice okolo křehkých částic. Naštěstí se při tomto procesu křehké částice zakulacují a tím se stává výsledný materiál poddajnějším. [1]

2.3.3.4 Nekovové částice v kovové matici

Jedná se např. o cermet, který je složen z keramiky a kovu.

Cermet na bázi oxidu může být z kovové matrice a keramických částic a naopak. Požívá se pro součásti, které jsou odolné proti opotřebení a vysokým teplotám.

Cermet na bázi karbidu má částice např. z karbidu wolframu, chloru či titanu. Matrice je pak např. z kobaltu či niklu. Karbid wolframu v kobaltové matici je používán pro části strojů, kde je požadována velmi vysoká tvrdost. [1]

2.3.4 Kombinace předchozích

Takových kompozitů, jež jsou kombinací výše uvedených, je velké množství. Např. beton vyztužený částicemi (kamenivem) i vlákny (ocel) nebo laminovaný vláknový kompozit.

Laminované vláknové kompozity jsou zvláštní skupinou kompozitních materiálů obsahující vláknové kompozitní materiály a laminační techniku. Vrstvy vláknových

kompozitů jsou spojeny dohromady. Pevnost a tuhost výsledného kompozitu je závislá na orientaci vláken a samotného kompozitu.[1]

2.3.4.1 Lamináty

Protože se v praktické části budu zabývat kompozitovým nosníkem – laminátem, je třeba si laminát definovat:

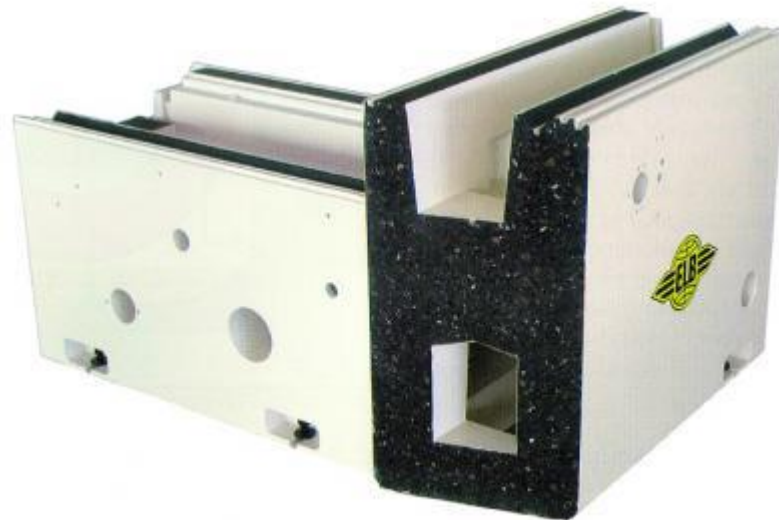
Základní stavební jednotkou laminátu je lamina, což jsou jednosměrně orientovaná vlákna v matrici. Vlákna mají zpevňující funkci, jsou pevná a tuhá. Matrice může být organická, kovová, keramická nebo uhlíková. Funkcí matrice je držet vlákna pohromadě a chránit je.

Laminát je spojením lamin různé orientace vzhledem k hlavnímu souřadnému systému. Obvykle jsou jednotlivé laminy spojovány stejnou matricí, z níž jsou samy vyrobeny. Pevnost a tuhost materiálu je závislá na orientaci jednotlivých lamin. [1]

Vícevrstvé kompozity se skládají z několika tenkých různě orientovaných jednosměrových vláknových kompozitů – lamin. Jsou-li materiály v každé vrstvě stejné, nazývá se tento kompozit laminát. [5]

2.4 Kompozitní materiály ve výrobních strojích

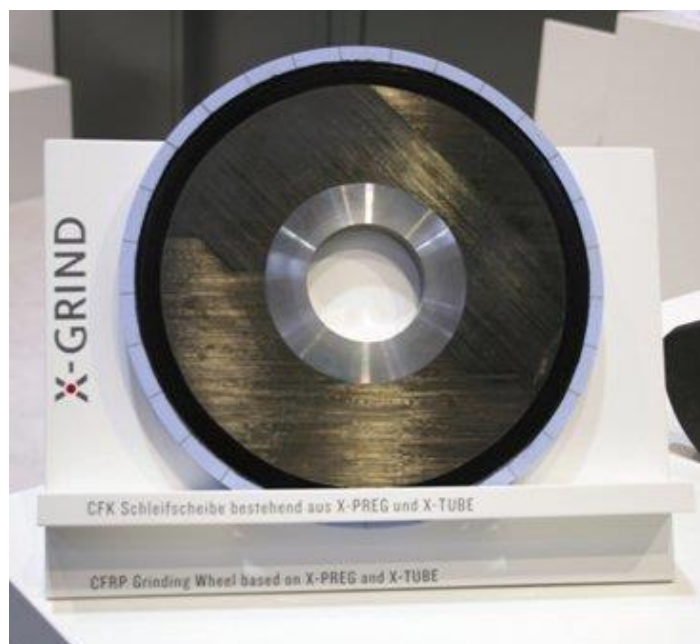
Některé součásti výrobních strojů z konvenčních materiálů (např. konstrukční ocel či litina), jsou nahrazovány součástmi z kompozitních materiálů. Některá možná řešení jsou uvedena na obr. 1 - 3.



Obr. 1: Řez ložem z minerální litiny (polymerbetonu) firmy ELB [7]



Obr. 2: Nosná část obráběcího stroje vyrobená z vláknového kompozitu [8]



Obr. 3: Brousící kotouč, jehož těleso je z vláknového kompozitu a na obvodu je nanášeno brusivo [8]

2.4.1 Vláknové kompozity

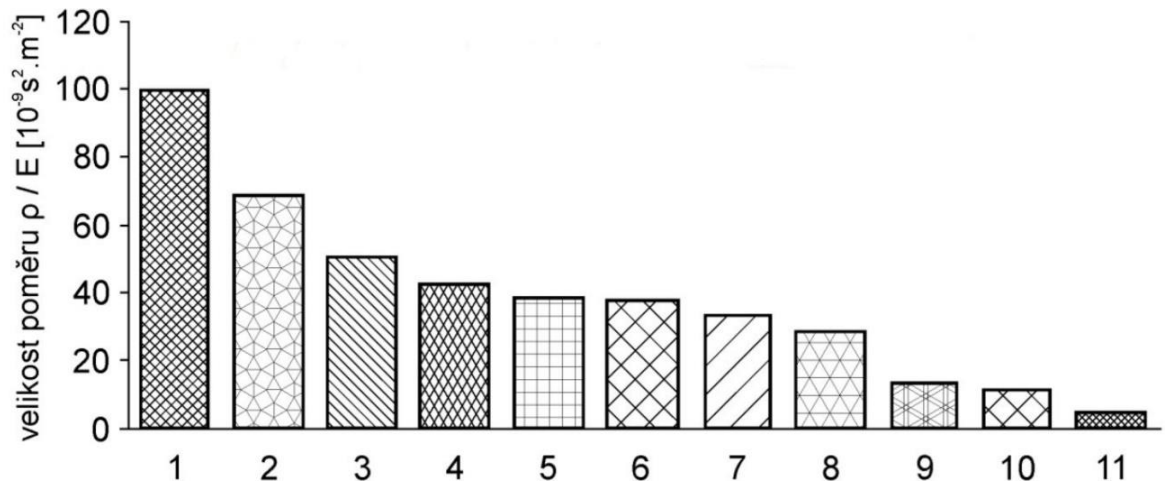
Zadáním praktické části této práce je výpočet kompozitového nosníku – laminátu, a proto se budu podrobněji zabývat jen vláknovými kompozity ve výrobních strojích.

2.4.1.1 Výhodné vlastnosti

Výhodou je vyšší specifická tuhost, lepší dynamické chování a malá teplotní deformace.

2.4.1.1.1. Vyšší specifická tuhost

Díly z uhlíkového laminátu mohou být o 10 až 90 procent lehčí než kovové díly při stejné tuhosti, jak je znázorněno na obr. 4.



Obr. 4: Srovnání hodnot ρ/E různých konstrukčních materiálů [6]

1-oxidová keramika, 2-polymerbeton a šedá litina, 3-skelný laminát s jednosměrným vyztužením, 4-titan, 5-hliník, 6-konstrukční ocel, 7-uhlíkový laminát s HT vlákny a dvousměrným vyztužením, 8-aramidový laminát s jednosměrným vyztužením, 9-uhlíkový laminát s HM vlákny a dvousměrným vyztužením, 10-uhlíkový laminát s HT vlákny a jednosměrným vyztužením, 11-uhlíkový laminát s HM vlákny a jednosměrným vyztužením.

Velikost radiálního a tangenciálního napětí kotoučů stejných rozměrů rotujících stejnými otáčkami se mění v přímé úměrnosti s velikostí hustoty použitého materiálu. U kotoučů z uhlíkového laminátu budou tato napětí až 5x menší než u kovového kotouče. Kotouče z kvaziizotropního uhlíkového laminátu se mohou otáčet až dvakrát rychleji než kovové kotouče. [6]

2.4.1.1.2. Dynamické chování

Vláknové kompozity mají schopnost vyššího tlumení, vlastní frekvence se pak posunou do vyšších oblastí, např. velikost vlastní frekvence laminátového hřídele při krouživém kmitání může být až 3x vyšší než vlastní frekvence kovového hřídele.

Schopnost tlumení je závislá na velikosti specifického modulu pružnosti v tahu, tedy poměru E/ρ . Jelikož je poměr E/ρ u laminátů vyšší než u kovů, bude hřídel z jednosměrně vyztuženého uhlíkového laminátu s HT vlákny při krouživém kmitání mít oproti kovovému hřídeli stejných rozměrů až 2x vyšší útlum. [6]

2.4.1.1.3. Teplotní deformace

Uhlíkové a aramidové lamináty mají nízké součinitele délkové teplotní roztažnosti. Teplotní deformace součásti není ovlivněna jen roztažností, ale i tepelnou vodivostí a měrnou tepelnou kapacitou. Tepelná vodivost jednosměrně vyztužených uhlíkových laminátů ve směru vláken je přibližně stejná jako u oceli, ale kolmo na tento směr je značně nižší. Hodnota měrné tepelné kapacity uhlíkových laminátů je zhruba 2 x větší než u oceli. Měrná tepelná kapacita vztažená na objem je u uhlíkového laminátu 1,5 x menší než u oceli. [6]

2.4.1.2 Příklady aplikací

Vláknové kompozitní materiály postupně vytlačují klasické konstrukční materiály – litinu, ocel nebo hliník všude tam, kde jsou požadovány výborné mechanické parametry a nízká hmotnost. Zejména ve výrobě letadel nebo v automobilovém průmyslu mají dnes již své nezastupitelné místo. Jiná situace je ve stavbě výrobních strojů, kde se vláknové kompozity prosazují velmi pomalu. První výraznější aplikace vznikaly zhruba před třiceti lety, a přesto nedošlo k masivnímu rozšíření. [6]

Obecně je tedy aplikace vláknových kompozitů do této oblasti náročná, neboť vyžaduje vyřešení řady otázek. Z hlediska aplikace ve výrobních strojích to je zejména: technologie výroby dílce (zpracování UHM vláken, výroba složitých prostorových tvarů), konstrukce spojovacích rozhraní v přesnosti obvyklé v obráběcích strojích (připojení lineárních vedení, ložisek, apod.), spolehlivý návrh (návrh kompozitní struktury na vysokou statickou/dynamickou tuhost pro kombinované namáhání), spojování komponent s odlišnými teplotně-mechanickými vlastnostmi. Velkou komplikací je zejména vysoká cena základního materiálu - uhlíkových vláken. I přes výše zmíněné

otázky je patrné, že aplikací vláknových kompozitů do stavby strojů se zabývá čím dál více společností. [9]

2.4.1.2.1. Náhonové hřídele

Nabídku náhonových hřídelů a řešení spojů mezi koncovkami a kompozitní částí hřídelů prezentovala na výstavě EMO Hannover 2013 německá společnost Mayr. Prezentovala schopnosti přenášet vysoké krouticí momenty při snížení hmotnosti a momentu setrvačnosti komponenty, možnosti zvýšení otáček hřídele, zvýšení útlumu a možnosti redukce počtu ložisek. Příklad kompozitní hřídele se spojovacím rozhraním je na obr. 5.[9]



Obr. 5: Náhonová hřídel se spojovacím rozhraním – Mayr [9]

Velmi častým tématem je otázka zakončení kompozitních hřídelů, tj. otázka přenosu zatížení z kovových komponent na kompozitní nosnou část. Velká pozornost je věnována tvarovým spojům, kdy jsou kompozitní části v oblasti spoje tvarově deformovány pro zvýšení přenášeného momentu, případně kdy jsou tvarové kovové koncovky přímo ovíjeny pro zvýšení pevnosti spoje – např. obr. 6. Dále je velká pozornost věnována simulačním modelům spojovacích rozhraní – tj. schopnosti predikce porušení spoje a nosnosti komponenty.[10]



Obr. 6: Tvarový spoj hřídele s kovovou koncovkou.[10]

2.4.1.2.2. Vřetena obráběcích strojů

Kvalita obrábění a výkonnost každého obráběcího stroje závisí především na kvalitě použitého vřetena. Rozhodující technické parametry vřetena-statická a dynamická tuhost, tlumení a tepelné chování mohou být pozitivně ovlivněny použitím uhlíkových laminátů. Fraunhofer IPT Aachenu se zabývá konstrukcí strojů a již na počátku své existence v roce 1988 představil první tři prototypy vřeten s tělesem z uhlíkového kompozitu. Ukázky vřeten obráběcích strojů této firmy viz obr. 7 [6]

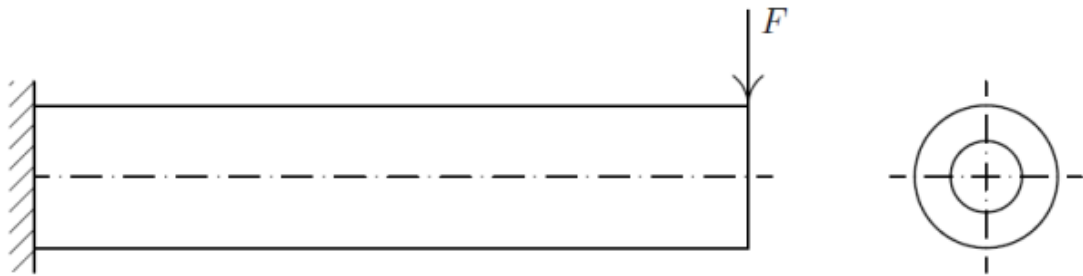


Obr. 7: Vřetena IPT Aachen [6]

3 Cíl práce

Cílem práce je provést analýzu vybraných nosníků pomocí metod: ABD matic, Timošenkova nosníku, minima deformační energie a minima doplňkové energie, porovnat výsledky a zhodnotit možnosti použitelnosti daných metod.

Za tímto účelem byl vytvořen program pro výpočet průhybu a ekvivalentních materiálových konstant $(EJ)_{eq}$ laminátového nosníku mezikruhového průřezu (obr. 8), přičemž všechny laminy jsou stejného materiálového složení.



Obr. 8: Vetknutý nosník – modelový příklad nosníku namáhaného na ohyb a příčný smyk pro rychlý návrh kompozitní skladby a geometrie výztuže [2]

4 Zvolené metody zpracování

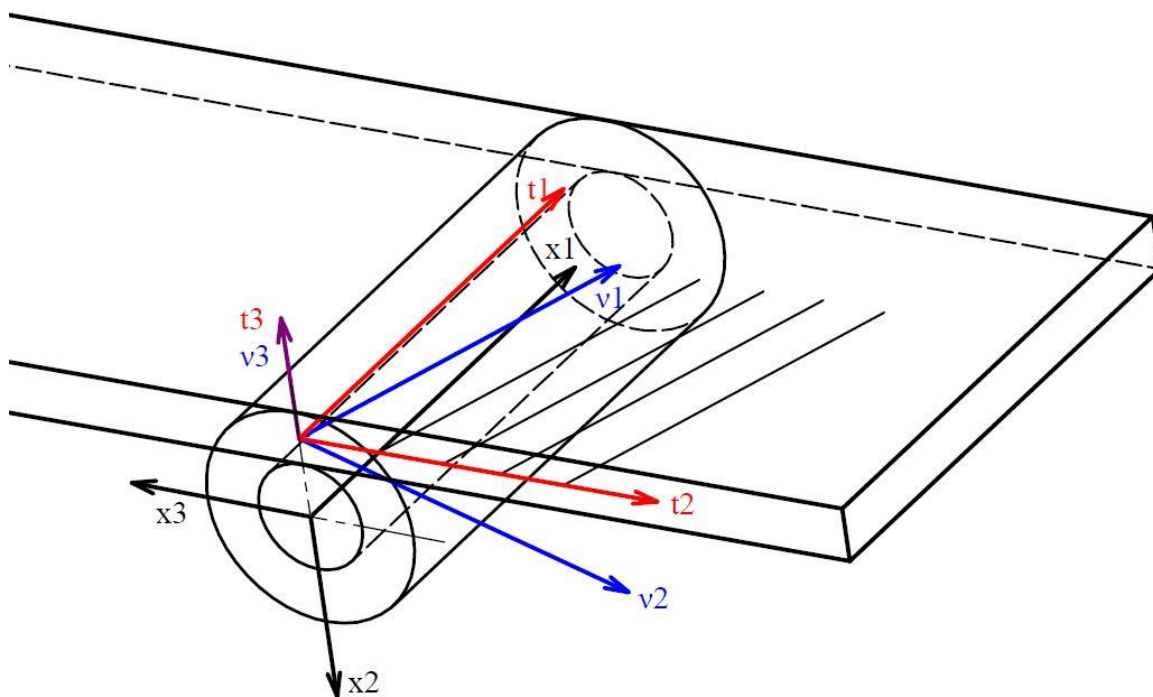
Průhyb nosníku znázorněného na obr. 8 lze vyjádřit rovnicí:

$$w = F \left(\frac{Lx^2}{2EJ} - \frac{x^3}{6EJ} + \frac{x}{\kappa GA} \right) \quad (4-1)$$

První a druhý člen závorky vyjadřuje průhyb vzniklý ohybem, zatímco třetí člen vyjadřuje průhyb od příčného smyku. Příčný smyk uvažuje Timošenkova metoda, ostatní zde zmíněné metody jej neuvažují. [2]

4.1 Transformace matice tuhosti

Pro výpočet bude potřeba transformovat matici tuhosti ze souřadného systému laminy E_v do souřadného systému t na matici tuhosti E_t . Pro účely odhadu $(EJ)_{eq}$ se pracuje jen s členem E_{11} , který je v E_t stejný jako v E_x , a proto není potřeba další transformace matice tuhosti do souřadného systému nosníku x_1, x_2, x_3 .



Obr. 9: Souřadné systémy [2]

Matice E_t v souřadném systému t i-té vrstvy:

$$E_{t_i} = T_{\sigma}^{t_i} \cdot E_v \cdot T_{\varepsilon}^{v t_i} \quad (4-1-1)$$

$$E_{t_i} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & -2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sin^2 \alpha_i & \cos^2 \alpha_i & 2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \sin \alpha_i & -\cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cos^2 \alpha_i - \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT} E_T & 0 \\ \nu_{TL} E_L & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}(1 - \nu_{LT} \nu_{TL}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \sin^2 \alpha_i & \cos^2 \alpha_i & -\cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ -2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i & 2 \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \cos^2 \alpha_i - \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \quad (4-1-2)$$

[2]

4.2 Výpočet pomocí ABD matic

Efektivní modul se vypočítá dle vzorce:

$$E_{eq_ABD} = \frac{M}{h \cdot (A(3,3) \cdot A(2,2) - A(2,3) \cdot A(3,2))} \quad (4-2-1)$$

kde matice

$$A = \sum_{i=1}^n E_{t_i} \cdot t_i \quad (4-2-2)$$

$$a M = A(1,1) \cdot A(2,2) \cdot A(3,3) + 2 \cdot A(1,2) \cdot A(1,3) \cdot A(2,3) - A(1,1) \cdot A(2,3) \cdot A(2,3) - A(2,2) \cdot A(1,3) \cdot A(1,3) - A(3,3) \cdot A(1,2) \cdot A(1,2). \quad (4-1-5)$$

Pro porovnávání jednotlivých metod bude potřeba $(EJ)_{eq_ABD}$:

$$(EJ)_{eq_ABD} = E_{eq_ABD} \cdot J, \quad (4-1-6)$$

$$\text{kde } J = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4). \quad (4-1-7)$$

Průhybová čára nosníku dle metody ABD matic pak bude z (4-1):

$$w_{ABD} = F \left(\frac{Lx^2}{2(EJ)_{eq_ABD}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{eq_ABD}} \right) \quad (4-1-8)$$

[2]

4.3 Výpočet Timošenkovou metodou

Pro ohyb Timošenkova nosníku platí rovnice analogická k (4-1):

$$w_{Tim} = F \left(\frac{Lx^2}{2D} - \frac{x^3}{6D} + \frac{x}{\kappa GA} \right) \quad (4-2-1)$$

kde pro ohybovou tuhost D platí:

$$D = (EJ)_{eq_Tim} = E_{eq_ABD} \cdot J, \quad (4-2-2)$$

a smyková tuhost je dána rovnicí:

$$\kappa GA = \kappa G_{eq} \tilde{A}, \quad (4-2-3)$$

kde ekvivalentní smykový modul

$$G_{eq} = \frac{M}{h \cdot (A(1,1) \cdot A(2,2) - A(1,2) \cdot A(1,2))}, \quad (4-2-4)$$

plocha průřezu komponenty je pro mezikruhový profil

$$\tilde{A} = \frac{\pi}{4} \cdot (D^4 - d^4) \quad (4-2-5)$$

a korekční součinitel rozložení smykového napětí pro jednoznačnost volíme $\kappa=1$. (Ve skutečnosti jeho velikost závisí na tvaru průřezu a skladbě laminátu a jeho určení je velmi komplikované a často nepřesné.) [2]

4.4 Výpočet pomocí minima doplňkové energie

Pro výpočet pomocí minima doplňkové energie je potřeba vyjádření matice poddajnosti pro jednotlivé laminy nosníku v souřadném systému t:

$$C_{t_i} = (E_{t_i})^{-1} \quad (4-3-1)$$

Pak platí rovnice:

$$(EJ)_{eq_C} = \sum_{i=1}^n \frac{\pi \cdot r_i^3 \cdot t_i}{C_{t_i}(1,1)} \quad (4-3-2)$$

Průhybová čára nosníku dle metody minima doplňkové energie pak bude z (4-1):

$$w_C = F \left(\frac{Lx^2}{2(EJ)_{eq_C}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{eq_C}} \right). \quad (4-3-3)$$

[2]

4.5 Výpočet pomocí minima deformační energie

Vychází z matic tuhosti v jednotlivých vrstvách.

$$(EJ)_{eq_E} = \sum_{i=1}^n \pi \cdot r_i^3 \cdot t_i \cdot E_{t_i}(1,1) \quad (4-4-1)$$

Průhybová čára nosníku dle metody minima deformační energie pak bude z (4-1):

$$w_E = F \left(\frac{Lx^2}{2(EJ)_{eq_E}} - \frac{x^3}{6(EJ)_{eq_E}} \right). \quad (4-3-3)$$

[2]

4.6 Vstupy

Vetknutý nosník mezikruhového průřezu je zatěžován osamělou silou na volném konci a je složen ze čtyř vrstev. Jednotlivé vrstvy – laminy jsou vláknovité kompozity a pro všechny vrstvy je zvolen stejný materiál vláken a matrice. V daném případě se jedná o epoxidové sklo.

4.6.1 Materiálové vlastnosti laminy

Modul pružnosti v podélném směru

$$E_L = 54000 \text{ MPa}$$

Modul pružnosti v příčném směru

$$E_T = 18000 \text{ MPa}$$

Modul pružnosti ve smyku

$$G_{LT} = 9000 \text{ MPa}$$

Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce) v souřadnicovém systému $O(L,T,T')$

$$\nu_{LT} = 0,25$$

Zdroj [1]

4.6.2 Geometrické parametry

Délka nosníku $L = 800\text{mm}$

Vnitřní poloměr nosníku $r_i = 10\text{ mm}$

Zatěžující síla $F = 1000\text{N}$

Tloušťky jednotlivých vrstev se liší, nicméně vnější poloměr je pro všechny nosníky roven 20 mm.

4.6.3 Dané nosníky

Číslo nosníku	1	2	3	4	5
t_1 [mm]	2,5	1	4	2,5	1
t_2 [mm]	2,5	2	3	2,5	2
t_3 [mm]	2,5	3	2	2,5	3
t_4 [mm]	2,5	4	1	2,5	4
α_1 [°]	10	10	10	40	40
α_2 [°]	20	20	20	30	30
α_3 [°]	30	30	30	20	20
α_4 [°]	40	40	40	10	10

Tab. 1: Dané nosníky č. 1 – č. 5

Číslo nosníku	6	7	8	9	10
t_1 [mm]	4	2,5	2,5	2,5	2,5
t_2 [mm]	3	2,5	2,5	2,5	2,5
t_3 [mm]	2	2,5	2,5	2,5	2,5
t_4 [mm]	1	2,5	2,5	2,5	2,5
α_1 [°]	40	-45	45	0	90
α_2 [°]	30	45	-45	90	0
α_3 [°]	20	45	-45	90	0
α_4 [°]	10	-45	45	0	90

Tab. 2: Dané nosníky č. 6 – č. 10

5 Výsledky řešení a diskuse

5.1 Průhyby v místě zatížení a $(EJ)_{eq}$ daných nosníků - číselně

Číslo nosníku	1	2	3
w_{ABD} [mm]	40,454 9	45,626 5	36,339 3
w_{Tim} [mm]	40,518 5	45,688 1	36,405 7
w_C [mm]	46,900 1	52,062 9	41,506 9
w_E [mm]	36,653 8	39,630 6	33,481 2
EJ_{eq_ABD} [Nmm ²]	4,218 7e+09	3,740 5e+09	4,696 5e+09
EJ_{eq_Tim} [Nmm ²]	4,218 7e+09	3,740 5e+09	4,696 5e+09
EJ_{eq_C} [Nmm ²]	3,638 9e+09	3,278 1e+09	4,111 8e+09
EJ_{eq_E} [Nmm ²]	4,656 2e+09	4,306 4e+09	5,097 4e+09

Tab. 3: Výsledky nosník č. 1 – č. 3

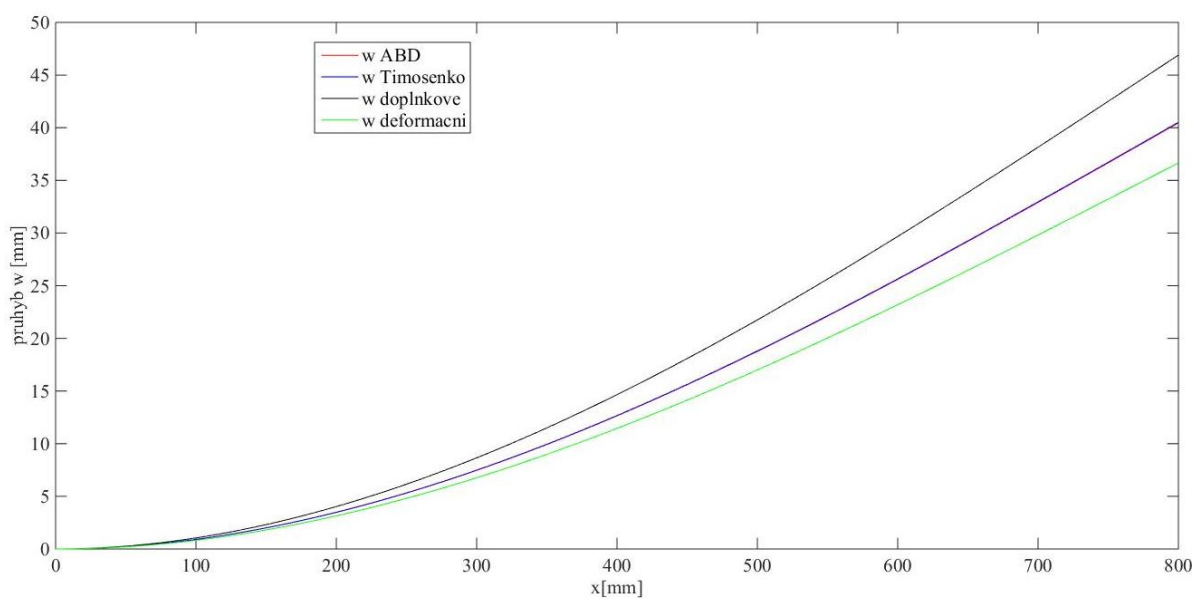
Číslo nosníku	4	5	6
w_{ABD} [mm]	40,454 9	36,339 3	45,626 5
w_{Tim} [mm]	40,518 5	36,405 7	45,688 1
w_C [mm]	36,029 0	33,332 9	40,992 9
w_E [mm]	30,642 0	29,232 7	33,200 8
EJ_{eq_ABD} [Nmm ²]	4,218 7e+09	4,696 5e+09	3,740 5e+09
EJ_{eq_Tim} [Nmm ²]	4,218 7e+09	4,696 5e+09	3,740 5e+09
EJ_{eq_C} [Nmm ²]	4,736 9e+09	5,120 1e+09	4,163 3e+09
EJ_{eq_E} [Nmm ²]	5,569 7e+09	5,838 2e+09	5,140 4e+09

Tab. 4: Výsledky nosník č. 4 – č. 6

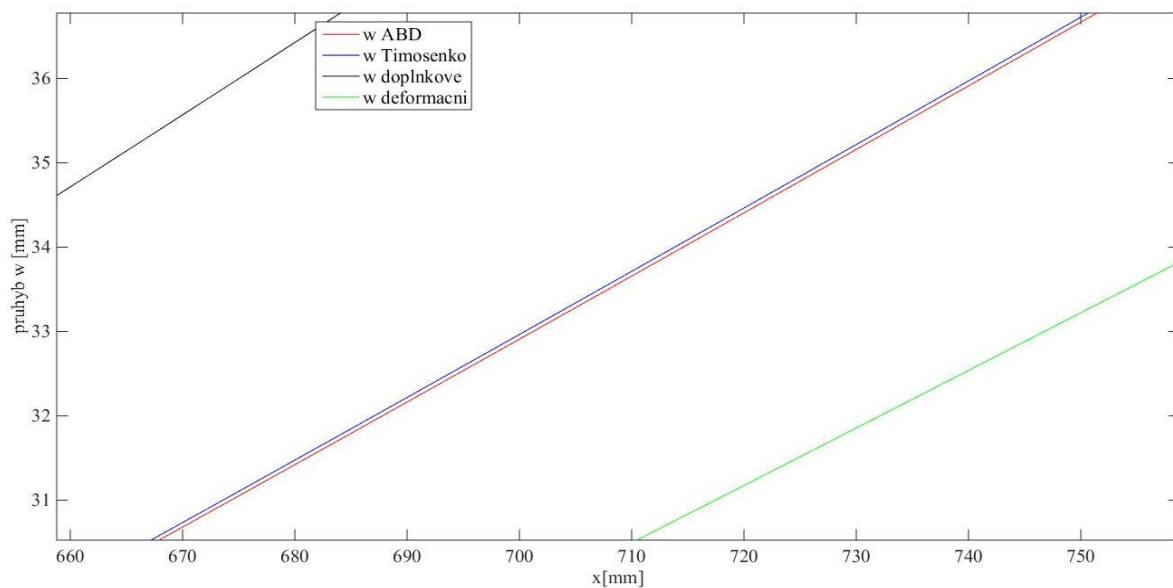
Číslo nosníku	7	8	9	10
w_{ABD} [mm]	57,752 8	57,752 8	40,027 7	40,027 7
w_{Tim} [mm]	57,795 8	57,795 8	40,104 6	40,104 6
w_C [mm]	64,115 1	64,115 1	39,021 2	42,081 7
w_E [mm]	49,115 0	49,115 0	38,208 3	41,205 0
EJ_{eq_ABD} [Nmm ²]	2,955 1e+09	2,955 1e+09	4,263 7e+09	4,263 7e+09
EJ_{eq_Tim} [Nmm ²]	2,955 1e+09	2,955 1e+09	4,263 7e+09	4,263 7e+09
EJ_{eq_C} [Nmm ²]	2,661 9e+09	2,661 9e+09	4,373 7e+09	4,055 6e+09
EJ_{eq_E} [Nmm ²]	3,474 8e+09	3,474 8e+09	4,466 7e+09	4,141 9e+09

Tab. 5: Výsledky nosník č. 7 – č. 10

5.2 Průhyby v místě zatížení a $(EJ)_{eq}$ daných nosníků - graficky

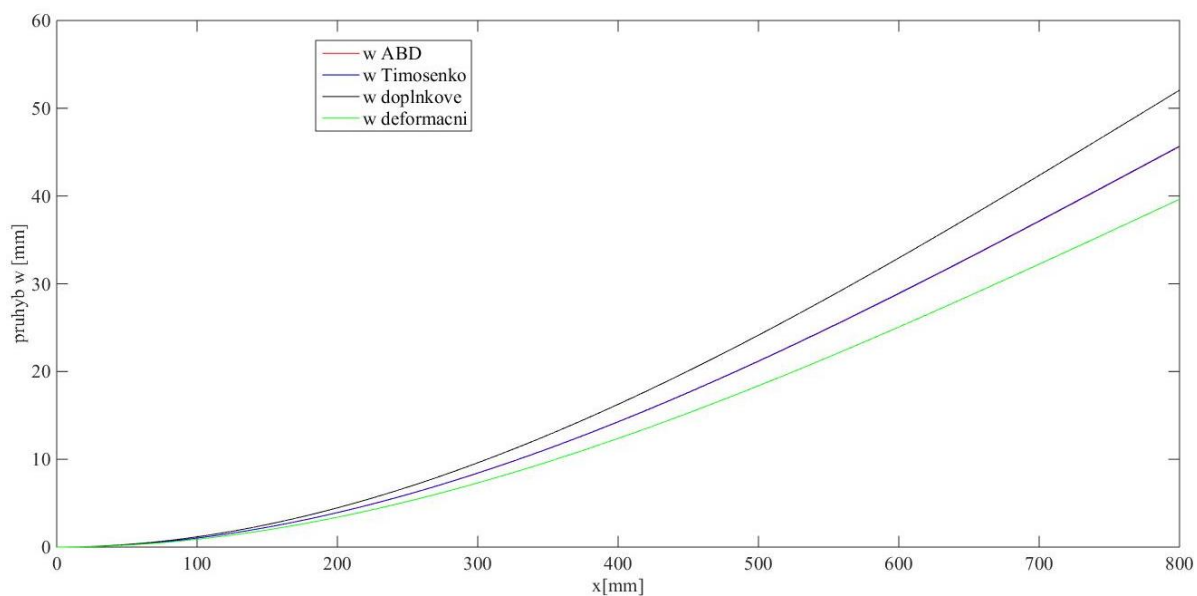


Obr. 10: Nosník č. 1

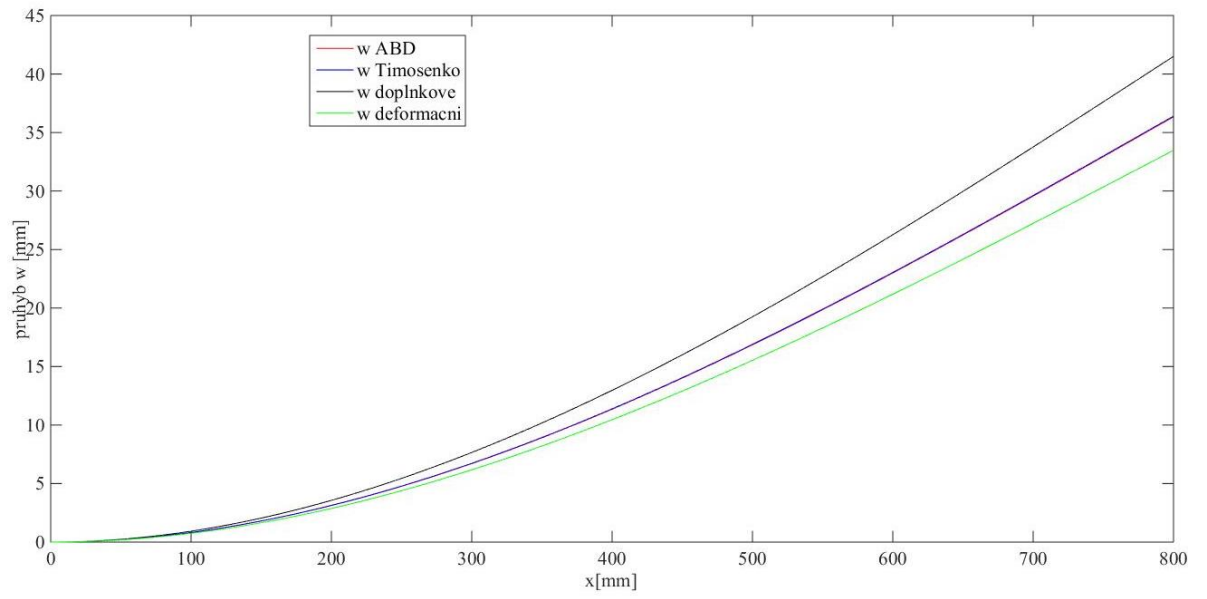


Obr. 11: Detail průhybu nosníku č. 1

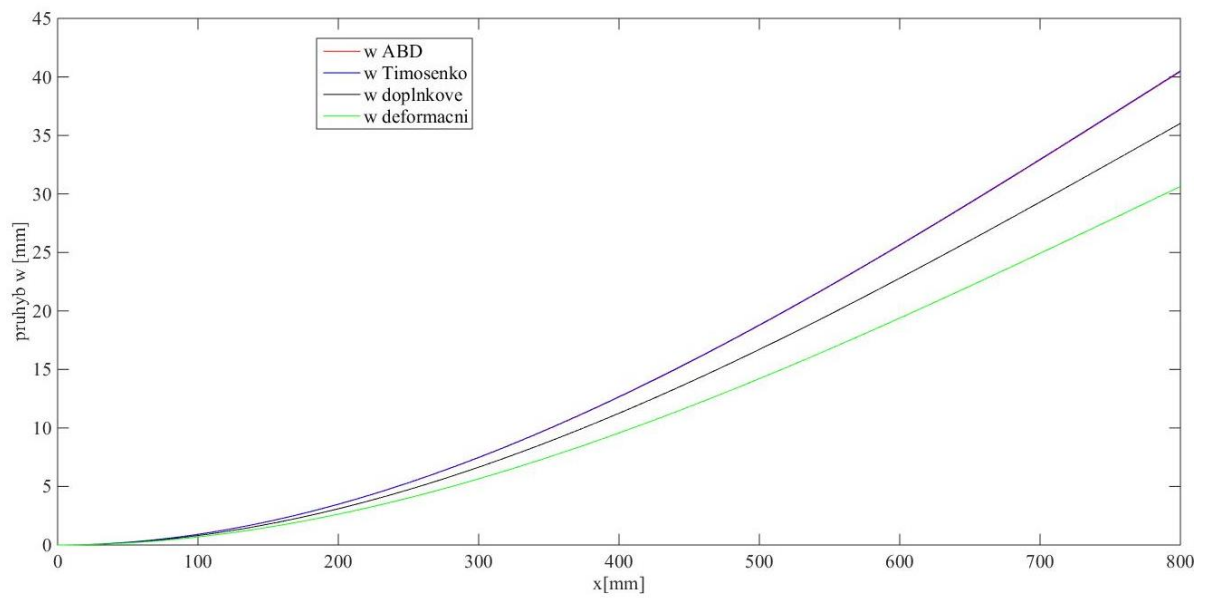
Průhybové čáry zjištěné Timošenkovou metodou a ABD metodou jsou téměř totožné. Z obr. 11 je patrná vyšší poddajnost modelového nosníku dle Timošenkovy metody pro nosník č.1. Totéž platí i pro zbylé nosníky, a proto v této práci nebudou delaily grafů průhybu zbylých nosníků uvedeny.



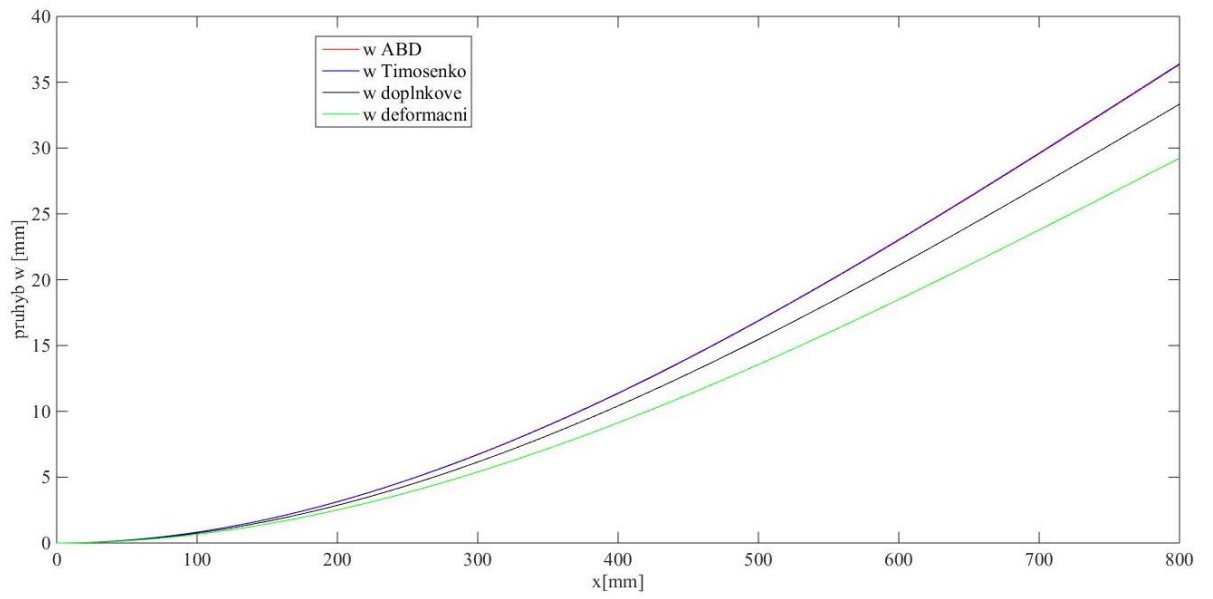
Obr. 12: Nosník č. 2



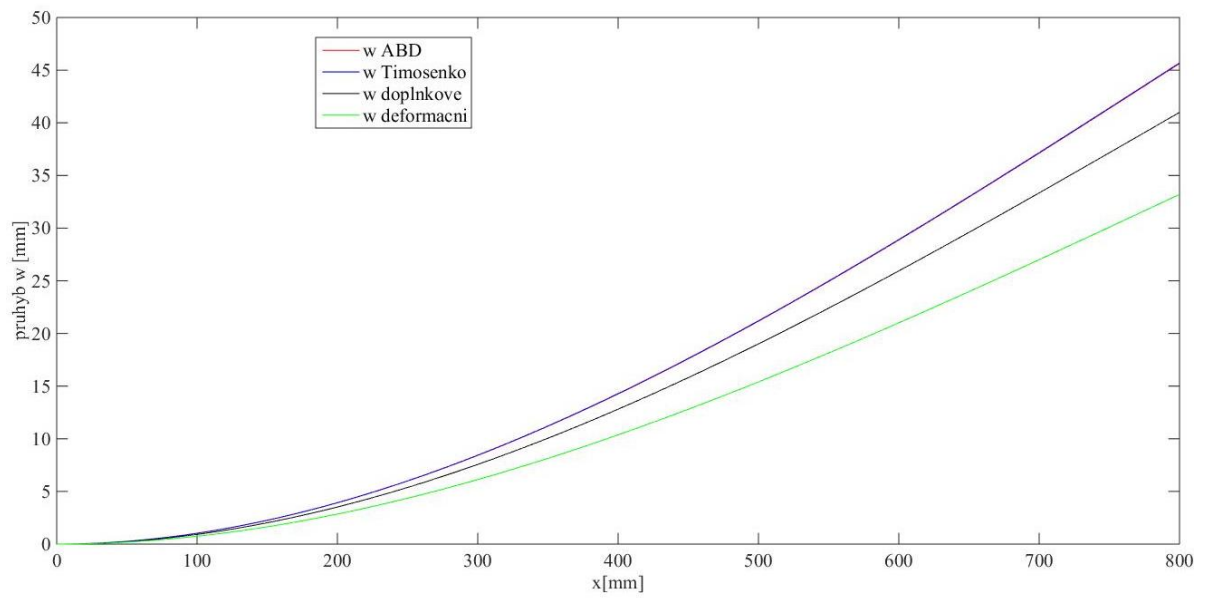
Obr. 13: Nosník č. 3



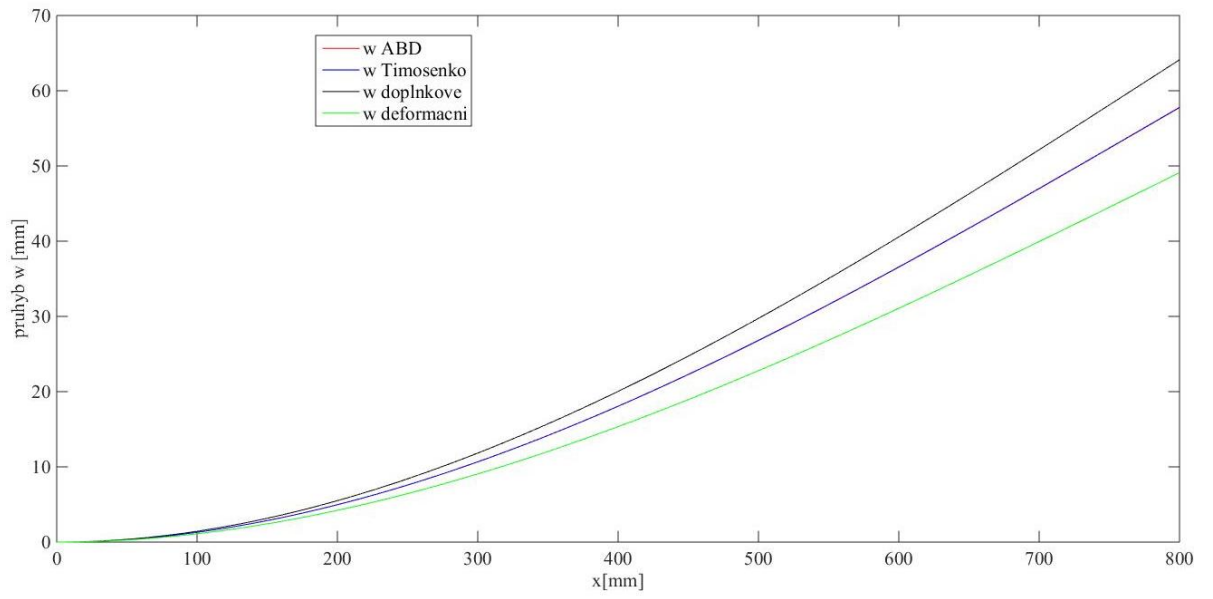
Obr. 14: Nosník č. 4



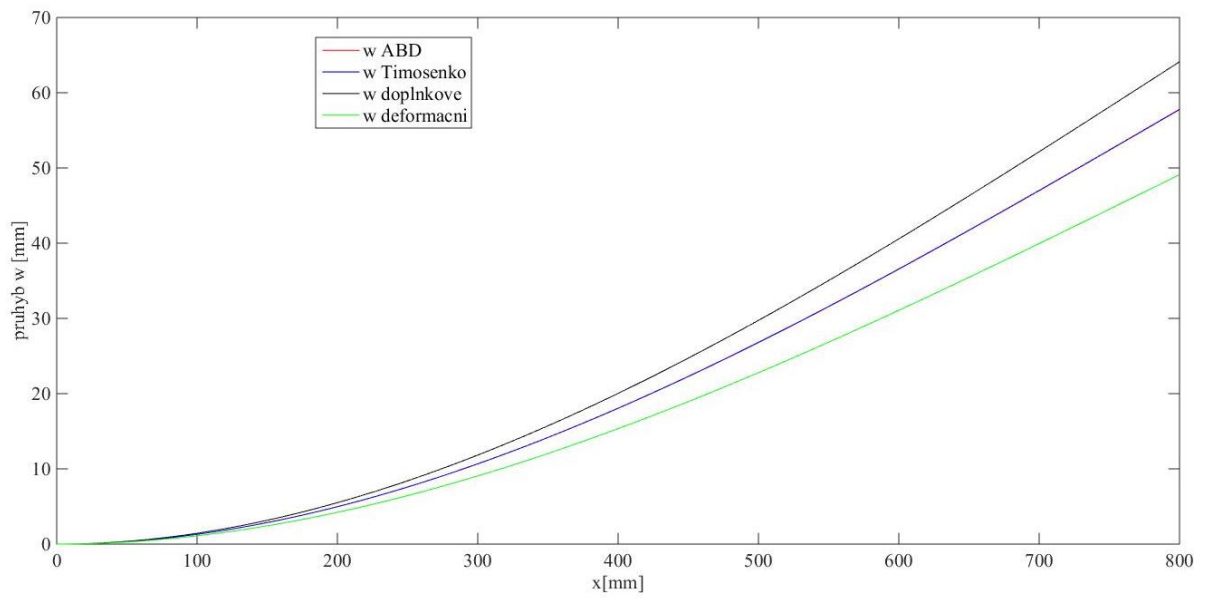
Obr. 15: Nosnik č. 5



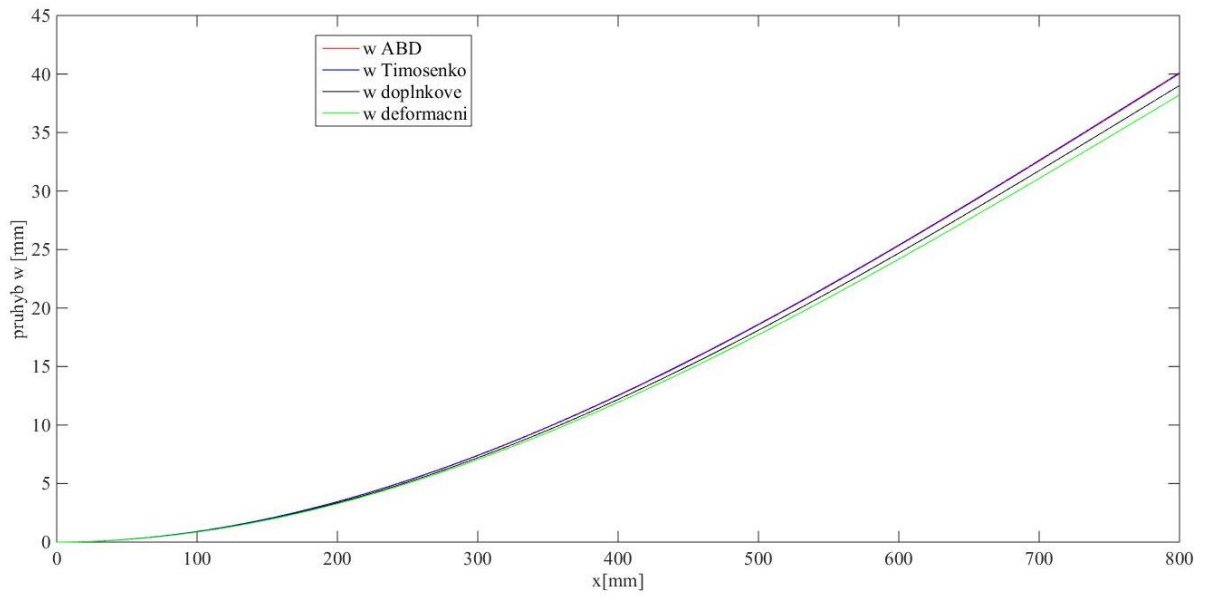
Obr. 16: Nosnik č. 6



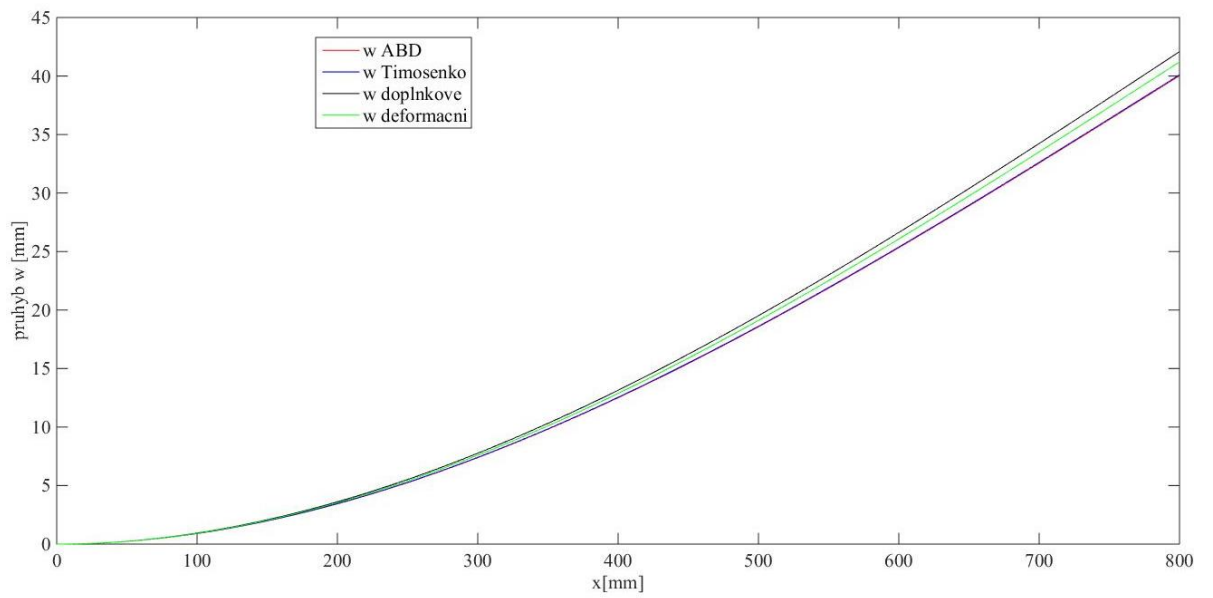
Obr. 17: Nosník č. 7



Obr. 18: Nosník č. 8



Obr. 19: Nosník č. 9



Obr. 20: Nosník č. 10

5.3 Průhyby v místě zatížení - porovnání

Číslo nosníku	1	2	3
w_{ABD} [mm]	40,454 9	45,626 5	36,339 3
w_{Tim} [mm]	40,518 5	45,688 1	36,405 7
w_C [mm]	46,900 1	52,062 9	41,506 9
w_E [mm]	36,653 8	39,630 6	33,481 2
w_{ABD} [%]	100	100	100
w_{Tim} [%]	100,16	100,14	100,18
w_C [%]	115,93	114,11	114,22
w_E [%]	90,60	86,86	92,13

Tab. 6: Výsledky nosník č. 1 – č. 3

Číslo nosníku	4	5	6
w_{ABD} [mm]	40,4549	36,3393	45,6265
w_{Tim} [mm]	40,5185	36,4057	45,6881
w_C [mm]	36,0290	33,3329	40,9929
w_E [mm]	30,6420	29,2327	33,2008
w_{ABD} [%]	100	100	100
w_{Tim} [%]	100,16	100,18	100,14
w_C [%]	89,06	91,73	89,84
w_E [%]	75,74	80,44	72,77

Tab. 7: Výsledky nosník č. 4 – č. 6

Číslo nosníku	7	8	9	10
w_{ABD} [mm]	57,752 8	57,752 8	40,027 7	40,027 7
w_{Tim} [mm]	57,795 8	57,795 8	40,104 6	40,104 6
w_C [mm]	64,115 1	64,115 1	39,021 2	42,081 7
w_E [mm]	49,115 0	49,115 0	38,208 3	41,205 0
w_{ABD} [%]	100	100	100	100
w_{Tim} [%]	100,07	100,07	100,19	100,19
w_C [%]	111,02	111,02	97,49	105,13
w_E [%]	85,04	85,04	95,45	102,94

Tab. 8: Výsledky nosník č. 7 – č. 10

5.4 Diskuse

Velikosti průhybu jednotlivých nosníků byly závislé jak na tloušťce jednotlivých vrstev, tak na orientaci vláken.

Hodnoty průhybů nosníků č.1 až č.3, které se od sebe liší tloušťkou jednotlivých vrstev při shodné orientaci vláken jednotlivých vrstev, se liší až o 20%. Obdobně pro nosníky č.4 až č.6.

U nosníků č.1, č.4 a č.7 až č.10, které mají jednotlivé vrstvy o stejné tloušťce a odlišné orientaci vláken, se hodnoty průhybů liší až o 65% nezávisle na symetrii.

Lze se tedy domnívat, že orientace vláken ovlivňuje velikost průhybu větší měrou než tloušťka jednotlivých lamin.

Z grafického vyjádření průhybu nosníku je patrná podobnost metody výpočtu ABD maticemi s metodou Timošenkovou. Průhyb dle Timošenkovy metody je nepatrně vyšší než dle ABD metody, což je dáno uvažováním příčného smyku. Metody minima deformační energie a minima doplňkové energie by měly být limitní k metodám ABD a Timošenkově, což neplatí u nosníků č.4, č.5, č.6 a č.10. Nelze jednoznačně určit, proč tento předpoklad neplatí.

6 Závěr

V této práci byly obecně popsány kompozity a jejich možnosti použití při výrobě výrobních strojů. Byly popsány čtyři analytické metody, které byly následně použity pro výpočet deseti daných nosníků.

Výsledné velikosti průhybů se dle jednotlivých metod liší. Lze si všimnout velkých odchylek jednotlivých metod při aplikaci na zadaný nosník. Pro určení oblasti platnosti dané metody by bylo potřeba porovnání výsledků s výpočtem pomocí metody konečných prvků a ověření experimentem. Ráda bych se proto touto problematikou zabývala i v rámci svého následného studia.

Literatura

1. Kulíšek, V., Mareš, T. (2014) Verifikované výpočtové modely silnostěnných kompozitních struktur. Výzkumná zpráva V-14-054 za projekt 1 - WP07__KOMPOZITY
2. Jones, R.M (1998) Mechanics of composite materials. Taylor and Francis, London
3. Chawla, K. K. (1998). Composite materials: Science and engineering 2. ed. New York: Springer
4. Procházka, P. (2001). Základy mechaniky složených materiálů 1. vyd. Praha: Academia
5. Laš, V., (2008). Mechanika kompozitních materiálů 2. přeprac. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita
6. Mráz, P., Talácko, J., (2006). Konstrukce strojů s kompozitními materiály 1. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT.
7. EMO Hannover potřetí – broušící stroje. MM Průmyslové spektrum. [online]. 18.12.2007 [cit. 2015-04-17]. Dostupné z:
<http://www.mmspektrum.com/clanek/emo-hannover-potretri-brousici-stroje.html>
8. EMO Hannover 2013: část 7 – Technologie, které mnohdy nejsou vidět. MM Průmyslové spektrum. [online]. 12.2.2014 [cit. 2015-04-17]. Dostupné z:
<http://www.mmspektrum.com/clanek/emo-hannover-2013-cast-7-technologie-ktere-mnohdy-nejsou-videt.html>
9. Kulíšek, V., a kol. (2013) Stavba nosných soustav. In Obráběcí stroje na EMO Hannover 2013, Společnost pro obráběcí stroje, o. s., ISBN 978-80-904077-5-6.
10. Kulíšek, V., Kolář, P., Smolík, J., a kol. (2014) 2014 – Trendy v oblasti kompozitních materiálů. Výzkumná zpráva V-14-059 za projekt 1 - WP07__KOMPOZITY

Seznam obrázků

Obr. 1: Řez ložem z minerální litiny (polymerbetonu) firmy ELB [7]	11
Obr. 2: Nosná část obráběcího stroje vyrobená z vláknového kompozitu [8]	11
Obr. 3: Brousící kotouč, jehož těleso je z vláknového kompozitu a na obvodu je nanášeno brusivo[8].....	11
Obr. 4: Srovnání hodnot ρ/E různých konstrukčních materiálů[6]	12
Obr. 5: Náhonová hřídel se spojovacím rozhraním – Mayr [9]	14
Obr. 6: Tvarový spoj hřídele s kovovou koncovkou.[10]	15
Obr. 7: Vřetena IPT Aachen [6]	15
Obr. 8: Vetknutý nosník – modelový příklad nosníku namáhaného na ohyb a příčný smyk pro rychlý návrh kompozitní skladby a geometrie výztuže [2].....	16
Obr. 9: Souřadné systémy	17
Obr. 10: Nosník č. 1	22
Obr. 11: Detail průhybu nosníku č. 1	23
Obr. 12: Nosník č. 2	23
Obr. 13: Nosník č. 3	24
Obr. 14: Nosník č. 4	24
Obr. 15: Nosník č. 5	25
Obr. 16: Nosník č. 6	25
Obr. 17: Nosník č. 7	26
Obr. 18: Nosník č. 8	26
Obr. 19: Nosník č. 9	27
Obr. 20: Nosník č. 10	27

Seznam tabulek

Tab. 1: Dané nosníky č. 1 – č. 5.....	20
Tab. 2: Dané nosníky č. 6 – č. 10.....	20
Tab. 3: Výsledky nosník č. 1 – č. 3.....	21
Tab. 4: Výsledky nosník č. 4 – č. 6.....	21
Tab. 5: Výsledky nosník č. 7 – č. 10.....	22
Tab. 6: Výsledky nosník č. 1 – č. 3.....	28
Tab. 7: Výsledky nosník č. 4 – č. 6.....	28
Tab. 8: Výsledky nosník č. 7 – č. 10.....	28