



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Optimalizace skladby kompozitního nosníku

Optimization of composite beam layup

Diplomová práce

Studijní program: Strojní inženýrství

Studijní obor: Aplikovaná mechanika

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Bc. Jan Toman

Praha 2015

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Jan Toman
Název BP:	Optimalizace skladby kompozitního nosníku
Anglický název:	Optimization of composite beam layup
Rok:	2015
Obor studia:	Aplikovaná mechanika
Ústav:	Mechaniky, mechatroniky a biomechaniky
Odbor:	Pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
Konzultant:	Ing. Viktor Kulíšek
Bibliografické údaje:	počet stran 68 počet obrázků 45 počet tabulek 11 počet příloh 3
Klíčová slova:	<i>vláknový kompozit, Timošenkova hypotéza, optimální úhel vlákna, hybridní smykadlo obráběcího stroje</i>
Keywords:	<i>fibre-reinforced plastic, Timoshenko beam theory, optimum angle of fiber, hybrid machine-tool slide</i>
Anotace:	<i>V této práci se zabýváme optimalizací skladby kompozitního nosníku. Dále řešíme optimalizaci hybridního smykadla obráběcího stroje.</i>
Abstract:	<i>The thesis deals with optimization of composite beam layup. Further it focuses on optimization of hybrid machine-tool slide.</i>

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů a uvedené literatury.

V Praze dne 8. 6. 2015

Podpis autora

Rád bych na tomto místě poděkoval panu doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. a panu Ing. Viktoru Kulíškovi za laskavé vedení a cenné rady, bez nichž by má práce nevznikla.

Dále bych chtěl vyjádřit své poděkování grantu Studentské grantové soutěže SGS15/188/OHK2/3T/12, kterým byla tato práce podpořena.

Obsah

Úvod	8
1 Kompozitní materiály	9
2 Mechanika kompozitních materiálů	13
2.1 Konstitutivní rovnice	13
2.2 Mimoosová tuhost a poddajnost	17
2.3 Elastické konstanty jednosměrové laminy	18
2.4 Klasická laminační teorie	19
2.5 Euler-Bernoulliho hypotéza	21
2.6 Timošenkova hypotéza	24
2.7 Konstrukční optimalizace	24
3 Optimalizace kompozitního nosníku	27
3.1 Kriteriační funkce	27
3.2 Optimální úhel vinutí vlákna	33
3.2.1 Vliv délky a vnějšího průměru laminátu	34
3.2.2 Vliv tloušťky a počtu vrstev laminátu	38
3.2.3 Vliv materiálu	38
3.3 Shrnutí	39
4 Optimalizace hybridního smykadla	40
4.1 Kriteriační funkce	41
4.2 Optimální průměr kompozitní výztuže	47
4.3 Optimalizace nové skladby	52
4.3.1 Vliv úhlu vinutí vlákna	52
4.3.2 Vliv tloušťky vrstev kompozitu	55
4.3.3 Vliv objemového podílu vláken	56
4.3.4 Vliv použitých vláken	58
4.3.5 Nová skladba výztuže	60
4.4 Shrnutí	61
Závěr	62
Použitá literatura	64

Seznam symbolů

σ_{ij}	tenzor napětí [$N.m^{-2}$]
ε_{kl}	tenzor malých deformací [1]
u_i	pole posuvů [m]
T_i	vektor napětí [$N.m^{-2}$]
C_{ijkl}	tenzor elastických konstant [$N.m^{-2}$]
W	hustota deformační energie [$J.m^{-3}$]
C	matice tuhosti [$N.m^{-2}$]
S	matice poddajnosti [1]
E	modul pružnosti v tahu [$N.m^{-2}$]
G	modul pružnosti ve smyku [$N.m^{-2}$]
ν	Poissonovo číslo [1]
a_{ij}	matice směrových kosinů [1]
E_L	modul pružnosti v tahu v podélném směru vláken [$N.m^{-2}$]
$E_T, E_{T'}$	moduly pružnosti v tahu v příčném směru vláken [$N.m^{-2}$]
G_{LT}	modul pružnosti ve smyku v podélně-příčném směru [$N.m^{-2}$]
ν_{LT}	Poissonovo číslo v podélně-příčném směru [1]
V_f	objemový podíl vláken [1]
A	matice tahové tuhosti [$N.m^{-1}$]
B	matice vazební tuhosti [N]
D	matice ohybové tuhosti [$N.m$]
q	spojité zatížení nosníku [$N.m^{-1}$]
F	osamělá zatěžující síla nosníku [N]
M_i	ohybový moment kolem i-té osy nosníku [$N.m$]
Q_i	posouvající síla v i-té ose nosníku [N]
w	průhyb nosníku [m]
φ	úhel natočení nosníku [$^\circ$], [rad]
κ	Timošenkův smykový součinitel [1]
α	úhel vinutí vlákna [$^\circ$], [rad]
$A_{ekv.}$	ekvivalentní modul tahové tuhosti [N]
$B_{ekv.}$	ekvivalentní modul vazební tuhosti [$N.m$]
$D_{ekv.}$	ekvivalentní modul ohybové tuhosti [$N.m^2$]

Úvod

Rostoucí využití kompozitních materiálů v technické praxi, jemuž jsme byli svědky v uplynulých letech ¹, s sebou nese rostoucí nároky při návrhu kompozitních součástí a konstrukcí. Kompozity svojí skladbou přímo ovlivňují mechanické vlastnosti součástí z nich vyrobených, a my tedy stojíme před otázkou nalezení optimální skladby, která nejlépe splňuje požadovaná kritéria kladená na součást. Se zvyšující se geometrickou složitostí součástí roste dále i obtížnost nalezení optimální skladby, protože je nutné hledat pro danou úlohu vhodné optimalizační algoritmy ², a úloha optimalizace tak nabývá jednak na své složitosti, jednak na své důležitosti.

V této práci nejprve v úvodních dvou kapitolách shrneme základní poznatky o kompozitních materiálech s důrazem na jejich mechanické vlastnosti, které využijeme v následujících kapitolách.

Ve 3. kapitole se zaměříme na optimalizaci skladby kompozitního nosníku s trubkovým průřezem. Cílem zde bude sestavit vhodný model pro analýzu tuhosti nosníku, a dále najít optimální úhel vinutí vlákna. Ten budeme vyšetřovat jednak pro zadanou geometrii nosníku a skladbu kompozitu, jednak v závislosti na geometrii a skladbě.

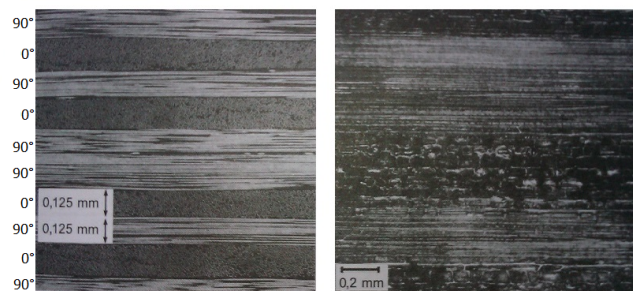
Konečně ve 4. kapitole se budeme zabývat optimalizací hybridního smykadla obráběcího stroje, které je tvořeno litinovým pláštěm s kompozitní výztuží trubkového profilu. Naším cílem zde bude sestavení modelů pro analýzu tuhosti a hmotnosti smykadla, pro něž budeme hledat optimální vnější průměr kompozitní výztuže se zadanou geometrií a skladbou. Následně bude naším cílem optimalizovat skladbu kompozitní výztuže a sledovat její vliv na kritéria tuhosti a hmotnosti smykadla.

¹První patent na výrobu letadla z vyztužených plastů podal již roku 1916 R. Kemp, rostoucí využití v leteckém průmyslu však zaznamenáváme přibližně od roku 1970. Historický vývoj a uplatnění kompozitů v různých technických odvětvích je dále uvedeno v publikaci [5]

²Ty nejpoužívanější jsou uvedeny v [13]

1. Kompozitní materiály

Kompozitní materiály jsou obecně definovány tak, že se skládají ze dvou či více materiálů s odlišnými vlastnostmi, přičemž výsledný kompozit využívá synergických účinků jednotlivých složek. Takové materiály lze nalézt v přírodě, v technické praxi se ale používají převážně kompozity vyrobené synteticky, a jimi se budeme dále zabývat (pro porovnání viz struktury na obr.1.1).



Obrázek 1.1: Řez laminátem z epoxidové pryskyřice a uhlíkových vláken (vlevo) a bambusovým stonkem (vpravo) - převzato z [5]

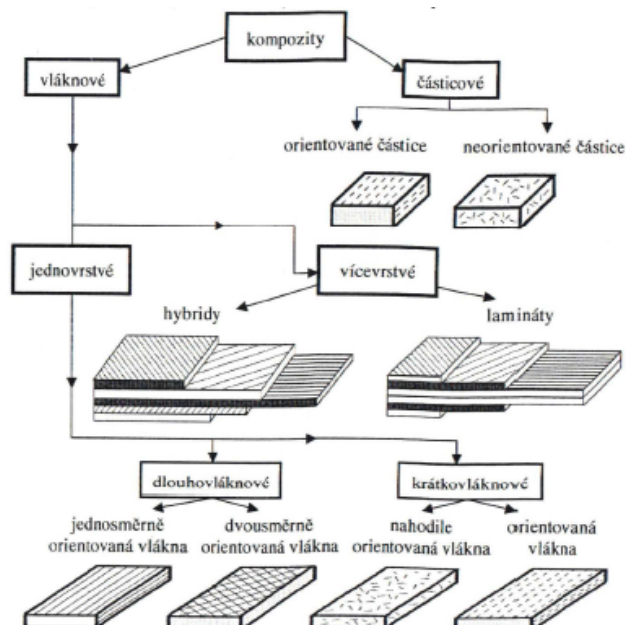
Synteticky vyráběné kompozity jsou zpravidla tvořeny ze dvou složek, z nichž jedna má charakter výztuže, druhá potom charakter pojiva. Úlohou výztuže je zajistit patřičnou pevnost a tuhost kompozitu. Pojivo, označované častěji jako matrice, potom zajišťuje především:

- soudržnost kompozitu, tedy jeho tvar
- distribuci namáhání na vlákna a mezi vlákny
- ochranu vláken před okolními vlivy

Pokud bychom chtěli rozdělit kompozitní materiály, můžeme použít různá hlediska, např. podle původu jednotlivých složek je můžeme dělit na organické a anorganické. Nejčastěji se však kompozity klasifikují podle své struktury.

Pro jednoduchost využijeme rozdělení použité v [12], které je uvedeno na obr. 1.2. Dle něj dělíme kompozity na částicové a vláknové, což je dáno tvarem výztuže, vláknové pak dále dělíme na jednovrstvé a vícevrstvé, a vícevrstvé konečně dle skladby³ na lamináty a hybridní lamináty.

³Je-li použitý materiál ve všech vrstvách stejný (např. uhlíková vlákna v epoxidové matrici), hovoříme o laminátu. Jsou-li materiály v různých vrstvách různé (v jedné např. uhlíková vlákna v epoxidové matrici, v jiné např. skelná vlákna v epoxidové matrici), hovoříme o hybridních laminátech.



Obrázek 1.2: Rozdělení kompozitních materiálů - převzato z [12]

V této práci se omezíme na lamináty resp. hybridní lamináty, kterými se budeme zabývat ve 3. a 4. kapitole. Pro lamináty se nejčastěji používají uhlíková, skleněná, aramidová, bórová a přírodní⁴ vlákna. Jejich elastické vlastnosti jsou pro představu uvedeny v tab. 1.1.

Vlákno	E_{\parallel} [kN.mm ⁻²]	E_{\perp} [kN.mm ⁻²]	$G_{\parallel\perp}$ [kN.mm ⁻²]	$\nu_{\parallel\perp}$ [1]	$E_{\parallel} : E_{\perp}$ [1]
E-sklo	73	73	30	0,25	1
Aramidové vysokomodulové (HM)	133	5,4	12	0,38	24,6
Uhlíkové standardní typ (HT)	240	15	10	0,28	16
Uhlíkové vysokomodulové (HM)	500	5,7	8	0,36	88

Tabulka 1.1: Elastické charakteristiky různých druhů vláken - data převzata z [5]

Matrice jsou nejčastěji z reaktivních pryskyřic⁵, především z pryskyřice epoxidové, případně z termoplastů. Zevrubnější informace ohledně vláken a matric jsou uvedeny např. v [5].

⁴Len, konopí, sisal, juta, ramie a bavlna

⁵Nejdůležitějšími typy jsou pryskyřice nenasyčené polyesterové (UP-R), vinylesterové (VE-R), fenakrylátové (PFA-R), epoxidové (EP-R), fenolické, metakrylátové (MA-R) a izokyanátové

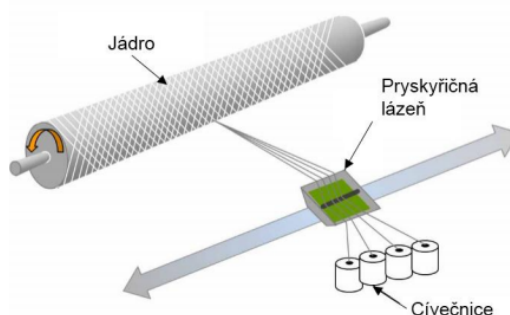
Určení elastických vlastností laminátů z vlastností jejich vláken a matric je poměrně obtížná úloha závisající na celé řadě faktorů⁶. Pro lepší představu jsou ale v tab. 1.2 uvedeny dosahované elastické vlastnosti vybraných kompozitů. Z nich je zřejmé, že moduly pružnosti ve směru vláken E_1 se při použití vláken uhlíkových blíží hodnotám, které dosahujeme u oceli⁷. Vzhledem k nižší relativní hmotnosti kompozitů oproti oceli⁸ je tedy zřejmé jejich perspektivní využití.

Označení materiálu	Vlákno/matrice	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12} [1]	V_f [1]
T300/5208	uhlík/epoxid	181	10,3	7,17	0,28	0,7
AS4/3501	uhlík/epoxid	138	8,96	7,10	0,30	0,66
B(4)/5505	bór/epoxid	204	18,5	5,59	0,23	0,5
Kevlar49/Ep	aramid/epoxid	76	5,50	2,30	0,34	0,6
Scotchply 1002	sklo/epoxid	38,6	8,27	4,14	0,26	0,45

Tabulka 1.2: *Elastické charakteristiky vybraných laminátů - data převzata z [6]*

Samostatnou kapitolu by tvořila technologie výroby kompozitů, které se ovšem v rámci této práce nebudeme hlouběji zabývat. Základní informace ohledně technologie výroby uhlíkových kompozitů jsou uvedeny v [1].

Pro naši další práci, v níž budeme optimalizovat kompozitní nosník trubkového profilu a dále hybridní smykadlo s kompozitní výztuží trubkového profilu, bude ale vhodné zmínit alespoň technologii navíjení, která se využívá právě pro výrobu uvedených profilů. Ta spočívá v kontinuálním navíjení pramenců vlákna, která jsou před samotným navinutím impregnována pryskyřicí, jak je schématicky zobrazeno na obr. 1.3. Polotovarem pro tuto technologii je vlákno ve formě tzv. rovingu, což je pramenec tvořený z jednotlivých vláken, který je navinut na cívku (viz obr. 1.4).



Obrázek 1.3: *Schéma technologie navíjení - převzato z [1]*

⁶Především na konkrétní kombinaci vlákna a matrice a dále na použité technologii s danou přesností výroby. Nejjednodušší vztahy pro jejich výpočet jsou uvedeny podkapitole 2.3

⁷Dle [15] orientačně 210 GPa

⁸Měrná hmotnost epoxidové matrice je dle tab. 4.1 řádově 1100 kg.m^{-3} , uhlíkového vlákna řádově 2000 kg.m^{-3} , naproti tomu měrná hmotnost oceli je 7850 kg.m^{-3}



Obrázek 1.4: *Role rovingu - převzato z [1]*

Technologie navíjení je výhodná vzhledem ke snadné automatizaci celého procesu, její nevýhodou může být vyšší pořizovací cena výrobního zařízení. Pro nás bude dále zajímavé především technologické omezení ve smyslu objemového podílu vláken. Ten se při technologii navíjení pohybuje dle [11] v rozmezí $V_f = (55 - 70)\%$.

2. Mechanika kompozitních materiálů

V této kapitole shrneme základní poznatky z matematické teorie pružnosti, které rozšíříme o specifika, která s sebou, jakožto obecně anizotropní materiály, nesou kompozity. Označování níže uvedených vztahů a veličin bylo převzato z publikací [2] a [12].

2.1 Konstitutivní rovnice

V našich úvahách, které budeme aplikovat na řešení úloh v dalších kapitolách, se omezíme pouze na elastické deformace, které budeme dále považovat za relativně malé, a zároveň budeme předpokládat lineární závislost mezi složkami tenzoru napětí a tenzoru deformací. Za těchto předpokladů má konstitutivní rovnice, tedy zobecněný Hookeův zákon, v indexové notaci tvar

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

kde tenzor malých deformací ε_{kl} je dále určen z pole posuvů $u_i(x_j)$ jako

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \quad (2.2)$$

a tenzor napětí σ_{ij} jako lineární operátor vektoru napětí $\overset{\nu}{T}_i$ a jeho vektoru vnější normály ν_j , tedy

$$\overset{\nu}{T}_i = \sigma_{ij}\nu_j, \quad (2.3)$$

přičemž z podmínky rovnováhy kontinua platí pro složky tenzoru napětí symetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Tenzor 4. řádu C_{ijkl} nazýváme tenzorem elastických konstant, ve Voigtově maticovém zápisu pak mluvíme o matici tuhosti C . Vzhledem k symetrii tenzoru napětí σ_{ij} a tenzoru malých deformací ε_{kl} je i tenzor C_{ijkl} symetrický v indexech i a j resp. k a l , a má tak 36 nezávislých konstant. Z hustoty deformační energie W , která je určena jako kvadratická forma tenzoru deformace ε_{ij} ve tvaru

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad (2.4)$$

potom plyne symetrie tenzoru C_{ijkl} ve dvojicích indexů ij a kl , a z toho dostáváme celkem 21 nezávislých elastických konstant, jimiž je určen obecný anizotropní materiál.

Vzhledem k výše uvedeným symetriím můžeme Hookeův zákon z rovnice 2.1 přeindexovat a pro anizotropní materiál můžeme tedy ve Voigtově zápisu psát

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

kde matice tuhosti C je symetrická a dále platí $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}$ a $\varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$ (obdobná záměna indexů platí též pro vektor napětí). Případně můžeme psát Hookeův zákon v jeho inverzní formě jako

$$\varepsilon = S\sigma, \quad (2.6)$$

kde matici S , která je inverzí matice tuhosti C , označujeme jako matici poddajnosti. Matice poddajnosti je stejně jako matice tuhosti symetrická.

Některé materiály, ať už přírodní či syntetické, vykazují stejné chování elastických vlastností vzhledem k určitým rovinám. Roviny, kolem nichž jsou elastické vlastnosti materiálu symetrické, nazýváme rovinami symetrie, a s jejich existencí se snižuje počet nezávislých elastických konstant v matici tuhosti C resp. matici poddajnosti S . Budeme-li mít např. materiál, který má v prostoru se souřadným systémem $O(x_1, x_2, x_3)$ rovinu symetrie v rovině x_1x_2 , počet jeho nezávislých materiálových konstant klesne z 21 na 13, přičemž jeho matice tuhosti bude mít tvar

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Materiál se třemi navzájem kolmými rovinami symetrie se nazývá ortotropním, má 9 nezávislých elastických konstant a jeho matice tuhosti má tvar

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

a konečně má-li materiál ve všech směrech stejné vlastnosti, nazýváme ho izotropním, má pouze 2 nezávislé elastické konstanty (modul pružnosti v tahu E a Poissonovo číslo ν), s jejichž využitím má matice tuhosti tvar

$$C = \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{pmatrix} \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.9)$$

V dalším textu budeme uvažovat jednosměrové kompozity, které jsou schematicky naznačeny na obr. 2.1. Ty svým chováním odpovídají příčně izotropnímu materiálu, jehož matice poddajnosti má tvar

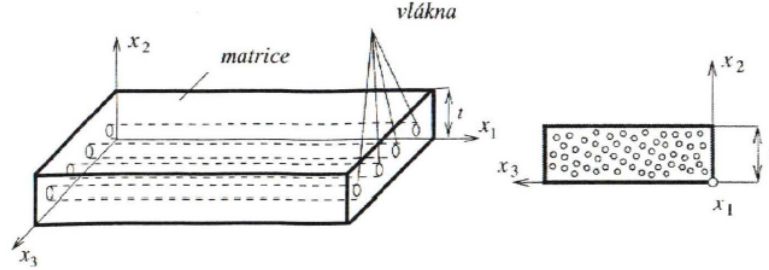
$$S = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

kde jednotlivé elastické konstanty jsou

- E_1 *modul pružnosti v tahu ve směru kolmém k rovině izotropie*
- $E_2 = E_3$ *moduly pružnosti v tahu v rovině izotropie*
- $G_{12} = G_{13}$ *moduly pružnosti ve smyku v rovině kolmé k rovině izotropie*
- G_{23} *modul pružnosti ve smyku v rovině izotropie*
- $\nu_{12} = \nu_{13}$ *Poissonova čísla mezi rovinou kolmou k rovině izotropie a rovinou izotropie*
- $\nu_{23} = \nu_{32}$ *Poissonova čísla v rovině izotropie*

a vzhledem k symetrii matice S dále platí

$$\begin{aligned}\nu_{12}E_2 &= \nu_{21}E_1 \\ \nu_{13}E_3 &= \nu_{31}E_1 \\ \nu_{23}E_3 &= \nu_{32}E_2\end{aligned}\tag{2.11}$$



Obrázek 2.1: Schéma jednosměrového kompozitu - převzato z [12]

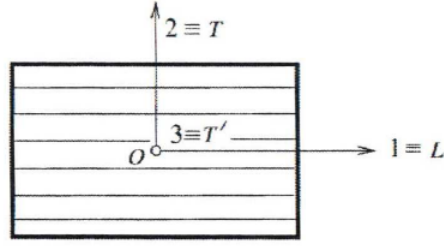
Matici tuhosti příčně izotropního materiálu potom můžeme určit inverzí matice poddajnosti, a členy matice tuhosti tedy budou

$$\begin{aligned}C_{11} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/d \\ C_{12} &= E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/d \\ C_{13} &= E_1(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})/d \\ C_{22} &= E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})/d \\ C_{23} &= E_2(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})/d \\ C_{33} &= E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})/d \\ C_{44} &= G_{23} \\ C_{55} &= G_{13} \\ C_{66} &= G_{12},\end{aligned}\tag{2.12}$$

kde

$$d = \det \begin{pmatrix} 1 & -\nu_{12} & -\nu_{13} \\ -\nu_{21} & 1 & -\nu_{23} \\ -\nu_{31} & -\nu_{32} & 1 \end{pmatrix}\tag{2.13}$$

Vzhledem k uspořádání jednosměrových kompozitů bývá zvykem elastické konstanty určovat v souřadném systému $O(L, T, T')$, kde L je podélný směr vláken, T příčný směr vláken a T' je směr kolmý k rovině laminy (viz obr. 2.2). Vztahy 2.10, 2.12 a 2.13 se potom upraví pouhou cyklickou záměnou indexů.



Obrázek 2.2: Souřadný systém $O(L, T, T')$ - převzato z [12]

2.2 Mimoosová tuhost a poddajnost

Matice elastických konstant, které jsme uvedli v předchozí podkapitole, jsou závislé na souřadném systému, ve kterém jsou vyjádřeny. Vztahy 2.10 - 2.13 platí pro jednosměrové kompozity v souřadném systému hlavních os anizotropie. V praktických aplikacích je ale častokrát potřeba vyjádřit matice elastických konstant v jiných souřadných systémech⁹ a je tedy nutné matice tuhosti a poddajnosti do příslušného souřadného systému transformovat.

Budeme-li uvažovat souřadné systémy x a x' , které jsou vzájemně natočeny, matice tuhosti C_{ijkl} se ze souř. systému x do x' transformuje jako tenzor 4. řádu podle vztahu

$$C'_{ijkl} = a_{im}a_{jn}a_{kr}a_{ls}C_{mnrst}, \quad (2.14)$$

kde $a_{im} - a_{ls}$ jsou matice směrových kosinů mezi souřadnými systémy x a x' ve tvaru

$$a_{im} = \cos(x'_i, x_m) \quad (2.15)$$

Pokud budou pro jednoduchost souřadné systémy x a x' pootočeny kolem osy x_1 resp. x'_1 o úhel θ podle obr. 2.3, což v dalších kapitolách využijeme při aplikaci na nosník trubkového profilu, bude mít matice směrových kosinů a tvar

$$a = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

a matice tuhosti v souřadném systému x' se potom určí v maticovém zápisu jako

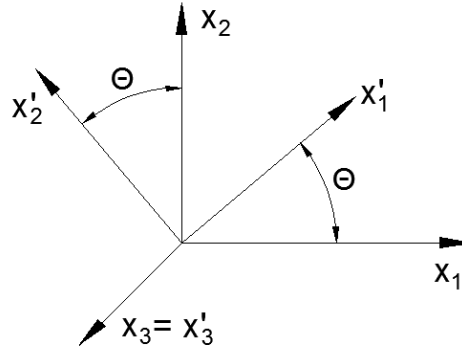
$$C' = (a \otimes a)C(a \otimes a), \quad (2.17)$$

kde symbol \otimes vyjadřuje Kroneckerův součin, pro který platí

⁹Např. u kompozitního nosníku trubkového profilu, jímž se budeme zabývat v dalších kapitolách, je globálním souřadným systémem systém osa-normála-normála

$$a \otimes a = \begin{pmatrix} a_{11}a & a_{12}a & a_{13}a \\ a_{21}a & a_{22}a & a_{23}a \\ a_{31}a & a_{32}a & a_{33}a \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Vztah 2.14 resp. 2.17 platí obdobně i pro matici poddajnosti S , případně ji můžeme získat inverzí matice tuhosti C' .



Obrázek 2.3: Natočení souřadných systémů x a x'

2.3 Elastické konstanty jednosměrové laminy

Při návrhu jednosměrového kompozitu známe materiálové vlastnosti jeho vláken a matrice a stojíme tedy před úkolem určit vlastnosti kompozitu jako celku. Pro výpočet jednotlivých elastických konstant existuje řada výpočtových modelů, které mnohdy závisejí na konkrétní skladbě kompozitu.

My se pro jednoduchost omezíme na základní a nejjednodušší způsob výpočtu elastických konstant ze směšovacího pravidla, který lze nalézt např. v [16]. Podle něj se elastické konstanty jednosměrové laminy určí z elastických konstant vláken a matrice v souřadnicových osách L, T, T' jako

$$E_L = V_f E_{Lf} + (1 - V_f) E_{Lm}, \quad (2.19)$$

$$E_T = \frac{E_{Tm}}{1 - V_f \left(1 - \frac{E_{Tm}}{E_{Tf}}\right)} = E_{T'}, \quad (2.20)$$

$$G_{LT} = \frac{G_{LTm}}{1 - V_f \left(1 - \frac{G_{LTm}}{G_{LTf}}\right)} = G_{LT'}, \quad (2.21)$$

$$\nu_{LT} = V_f \nu_{LTf} + (1 - V_f) \nu_{LTm} = \nu_{LT'}, \quad (2.22)$$

kde V_f je objemový podíl vláken, elastické konstanty s indexem f přísluší vláknu a konstanty s indexem m matrici.

V kapitole 4, v níž se budeme zabývat optimalizací smykadla obráběcího stroje, bude dále použit pro určení elastických konstant jednosměrové laminy výpočet podle Chamise [3], pro který platí

$$E_T = \frac{E_{Tm}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_{Tm}}{E_{Tf}}\right)} = E_{T'}, \quad (2.23)$$

$$G_{LT} = \frac{G_{LTm}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_{LTm}}{G_{LTf}}\right)} = G_{LT'}, \quad (2.24)$$

a zbylé elastické konstanty jsou potom definovány stejně jako ve vztazích 2.19 a 2.22.

2.4 Klasická laminační teorie

Pro určení konstitutivní rovnice jednosměrové laminy budeme používat klasickou laminační teorii, která je uvedena např. v [12]. Ta je odvozena pro laminu modelovanou jako tenkou desku, pro niž dále platí následující předpoklady:

- všechny laminy jsou ortotropní a kvazihomogenní
- tloušťka laminy je v porovnání s délkou a šířkou velmi malá
- relativně malé posuvy a deformace
- dokonalé spoje lamin a tedy spojitá posunutí
- lineární změna posunutí v příčném směru
- rovinný stav napjatosti, tedy $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$
- kolmice ke středové ploše zůstávají přímé a kolmé na deformovanou střední plochu, tedy $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} \doteq 0$
- zachování průřezu a tedy zanedbání deformace v příčném směru, $\varepsilon_{zz} \doteq 0$
- platnost Hookeova zákona

Konstitutivní vztahy potom dostaneme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m^0 \\ \dots \\ k \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

kde N a M jsou vektory ekvivalentních sil a momentů, ε_m^0 je deformace střední plochy, k je křivost desky, a konečně ABD matice mají tvar

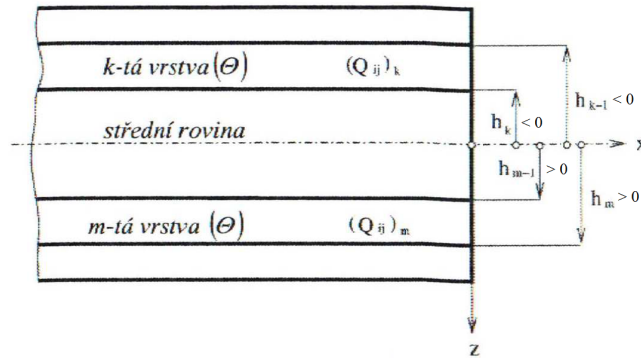
$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k - h_{k-1}), \quad (2.26)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad (2.27)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (2.28)$$

kde Q_{ij} je matice mimoosé tuhosti a $h_k - h_{k-1}$ je tloušťka k -té vrstvy. Matice A se nazývá maticí tahové tuhosti, B maticí vazební tuhosti a D maticí ohybové tuhosti. ABD matice závisejí na skladbě laminátu, takže řízením skladby můžeme ovlivnit mechanické chování laminátu.

Budeme-li uvažovat laminát symetrický kolem střední plochy dle obr. 2.4, bude matice vazební tuhosti $B = 0$, čímž odstraníme vazbu mezi tahem a ohybem a mezi tahem a krutem.



Obrázek 2.4: Schéma symetrického laminátu - převzato z [12]

Pokud bude dále platit, že ke každé k -té vrstvě s úhlem Θ bude existovat m -tá vrstva se stejnou tloušťkou a úhlem s opačnou orientací, tedy $-\Theta$ (viz obr. 2.5), dostaneme tzv. vyrovnaný laminát, u kterého není vazba mezi normálovými silami a smykovou deformací. Platí tedy, že $A_{16} = A_{26} = 0$, a vzhledem k symetrii dále $A_{61} = A_{62} = 0$.

Bude-li platit současně, že $B = 0$ a $A_{16} = A_{26} = 0$, dostaneme tzv. vyrovnaný symetrický laminát, jehož skladba je na obr. 2.6. U takového laminátu jednak nejsou vazby mezi tahem a ohybem resp. krutem, jednak normálové síly nevyvolávají smykové deformace. Další možnosti skladeb laminátu jsou uvedeny v [12].

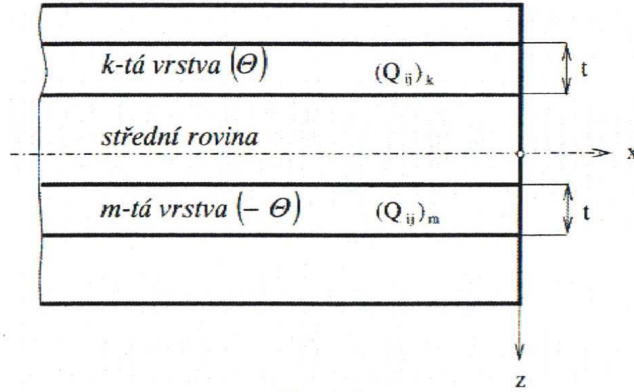
Pokud se budeme zabývat speciálně tenkostěnnými trubkami vyráběnými navíjením vláken, můžeme z ABD matic vyjádřit efektivní modul pružnosti v axiálním směru, ve smyku a dále Poissonovo číslo, pro která pro obecnou skladbu

laminátu platí

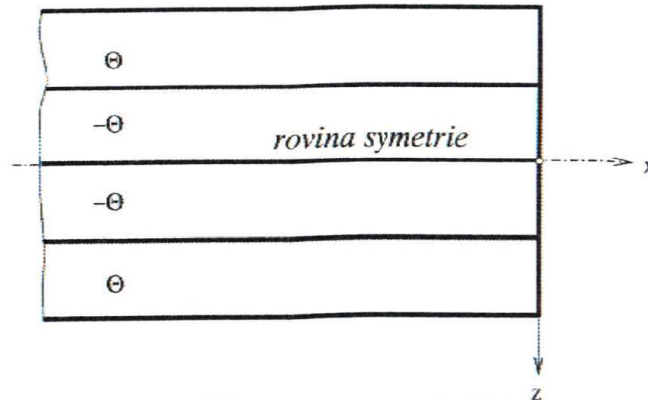
$$E_x = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{h(A_{66}A_{22} - A_{26}^2)} \quad (2.29)$$

$$G_{xy} = \frac{A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2}{h(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \quad (2.30)$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}A_{66} - A_{16}A_{26}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \quad (2.31)$$



Obrázek 2.5: Schéma vyrovnaného laminátu - převzato z [12]



Obrázek 2.6: Schéma vyrovnaného symetrického laminátu - převzato z [12]

2.5 Euler-Bernoulliova hypotéza

Euler-Bernoulliova hypotéza, která umožňuje řešení statiky i dynamiky nosníků, je postavena na základě následujících předpokladů:

- deformace nosníku jsou relativně malé, pročež uvažujeme platnost Hookeova zákona, tedy lineární závislost mezi napětím a deformacemi
- plochy kolmé k neutrální ose zůstávají kolmými k neutrální ose i po deformaci

- nosník je štíhlý a jeho průřez je tedy zanedbatelný vzhledem k délce
- vzhledem ke štíhlosti nosníku neuvažujeme vliv smykových napětí, která jsou vůči ohybovým napětím zanedbatelná
- osa nosníku leží v neutrální rovině, přičemž neuvažujeme deformace nosníku ve směru osy
- úlohu řešíme jako jednodimenzionální

Pro tyto předpoklady je odvozen¹⁰ vztah pro statické zatížení nosníku ve tvaru

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q, \quad (2.32)$$

kde q je spojité zatížení nosníku, E modul pružnosti v tahu, I kvadratický modul v průřezu a konečně w je průhyb nosníku. Součinu EI odpovídá u kompozitních nosníků ekvivalentní modul ohybové tuhosti $D_{ekv.}$, který bude odvozen dále v kapitolách 3 a 4.

Pro homogenní nosník, který má po délce konstantní ekvivalentní modul ohybové tuhosti $D_{ekv.}$, můžeme vztah 2.32 zjednodušit na

$$D_{ekv.} \frac{d^4 w}{dx^4} = q, \quad (2.33)$$

a s využitím Schwedlerovy věty ve tvaru

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q, \quad (2.34)$$

získáme konečně

$$M(x) = -D_{ekv.} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (2.35)$$

$$Q(x) = -D_{ekv.} \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (2.36)$$

Ze vztahů 2.35 a 2.36 můžeme tedy při znalosti průběhu ohybového momentu $M(x)$ nebo posouvající síly $Q(x)$ určit pro dané okrajové podmínky průhyb nosníku $w(x)$.

Budeme-li se dále zabývat dynamikou nosníku podle předpokladů Euler-Bernoulliho hypotézy, dostaneme rovnici¹¹

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -\mu \frac{d^2 w}{dt^2} + q, \quad (2.37)$$

¹⁰Odvození např. v [15]

¹¹Odvození např. v [14]

při jejímž odvození byl dále použit předpoklad zanedbání setrvačnosti od rotačních účinků, který vyplývá z předpokladu malých deformací a platnosti Hookeova zákona. Veličina μ v rovnici 2.37 se potom nazývá liniovou hustotou a má tedy význam hmotnosti na jednotku délky, a dále i zde můžeme pro kompozitní nosník nahradit součin EI ekvivalentním modulem ohybové tuhosti $D_{ekv.}$.

Budeme-li opět předpokládat homogenní nosník, pro nějž je liniová hustota μ a ekvivalentní modul ohybové tuhosti $D_{ekv.}$ po délce nosníku konstantní, můžeme vztah 2.37 upravit na

$$D_{ekv.} \frac{d^4 w}{dx^4} = -\mu \frac{d^2 w}{dt^2} + q \quad (2.38)$$

Rovnice 2.38 bývá nejčastěji řešena Fourierovou metodou, která výslednou funkci průhybu $w(x, t)$ dělí na funkci závislou pouze na proměnné x , tedy funkci $X(x)$, a na funkci závislou pouze na čase t , tedy $T(t)$, ve tvaru

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n, \quad w_n = X_n(x) T_n(t), \quad (2.39)$$

přičemž funkce w_n musí splňovat okrajové podmínky a pomocí konstant c_n se koriguje splnění podmínek počátečních.

Dosadíme-li 2.39 do 2.38, dostaneme hledané funkce ve tvaru

$$T = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t), \quad (2.40)$$

$$X = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + C_3 \cosh(\alpha x) + C_4 \sinh(\alpha x), \quad (2.41)$$

kde konstanty A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 vyplývají z počátečních resp. okrajových podmínek, Ω je potom vlastní frekvence nosníku a platí pro ni

$$\Omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{D_{ekv.}}{\mu}}, \quad (2.42)$$

Pro vetknutý nosník, který budeme uvažovat v dalších kapitolách, bude pro vlastní frekvence platit

$$\Omega_n = \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{ekv.}}{\mu}}, \quad (2.43)$$

kde L je délka nosníku a konstanty β pro první čtyři vlastní frekvence nabývají postupně hodnot $[1, 875 \ 4, 694 \ 7, 855 \ 10, 9955]$. Podrobnější informace o odvození rovnic a dalších hodnotách vlastních frekvence lze nalézt v [19] a [14].

2.6 Timošenkova hypotéza

Oproti Euler-Bernoulliově hypotéze uvažuje hypotéza Timošenkova vliv smykových napětí a setrvačných účinků. Předpoklady Timošenkovy hypotézy jsou:

- *deformace nosníku jsou relativně malé, pročež uvažujeme platnost Hookeova zákona, tedy lineární závislost mezi napětím a deformacemi*
- *plochy kolmé k neutrální ose nezůstávají k neutrální ose kolmými i po deformaci, ale svírají s ní úhel φ*
- *osa nosníku leží v neutrální rovině, přičemž neuvažujeme deformace nosníku ve směru osy*

Po odvození dostáváme analogicky ke vztahům 2.35 a 2.36 pro Timošenkovu hypotézu

$$M(x) = -D_{ekv} \frac{d\varphi}{dx} + B_{ekv} \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \quad (2.44)$$

$$Q(x) = -B_{ekv} \frac{d\varphi}{dx} + \kappa A_{ekv} \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \quad (2.45)$$

kde κ je Timošenkův smykový součinitel, který vyjadřuje nelineární rozdělení smykových napětí v průřezu. K jeho určení existuje řada modelů v závislosti na Poissonově čísle, tvaru průřezu nosníku aj.¹² My budeme pro jednoduchost uvažovat vztahy uvedené v [7], kdy např. pro trubkový průřez, jímž se budeme dále zabývat, platí

$$\kappa = \frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}, \quad (2.46)$$

kde m je poměr vnitřního poloměru trubkového profilu r_i k jeho vnějšímu poloměru r_e .

Dynamikou nosníků podle Timošenkovy hypotézy se v této práci nebudeme dále zabývat. Tato problematika je ale popsána např. v [7].

2.7 Konstrukční optimalizace

Úloha konstrukční optimalizace podléhá metodologickému postupu, který je podrobně popsán v [13]. My se zde omezíme pouze na její stručný popis.

Při optimalizaci nejprve zkoumáme podmínky, za nichž bude optimalizovaná konstrukce existovat, a dále se zabýváme účelem, jemuž má optimalizovaná konstrukce sloužit. Pro optimalizaci kompozitního nosníku, jíž se budeme zabývat

¹²Více o smykovém součiniteli lze nalézt v [4]

v kapitole 3, je vnější podmínkou způsob zatěžování, účelem je potom únosnost daného zatížení.

V další fázi stanovujeme kritéria konstrukce, podle kterých hodnotíme její kvalitu. Optimální řešení je potom takové, pro něž stanovené kritérium nabývá extrému, dle charakteru kritéria buďto maxima nebo minima. Řešíme-li vícekritériální optimalizaci s protichůdnými kritérii, je dále potřeba určit buďto váhu jednotlivých kritérií, nebo dodatečnou podmínku¹³. Při optimalizaci kompozitního nosníku v kapitole 3 je kritériem tuhost nosníku, kterou maximalizujeme.

Dále je nutné určit formu konstrukce a zvolit návrhové parametry. Forma konstrukce je pro náš kompozitní nosník definována geometrií, způsobem uložení apod., návrhovými parametry jsou potom rozměrové, tvarové a materiálové proměnné, které zapisujeme souhrnně do vektoru návrhových parametrů ve tvaru

$$x_N = \begin{pmatrix} x_m \\ x_t \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n \quad (2.47)$$

Máme-li vektor návrhových parametrů, musíme určit vedlejší podmínky, které omezí množinu možných řešení vyjádřených vektorem x_N . Pro náš kompozitní nosník budou takovými podmínkami např. skutečnost, že tloušťka stěny musí být menší než vnější poloměr trubkového profilu apod. Vedlejší podmínky můžeme obecně psát jako

$$\begin{aligned} \bar{g}_l(x_N) &\leq 0, & l = 1, 2, \dots, k \\ \bar{h}_l(x_N) &= 0, & l = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.48)$$

Další fází je stanovení matematického modelu fyzikálně zjednodušené úlohy. Se zavedením takového modelu nám do optimalizace vstoupí další proměnné, které nazýváme analytickými, a ty společně s návrhovými parametry x_N tvoří vektor proměnných úlohy x . V úloze s kompozitním nosníkem jsou pro nás takovými analytickými parametry např. složky matice tuhosti. Pomocí vektoru proměnných tedy můžeme psát pro zvolená kritéria

$$f = f(x) \quad (2.49)$$

a stejně tak i vedlejší podmínky z 2.48 můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} \bar{g}_l(x) &\leq 0, & l = 1, 2, \dots, k \\ \bar{h}_l(x) &= 0, & l = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nyní již můžeme přikročit k samotné optimalizaci. Budeme-li předpokládat, že

¹³Např. minimalizovat jedno kritérium s podmínkou pro maximum druhého kritéria

\hat{x} je optimální řešení z množiny všech přípustných řešení \wp určených z podmínky 2.50, musí pro maximalizaci zvoleného kritéria platit

$$f(\hat{x}) = \max_{x \in \wp} f(x) \quad (2.51)$$

odkud můžeme inverzí zjistit hledané optimální řešení \hat{x} .

Posledním krokem v optimalizačním procesu je volba vhodné matematické metody pro optimalizaci s formalizací extrémální úlohy, její řešení a následná interpretace výsledků. V této práci si při optimalizaci vystačíme při hledání extrémů funkce 2.49 s nutnou podmínkou lokálního extrému ve tvaru

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T = \vec{0}, \quad (2.52)$$

přičemž další optimalizační metody, které jsou v technické praxi používané, jsou dále popsány v [13].

Při optimalizaci skladby vláknového kompozitu, kterou se zabývá kapitola 3, a dále při optimalizaci smykadla obráběcího stroje, kterou se zabývá kapitola 4, budeme tedy hledat příslušné matematické modely, návrhové parametry a kritériální funkce s vedlejšími podmínkami tak, jak bylo popsáno výše, abychom našli optimální řešení daných úloh.

3. Optimalizace kompozitního nosníku

V této kapitole se budeme zabývat optimalizací kompozitního nosníku trubkového profilu. Po odvození kritériální funkce budeme hledat optimální úhel vinutí vlákna jednak pro danou geometrii a skladbu nosníku, jednak v závislosti na geometrii a skladbě, kdy budeme zkoumat vliv jednotlivých optimalizačních parametrů na optimální úhel vinutí. Optimalizačním kritériem pro nás bude tuhost daného profilu, kterou budeme maximalizovat, a hlavním návrhovým parametrem potom úhel vinutí vlákna v jednotlivých vrstvách laminátu.

Závěry formulované v této kapitole následně využijeme v kapitole 4, kde budeme optimalizovat hybridní smykadlo obráběcího stroje, které je tvořeno litinovým rámem s kompozitní výztuží.

3.1 Kritériální funkce

Abychom se mohli zabývat optimalizací, musíme nejprve odvodit kritériální funkci s příslušnými návrhovými parametry (viz podkapitola 2.7) pro danou optimalizační úlohu.

Mějme nosník dle obr. 3.1. Pokud uvažujeme rovinnou úlohu, dostáváme s využitím Schwedlerovy věty¹⁴ rovnice

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} = Q_3 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial x} = -q(x) \quad (3.2)$$

$$M_1 = 0 \quad (3.3)$$

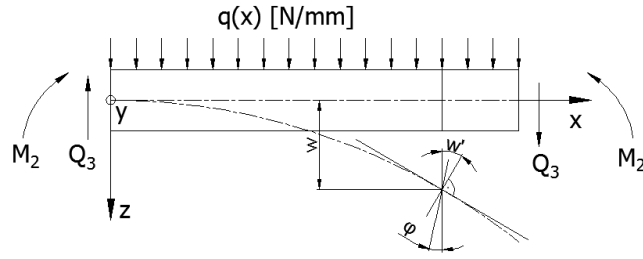
$$M_3 = 0 \quad (3.4)$$

$$Q_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$N_1 = 0 \quad (3.6)$$

Dále budeme předpokládat platnost Timošenkovy hypotézy s jejími předpoklady dle podkapitoly 2.6. Pole posunutí nosníku potom bude

¹⁴Např. viz [15]



Obrázek 3.1: Zatížení a deformace nosníku

$$\begin{aligned}
 u_1(x_a) &= -z\varphi(x) \\
 u_2(x_a) &= 0 \\
 u_3(x_a) &= w(x)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Podle definice tenzoru malých deformací dle 2.2 dostáváme s využitím 3.7

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= -z\varphi_{,1} \\
 \varepsilon_{12} &= 0 \\
 \varepsilon_{22} &= 0 \\
 \varepsilon_{23} &= 0 \\
 \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}(w_{,1} - \varphi) \\
 \varepsilon_{33} &= w_{,3} = 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nenulové složky tenzoru deformací jsou pouze ε_{11} a ε_{31} a z Hookeova zákona dle 2.1 můžeme pro složky tenzoru napětí psát

$$\sigma_{ab} = E_{ab11}(-z\varphi_{,1}) + E_{ab31}(w_{,1} - \varphi) \tag{3.9}$$

Sestavme nyní rovnice pro určení momentů a sil z rovnic 3.1 - 3.6. Pro moment M_1 můžeme psát

$$M_1 = \int_A \sigma_{13}y dA - \int_A \sigma_{12}z dA, \tag{3.10}$$

a s využitím rovnice 3.9 potom

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \int_A \overset{x}{E}_{3111}(-z)y dA \varphi_{,1} + \int_A \overset{x}{E}_{3131}y dA (w_{,1} - \varphi) + \\
 &\quad - \int_A \overset{x}{E}_{1211}(-z)z dA \varphi_{,1} - \int_A \overset{x}{E}_{1231}z dA (w_{,1} - \varphi) = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Tento vztah musí platit pro veškeré stavy deformace, tedy pro veškerá $\varphi_{,1}$ a $(w_{,1} - \varphi)$, a proto musí platit

$$\int_A \overset{x}{E}_{3111}(-z)y dA + \int_A \overset{x}{E}_{1211}z^2 dA = 0, \quad (3.12)$$

a

$$\int_A \overset{x}{E}_{3131}y dA - \int_A \overset{x}{E}_{1231}z dA = 0 \quad (3.13)$$

Obdobným způsobem budeme pokračovat u dalších momentů a sil. Pro moment M_2

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_A \sigma_{11}z dA = - \int_A \overset{x}{E}_{1111}z^2 dA \varphi_{,1} + \int_A \overset{x}{E}_{1131}z dA (w_{,1} - \varphi) = \\ &= - \overset{x}{D}_{1111} \varphi_{,1} + \overset{x}{B}_{1131} (w_{,1} - \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

a pro moment M_3

$$M_3 = \int_A \sigma_{11}y dA = \int_A \overset{x}{E}_{1111}(-zy) dA \varphi_{,1} + \int_A \overset{x}{E}_{1131}y dA (w_{,1} - \varphi) = 0. \quad (3.15)$$

Pro sílu Q_2 můžeme psát

$$Q_2 = \int_A \sigma_{12}y dA = \int_A \overset{x}{E}_{1211}(-z) dA \varphi_{,1} + \int_A \overset{x}{E}_{1231} dA (w_{,1} - \varphi) = 0, \quad (3.16)$$

a pro sílu Q_3

$$\begin{aligned} Q_3 &= \int_A \tau_{31}z dA = \int_A \overset{x}{E}_{3111}(-z) dA \varphi_{,1} + \kappa \int_A \overset{x}{E}_{3131} dA (w_{,1} - \varphi) = \\ &= - \overset{x}{B}_{3111} \varphi_{,1} + \kappa \overset{x}{A}_{3131} (w_{,1} - \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde κ je Timošenkův smykový součinitel, který byl uveden v podkapitole 2.6. Pro nosník trubkového profilu platí vztah 2.46, a pro běžné definiční obory Poissonových čísel, vnějších poloměrů a tloušťek nosníku¹⁵ dostáváme pro součinitel κ obor hodnot řádově $\langle 0, 5; 1 \rangle$, přičemž pro tenkostěnné nosníky se součinitel κ blíží hodnotě 1, kterou budeme dále pro jednoduchost uvažovat.

Konečně pro sílu N_1 můžeme psát

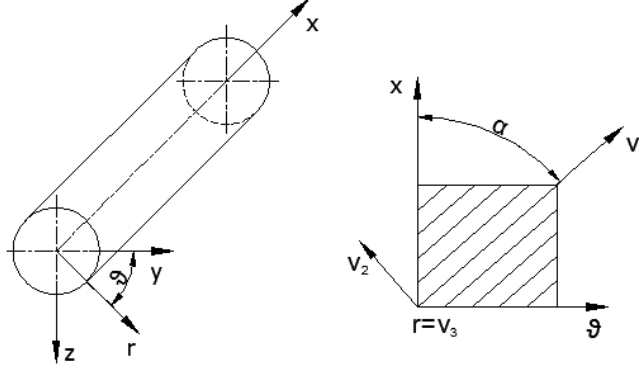
$$N_1 = \int_A \sigma_{11} dA = \int_A \overset{x}{E}_{1111}(-z) dA \varphi_{,1} + \int_A \overset{x}{E}_{1131} dA (w_{,1} - \varphi) = 0 \quad (3.18)$$

V předchozích vztazích jsme zavedli ekvivalentní moduly tahové tuhosti $A_{ekv.}$, vazební tuhosti $B_{ekv.}$ a ohybové tuhosti $D_{ekv.}$ ve tvaru

¹⁵Poissonova čísla uvažujeme z oboru $\langle 0, 25; 0, 35 \rangle$, vnější poloměry nosníku z oboru $\langle 5; 150 \rangle$ mm a tloušťky stěny z oboru $\langle 1; 20 \rangle$ mm

$$\begin{aligned}
A_{ekv.} &= \int_A {}^x E_{abcd} dA \\
B_{ekv.} &= \int_A {}^x E_{abcd} z dA \\
D_{ekv.} &= \int_A {}^x E_{abcd} z^2 dA
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Nosník z obr. 3.1 dále uvažujeme jako laminát složený z k vrstev ortotropních lamin, jejichž vlákna jsou vinuta pod úhlem α dle obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Pootočení souřadných systémů o úhel α

Mějme souřadné systémy ν , ϑ , x

- ν ... hlavní osy anizotropie (ν_1, ν_2, ν_3)
- ϑ ... souřadný systém tečna-normála (x, r, ϑ)
- x ... kartézský souřadný systém (x, y, z)

Pro ně platí transformační vztahy dle podkapitoly 2.2, tedy

$$T_1 = \cos(\vartheta_a, \nu^i) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$${}^\vartheta E = (T_1 \otimes T_1) {}^\nu E (T_1^T \otimes T_1^T) \tag{3.21}$$

$$T_2 = \frac{\partial x^a}{\partial \vartheta^b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$${}^x E = (T_2 \otimes T_2) {}^\vartheta E (T_2^T \otimes T_2^T) \tag{3.23}$$

Prakticky máme k dispozici materiálové vlastnosti v hlavních osách anizotropie, tedy matici tuhosti ${}^\nu E$, kterou poté transformujeme dle potřeby. Pro vyjádření

ekvivalentních modulů ABD z 3.19 je výhodné použít souřadný systém ϑ . Moduly mají potom tvar

$$\begin{aligned} A_{ekv.} &= \sum_k \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \pi \left(E_{2121}^{\vartheta} + E_{3131}^{\vartheta} \right) \\ B_{ekv.} &= \sum_k \frac{r_e^3 - r_i^3}{3} \pi E_{1121}^{\vartheta} \\ D_{ekv.} &= \sum_k \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

kde r_e a r_i jsou vnější resp. vnitřní poloměr k -té vrstvy laminátu. Uvažujeme-li symetrický laminát, je ekvivalentní modul vazební tuhosti $B_{ekv.}$ nulový a pro moment M_2 resp. sílu Q_3 potom můžeme použitím rovnic 3.14 a 3.17 psát

$$M_2 = -D_{ekv.} \varphi_{,1}, \quad (3.25)$$

$$Q_3 = \kappa A_{ekv.} (w_{,1} - \varphi). \quad (3.26)$$

Dosadíme-li rovnici 3.25 do rovnice 3.1 resp. rovnici 3.26 do rovnice 3.2, dostáváme

$$-D_{ekv.} \varphi_{,11} = \kappa A_{ekv.} (w_{,1} - \varphi), \quad (3.27)$$

$$\kappa A_{ekv.} (w_{,11} - \varphi_{,1}) = -q. \quad (3.28)$$

Dosazením rovnice 3.28 do zderivované rovnice 3.27 dostaneme konečně Lamého rovnice ve tvaru

$$D_{ekv.} \varphi_{,111} = q, \quad (3.29)$$

$$w_{,1} = \varphi - \frac{D_{ekv.}}{\kappa A_{ekv.}} \varphi_{,11}. \quad (3.30)$$

Ještě než se pustíme do integrace rovnic 3.29 a 3.30, bude potřeba formulovat pro danou úlohu okrajové podmínky. Protože se v následující kapitole budeme zabývat optimalizací smykadla obráběcího stroje, které budeme modelovat jako vetknutý nosník zatížený na volném konci osamělou silou, zvolíme stejný model i zde a dostaneme tak okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 \\ M_2(l) &= 0 \\ Q_3(l) &= F \end{aligned} \quad (3.31)$$

Integrací Lamého rovnic 3.29 a 3.30 dostaneme

$$\varphi(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (3.32)$$

$$w(x) = \frac{1}{3} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x + C_3 x - \frac{2D_{ekv.}}{\kappa A_{ekv.}} C_1 x + C_4 \quad (3.33)$$

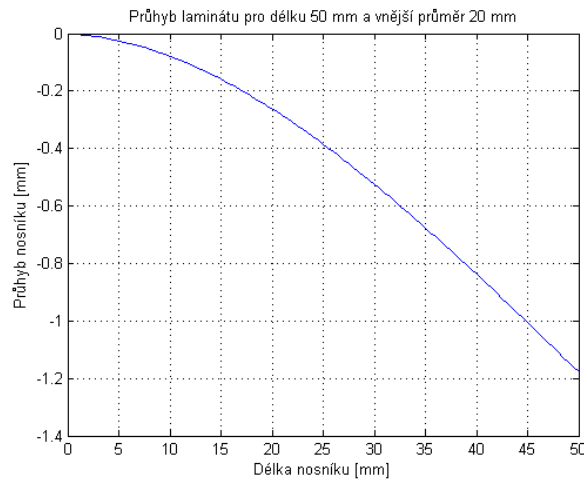
a s využitím okrajových podmínek 3.31 dostaneme konečně

$$\varphi(x) = \frac{F}{D_{ekv.}} \left(lx - \frac{1}{2} x^2 \right), \quad (3.34)$$

$$w(x) = F \left(\frac{1}{\kappa A_{ekv.}} x + \frac{l}{2D_{ekv.}} x^2 - \frac{1}{6D_{ekv.}} x^3 \right). \quad (3.35)$$

Průhyb nosníku dle rovnice 3.35 má tvar dle obr. 3.3. Z něj je patrné, že největší průhyb je na konci nosníku pod osamělou silou F a má hodnotu

$$w(l) = F \left(\frac{l}{\kappa A_{ekv.}} + \frac{l^3}{3D_{ekv.}} \right) \quad (3.36)$$



Obrázek 3.3: Tvar průhybu nosníku

Při návrhu profilů, ať už z kompozitních či jiných materiálů, pro nás bývají hlavními optimalizačními kritérii tuhost a hmotnost, přičemž tuhost maximalizujeme naproti minimalizaci hmotnosti. V této kapitole se vícekriteriální optimalizací nebudeme zabývat a dále budeme pouze maximalizovat tuhost profilu při hmotnosti odpovídající dané konfiguraci nosníku.

Vztah 3.36 pro nás tedy bude mít význam kritériální funkce, kterou budeme pro vektor návrhových parametrů x_N minimalizovat. Můžeme tedy psát

$$w(x_N) = w(\alpha, d, l, t, n, E_L, E_T) \rightarrow \min. \quad (3.37)$$

kde jsme návrhové parametry omezili na

α	<i>úhel vinutí vlákna ve vrstvách laminátu</i>
d	<i>vnější průměr laminátu</i>
l	<i>délka nosníku</i>
t	<i>tloušťka stěny laminátu</i>
n	<i>počet vrstev laminátu</i>
E_L	<i>modul pružnosti v tahu v ose vláken laminátu</i>
E_T	<i>modul pružnosti v tahu kolmo k ose vláken laminátu</i>

Další parametry, jako jsou tloušťky jednotlivých lamin, variace skladby laminátu, objemové podíly vláken jednotlivých lamin atd. nebudeme pro jednoduchost uvažovat ¹⁶ a budou tak mít pro nás význam analytických proměnných.

Protože je ovšem naším cílem v této kapitole najít optimální úhel vinutí vlákna, musíme optimalizační úlohu ve tvaru 3.37 ještě přeformulovat. Vektor návrhových parametrů x_N zúžíme pouze na úhel vinutí α , který budeme zkoumat jednak pro danou konfiguraci zbylých návrhových parametrů, a dále budeme vyšetřovat jeho závislost na zbylých parametrech. Optimalizační úlohu 3.37 tedy budeme řešit ve tvaru

$$w(\alpha) \rightarrow \min. \quad (3.38)$$

pro který budeme hledat optimální úhel vinutí vlákna α v závislosti na ostatních parametrech.

Konečně zbývá uvést poslední předpoklad, který se bude týkat skladby kompozitu. Skladbu budeme předpokládat jako symetrickou ve tvaru

$$\left[\left| \pm \alpha \right| \right]_s, \quad (3.39)$$

přičemž tloušťky vrstev budeme uvažovat stejné, a rovněž materiál bude ve všech vrstvách skladby stejný. Budeme-li tedy dále předpokládat počty vrstev po čtveřicích, dostaneme vyrovnaný laminát ve smyslu podkapitoly 2.4.

3.2 Optimální úhel vinutí vlákna

Ze vztahu 3.36 je zřejmé, že průhyb nosníku je funkcí ekvivalentních modulů $A_{ekv.}$ a $D_{ekv.}$, a moduly $A_{ekv.}$ a $D_{ekv.}$ jsou dále dle rovnic 3.24 závislé na prvcích matice tuhosti E v souřadném systému ϑ ¹⁷. Transformace ekvivalentních modulů tuhosti ze souřadného systému hlavních os anizotropie ν do souřadného systému ϑ je dle vztahů 3.20 a 3.21 závislá na úhlu vinutí vlákna α a můžeme tedy konečně psát, že i průhyb nosníku je funkcí úhlu vinutí, tedy $w = w(\alpha)$.

¹⁶Ve výpočtu budou figurovat jako fixované hodnoty

¹⁷Konkrétně na E_{1111} , E_{2121} a E_{3131}

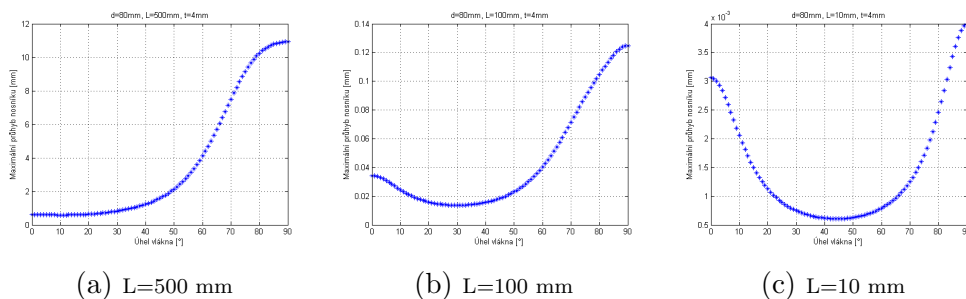
Optimální úhel vnutí vlákna $\alpha_{opt.}$ definujeme jako takový úhel, pro nějž je funkce 3.36 minimální. Dále budeme sledovat, jak se bude takový optimální úhel měnit s ostatními návrhovými parametry, tedy budeme sledovat průběh funkce

$$\alpha_{opt.} = \alpha_{opt.}(d, l, t, n, E_L, E_T) \quad (3.40)$$

3.2.1 Vliv délky a vnějšího průměru laminátu

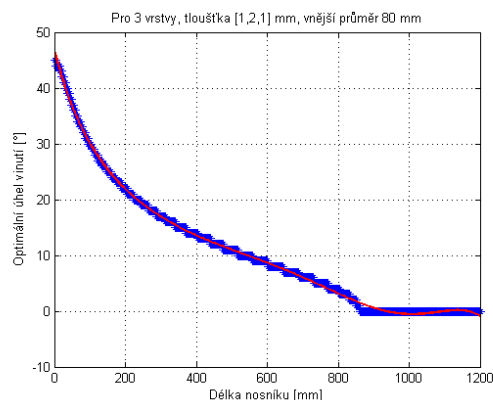
Uvažujme nejprve štíhlý nosník, který má velký poměr délky ke svému průměru. Z obr. 3.4a) vyplývá, že pro takto štíhlý nosník¹⁸ s rostoucím úhlem vnutí roste i průhyb nosníku.

Budeme-li zmenšovat délku nosníku, a tím i jeho štíhlost, dostaneme postupně závislosti dle obr. 3.4b) resp. obr. 3.4c), ze kterých je patrné, že s klesající štíhlostí postupně odpovídá minimální průhyb nosníku úhlům natočení o hodnotě 45°.



Obrázek 3.4: Průhyby nosníků v závislosti na úhlu vnutí pro různé délky nosníku

Pro optimální úhly vnutí dostáváme v závislosti na délce nosníku funkci na obr. 3.5. Z něj je patrné, že s rostoucí délkou, a tedy i štíhlostí nosníku, se optimální úhel vnutí blíží k hodnotě 0°, a naopak pro nosníky s malou štíhlostí k hodnotě 45°. To odpovídá i teoretickým předpokladům, neboť s rostoucí délkou nosníku klesá vliv smykových napětí a uplatňuje se převážně napětí ohybové.



Obrázek 3.5: Optimální úhel vnutí pro různé délky nosníku

¹⁸Délky 500 mm a průměru 80 mm

Závislost na obr. 3.5 můžeme vyjádřit lineární regresí, použijeme-li pro jednoduchoost polynomicou bázi, jako

$$\alpha(l) = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2 & l^3 & l^4 & l^5 & l^6 & l^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.145e^{-5} \\ -4.151e^{-3} \\ 1.661e^{-7} \\ -4.778e^{-10} \\ 8.981e^{-13} \\ -1.0202e^{-17} \\ 6.184e^{-19} \\ -1.514e^{-22} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Abychom mohli určit váhu jednotlivých koeficientů, bude výhodné polynomicou bázi nahradit normovanými Legendreovými polynomy¹⁹. Použijeme-li Legendrovy polynomy do 12. stupně, dostaneme pro normované délky nosníku a úhly vinutí vlákna závislost 3.42, která je na obr. 3.6.

$$\alpha_{norm}(l_{norm}) = \begin{bmatrix} P_0(l_{norm}) & P_1(l_{norm}) & P_2(l_{norm}) & \dots & P_{12}(l_{norm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7167 \\ -0.6622 \\ 0.2278 \\ -0.0723 \\ 0.0856 \\ -0.0281 \\ -0.0058 \\ -0.0146 \\ 0.0009 \\ 0.0136 \\ 0.0024 \\ 0.0005 \\ -0.0099 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

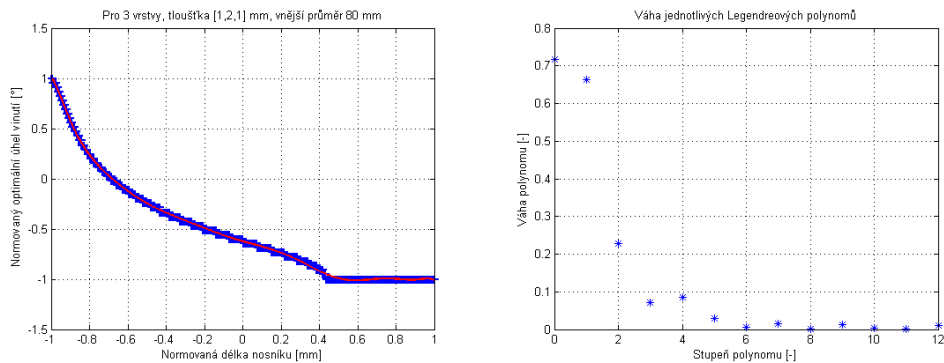
Z obr. 3.6 je zřejmé, že váha Legendrových polynomů s jejich rostoucím počtem klesá, a je tedy dostačující pracovat s polynomy do 6. stupně.

Nyní se pokusme poznatky o optimálním úhlu vinutí rozšířit o další návrhový parametr, totiž o vnější poloměr nosníku. Na obr. 3.7 je v závislosti na délce nosníku a jeho vnějším poloměru znázorněn průběh optimálního úhlu vinutí²⁰.

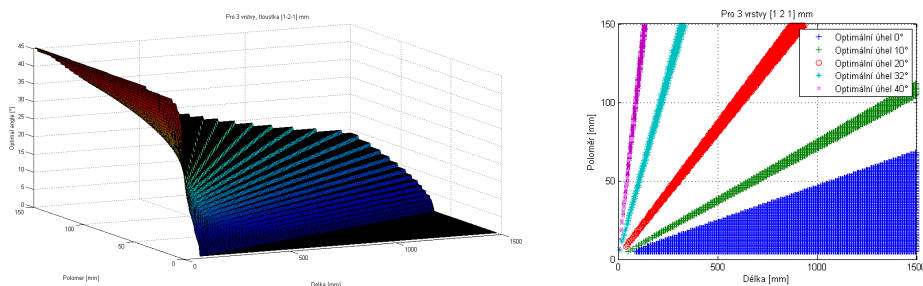
Budeme-li dále pracovat s diskretizací úhlu vinutí po 1°, můžeme v pravé

¹⁹Viz Příloha A a [17]

²⁰Funkce není hladká, což je způsobeno diskretizací úhlu vinutí při výpočtu (konkrétně zde byl úhel vinutí diskretizován po 1°), přičemž při zjemňování diskretizace se funkce $\alpha(r, l)$ blíží k hladké funkci. Více viz Příloha B

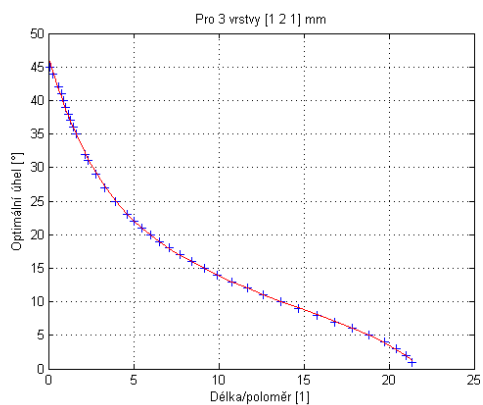


Obrázek 3.6: Normovaný optimální úhel vinutí na normované délce nosníku pro lineární regresi pomocí Legendreových polynomů



Obrázek 3.7: Optimální úhel vinutí pro různé délky a poloměry nosníku

části obr. 3.7 sledovat jednotlivé vrstevnice pro vybrané optimální úhly vinutí. Vidíme, že různým úhlům vinutí přísluší různé oblasti, které se dají vyjádřit jako množiny poměrů délky nosníku k jeho vnějšímu poloměru $\frac{l}{r}$, přičemž tyto poměry představují štíhlost nosníku. Budeme-li pro jednoduchost brát střední hodnotu každé oblasti, můžeme vyjádřit závislost optimálního úhlu vinutí na štíhlosti nosníku, jak je zobrazena na obr. 3.8. Zahrnutím poloměru jsme tak zobecnili předchozí funkci z obr. 3.5.



Obrázek 3.8: Optimální úhel vinutí v závislosti na štíhlosti nosníku

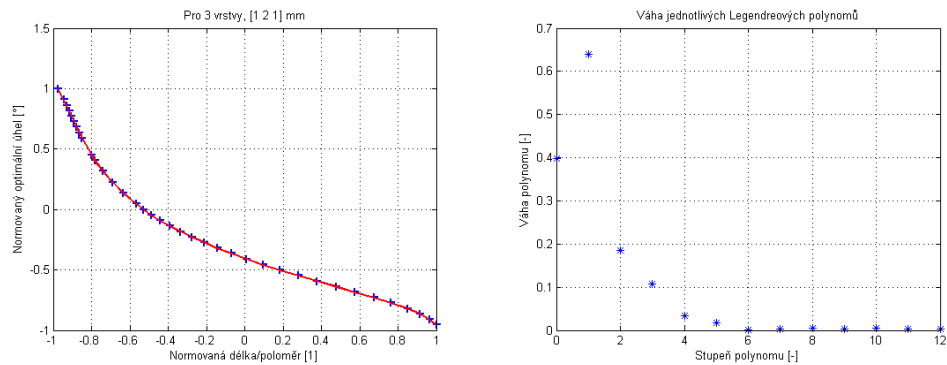
Závislost na obr. 3.8 můžeme obdobně jako v předchozím vyjádřit pomocí lineární regrese, přičemž pro polynomickou bázi dostáváme

$$\alpha\left(\frac{l}{r}\right) = \left[1 \quad \frac{l}{r} \quad \left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \left(\frac{l}{r}\right)^3 \quad \left(\frac{l}{r}\right)^4 \quad \left(\frac{l}{r}\right)^5 \quad \left(\frac{l}{r}\right)^6 \right] \begin{bmatrix} 46.4495 \\ -86.6488e^{-1} \\ 11.2396e^{-1} \\ -91.5158e^{-3} \\ 42.3141e^{-4} \\ -99.6908e^{-6} \\ 85.6753e^{-8} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Pokud k regresi opět využijeme normovaných Legendreových polynomů, dostaneme závislost

$$\alpha_{norm}\left(\left(\frac{l}{r}\right)_{norm}\right) = \left[P_0\left(\left(\frac{l}{r}\right)_{norm}\right) \quad P_1\left(\left(\frac{l}{r}\right)_{norm}\right) \quad \dots \quad P_{12}\left(\left(\frac{l}{r}\right)_{norm}\right) \right] \begin{bmatrix} -0.3990 \\ -0.6399 \\ 0.1856 \\ -0.1071 \\ 0.0340 \\ -0.0173 \\ -0.0009 \\ 0.0021 \\ -0.0057 \\ 0.0038 \\ -0.0042 \\ 0.0028 \\ -0.0024 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

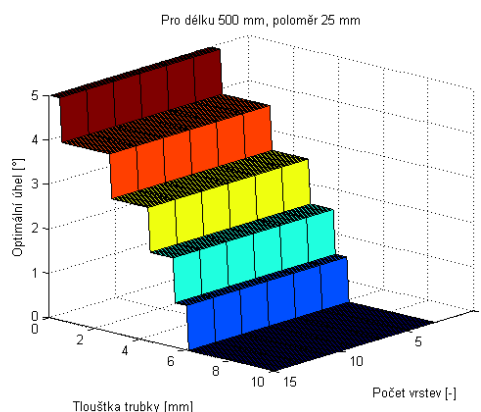
která je společně s váhou jednotlivých polynomů na obr. 3.9.



Obrázek 3.9: Normovaný optimální úhel vinutí na normované štíhlosti nosníku pro regresi pomocí Legendreových polynomů

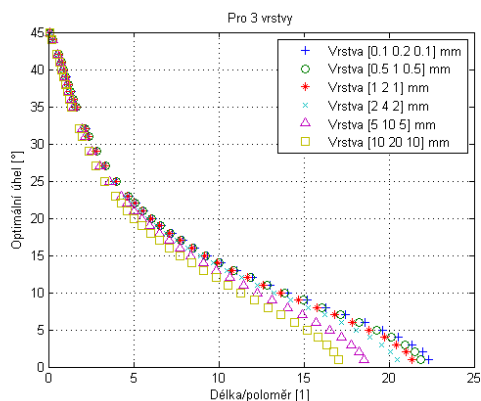
3.2.2 Vliv tloušťky a počtu vrstev laminátu

Dosud jsme uvažovali nosník složený ze tří vrstev, které jsou kladeny symetricky, jsou ze stejného materiálu a jejich tloušťka je [1 2 1] mm. Budeme-li nyní pro danou délku a průměr nosníku měnit tloušťku stěny a počet vrstev laminátu, dostaneme závislost z obr. 3.10, ze kterého je patrné, že optimální úhel vinutí se pro danou tloušťku stěny s počtem vrstev nemění²¹.



Obrázek 3.10: *Optimální úhel vinutí v závislosti na počtu vrstev a tloušťce stěny*

Pokud tedy budeme dále uvažovat pouze vliv tloušťky stěny, dostaneme závislost $\alpha(\frac{l}{r}, t)$ dle obr. 3.11. Můžeme tedy říci, že budeme-li uvažovat tenkostěnné nosníky, můžeme vliv tloušťky stěny zanedbat, a pokud bychom uvažovali nosníky silnostěnné, je potřeba, zejména při větších štíhlostech nosníku, vzít změnu optimálního úhlu dle obr. 3.11 v úvahu.



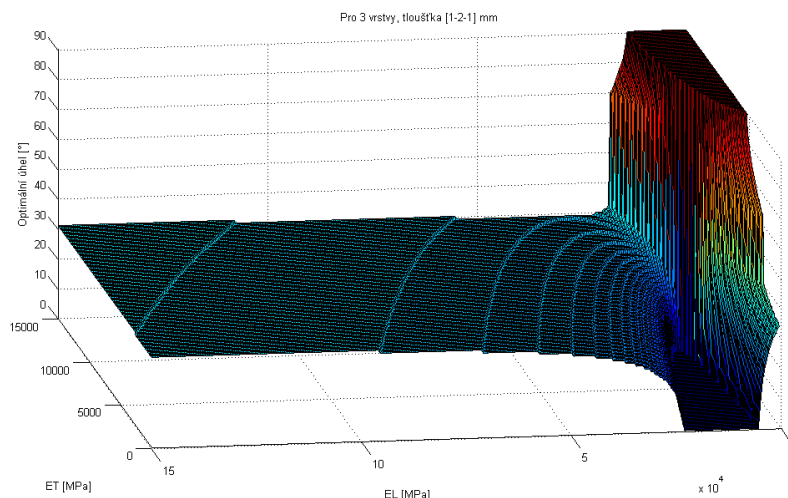
Obrázek 3.11: *Optimální úhel vinutí pro různé tloušťky vrstev*

3.2.3 Vliv materiálu

Konečně se budeme zabývat tím, jak se mění optimální úhel vinutí, pokud budeme měnit materiálové vlastnosti vrstev. Budeme-li uvažovat, že všechny vrstvy

²¹Skoková závislost z obr. 3.10 je zde opět způsobena diskretizací oboru hodnot pro úhel vinutí s krokem 1°

laminátu jsou ze stejného materiálu, dostáváme pro zvolenou geometrii a skladbu závislost optimálního úhlu vinutí na modulech pružnosti laminy v podélném resp. příčném směru E_L resp. E_T dle obr. 3.12.



Obrázek 3.12: *Optimální úhel vinutí v závislosti na modulech pružnosti E_L a E_T*

V rámci laminátů na bázi uhlíkových vláken v epoxidové matrici se pohybujeme s moduly pružnosti v podélném směru v řádu několika desítek až stovek GPa, a proto můžeme propad resp. růst, který nastává v místech poklesu modulu pružnosti v podélném směru, zanedbat. Budeme-li tedy uvažovat běžné obory hodnot materiálových vlastností, můžeme i závislost optimálního úhlu vinutí na modulech pružnosti v podélném resp. příčném směru zanedbat.

3.3 Shrnutí

Pokud bychom tedy shrnuli poznatky této kapitoly, našli jsme závislost mezi optimálním úhlem vinutí vlákna a štíhlostí nosníku, kterou jsme definovali jako poměr délky nosníku k jeho vnějšímu poloměru.

Dále jsme ukázali, že optimální úhel vinutí se při dané tloušťce stěny nosníku nemění s počtem vrstev, a pokud budeme uvažovat pouze tenkostěnné nosníky, můžeme i vliv tloušťky stěny zanedbat. U silnostěnných nosníků je nutné se změnou optimálního úhlu vinutí počítat, a to zejména při větších štíhlostech nosníku, jak je ukázáno na obr. 3.11.

Konečně jsme uvedli vliv modulů pružnosti v podélném a příčném směru na optimální úhel vinutí, ze kterého vyplynulo, že pro běžné definiční obory modulů pružnosti můžeme rovněž jejich vliv zanedbat.

Tyto závěry, které jsou postaveny na analytickém modelu, mohou dobře posloužit např. při počátečních návrzích kompozitních nosníků, a my je dále využijeme v následující kapitole při optimalizaci hybridního smykadla obráběcího stroje.

4. Optimalizace hybridního smykadla

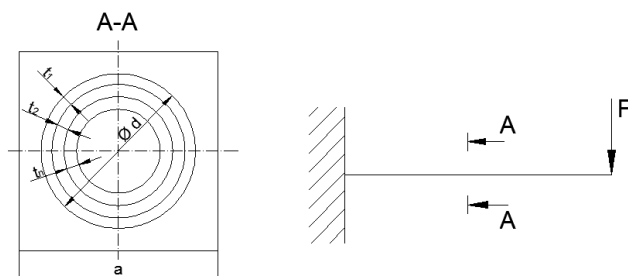
V této kapitole se budeme zabývat optimalizací hybridního smykadla obráběcího stroje, které je tvořeno litinovým pláštěm a je vyztuženo kompozitním nosníkem trubkového profilu. Na obr. 4.1 je zobrazeno celokompozitní smykadlo, které bylo v původní koncepci vyrobeno pro výzkumné centrum VCSVTT. Vzhledem ke svým nedostatkům se však začala vyvíjet nová koncepce s litinovým rámem. Více viz [18].



Obrázek 4.1: Kompozitní smykadlo - převzato z [18]

Geometrii průřezu smykadla zjednodušíme podle obr. 4.2, a budeme tedy uvažovat litinový plášť čtvercového průřezu s kompozitní trubkovou výztuží.

Na konci smykadla je upevněn nástroj, na který při obrábění působí odporová síla obrobku. Smykadlo tedy budeme modelovat jako vetknutý nosník, který je na konci zatížen osamělou silou (viz obr. 4.2), a budou pro něj tedy platit vztahy, které jsme odvodili v kapitole 3.



Obrázek 4.2: Zjednodušený model smykadla

Při optimalizaci smykadla pro nás bude optimalizačním kritériem tuhost smykadla, kterou budeme maximalizovat, a současně hmotnost smykadla, kterou bu-

deme naopak minimalizovat. Musíme tedy obdobně jako v kapitole 3 nejprve vyjádřit kriteriální funkce s příslušnými návrhovými parametry.

4.1 Kriteriální funkce

Nejprve se budeme zabývat tuhostí smykadla. Průhyb smykadla dostaneme ze vztahu 3.36, tedy

$$w(l) = F \left(\frac{l}{\kappa A_{ekv.}} + \frac{l^3}{3D_{ekv.}} \right), \quad (4.1)$$

kde musíme dále určit ekvivalentní modul tahové tuhosti A_{ekv} resp. ekvivalentní modul ohybové tuhosti D_{ekv} . Pro výpočet ekvivalentních tuhostí smykadla využijeme ABD modulů dle vztahů 3.19, které byly odvozeny v kapitole 3.

Litinový plášť smykadla budeme uvažovat jako izotropní materiál s modulem pružnosti $E^{lit.}$ a Poissonovým číslem $\nu^{lit.}$. Vztahy 3.19 potom můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} A_{lit.} &= \int_A E_{1313}^{lit.} dA = E_{1313}^{lit.} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dydz - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} r dr d\varphi \right\} = E_{1313}^{lit.} \left[a^2 - \frac{\pi d^2}{4} \right] = \\ &= d^2 C_1 + C_3, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde jsme pro jednoduchost zápisu zavedli koeficienty C_1 a C_3 ²², pro které platí

$$C_1 = -E_{1313}^{lit.} \frac{\pi}{4}, C_3 = E_{1313}^{lit.} a^2 \quad (4.3)$$

$$B_{lit.} = \int_A E_{1113}^{lit.} z dA = E_{1113}^{lit.} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z dydz - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} r^2 \sin\varphi dr d\varphi \right\} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} D_{lit.} &= \int_A E_{1111}^{lit.} z^2 dA = E_{1111}^{lit.} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 dydz - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 \sin^2\varphi dr d\varphi \right\} = \\ &= E_{1111}^{lit.} \left[\frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right] = d^4 C_5 + C_9, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde koeficienty C_5 a C_9 ²³ jsou

$$C_5 = -E_{1111}^{lit.} \frac{\pi}{64}, C_9 = E_{1111}^{lit.} \frac{a^4}{12} \quad (4.6)$$

Matice tuhosti izotropního materiálu je dána vztahem 2.9 a jednotlivé elas-

²²Index 2 jsme přeskočili pro přehlednost indexů ve vztahu 4.18 níže

²³Index 4, 6, 7 a 8 jsme přeskočili pro přehlednost indexů ve vztahu 4.19 níže

tické konstanty tedy jsou

$$\begin{aligned} E_{1111}^{lit.} &= \frac{E^{lit.}(1 - \nu^{lit.})}{(1 + \nu^{lit.})(1 - 2\nu^{lit.})} \\ E_{1313}^{lit.} &= \frac{E^{lit.}(1 - 2\nu^{lit.})}{2(1 + \nu^{lit.})(1 - 2\nu^{lit.})} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pro kompozitní nosník trubkového profilu mají ABD moduly tvar dle vztahů 3.24, tedy

$$A_{komp.} = \sum_k \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \pi \left(E_{1212}^{\vartheta} + E_{1313}^{\vartheta} \right), \quad (4.8)$$

$$B_{komp.} = \sum_k \frac{r_e^3 - r_i^3}{3} \pi E_{1112}^{\vartheta}, \quad (4.9)$$

$$D_{komp.} = \sum_k \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta}, \quad (4.10)$$

kde r_e a r_i jsou vnější resp. vnitřní poloměr k -té vrstvy laminátu a elastické konstanty, závislé na úhlu vinutí vlákna α podle vztahů 3.20 a 3.21, můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} E_{1111}^{\vartheta} &= E_{1111}^{\nu} \cos(\alpha)^4 + \left(2E_{1122}^{\nu} + E_{1212}^{\nu} + 2E_{1221}^{\nu} + E_{2121}^{\nu} \right) \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)^2 + \\ &\quad + E_{2222}^{\nu} \sin(\alpha)^4 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$E_{1212}^{\vartheta} = E_{1313}^{\nu} \cos(\alpha)^2 + E_{2323}^{\nu} \sin(\alpha)^2 \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} E_{1313}^{\vartheta} &= E_{1212}^{\nu} \sin(\alpha)^4 + \left(E_{1111}^{\nu} - 2E_{1122}^{\nu} - 2E_{1221}^{\nu} + E_{2222}^{\nu} \right) \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 + \\ &\quad + E_{2121}^{\nu} \cos(\alpha)^4 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Jelikož budeme v následující podkapitole hledat optimální průměr kompozitní výtzuže, bude vhodné ABD moduly vyjádřit právě v závislosti na vnějším průměru kompozitu. Pokud využijeme značení na zjednodušeném schématu průřezu smykadla z obr. 4.2, můžeme pro ABD moduly psát

$$A_{komp.} = \sum_k \frac{r_{ek}^2 - r_{ik}^2}{2} \pi (E_{2121}^{\vartheta k} + E_{3131}^{\vartheta k}) = \frac{d^2 - (\frac{d}{2} - t_1)^2}{2} \pi (E_{2121}^{\vartheta 1} + E_{3131}^{\vartheta 1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\frac{d}{2} - t_1)^2 - [\frac{d}{2} - (t_1 + t_2)]^2}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta 2} + E_{3131}^{\vartheta 2}) + \\
& + \frac{[\frac{d}{2} - (t_1 + t_2)]^2 - [\frac{d}{2} - (t_1 + t_2 + t_3)]^2}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta 3} + E_{3131}^{\vartheta 3}) + \dots = \\
& = \frac{dt_1 - t_1^2}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta 1} + E_{3131}^{\vartheta 1}) + \frac{dt_2 - 2t_1t_2 - t_2^2}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta 2} + E_{3131}^{\vartheta 2}) + \\
& + \frac{dt_3 - 2(t_1 + t_2)t_3 - t_3^2}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta 3} + E_{3131}^{\vartheta 3}) + \dots = \tag{4.14} \\
& = d \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta k} + E_{3131}^{\vartheta k}) - \sum_{k=1}^n \frac{t_k^2 + 2t_k \sum_{j=0}^{k-1} t_j}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta k} + E_{3131}^{\vartheta k}) = \\
& = dC_2 + C_4,
\end{aligned}$$

kde pro první krok použijeme pomocnou hodnotu $t_0 = 0$ a koeficienty C_2 a C_4 jsou

$$C_2 = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta k} + E_{3131}^{\vartheta k}), C_4 = - \sum_{k=1}^n \frac{t_k^2 + 2t_k \sum_{j=0}^{k-1} t_j}{2} \pi(E_{2121}^{\vartheta k} + E_{3131}^{\vartheta k}) \tag{4.15}$$

Dále budeme uvažovat symetrickou skladbu laminátu, a bude tedy platit $B_{komp.} = 0$.

Pro modul D konečně dostaneme

$$\begin{aligned}
D_{komp.} & = \sum_k \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta k} = \frac{(\frac{d}{2})^4 - (\frac{d}{2} - t_1)^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta 1} + \\
& + \frac{(\frac{d}{2} - t_1)^4 - [\frac{d}{2} - (t_1 + t_2)]^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta 2} + \\
& + \frac{[\frac{d}{2} - (t_1 + t_2)]^4 - [\frac{d}{2} - (t_1 + t_2 + t_3)]^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta 3} + \dots = \\
& = \frac{\frac{1}{2}d^3t_1 - \frac{3}{2}d^2t_1^2 + 2dt_1^3 - t_1^4}{4} \pi E_{1111}^{\vartheta 1} + \\
& + \left[\frac{\frac{1}{2}d^3t_2 - \frac{3}{2}d^2(2t_1t_2 + t_2^2) + 2d(3t_1^2t_2 + 3t_1t_2^2 + t_2^3)}{4} + \right. \\
& \left. - \frac{(4t_1^3t_2 + 6t_1^2t_2^2 + 4t_1t_2^3 + t_2^4)}{4} \right] \pi E_{1111}^{\vartheta 2} + \left\{ \frac{\frac{1}{2}d^3t_3 - \frac{3}{2}d^2[2(t_1 + t_2)t_3 + t_3^2]}{4} + \right. \\
& \left. + \frac{2d[3(t_1 + t_2)^2t_3 + 3(t_1 + t_2)t_3^2 + t_3^3]}{4} + \right. \\
& \left. - \frac{4(t_1 + t_2)^3t_3 + 6(t_1 + t_2)^2t_3^2 + 4(t_1 + t_2)t_3^3 + t_3^4}{4} \right\} \pi E_{1111}^{\vartheta 3} + \dots = \\
& = d^3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{8} t_k \pi E_{1111}^{\vartheta k} - d^2 \sum_{k=1}^n \frac{3}{8} \left(t_k^2 + 2t_k \sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) \pi E_{1111}^{\vartheta k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[t_k^3 + 3t_k^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) + 3t_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^2 \right] \pi E_{1111}^{\vartheta k} + \\
& - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left[t_k^4 + 4t_k^3 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) + 6t_k^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^2 + 4t_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^3 \right] \pi E_{1111}^{\vartheta k} = \quad (4.16) \\
& = d^3 C_6 + d^2 C_7 + d C_8 + C_{10},
\end{aligned}$$

kde jsme pro první krok použili opět pomocnou hodnotu $t_0 = 0$ a koeficienty C_6 , C_7 , C_8 a C_{10} jsou

$$\begin{aligned}
C_6 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{8} t_k \pi E_{1111}^{\vartheta k}, \quad C_7 = - \sum_{k=1}^n \frac{3}{8} \left(t_k^2 + 2t_k \sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) \pi E_{1111}^{\vartheta k} \\
C_8 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[t_k^3 + 3t_k^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) + 3t_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^2 \right] \pi E_{1111}^{\vartheta k} \\
C_{10} &= - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left[t_k^4 + 4t_k^3 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right) + 6t_k^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^2 + 4t_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} t_j \right)^3 \right] \pi E_{1111}^{\vartheta k} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Budeme-li předpokládat aditivnost ABD modulů pro litinu a kompozit, dostaneme ekvivalentní modul tahové tuhosti $A_{ekv.}$ resp. ekvivalentní modul ohybové tuhosti $D_{ekv.}$ ve tvaru

$$A_{ekv.} = A_{lit.} + A_{komp.} = d^2 C_1 + d C_2 + C_3 + C_4, \quad (4.18)$$

$$D_{ekv.} = D_{lit.} + D_{komp.} = d^4 C_5 + d^3 C_6 + d^2 C_7 + d C_8 + C_9 + C_{10}, \quad (4.19)$$

Funkci průhybu z rovnice 4.1 v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže tedy můžeme psát jako

$$\begin{aligned}
w &= F \left(\frac{l}{\kappa A_{ekv.}} + \frac{l^3}{3D_{ekv.}} \right) = F \left(\frac{3lD_{ekv.} + \kappa l^3 A_{ekv.}}{3\kappa A_{ekv.} D_{ekv.}} \right) = \\
&= F \frac{3l(d^4 C_5 + d^3 C_6 + d^2 C_7 + d C_8 + C_9 + C_{10}) + \kappa l^3 (d^2 C_1 + d C_2 + C_3 + C_4)}{3\kappa (d^2 C_1 + d C_2 + C_3 + C_4) (d^4 C_5 + d^3 C_6 + d^2 C_7 + d C_8 + C_9 + C_{10})} = \\
&= F \frac{d^4 K_1 + d^3 K_2 + d^2 K_3 + d K_4 + K_5}{d^6 K_6 + d^5 K_7 + d^4 K_8 + d^3 K_9 + d^2 K_{10} + d K_{11} + K_{12}}, \quad (4.20)
\end{aligned}$$

kde koeficienty $K_1 - K_{12}$ jsou

$$K_1 = 3lC_5, K_2 = 3lC_6, K_3 = 3lC_7 + \kappa l^3 C_1, K_4 = 3lC_8 + \kappa l^3 C_2$$

$$\begin{aligned}
K_5 &= 3l(C_9 + C_{10}) + \kappa l^3(C_3 + C_4), K_6 = 3\kappa C_1 C_5 \\
K_7 &= 3\kappa(C_2 C_5 + C_1 C_6), K_8 = 3\kappa[C_1 C_7 + C_2 C_6 + C_5(C_3 + C_4)] \\
K_9 &= 3\kappa[C_1 C_8 + C_2 C_7 + C_6(C_3 + C_4)] \\
K_{10} &= 3\kappa[C_1(C_9 + C_{10}) + C_2 C_8 + C_7(C_3 + C_4)] \\
K_{11} &= 3\kappa[C_2(C_9 + C_{10}) + C_8(C_3 + C_4)], K_{12} = 3\kappa[(C_3 + C_4)(C_9 + C_{10})]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Vztah 4.20 je tedy první kriteriální funkcí, kterou budeme pro dosažení maximální tuhosti smykadla minimalizovat.

Při výpočtu hmotnosti smykadla budeme opět uvažovat značení dle obr. 4.2. Hmotnosti jednotlivých vrstev kompozitní výztuže pak budou

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2t_1)^2] l [v_{f1}\rho_{f1} + (1 - v_{f1})\rho_m] \\
m_2 &= \frac{\pi}{4} [(d - 2t_1)^2 - (d - 2(t_1 + t_2))^2] l [v_{f2}\rho_{f2} + (1 - v_{f2})\rho_m] \\
m_3 &= \frac{\pi}{4} [(d - 2(t_1 + t_2))^2 - (d - 2(t_1 + t_2 + t_3))^2] l [v_{f3}\rho_{f3} + (1 - v_{f3})\rho_m] \\
&\vdots \\
m_i &= \frac{\pi}{4} \left[\left(d - 2 \sum_{j=0}^{i-1} t_j \right)^2 - \left(d - 2 \sum_{j=1}^i t_j \right)^2 \right] l [v_{fi}\rho_{fi} + (1 - v_{fi})\rho_m],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

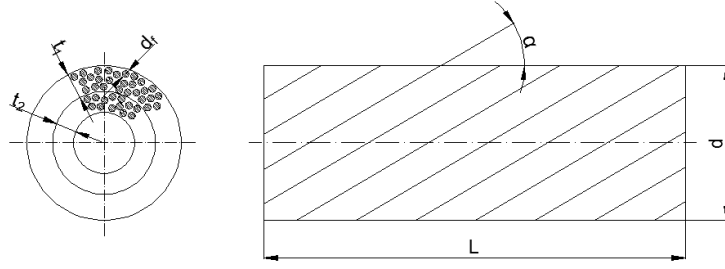
kde pomocná hodnota pro první krok $j = 0$ je $t_0 = 0$, a pro $j = 1, 2, \dots$ dostáváme tloušťky jednotlivých vrstev kompozitu, v_{fi} je objemový podíl vláken v i -té vrstvě, ρ_{fi} resp. ρ_m je hustota vláken resp. matrice v i -té vrstvě, N je celkový počet vrstev kompozitu a l je délka smykadla.

Z technologických důvodů může být výhodné vyjádřit hmotnost kompozitu v závislosti na počtu vláken resp. pramenců. Označíme-li dle obr. 4.3 počet pramenců n_f , průměr pramence d_f a úhel vinutí pramence α , bude pro tloušťku i -té laminy platit

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2t_1)^2] l &= (2 - v_{f1})n_{f1} \frac{\pi d_{f1}^2}{4} \frac{l}{\cos(\alpha_1)} \\
&\vdots \\
t_1 &= \frac{1}{2} \left(d - \sqrt{d^2 - \frac{(2 - v_{f1})d_{f1}^2 n_{f1}}{\cos(\alpha_1)}} \right) \\
\frac{\pi}{4} [(d - 2t_1)^2 - (d - 2(t_1 + t_2))^2] l &= (2 - v_{f2})n_{f2} \frac{\pi d_{f2}^2}{4} \frac{l}{\cos(\alpha_2)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{1}{2} \left(d - 2t_1 - \sqrt{(d - 2t_1)^2 - \frac{(2 - v_{f2})d_{f2}^2 n_{f2}}{\cos(\alpha_2)}} \right) \\
&\vdots \\
t_i &= \frac{1}{2} \left\{ d - 2 \sum_{j=0}^{i-1} t_j - \sqrt{\left(d - 2 \sum_{j=0}^{i-1} t_j \right)^2 - \frac{(2 - v_{fi})d_{fi}^2 n_{fi}}{\cos(\alpha_i)}} \right\},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

kde jsme opět použili pro $j = 0$ pomocnou hodnotu $t_0 = 0$. Hodnoty pro jednotlivé tloušťky vrstev t_i z 4.23 pak můžeme dosadit do 4.22 a získáme hmotnost jednotlivých vrstev kompozitní výztuže v závislosti na počtu pramenců n_{fi} .



Obrázek 4.3: Schéma skladby kompozitní výztuže

Celková hmotnost kompozitu potom bude dána součtem hmotností všech vrstev ze vztahu 4.22, tedy

$$M_{komp.} = \sum_{i=1}^N m_i \tag{4.24}$$

Hmotnost litinového pláště určíme jako

$$M_{lit.} = \left(a^2 - \frac{\pi d^2}{4} \right) l \rho_{lit.}, \tag{4.25}$$

kde $\rho_{lit.}$ je hustota litiny a l je délka smykadla. Celková hmotnost smykadla je konečně dána součtem 4.24 a 4.25, tedy

$$\begin{aligned}
M &= \left(a^2 - \frac{\pi d^2}{4} \right) l \rho_{lit.} + \\
&+ \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{4} \left[\left(d - 2 \sum_{j=0}^{i-1} t_j \right)^2 - \left(d - 2 \sum_{j=1}^i t_j \right)^2 \right] l [v_{fi} \rho_{fi} + (1 - v_{fi}) \rho_m]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Vztah 4.26 pro nás představuje druhou kriteriální funkci, kterou jakožto hmotnost smykadla budeme minimalizovat.

V dalších podkapitolách se tedy budeme zabývat dvoukriteriální optimalizací tuhosti a hmotnosti smykadla podle funkcí 4.20 a 4.26 a budeme obdobně jako v kapitole 3 zkoumat vliv jednotlivých návrhových parametrů.

4.2 Optimální průměr kompozitní výztuže

Nejprve budeme hledat optimální vnější průměr d kompozitní výztuže smykadla. Geometrie smykadla odpovídá schématu na obr. 4.2, kde rozměry a zatížení stávajícího smykadla²⁴ jsou

- délka smykadla $l=1265$ mm
- délka hrany vnějšího litinového pláště $a=160$ mm
- vnější průměr kompozitní výztuže $d=150$ mm
- tloušťky vrstev a úhly vinutí vlákna kompozitní výztuže viz tab. 4.9, Příloha C
- zatěžující síla na konci nosníku $F=1000$ N

Kompozitní výztuž smykadla je složena z vláken a matrice, jejichž materiálové vlastnosti jsou společně s vlastnostmi litinového pláště uvedeny v tab. 4.1, vlastnosti v jednotlivých vrstvách kompozitu jsou pak definovány v tab. 4.9²⁵.

Vlákno	$E_{Lf}[MPa]$	$E_{Tf}[MPa]$	$G_{LTf}[MPa]$	$\nu_{LTf}[-]$	$\rho_f[kg.m^{-3}]$
34-700-24K	234000	15000	50000	0,3	1800
CN80	780000	5000	20000	0,35	2170
T700	235000	15000	50000	0,3	1800
Matrice	$E_{Lm}[MPa]$	$E_{Tm}[MPa]$	$G_{LTm}[MPa]$	$\nu_{LTm}[-]$	$\rho_f[kg.m^{-3}]$
LG120/EM100	3000	3000	1600	0,4	1130
Litina	$E_{Li}[MPa]$	$E_{Ti}[MPa]$	$G_{LTi}[MPa]$	$\nu_{LTi}[-]$	$\rho_l[kg.m^{-3}]$
GJS-350-22	169000	169000	-	0,275	7050

Tabulka 4.1: Materiálové vlastnosti vláken a matrice kompozitní výztuže a litinového pláště smykadla

Pro takto definované smykadlo byl pomocí MKP modelu z [10] spočítán průhyb smykadla $v = 0,065$ mm a hmotnost smykadla $M = 102,6$ kg. Vyřešíme-li průhyb a hmotnost stávajícího smykadla analyticky pomocí vztahů odvozených v podkapitole 4.1, dostaneme výsledky uvedené společně s MKP výsledky v tab. 4.2²⁶. Analytické výsledky průhybu a hmotnosti stávajícího smykadla z tab.

²⁴Stávající smykadlo je definováno geometrií a skladbou, která byla převzata z [9]

²⁵Při výpočtu elastických konstant v jednotlivých vrstvách kompozitní skladby byly použity vztahy 2.19, 2.22, 2.23 a 2.24 dle [3] uvedené v kapitole 2

²⁶Analytický výpočet hmotnosti dle tab. 4.2 se oproti MKP liší o 11,4 %, což je způsobeno zjednodušením geometrie litinového rámu smykadla dle obr. 4.2. Rozdíl ve výpočtu průhybu je 6,2 %, což je jednak způsobeno zjednodušením geometrie, jednak odlišností výpočetních metod.

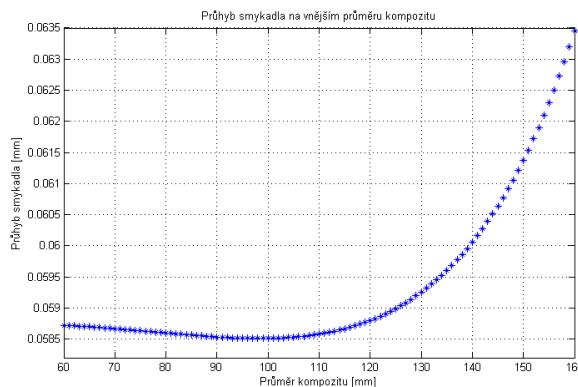
4.2 pro nás budou dále referenčními hodnotami, vůči nimž budeme porovnávat výsledky optimalizovaného smykadla.

	Analytický výpočet	MKP výpočet
Hmotnost [kg]	90,9	102,6
Průhyb [mm]	0,061	0,065

Tabulka 4.2: Průhyb a hmotnost stávajícího smykadla při analytickém a MKP výpočtu

Dle vztahu 4.20 dostáváme průhyb smykadla, který je v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže znázorněn na obr. 4.4. Ukazuje se, že s rostoucím průměrem klesá průhyb smykadla až do hodnoty $d = 99 \text{ mm}$ a smykadlo se tedy v tomto intervalu vyztužuje. S dalším nárůstem vnějšího průměru kompozitu roste i průhyb smykadla a tedy klesá jeho tuhost.

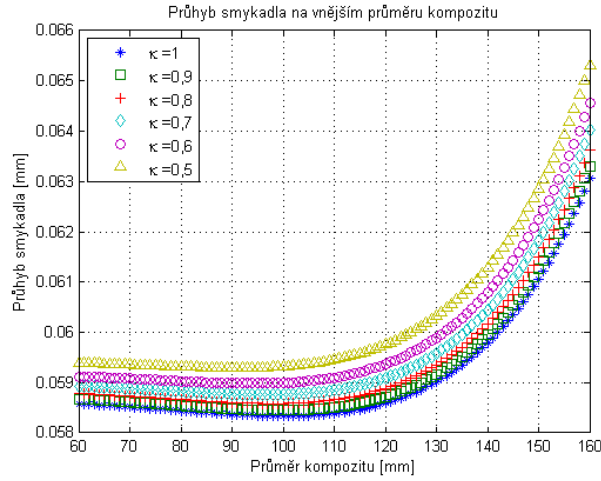
Pro stávající smykadlo s průměrem $d = 150 \text{ mm}$ tedy dostáváme průhyb $v = 0,061 \text{ mm}$, přičemž jako optimální průměr se vzhledem k tuhosti smykadla jeví vnější průměr $d = 99 \text{ mm}$ ²⁷. Ještě než se ale budeme zabývat druhým optimalizačním kritériem, tedy hmotností, ukážeme jednotlivé vlivy, které působí na vyztužování resp. snižování tuhosti smykadla.



Obrázek 4.4: Průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže

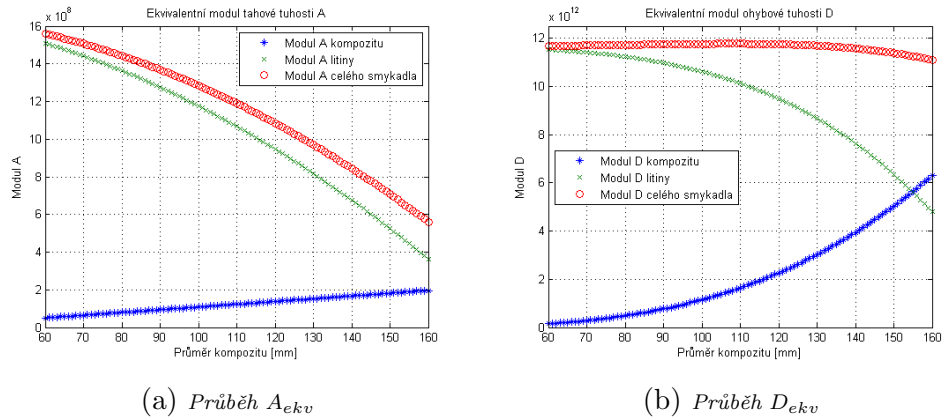
Nejprve se zaměříme na vliv Timošenkova smykového součinitele κ ve vztahu 4.20. Průhyb smykadla pro různé součinitele κ je na obr. 4.5, ze kterého plyne, že s klesajícími hodnotami součinitele κ roste průhyb smykadla a tedy klesá jeho tuhost. To je způsobeno rostoucím vlivem členu $\frac{l}{\kappa A}$ ve vztahu 4.20, jímž se budeme ještě dále zabývat. Budeme-li pro jednoduchost uvažovat vztah pro výpočet Timošenkova smykového součinitele κ dle 2.46 a současně budeme uvažovat Poissonova čísla smykadla dle tab. 4.9, dostaneme pro κ obor hodnot $\langle 0, 6; 1 \rangle$, přičemž my budeme dále uvažovat $\kappa = 0,85$, pro nějž je spočten rovněž průhyb na obr. 4.4. v předchozích odstavcích.

²⁷Při výpočtu byl pro průměr d použit diskretizační krok 1 mm, kterým je tedy limitována přesnost výsledku. Stejná diskretizace průměru d je použita i v následujících výpočtech.



Obrázek 4.5: Průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé součinitele κ

Dalšími parametry, jejichž vliv na tuhost smykadla budeme zkoumat, jsou ekvivalentní modul tahové tuhosti A_{ekv} a ekvivalentní modul ohybové tuhosti D_{ekv} . Ekvivalentní tuhosti jsou dle vztahů 4.18 a 4.19 dány součtem tuhostí litinového pláště a kompozitní výztuže a jejich průběh je znázorněn na obr. 4.6.

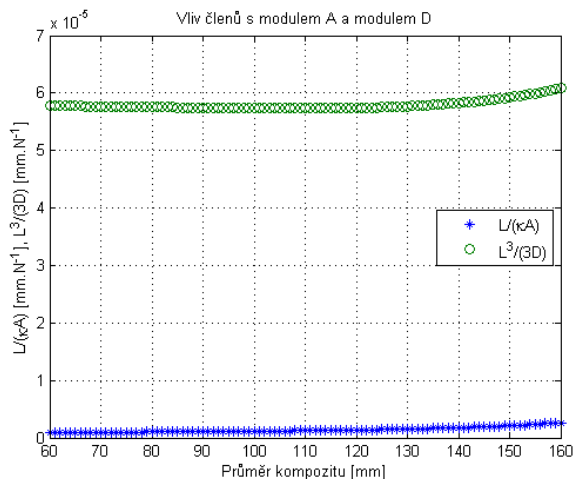


Obrázek 4.6: Ekvivalentní moduly tahové a ohybové tuhosti A_{ekv} a D_{ekv} v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže

Jak je patrné z obr. 4.6 b), průběh ekvivalentního modulu ohybové tuhosti D_{ekv} má konkávní tvar, jehož maximum nastává při průměru $d = 108 \text{ mm}$, naopak tomu maximum ekvivalentního modulu tahové tuhosti A_{ekv} nastává dle obr. 4.6 a) při průměru $d = 60 \text{ mm}$. Pokud vyjádříme vliv modulů A_{ekv} a D_{ekv} na výslednou hodnotu průhybu smykadla, jak je znázorněn na obr. 4.7, můžeme sledovat dominanci modulu D_{ekv} ²⁸, a proto i hodnota optimálního průměru $d = 99 \text{ mm}$ inklinuje k hodnotě pro maximum modulu ohybové tuhosti D_{ekv} .

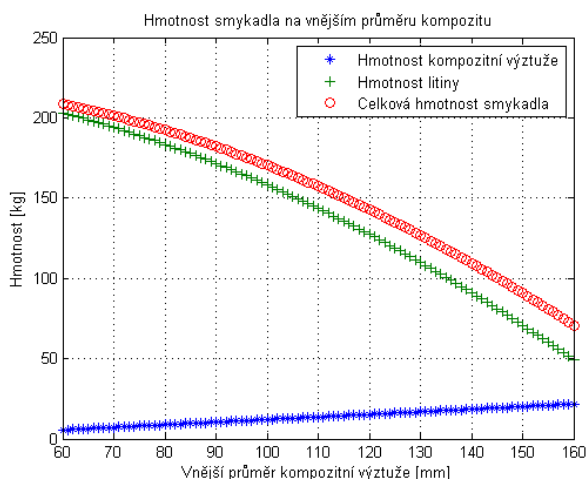
Nyní již přikročíme k výpočtu druhého optimalizačního kritéria, tedy hmotnosti smykadla, která je v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže znázorněna na obr. 4.8. S rostoucím průměrem kompozitu tedy klesá hmotnost

²⁸Průměrná hodnota podílu členů $\frac{l^3}{3D}$ a $\frac{l}{\kappa A}$ je 44,5



Obrázek 4.7: *Vliv modulů A_{ekv} a D_{ekv} na průhyb smykadla*

smykadla, což je způsobeno nižší měrnou hmotností kompozitu vzhledem k litinovému rámu, kdy s klesajícím podílem litiny na objemu smykadla klesá i podíl její hustoty.

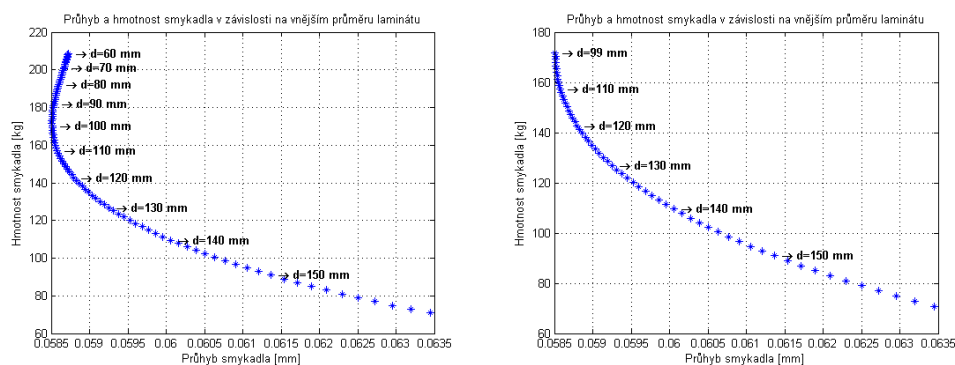


Obrázek 4.8: *Hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže*

Budeme-li tedy konečně hledat optimální vnější průměr kompozitu tak, abychom jednak minimalizovali hmotnost smykadla a současně maximalizovali jeho tuhost, dostaneme závislost na obr. 4.9. Z ní plyne, že s rostoucím průměrem kompozitu klesá hmotnost, ale zároveň i tuhost smykadla. Z průběhu křivky je dále zřejmé vyztužování smykadla pro vnější průměry kompozitní výztuže d v oboru $\langle 60; 99 \rangle mm$, ve kterém naopak hmotnost smykadla klesá. Protože je naší snahou nalezení smykadla o maximální tuhosti a minimální hmotnosti, můžeme tento obor vnějších průměrů kompozitní výztuže d vynechat a pracovat dále pouze s hodnotami $\langle 99; 160 \rangle mm$, jak je zobrazeno v pravé části obr. 4.9.

Abychom mohli tuto dvoukriteriální úlohu vyřešit, bylo by potřeba určit váhu obou kritérií, což je obecně poměrně obtížný úkol. Abychom tak mohli učinit,

museli bychom specifikovat další požadavky kladené na smykadlo, především tedy jeho dynamické vlastnosti²⁹, technologické vlastnosti³⁰, a dále by bylo vhodné se zabývat energetickou a ekonomickou náročností výrobního procesu v závislosti na hmotnosti smykadla³¹.



Obrázek 4.9: Hmotnost a průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže

Pokud bychom uvažovali vlastní frekvence smykadla dle vztahu 2.43, dostaneme jejich závislost na vnějším průměru kompozitu na obr. 4.10. Vlastní frekvence smykadla tedy s vnějším průměrem rostou, což je způsobeno poklesem hmotnosti smykadla. Je však třeba zmínit, že vztah 2.43 předpokládá homogenní rozložení hmotnosti a momentu setrvačnosti po délce nosníku, což v případě smykadla není splněno. Reálné smykadlo má totiž na svém konci upevněn nástroj, jehož hmotnost je při kmitání smykadla nezanedbatelná a zásadně tak ovlivní i vlastní frekvence. Dále je potřeba podotknout, že vlastní frekvence dle vztahu 2.43 jsou odvozeny pro Bernoulliovu hypotézu, která zanedbává vliv smykových napětí, a tedy při použití hypotézy Timošenkovy by průběh vlastních frekvencí neodpovídal obr. 4.10. Vlastní frekvence z obr. 4.10 tedy dále použijeme jako pouhou referenci, vůči níž budeme zkoumat relativní změnu vlastních frekvencí při optimalizaci skladby, kterou se budeme zabývat níže.

Nemáme-li tedy k dispozici další specifikace, kterými bychom vyjádřili váhu tuhostního resp. hmotnostního kritéria, budeme uvažovat jejich stejnou váhu. Z hlediska kritéria maximální tuhosti³² se jako optimální jeví průměr $d = 99 \text{ mm}$, z hlediska kritéria minimální hmotnosti³³ naopak stávající průměr $d = 150 \text{ mm}$, jak je souhrnně ukázáno v tab. 4.3. Jelikož je ale při kritériu $M_{min.}$ relativní pokles tuhosti malý (4,7 %) oproti velkému relativnímu poklesu hmotnosti (88,8 %), budeme uvažovat pouze kritérium $M_{min.}$, podle kterého je tedy optimální

²⁹Vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu, kdy je v korelaci s provozními frekvencemi obráběcího stroje třeba zkoumat výskyt rezonancí

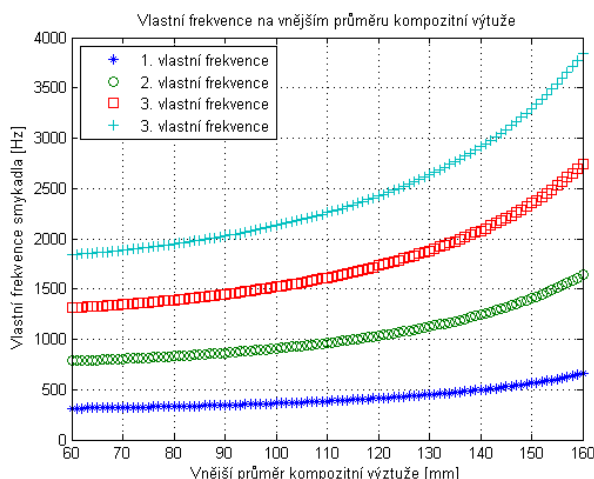
³⁰Požadovanou výrobní přesnost, která je deformacemi smykadla ovlivněna

³¹S rostoucí hmotností rostou nároky na příkon stroje a současně se hmotnost projevuje na strojních časech výroby, což v důsledku zvyšuje ekonomickou náročnost

³²Dále ho budeme označovat jako $v_{min.}$

³³Dále ho budeme označovat jako $M_{min.}$

vnější průměr kompozitní výztuže $d = 150 \text{ mm}^{34}$, a ten odpovídá právě stávající geometrii smykadla.



Obrázek 4.10: *Vlastní frekvence v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže*

	Kritérium $M_{min.}$	Kritérium $v_{min.}$
Hmotnost [kg]	90,8785	171,6045
Rozdíl proti stávající [%]	0	+88,8
Průhyb [mm]	0,06137	0,05851
Rozdíl proti stávajícímu [%]	0	-4,7

Tabulka 4.3: *Výsledné hmotnosti a průhyby smykadla pro kritéria maximální tuhosti a hmotnosti a jejich porovnání s hodnotami pro stávající geometrii smykadla*

4.3 Optimalizace nové skladby

Dále se budeme zabývat tím, jak se změní tuhost a hmotnost nosníku, budeme-li měnit vlastnosti skladby kompozitní výztuže z tab. 4.9. Postupně se zaměříme na vliv úhlu vinutí vlákna, objemového podílu vláken, tloušťky vrstev a druhu vlákna v jednotlivých vrstvách.

4.3.1 Vliv úhlu vinutí vlákna

Nejprve budeme uvažovat skladbu kompozitu podle tab. 4.9. Z ní je zřejmé, že úhly v jednotlivých vrstvách jsou voleny v hodnotách 0° resp. v hodnotách blízkých 45° .³⁵ Jak jsme ukázali v kapitole 3, v závislosti na štíhlosti nosníku se mění optimální úhel vinutí tak, že pro štíhlé nosníky, u kterých je dominantní

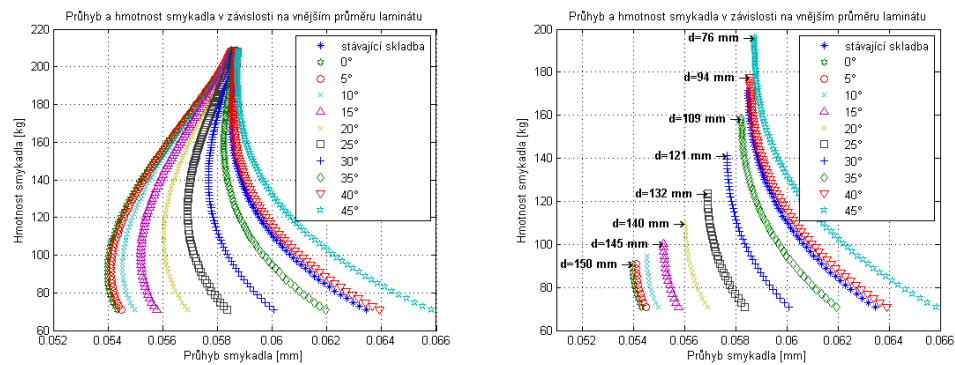
³⁴Hmotnost klesá i s průměry většími než 150 mm, avšak je potřeba zachovat alespoň minimální tloušťku litinového pláště

³⁵To jsou ve skladbě z tab. 4.9 všechny úhly, které nejsou právě 0°

ohybové napětí, se optimální úhel vinutí blíží k 0° , naopak pro nosníky s malou štíhlostí, u nichž roste vliv smykových napětí, se optimální úhel vinutí blíží k 45° . Z tohoto důvodu se ve skladbě kombinují vlákna dobře přenášející jednak ohybová, jednak i smyková napětí.

Z mnoha variant, kterými můžeme navrhnout novou skladbu, zvolíme dva přístupy. V prvním budeme předpokládat skladbu z tab. 4.9, kde ve vrstvách s úhlem vinutí blízkým 45° budeme postupně variovat úhly z intervalu $\langle 0^\circ, 45^\circ \rangle$, přičemž pro zachování symetrie zachováme znaménka úhlů vinutí a variovat budeme pouze absolutní hodnoty úhlů. Druhým přístupem bude návrh symetrické skladby ve tvaru $[\pm\alpha]_s$, kde budeme hledat optimální úhel vinutí vlákna α .

Budeme-li tedy nejdříve variovat absolutní hodnotu úhlu vinutí z tab. 4.9 pro úhly blízké 45° , dostaneme pro průhyb a hmotnost smykadla závislost na obr. 4.11³⁶. Z něj plyne, že optimální úhel vinutí vlákna je ve všech vrstvách 0° , což dále zdůvodníme.



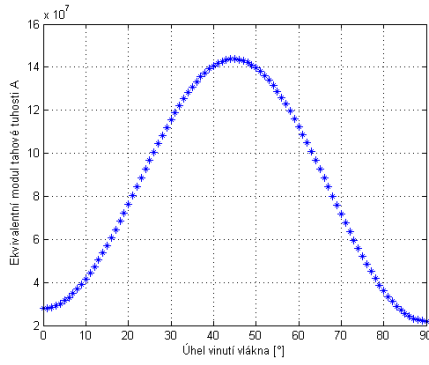
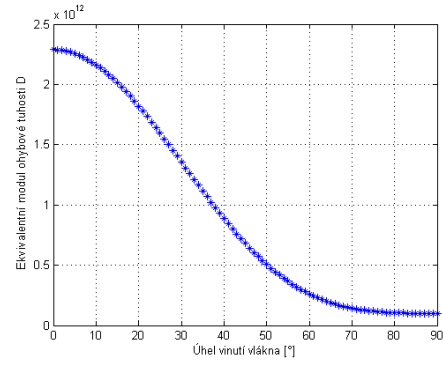
Obrázek 4.11: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách skladby

V podkapitole 4.2 jsme na obr. 4.7 ukázali, jaký vliv mají ekvivalentní moduly tahové resp. ohybové tuhosti A_{ekv} resp. D_{ekv} na průhyb smykadla dle vztahu 4.20. Moduly A_{ekv} a D_{ekv} jsou pro kompozitní výztuž určeny vztahy 4.11 - 4.13, které jsou v závislosti na úhlu vinutí α zobrazeny na obr. 4.12. Z něj je zřejmé, že maximálních hodnot nabývá modul A_{ekv} pro úhel vinutí $\alpha = 45^\circ$ a modul D_{ekv} pro úhel vinutí $\alpha = 0^\circ$. Porovnáme-li vliv A_{ekv} a D_{ekv} na průhyb smykadla, jak jsme učinili na obr. 4.7, je vzhledem k dominanci modulu ohybové tuhosti D_{ekv} zřejmá tendence optimálního úhlu vinutí α k hodnotě 0° .

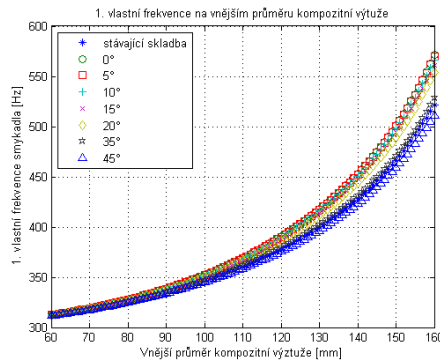
Vlastní frekvence se potom s úhly vinutí vlákna budou měnit dle obr. 4.13, přičemž růst vlastních frekvencí pro úhly blízké se k 0° je dán rostoucími hodnotami ekvivalentního modulu ohybové tuhosti D_{ekv} .

Pro optimální úhel vinutí vlákna 0° tedy dostáváme nové hodnoty hmotnosti, průhybu a vlastních frekvencí smykadla, které jsou souhrnně uvedeny v tab. 4.4.

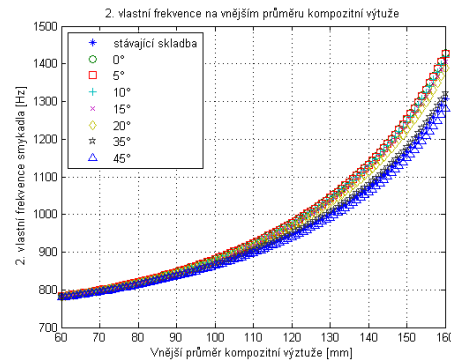
³⁶V pravé části jsou obdobně jako na obr. 4.9 vynechány průměry výztuže, při nichž se smykadlo vyztužuje, z důvodů uvedených na str. 50

(a) $A_{ekv.}$ (b) $D_{ekv.}$

Obrázek 4.12: Moduly tahové resp. ohybové tuhosti $A_{ekv.}$ resp. $D_{ekv.}$ v závislosti na úhlu vinutí vlákna α



(a) 1. vlastní frekvence



(b) 2. vlastní frekvence

Obrázek 4.13: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách skladby

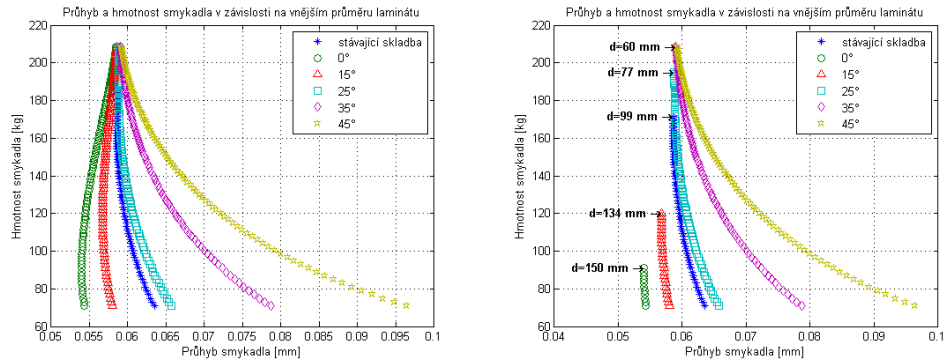
	Skladba s úhly vinutí 0°	Stávající skladba	Rozdíl [%]
Hmotnost [kg]	90,8785	90,8785	0
Průhyb [mm]	0,05397	0,06137	-12,06
1. vl. frekvence [Hz]	500,99	466,45	+7,41
2. vl. frekvence [Hz]	1254,24	1167,74	+7,41

Tabulka 4.4: Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladbu s úhly vinutí 0° a pro stávající skladbu

Dále budeme uvažovat symetrickou skladbu ve tvaru $[\pm\alpha]_s$, pro kterou budeme hledat optimální úhel vinutí vlákna α . Na obr. 4.14 je znázorněn průhyb a hmotnost smykadla pro různé úhly vinutí, z něhož vyplývá, že optimální úhel vinutí vlákna je i pro symetrickou skladbu 0° . Stejně jako v předchozí skladbě, i zde se dominantně uplatňuje vliv ekvivalentního modulu ohybové tuhosti $D_{ekv.}$, a navíc zde můžeme také uplatnit výsledky z kapitoly 3.

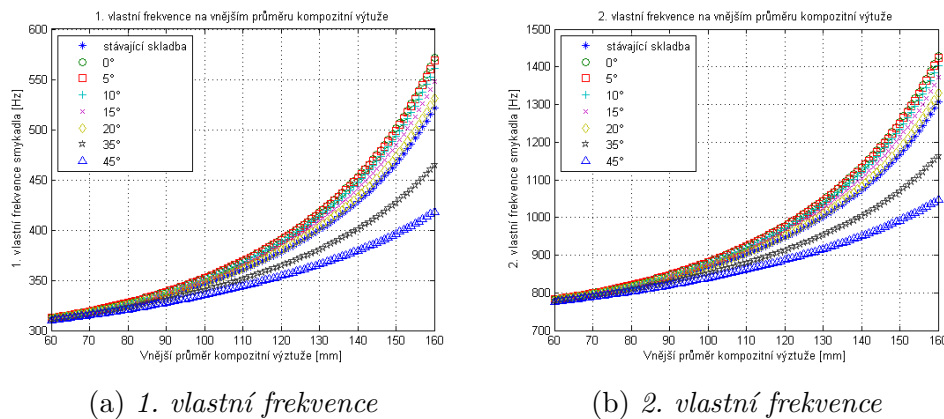
Celková tloušťka stávající skladby je dle tab. 4.9 $t = 24,9 \text{ mm}$, vnější průměr kompozitní výztuže smykadla $d = 150 \text{ mm}$ a délka smykadla $L = 1265 \text{ mm}$, ze kterých dostaneme konečně štíhlostní poměr výztuže $\frac{L}{r} = 18,87$. Pro danou

geometrii dostáváme dle obr. 3.11 optimální úhel vinutí vlákna $\alpha_{opt.} = (4 - 5)^\circ$, a pokud dále přičteme vliv litinového rámu, dostáváme optimální úhel vinutí právě 0° .



Obrázek 4.14: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí v symetrické skladbě

Budeme-li konečně i pro symetrickou skladbu sledovat vliv úhlu vinutí na změnu vlastních frekvencí smykadla, dostaneme závislost na obr. 4.15, kdy s úhly vlákna blíže k 0° hodnoty vlastních frekvencí opět rostou vlivem ekvivalentního modulu ohybové tuhosti $D_{ekv.}$.



(a) 1. vlastní frekvence

(b) 2. vlastní frekvence

Obrázek 4.15: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách symetrické skladby

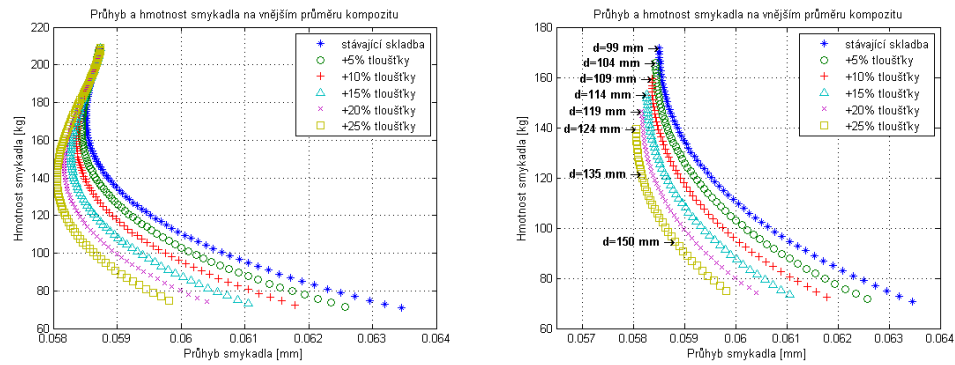
Protože je optimální úhel vinutí vlákna i pro symetrickou skladbu 0° , dostáváme i zde stejné změny tuhostí, hmotností a vlastních frekvencí, jako jsme dostali pro variaci stávající skladby v tab. 4.4. Změnou úhlu vinutí ve skladbě tedy můžeme o 12,06 % zvýšit tuhost smykadla při zachování jeho stejné hmotnosti, a dále zvýšit hodnoty vlastních frekvencí o 7,41 %.

4.3.2 Vliv tloušťky vrstev kompozitu

V této podkapitole budeme řešit, jak se změní průhyb a hmotnost smykadla, budeme-li měnit tloušťku kompozitní výztuže. Pro jednoduchost budeme

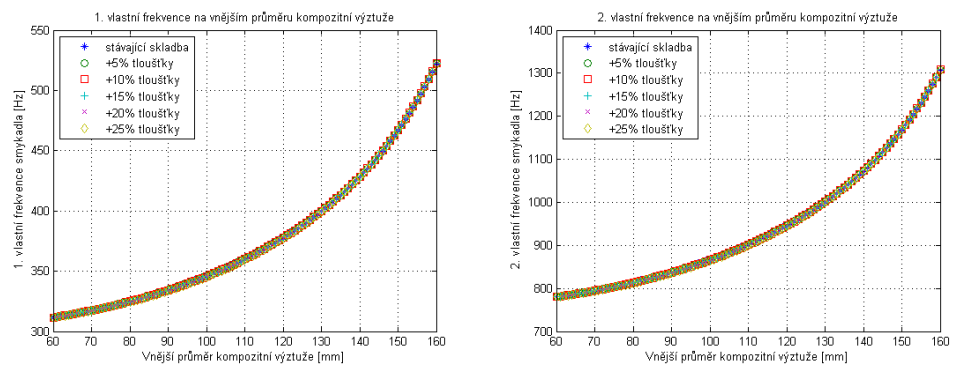
uvažovat skladbu z tab. 4.9, přičemž tloušťky jednotlivých vrstev budeme měnit tak, aby byly relativní přírůstky všech vrstev stejné.³⁷

Pro průhyby a hmotnosti smykadla dostaneme závislost na obr. 4.16. S rostoucí tloušťkou se tedy smykadlo vyztužuje, což odpovídá rostoucím hodnotám ekvivalentních modulů tahové resp. ohybové tuhosti A_{ekv} . resp. D_{ekv} ., a stejně tak roste s tloušťkou i hmotnost smykadla, což je dáno rostoucím objemem kompozitní výztuže.



Obrázek 4.16: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé tloušťky vrstev stávající skladby

Vlastní frekvence se s tloušťkou vrstev mění dle obr. 4.17, kdy s rostoucí tloušťkou rostou vlivem zvětšující se tuhosti i vlastní frekvence.



(a) 1. vlastní frekvence

(b) 2. vlastní frekvence

Obrázek 4.17: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé tloušťky vrstev stávající skladby

Konkrétní hodnoty hmotností, průhybů a vlastních frekvencí jsou pro různé tloušťky vrstev společně s hmotnostmi a průhyby stávajícího smykadla uvedeny v tab. 4.5, z níž vyplývá, že vliv tloušťky vrstev je prakticky zanedbatelný.

4.3.3 Vliv objemového podílu vláken

Zabývejme se dále tím, jak se změní tuhost a hmotnost smykadla, budeme-li měnit objemový podíl vláken ve vrstvách kompozitu. Budeme opět uvažovat

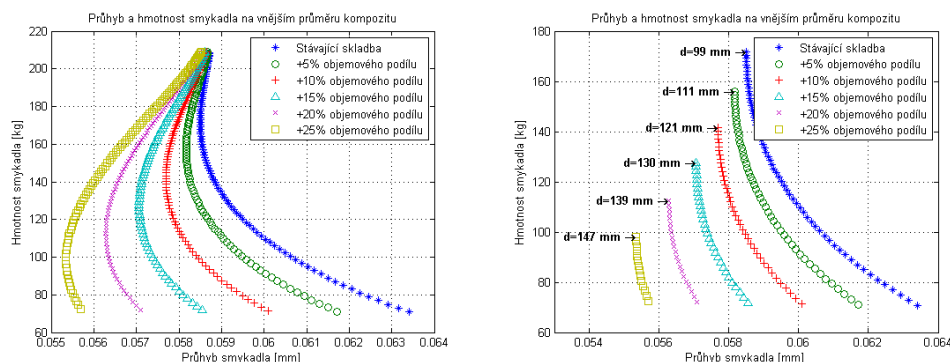
³⁷Budeme uvažovat přírůstky každé vrstvy postupně o 5%, 10%, 15%, 20% a 25%

	Skladba s +10% tl.	Skladba s +20% tl.	Stávající skladba	Rozdíl skl. s +10% tl. [%]	Rozdíl skl. s +20% tl. [%]
Hmotnost [kg]	92,4539	93,9491	90,8785	+1,73	+3,38
Průhyb [mm]	0,0602	0,0592	0,0614	-1,95	-3,58
1. vl. frekvence [Hz]	466,95	466,94	466,45	0,1	0,1
2. vl. frekvence [Hz]	1168,99	1168,98	1167,74	0,11	0,11

Tabulka 4.5: Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladby s větší tloušťkou a pro stávající skladbu

skladbu z tab. 4.9, v níž budeme zvyšovat objemové podíly v jednotlivých vrstvách opět o stejné relativní přírůstky³⁸. Změna objemového podílu vláken se projeví na změně elastických konstant skladby, které jsou definovány vztahy 2.19, 2.22, 2.23 a 2.24.

Pro průhyb a hmotnost smykadla tak dostaneme závislost na obr. 4.18, ze které vyplývá rostoucí tuhost a hmotnost s rostoucím objemovým podílem vláken. Nárůst tuhosti je způsoben zvýšením hodnot elastických konstant, na kterých dle vztahů 4.8 a 4.10 závisí ekvivalentní modul tahové resp. ohybové tuhosti A_{ekv} . resp. D_{ekv} , nárůst hmotnosti potom odpovídá zvýšenému podílu měrné hmotnosti vláken oproti měrné hmotnosti matrice, která je dle tab. 4.1 nižší.

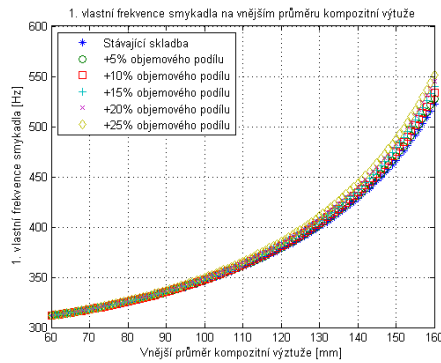


Obrázek 4.18: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé objemové podíly vláken ve vrstvách stávající skladby

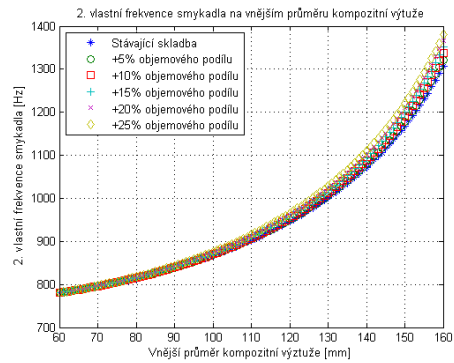
Vliv objemového podílu na vlastní frekvence smykadla je na obr. 4.19, kde opět s rostoucím objemovým podílem vláken a tedy rostoucími hodnotami modulů A_{ekv} . resp. D_{ekv} . rostou i vlastní frekvence smykadla.

Pokud tedy konečně vyčíslíme vliv objemového podílu vláken, dostaneme výsledné hodnoty z tab. 4.6.

³⁸Budeme uvažovat přírůstky objemového podílu vláken každé vrstvy postupně o 5 %, 10 %, 15 %, 20 % a 25 %. Vrstva s podílem 51 % tak bude nabývat nejvýše 63,75 %, což je dle [11] v mezích technologické dosažitelnosti



(a) 1. vlastní frekvence



(b) 2. vlastní frekvence

Obrázek 4.19: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé objemové podíly vláken ve vrstvách stávající skladby

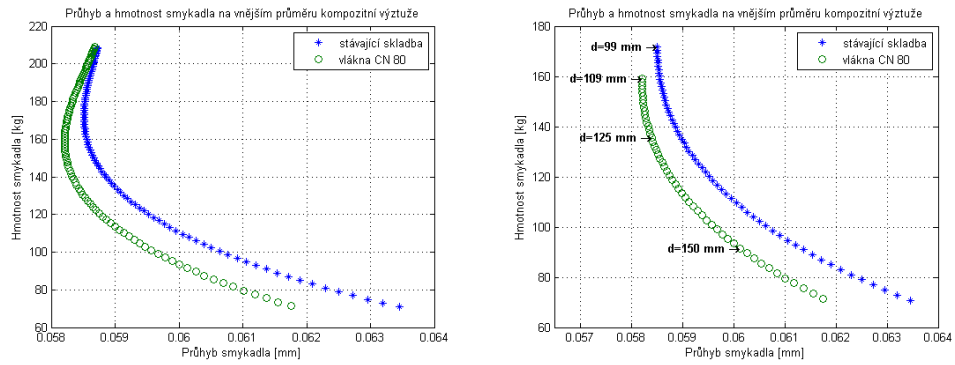
	Skladba s +10% obj. pod.	Skladba s +20% obj. pod.	Stávající skladba	Rozdíl skl. s +10% obj. pod. [%]	Rozdíl skl. s +20% obj. pod. [%]
Hmotnost [kg]	91,4955	92,1125	90,8785	+0,68	+1,36
Průhyb [mm]	0,0588	0,0565	0,0613	-4,08	-7,83
1. vl. frekvence [Hz]	475,04	483,29	466,57	+1,82	+3,58
2. vl. frekvence [Hz]	1189,26	1209,90	1168,05	+1,82	+3,58

Tabulka 4.6: Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladby s větším objemovým podílem vláken a pro stávající skladbu

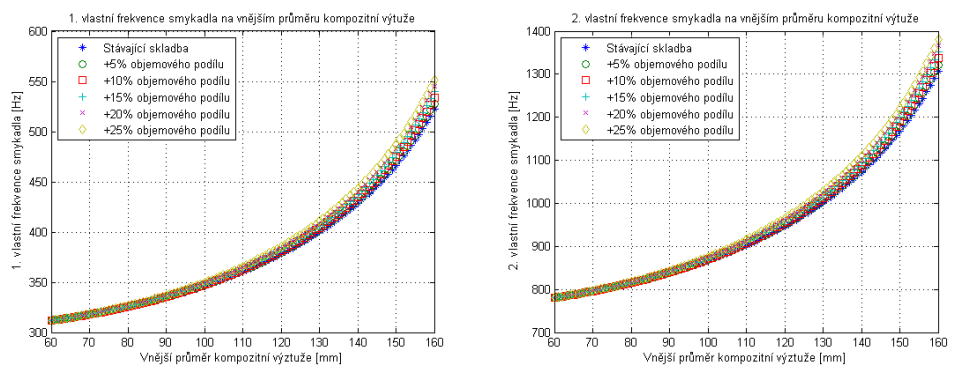
4.3.4 Vliv použitých vláken

Konečně se budeme zabývat tím, jak se změní průhyb, hmotnost a vlastní frekvence smykadla, budeme-li měnit použitá vlákna ve vrstvách skladby kompozitní výztuže. Z tab. 4.9 je zřejmé, že nejvýhodnější bude použití vysokopevnostních vláken CN80 ve všech vrstvách kompozitu.

Pokud tak učiníme, dostaneme pro stávající skladbu závislost z obr. 4.20, ze které je opět patrný růst tuhosti a hmotnosti smykadla s použitím vláken CN80 ve všech vrstvách výztuže, což je způsobeno větší tuhostí a měrnou hmotností vláken CN80 dle tab. 4.1. Dle obr. 4.21 se s použitím vláken CN80 o vyšší tuhosti zvýší i vlastní frekvence smykadla, a v tab. 4.7 jsou konečně souhrnně zobrazeny všechny výsledné hodnoty.



Obrázek 4.20: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro stávající skladbu a pro vlákna CN80 ve všech vrstvách stávající skladby



(a) 1. vlastní frekvence

(b) 2. vlastní frekvence

Obrázek 4.21: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro stávající skladbu a pro vlákna CN80 ve všech vrstvách stávající skladby

	Skladba s vlákny CN80	Stávající skladba	Rozdíl [%]
Hmotnost [kg]	91,4406	90,8785	+0,62
Průhyb [mm]	0,0601	0,0614	-2,12
1. vl. frekvence [Hz]	469,19	466,45	+0,59
2. vl. frekvence [Hz]	1174,60	1167,74	+0,59

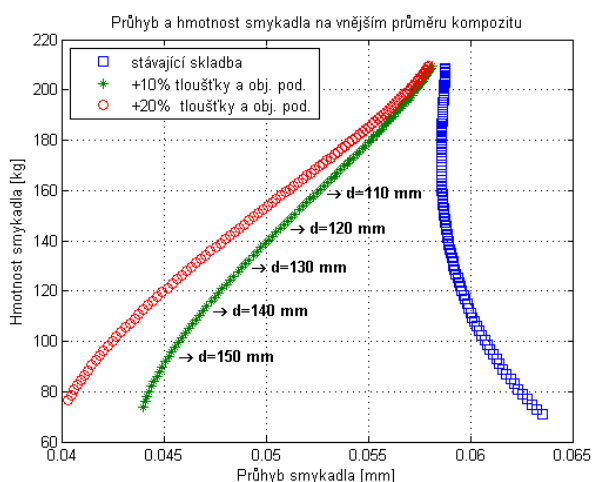
Tabulka 4.7: Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladbu s vlákny CN80 ve všech vrstvách a pro stávající skladbu

4.3.5 Nová skladba výztuže

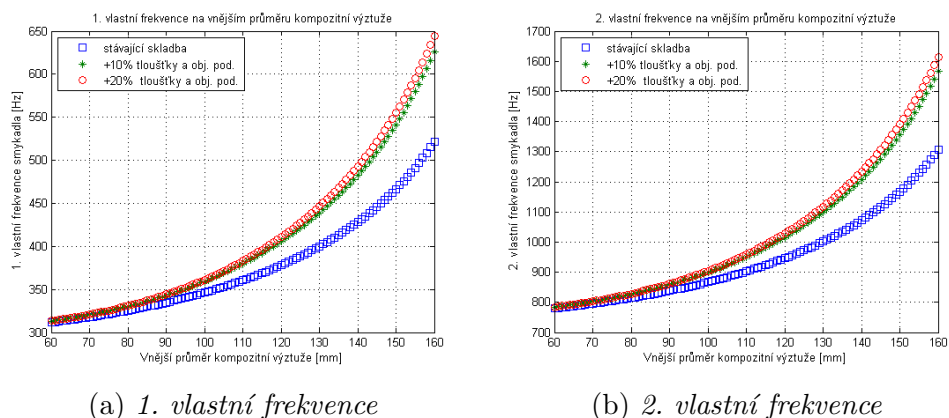
Zabývejme se konečně, jak se změní průhyb, hmotnost a vlastní frekvence smykadla, pokud sečteme všechny výše uvedené vlivy.

Uvažujme dvě varianty modifikace stávající skladby dle tab. 4.9. V obou budou ve všech vrstvách skladby úhly vinutí 0° a současně vlákna CN80, přičemž v první variantě zvýšíme tloušťku vrstev a objemový podíl vláken o 10 %, v druhé variantě zvýšíme oboje o 20 %.

Dostaneme tak pro průhyb a hmotnost smykadla závislost na obr. 4.22, pro vlastní frekvence průběhy na obr. 4.23, a výsledné hodnoty jsou potom konečně uvedeny v tab. 4.8.



Obrázek 4.22: Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro novou a stávající skladbu



Obrázek 4.23: Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro novou a stávající skladbu

	Skladba s +10%	Skladba s +20%	Stávající skladba	Rozdíl skl. s +10% [%]	Rozdíl skl. s +20% [%]
Hmotnost [kg]	93,7889	96,1558	90,8785	+3,20	+5,81
Průhyb [mm]	0,0452	0,0420	0,0614	-26,38	-31,60
1. vl. frekvence [Hz]	541,43	555,47	466,45	+16,08	+19,08
2. vl. frekvence [Hz]	1355,46	1390,60	1167,74	+16,08	+19,08

Tabulka 4.8: *Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro novou a stávající skladbu*

4.4 Shrnutí

Shrneme-li tedy závěry získané v této kapitole, odvodili jsme nejprve analytický model pro výpočet tuhosti a hmotnosti hybridního smykadla, na jehož základě jsme našli optimální vnější průměr kompozitní výztuže. Ten odpovídá stávajícímu vnějšímu průměru, který byl použit v rámci [10].

Dále jsme se zabývali tím, jak se změní tuhost, hmotnost a vlastní frekvence smykadla, budeme-li měnit jednotlivé návrhové parametry ze skladby kompozitní výztuže. Tím jsme získali výsledky uvedené v tab. 4.8, ze kterých vyplývá možné zvýšení tuhosti smykadla a jeho vlastních frekvencí při relativně malém nárůstu jeho hmotnosti.

Pokud se jedná o výpočet vlastních frekvencí, byl použit zjednodušující model zanedbávající koncentrovanou hmotnost nástroje na volném konci smykadla. Pro dosažení výsledků, které by lépe odpovídaly reálnému smykadlu, by bylo třeba použít model zahrnující hmotnost nástroje, a dále by bylo vhodné uvažovat rovněž torzní kmity, kterými jsme se v rámci této optimalizace nezabývali.

Výsledky této kapitoly tedy mohou sloužit jako určitý základ pro vývoj optimálního hybridního smykadla, na který by bylo vhodné navázat jednak ve smyslu hlubšího zaměření na jednotlivé návrhové parametry³⁹, jednak ve smyslu použití dalších modelů pro analýzu tuhosti a dynamických vlastností s ověřením jejich platnosti pro danou úlohu. Dále by bylo vhodné nalézt a následně zahrnout do úlohy optimalizace vedlejší podmínky plynoucí z technologických, energetických, ekonomických a dalších hledisek, jak bylo zmíněno v pozn. 29-31.

³⁹Např. na Timošenkův smykový součinitel κ , na modely pro určení elastických konstant jednotlivých lamin z vlastností jejich vláken a matrice aj.

Závěr

V úvodních dvou kapitolách jsme uvedli základní poznatky ohledně kompozitních materiálů, tedy ohledně jejich struktury a především ohledně jejich mechanických vlastností. Ukázali jsme nejpoužívanější modely, které slouží k analýze laminátů, a tím jsme vytvořili teoretický základ používaný v dalších kapitolách.

V kapitole 3 jsme řešili úlohu optimalizace skladby kompozitního nosníku s trubkovým průřezem. Po odvození analytického modelu pro výpočet tuhosti nosníku jsme našli optimální úhel vinutí vlákna pro danou konfiguraci geometrie a skladby kompozitu, který byl definován kritériem maximální tuhosti.

Dále jsme určili závislost mezi optimálním úhlem vinutí vlákna a štíhlostí nosníku, kterou jsme charakterizovali poměrem délky k jeho vnějšímu poloměru, a konečně jsme se zabývali vlivem zbývajících návrhových parametrů na optimální úhel vinutí.

Ukázalo se, že na počtu vrstev je při zachované tloušťce nosníku optimální úhel vinutí nezávislý, a omezíme-li se pouze na tenkostěnné nosníky, můžeme zanedbat i vliv samotné tloušťky. Pro silnostěnné nosníky je třeba uvažovat vliv tloušťky na optimální úhel zejména při větších štíhlostech nosníku, jak jsme rovněž v kapitole 3 ozřejmili.

Při řešení závislosti modulů pružnosti v podélném a příčném směru na optimální úhel vinutí jsme zjistili, že pokud se omezíme na běžné definiční obory modulů pružnosti, můžeme jejich vliv na optimální úhel zanedbat.

V kapitole poslední jsme se zabývali optimalizací hybridního smykadla obráběcího stroje. Vzhledem ke kombinaci litinového rámu a kompozitní výztuže smykadla jsme odvodili modely pro analýzu tuhosti a hmotnosti smykadla, které pro nás měly charakter optimalizačních kritérií, a ty jsme v případě tuhosti maximalizovali, v případě hmotnosti minimalizovali.

Pro zadanou skladbu hybridního smykadla jsme našli optimální vnější průměr kompozitní výztuže jako výsledek dvoukriteriální optimalizace, a dále jsme ukázali, jak na vnějším průměru výztuže závisí tuhost, hmotnost a vlastní frekvence smykadla.

Následně jsme řešili, jaký vliv mají jednotlivé návrhové parametry ze skladby výztuže na tuhost, hmotnost a vlastní frekvence smykadla. Ukázali jsme vliv úhlu

vinutí vlákna, tloušťky vrstev, objemového podílu a konečně výběru použitých vláken. V závěru jsme jednotlivé vlivy sečetli a vytvořili tak možné varianty nové skladby, jejíž tuhost, hmotnost a vlastní frekvence jsme porovnali s hodnotami pro stávající skladbu.

Tím jsme splnili cíle této práce, která svým charakterem představuje určitý základ při návrhu kompozitních nosníků. Může tak najít uplatnění např. při počátečních návrzích, než se přistoupí k hlubší analýze dané problematiky. Pokud se jedná o vývoj hybridního smykadla, uvedli jsme ve shrnutí předchozí kapitoly oblasti, kterými by bylo vhodné se dále zabývat.

Literatura

- [1] BOUCHAL, Petr. *Technologie výroby a zpracování uhlíkových kompozitů*. Brno: VUT v Brně, 2014. Bakalářská práce, VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav strojírenské technologie.
- [2] BRDIČKA, Miroslav. SAMEK, Ladislav. SOPKO, Bruno. *Mechanika Kontinua*. 3. Vydání. Praha: Academia, 2005. 799 stran. ISBN 80-200-1344-X.
- [3] CHAMIS, Christos C. *Simplified Composite Micromechanics Equations for Strength, Fracture Toughness and Environmental Effects*. Report No. NASA TM-83696. National Aeronautics and Space Administration, Houston, 1984.
- [4] COWPER, G. R. *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*. Journal of Applied Mechanics, 335-340, 1966.
- [5] EHRENSTEIN, Gotfried W. *Polymerní kompozitní materiály*. 1. vydání. Praha: Scientia, 2009. 351 stran. ISBN 978-80-86960-29-6.
- [6] GURDAL, Zafer. HAFTKA, Raphael T. HAJELA, Prabhat. *Design and optimization of laminated composite materials*. Toronto: John Wiley & Sons, inc., 1999. ISBN 0-471-25276-X.
- [7] HAN, Seon M. BENAROYA, Haym. WEI, Timothy. *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*. Journal of Sound and Vibration (1999) 225(5), 935-988, 1999.
- [8] HEINL, Tomáš. *Posouzení výpočtových metod pro návrh kompozitních elementů výrobních strojů*. Praha: ČVUT, 2014. Diplomová práce, ČVUT, Strojní fakulta, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky.
- [9] KULÍŠEK Viktor, JIRAN Lukáš, MAREŠ Tomáš, RŮŽIČKA Milan a kol. *DV#7-1 (2012) Verifikované výpočetní modely pro predikci tuhosti a modálních vlastností komponent z nekonvenčních materiálů*. Neveřejná výzkumná zpráva č. V-12-060. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav výrobních strojů a zařízení, Praha, 2012.

- [10] KULÍŠEK Viktor, MAREŠ Tomáš, RŮŽIČKA Milan a kol. *DV#7 (2014) – Verifikované výpočtové modely silnostěnných kompozitních struktur*. Neveřejná výzkumná zpráva č. V-14-054. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav výrobních strojů a zařízení, Praha, 2014.
- [11] KULÍŠEK, Viktor. *MKP a ortotropní materiály*. [Přednáška]. Praha: ČVUT, 3. prosince 2014. Dostupné z:
http://users.fs.cvut.cz/tomas.mares/mkm/Kompozity_mkp_2014.pdf
- [12] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. 1. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004. 156 stran. ISBN 80-7043-273-X.
- [13] MAREŠ, Tomáš. *Základy konstrukční optimalizace*. Praha: ČVUT v Praze, 2006. 307 stran. ISBN 80-239-6508-5.
- [14] MEIROVITCH, Leonard. *Fundamentals of vibration*. 1. vydání. Singapore: McGraw-Hill, 2001. 806 stran. ISBN 0-07-041345-2.
- [15] MICHALEC, Jiří, a kol. *Pružnost a pevnost I.* 3. vydání. Praha: ČVUT v Praze, 2009. 308 stran. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [16] STELLBRINK, Kuno K.U. *Micromechanics of Composites*. Carl Hanser Verlag, Munchen, 1996. ISBN 3-446-18606-9.
- [17] UNZEITIG, Libor. *Ortogonalní polynomy*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2008. Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.
- [18] ZBOŽÍNEK, Martin. *Výpočtová analýza hybridního litino-kompozitového smykadla obráběcího centra TM 2000*. Brno: VUT v Brně, 2011. Diplomová práce, VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky.
- [19] *Free transverse vibration of a thin elastic beam (Bernoulli-Euler theory)*. [Online]. ČVUT, fakulta strojní. Dostupné z:
<http://fsinet.fsid.cvut.cz/en/U2052/node139.html>

Seznam obrázků

1.1	Řez laminátem z epoxidové pryskyřice a uhlíkových vláken (vlevo) a bambusovým stonkem (vpravo) - převzato z [5]	9
1.2	Rozdělení kompozitních materiálů - převzato z [12]	10
1.3	Schéma technologie navíjení - převzato z [1]	11
1.4	Role rovingu - převzato z [1]	12
2.1	Schéma jednosměrového kompozitu - převzato z [12]	16
2.2	Souřadný systém $O(L, T, T')$ - převzato z [12]	17
2.3	Natočení souřadných systémů x a x'	18
2.4	Schéma symetrického laminátu - převzato z [12]	20
2.5	Schéma vyrovnaného laminátu - převzato z [12]	21
2.6	Schéma vyrovnaného symetrického laminátu - převzato z [12]	21
3.1	Zatížení a deformace nosníku	28
3.2	Pootočení souřadných systémů o úhel α	30
3.3	Tvar průhybu nosníku	32
3.4	Průhyby nosníků v závislosti na úhlu vinutí pro různé délky nosníku	34
3.5	Optimální úhel vinutí pro různé délky nosníku	34
3.6	Normovaný optimální úhel vinutí na normované délce nosníku pro lineární regresi pomocí Legendreových polynomů	36
3.7	Optimální úhel vinutí pro různé délky a poloměry nosníku	36
3.8	Optimální úhel vinutí v závislosti na štíhlosti nosníku	36
3.9	Normovaný optimální úhel vinutí na normované štíhlosti nosníku pro regresi pomocí Legendreových polynomů	37
3.10	Optimální úhel vinutí v závislosti na počtu vrstev a tloušťce stěny	38
3.11	Optimální úhel vinutí pro různé tloušťky vrstev	38
3.12	Optimální úhel vinutí v závislosti na modulech pružnosti E_L a E_T	39
4.1	Kompozitní smykadlo - převzato z [18]	40
4.2	Zjednodušený model smykadla	40
4.3	Schéma skladby kompozitní výztuže	46
4.4	Průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže	48
4.5	Průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé součinitele κ	49

4.6	<i>Ekvivalentní moduly tahové a ohybové tuhosti A_{ekv} a D_{ekv} v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže</i>	49
4.7	<i>Vliv modulů A_{ekv} a D_{ekv} na průhyb smykadla</i>	50
4.8	<i>Hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže</i>	50
4.9	<i>Hmotnost a průhyb smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže</i>	51
4.10	<i>Vlastní frekvence v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže</i>	52
4.11	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách skladby</i>	53
4.12	<i>Moduly tahové resp. ohybové tuhosti A_{ekv}, resp. D_{ekv}, v závislosti na úhlu vinutí vlákna α</i>	54
4.13	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách skladby</i>	54
4.14	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí v symetrické skladbě</i>	55
4.15	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé úhly vinutí ve vrstvách symetrické skladby . .</i>	55
4.16	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé tloušťky vrstev stávající skladby</i>	56
4.17	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé tloušťky vrstev stávající skladby</i>	56
4.18	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé objemové podíly vláken ve vrstvách stávající skladby</i>	57
4.19	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro různé objemové podíly vláken ve vrstvách stávající skladby</i>	58
4.20	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro stávající skladbu a pro vlákna CN80 ve všech vrstvách stávající skladby</i>	59
4.21	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro stávající skladbu a pro vlákna CN80 ve všech vrstvách stávající skladby</i>	59
4.22	<i>Průhyb a hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro novou a stávající skladbu</i>	60
4.23	<i>Vlastní frekvence smykadla v závislosti na vnějším průměru kompozitní výztuže pro novou a stávající skladbu</i>	60

Seznam tabulek

1.1	<i>Elastické charakteristiky různých druhů vláken - data převzata z [5]</i>	10
1.2	<i>Elastické charakteristiky vybraných laminátů - data převzata z [6]</i>	11
4.1	<i>Materiálové vlastnosti vláken a matrice kompozitní výztuže a litinového pláště smykadla</i>	47
4.2	<i>Průhyb a hmotnost stávajícího smykadla při analytickém a MKP výpočtu</i>	48
4.3	<i>Výsledné hmotnosti a průhyby smykadla pro kritéria maximální tuhosti a hmotnosti a jejich porovnání s hodnotami pro stávající geometrii smykadla</i>	52
4.4	<i>Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladbu s úhly vinutí 0° a pro stávající skladbu</i>	54
4.5	<i>Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladby s větší tloušťkou a pro stávající skladbu</i>	57
4.6	<i>Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladby s větším objemovým podílem vláken a pro stávající skladbu</i>	58
4.7	<i>Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro skladbu s vlákny CN80 ve všech vrstvách a pro stávající skladbu</i>	59
4.8	<i>Porovnání průhybu, hmotnosti a vlastních frekvencí stávajícího smykadla pro novou a stávající skladbu</i>	61
4.9	<i>Skladba kompozitní výztuže smykadla ze [9] použitá v kapitole 4</i>	80

Seznam příloh

A - Legendreovy polynomy

B - Skripty z MATLABU

C - Skladba kompozitní výztuže

Příloha A - Legendreovy polynomy

Legendreovy polynomy jsou ortogonální na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ s váhovou funkcí $w(x) = 1$, tedy platí

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \frac{2}{2n-1} & \text{pro } n = m \end{cases} \quad (\text{L1})$$

Rekurentní zápis Legendreových polynomů má potom tvar

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), n \in \mathbb{N}, \quad (\text{L2})$$

kde můžeme využít znalosti polynomů $P_0(x) = 1$ resp. $P_1(x) = x$. Aby byly polynomy normované, musí pro ně platit

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 1 \quad (\text{L3})$$

Budeme-li polynomy postupně integrovat dle vztahu L3, dostaneme aritmetickou posloupnost

$$a(n) = \frac{1}{2} + (n-1), n \in \mathbb{N}, \quad (\text{L4})$$

a pro znormování je tedy potřeba jednotlivé polynomy vynásobit odmocninou hodnoty z L4 (protože norma je počítána dle L3 z kvadrátu daného polynomu).

Pro znormované Legendreovy polynomy tedy můžeme konečně psát

$$P_{n+1}(x) = \sqrt{a(n+2)} \left(\frac{2n+1}{n+1}x\sqrt{a(n+1)}P_n(x) - \frac{n}{n+1}\sqrt{a(n)}P_{n-1}(x) \right), n \in \mathbb{N} \quad (\text{L5})$$

O Legendreových a dalších ortogonálních polynomech je dále šířeji pojednáno např. v [17].

Příloha B - Skripty z MATLABU

```
% Ohyb kompozitu pomoci Timoshenka - optimalni uhel
% natoceni pro variaci delek a polomeru nosniku
clear all, close all, clc
% samela sila na konci nosniku [N]
F=1000;
% Variace delek nosniku [mm]
L=5:5:1500;
% Variace polomeru nosniku [mm]
Re=5:150;
% Korekcní faktor pro napeti v prurezu
kappa=1;
% Pocet vrstev laminatu
v=1:3;
% Uhly natoceni vlakna [rad]
alpha=0:1*pi/180:90*pi/180;
for r=1:length(Re) % variace pres polomer
    for l=1:length(L) % variace pres delku
        for i=1:length(alpha) % variace uhlu natoceni vlakna
            ALPHA=[alpha(i) -alpha(i) alpha(i)]; % uhly natoceni v k-te
            vrstve
            A=0; % homogenizace ABD matic
            B=0;
            D=0;
            re=Re(r); % vnejsi polomer trubky [mm]
            for k=1:length(v) % variace pres vrstvy kompozitu
                % Materialove vlastnosti a matice tuhosti v hlavnich osach
                % [r EL ET GLT LT nTL aL aT t]
                % [kg/m3 MPa MPa MPa - - 1/K 1/K mm]
                EV=[1503 127760 5066 3422 0.345 0.014 7.09e(-7) 6.41e(-5) 10;
                    1503 127760 5066 3422 0.345 0.014 7.09e(-7) 6.41e(-5) 20;
                    1503 127760 5066 3422 0.345 0.014 7.09e(-7) 6.41e(-5) 10];
                Enu=zeros(9,9); % pole pro matici tuhosti k-te vrstvy
                E2=EV(k,3); % modul pruznosti v tahu v hlavnich osach
                E3=EV(k,3);
                E1=EV(k,2);
                nu12=EV(k,5); % Poissonovo cislo k-te vrstvy
                nu13=EV(k,5);
                nu21=EV(k,6);
```

```

nu31=EV(k,6);
nu23=0.3;
nu32=0.3;
G12=EV(k,4); %modul pruznosti ve smyku v hlavnich osach
k-te vrstvy
G13=EV(k,4);
G23=E2/2.6;
N=1-nu12*nu21-nu23*nu32-nu31*nu13-nu12*nu23*nu31+
-nu21*nu32*nu13;
Enu(1,1)=E1*(1-nu23*nu32)/N;
Enu(1,5)=E1*(nu21+nu23*nu31)/N;
Enu(1,9)=E1*(nu31+nu32*nu21)/N;
Enu(2,2)=G12;
Enu(2,4)=G12;
Enu(3,3)=G13;
Enu(3,7)=G13;
Enu(4,:)=Enu(2,:);
Enu(5,1)=E2*(nu12+nu13*nu32)/N;
Enu(5,5)=E2*(1-nu13*nu31)/N;
Enu(5,9)=E2*(nu32+nu31*nu12)/N;
Enu(6,6)=G23;
Enu(6,8)=G23;
Enu(7,:)=Enu(3,:);
Enu(8,:)=Enu(6,:);
Enu(9,1)=E3*(nu13+nu12*nu23)/N;
Enu(9,5)=E3*(nu23+nu21*nu13)/N;
Enu(9,9)=E3*(1-nu12*nu21)/N; %vyplneni matice tuhosti v
hlavnich osach k-te vrstvy
Ttn=[cos(ALPHA(k)) sin(ALPHA(k)) 0;
0 0 1;
-sin(ALPHA(k)) cos(ALPHA(k)) 0]; %transformace z hlavnich
do valcovych os
Etheta=kron(Ttn,Ttn)*Enu*kron(Ttn',Ttn'); %matice tuhosti
ve valcovych osach
t=EV(k,9); %tloustka k-te vrstvy
ri=re-t; %vnitrni prumer k-te vrstvy
A=A+pi*(re^2-ri^2)/2*(Etheta(7,7)+Etheta(4,4));
B=B+Etheta(1,4)*(re^3-ri^3)*pi/3;
D=D+pi*Etheta(1,1)*(re^4-ri^4)/4;
re=ri; %vnejsi prumer pro nasledujici vrstvu totozny

```

```

s vnitrim prumerem predchozi vrstvy
end
ABD(i,:)=[A B D]; %ABD matice
phi(i)=F*L(1)^2/D; %natoceni na konci nosniku [rad]
w(i)=F*(L(1)/kappa/A+L(1)^3/3/D); %posunuti na konci
nosniku [mm]
end
[wmin,wmin_pos]=min(w); %pozice minimalniho posunuti na
konci nosniku
alpha_opt10(r,l)=alpha(wmin_pos); %optimalni uhel pro
variaci delky a polomeru nosniku
end

```

```

% Ohyb smykadla v zavislosti na vnejsim prumeru
% kompozitni vyztuze
clear all, close all, clc
%nacteni vlastnosti skladby stavajiciho kompozitu
load EVS
%nacteni variace vnejsich prumeru kompozitu a hmotnosti
smykadla
load d
load M
%delka nosniku [mm]
l=1265;
%delka strany linoveho plaste
a=160;
%osamela sila na konci nosniku
F=1000;
%Korekčni faktor pro napeti v prurezu
kappa=0.85;
%zmena poradi vrstev (vypocet je od vnejsi po vnitri
vrstvu, ale EVS je od vnitri po vnejsi!!!!)
EVS1=flipud(EVS(:,1));
EVS2=flipud(EVS(:,2));
EVS3=flipud(EVS(:,3));
EVS4=flipud(EVS(:,4));
EVS5=flipud(EVS(:,5));
EVS6=flipud(EVS(:,6));
EVS7=flipud(EVS(:,7));

```



```

%vypocet ABD matic
for i=1:length(d) %variace pres vnejsi prumery vyztuze
re=d(i)/2; %vnejsi polomer trubky [mm]
A_komp=0; %homogenizace ABD matic
B_komp=0;
D_komp=0;
A_litina=0;
B_ocel=0;
D_litina=0;
A=0;
B=0;
D=0;

    for k=1:length(EVS1) %suma pres vsechny vrstvy nosniku
ri=re-EVS2(k); %vnitrni prumer k-te vrstvy
Enu=zeros(9,9); %pole pro matici tuhosti k-te vrstvy
E2=EVS5(k); %modul pruznosti v tahu v hlavnich osach k-te
vrstvy
E3=EVS5(k);
E1=EVS4(k);
nu12=EVS7(k); %Poissonovo cislo k-te vrstvy
nu13=EVS7(k);
nu21=E2*nu12/E1;
nu31=E3*nu13/E1;
nu23=0.3;
nu32=E3*nu23/E2;
G12=EVS6(k); %modul pruznosti ve smyku v hlavnich osach
k-te vrstvy
G13=EVS6(k);
G23=E2/2.6;
N=1-nu12*nu21-nu23*nu32-nu31*nu13-nu12*nu23*nu31+
-nu21*nu32*nu13;
Enu(1,1)=E1*(1-nu23*nu32)/N; %vyplneni matice tuhosti
v hlavnich osach k-te vrstvy
Enu(1,5)=E1*(nu21+nu23*nu31)/N;
Enu(1,9)=E1*(nu31+nu32*nu21)/N;
Enu(2,2)=G12;
Enu(2,4)=G12;
Enu(3,3)=G13;
Enu(3,7)=G13;
Enu(4,:)=Enu(2,:);

```

```

Enu(5,1)=Enu(1,5);
Enu(5,5)=E2*(1-nu13*nu31)/N;
Enu(5,9)=E2*(nu32+nu31*nu12)/N;
Enu(6,6)=G23;
Enu(6,8)=G23;
Enu(7,:)=Enu(3,:);
Enu(8,:)=Enu(6,:);
Enu(9,1)=Enu(1,9);
Enu(9,5)=Enu(5,9);
Enu(9,9)=E3*(1-nu12*nu21)/N;
%transformace z hlavnich do valcovych os
Ttn=[cos(EVS1(k)*pi/180) sin(EVS1(k)*pi/180) 0;
0 0 1;
sin(EVS1(k)*pi/180) -cos(EVS1(k)*pi/180) 0];
%matice tuhosti ve valcovych osach
Etheta=kron(Ttn,Ttn)*Enu*kron(Ttn', Ttn');
%ABD matice
A_komp=A_komp+(Etheta(7,7)+Etheta(4,4))*pi*(re^2-ri^2)/2;
B_komp=B_komp+Etheta(1,4)*(re^3-ri^3)*pi/3;
D_komp=D_komp+pi*Etheta(1,1)*(re^4-ri^4)/4;
re=ri; %vnejsi prumer pro nasledujici vrstvu
(totozny s vnitrim prumerem predchozi vrstvy)
end
E_litina=169000; % modul pruznosti v tahu litiny [MPa]
nu_litina=0.275; % Poissonovo cislo litiny [-]
% matice elastickych konstant litiny
Enu_litina=zeros(9,9);
Enu_litina(1,1)=E_litina*(1-nu_litina)/(1+nu_litina)
/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(1,5)=E_litina*nu_litina/(1+nu_litina)
/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(1,9)=E_litina*nu_litina/(1+nu_litina)
/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(5,1)=Enu_litina(1,5);
Enu_litina(5,5)=E_litina*(1-nu_litina)/(1+nu_litina)
/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(5,9)=E_litina*nu_litina/(1+nu_litina)
/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(9,1)=Enu_litina(1,9);
Enu_litina(9,5)=Enu_litina(5,9);

```

```

Enu_litina(9,9)=E_litina*(1-nu_litina)
/(1+nu_litina)/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(2,2)=E_litina*(1-2*nu_litina)/2
/(1+nu_litina)/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(3,3)=E_litina*(1-2*nu_litina)/2
/(1+nu_litina)/(1-2*nu_litina);
Enu_litina(6,6)=E_litina*(1-2*nu_litina)/2
/(1+nu_litina)/(1-2*nu_litina);
%matice tahove tuhosti pro litinu
A_litina=Enu_litina(3,3)*(a^2-pi*d(i)^2/4);
%matice ohybove tuhosti pro litinu
D_litina=Enu_litina(1,1)*(a^4/12-pi*d(i)^4/64);
A=A_komp+A_litina; %celkova matice tahove tuhosti
D=D_komp+D_litina; %celkova matice ohybove tuhosti
%Diskretizace delkove souradnice nosniku [mm]
x=(0:l/100:l);
    for j=1:length(x)
phi(j)=F*(1*x(j)-x(j)^2/2)/D; %prubeh natoceni na delce
nosniku [rad]
w(j)=F*(x(j)/kappa/A+1*x(j)^2/2/D-x(j)^3/6/D); %prubeh
posunutí na delce nosniku [mm]
    end
W(i)=w(length(x)); %posunutí na konci nosniku [mm]
end

    % Hmotnost smykadla v závislosti na vnějším průměru
% kompozitní výtzuze
clear all, close all, clc
%nacteni vlastnosti skladby stavajiciho kompozitu
load EVS
%delka nosniku [mm]
l=1265;
%delka strany litinoveho plaste [mm]
a=160;
%Variace průměru kompozitu [mm]
d=60:1:160;
%Vektor tloušťky vrstev [mm]
T=flipud(EVS(:,2));
%objemovy podíl vláken [-]

```

```

vf=flipud(EVS(:,3));
%hustota pouzitych vlaken [kg.m^3]
rf1=2170;
rf2=1800;
rf3=1800;
%hustota matrice a litiny [kg.m^3]
rm=1130;
r_litina=7050;
%definovani vlakna v k-te vrstve....1 XN-80-A2S,
2 34-700-WD-24K,3 T700-12-K-50C
v=zeros(1,length(EVS(:,1)));
v(1,1:40)=[2 1 1 2 1 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 2 2 1
1 2 1 1 2 1 2 1 1 2 1 1 2 2 1 1];
v(1,41:80)=[2 1 1 2 1 2 1 1 2 1 1 2 2 1 1 2 1 1 2 1 2 1 1 2
1 1 2 1 3 3 3 1 1 1 1 1 1 1 3 3];
v(1,81:101)=[3 1 1 1 1 3 3 3 1 1 1 1 3 3 3 2 2 2 2 2 2];
%otoceni poradí vrstev, 1. vrstva uvnitř, poslední vne
V=fliplr(v);
%vypocet podílu vlaken ve skladbe
pvf1=sum(T(find(V==1))); %pozice, na kterých je ve skladbe
vlakno XN-80-A2S
pvf2=sum(T(find(V==2))); %pozice, na kterých je ve skladbe
vlakno 4-700-WD-24K
pvf3=sum(T(find(V==3))); %pozice, na kterých je ve skladbe
vlakno T700-12-K-50C
for h=1:length(d) %cyklus přes všechny vnější průmery
kompozitu
mk=0; %homogenizace hmotnosti pro h-ty krok
Mk=0;
T0=0; %pomocná tloušťka pro vrstvu 0, t(0)=0
    for g=1:length(EVS(:,1)) %cyklus přes vrstvy kompozitu
        if V(g)==1 %cyklus pro vyber druhu vlakna
rf=rf1;
            else if V(g)==2
rf=rf2;
            else
rf=rf3;
            end
        end
    end
%hmotnost k-te vrstvy kompozitu

```

```

mk(1,g)=pi/4*((d(h)-2*T0)/1000)^2-((d(h)+
-2*sum(T(1:g))/1000)^2)*(1/1000)*(vf(g)*rf+(1-vf(g))*rm);
%hmotnost celeho kompozitu
Mk=sum(mk);
T0=sum(T(1:g));
end
%hmotnost celeho kompozitu na vnejsim prumeru
Md(h)=Mk;
%hmotnost litiny na vnejsim prumeru kompozitu
M_litina(h)=r_litina*((a/1000)^2+
-pi/4*(d(h)/1000)^2)*(1/1000);
%hmotnost celeho smykadla na vnejsim prumeru kompozitu
M(h)=Md(h)+M_litina(h);
end

```

Příloha C - Skladba kompozitní výztuže

Číslo vrstvy	Použité vlákno	Úhel vinutí vlákna [°]	Tloušťka [mm]	Objemový podíl vlákna [-]
1	34-700-24K	44	0,06048994	0,51
2	CN80	44	0,083068173	0,51
3	CN80	-44	0,082933253	0,51
4	34-700-24K	-44	0,120444983	0,51
5	CN80	-44	0,082604765	0,51
6	CN80	44	0,082472088	0,51
7	34-700-24K	44	0,059888689	0,51
8	34-700-24K	44,3	0,060123972	0,51
9	CN80	44,3	0,082567276	0,51
10	CN80	-44,3	0,082435449	0,51
11	34-700-24K	-44,3	0,119725308	0,51
12	CN80	-44,3	0,08211445	0,51
13	CN80	44,3	0,081984779	0,51
14	34-700-24K	44,3	0,059536421	0,51
15	CN80	0	2,030169497	0,49
16	34-700-24K	45,7	0,073319649	0,51
17	CN80	45,7	0,100669815	0,51
18	CN80	-45,7	0,10048333	0,51
19	34-700-24K	-45,7	0,145900049	0,51
20	CN80	-45,7	0,100029822	0,51
21	CN80	45,7	0,099846868	0,51
22	34-700-24K	45,7	0,072489647	0,51
23	34-700-24K	46,1	0,072917293	0,51
24	CN80	46,1	0,100119811	0,51
25	CN80	-46,1	0,099937677	0,51
26	34-700-24K	-46,1	0,145112572	0,51
27	CN80	-46,1	0,099494675	0,51
28	CN80	46,1	0,099315928	0,51
29	34-700-24K	46,1	0,072106508	0,51
30	CN80	0	1,90548048	0,49
31	34-700-24K	47,4	0,071324621	0,51
32	CN80	47,4	0,097941558	0,51
33	CN80	-47,4	0,097775098	0,51
34	34-700-24K	-47,4	0,141989331	0,51
35	CN80	-47,4	0,097369979	0,51
36	CN80	47,4	0,097206414	0,51
37	34-700-24K	47,4	0,070583129	0,51
38	34-700-24K	47,7	0,070902121	0,51
39	CN80	47,7	0,097363496	0,51
40	CN80	-47,7	0,097200896	0,51
41	34-700-24K	-47,7	0,14115962	0,51
42	CN80	-47,7	0,096805108	0,51
43	CN80	47,7	0,096645286	0,51
44	34-700-24K	47,7	0,070177701	0,51
45	CN80	0	1,800166981	0,49
46	34-700-24K	48,9	0,069629665	0,51
47	CN80	48,9	0,0956229	0,51
48	CN80	-48,9	0,09547243	0,51
49	34-700-24K	-48,9	0,138662771	0,51
50	CN80	-48,9	0,09510599	0,51
51	CN80	48,9	0,094957944	0,51
52	34-700-24K	48,9	0,068958933	0,51
53	34-700-24K	49,2	0,069298193	0,51
54	CN80	49,2	0,095169376	0,51
55	CN80	-49,2	0,095021925	0,51
56	34-700-24K	-49,2	0,138011793	0,51
57	CN80	-49,2	0,094662795	0,51
58	CN80	49,2	0,094517684	0,51
59	34-700-24K	49,2	0,068640834	0,51
60	CN80	0	1,675439916	0,5
61	34-700-24K	50,16391628	0,068095032	0,51
62	CN80	50,16391628	0,093522678	0,51
63	CN80	-50,16391628	0,093385485	0,51
64	34-700-24K	-50,16391628	0,135646121	0,51
65	CN80	-50,16391628	0,093051201	0,51

Číslo vrstvy	Použité vlákno	Úhel vinutí vlákna [°]	Tloušťka [mm]	Objemový podíl vlákna [-]
66	CN80	50,16391628	0,09291607	0,51
67	34-700-24K	50,16391628	0,067483128	0,51
68	CN80	0,51	1,583337283	0,51
69	T700	43,4	0,098608599	0,6
70	T700	-43,4	0,196922174	0,6
71	T700	43,4	0,098167821	0,6
72	CN80	43,11341313	0,143717727	0,56
73	CN80	-43,11341313	0,286812913	0,56
74	CN80	43,11341313	0,142789277	0,56
75	CN80	43,36038434	0,143062656	0,56
76	CN80	-43,36038434	0,285513711	0,56
77	CN80	43,36038434	0,142150454	0,56
78	CN80	0	1,37509752	0,56
79	T700	44,6	0,096359038	0,6
80	T700	-44,6	0,192448272	0,6
81	T700	44,6	0,095955837	0,6
82	CN80	44,34715284	0,140545167	0,56
83	CN80	-44,34715284	0,280519911	0,56
84	CN80	44,34715284	0,139694137	0,56
85	CN80	0	1,661624499	0,56
86	T700	45,7	0,118308418	0,6
87	T700	-45,7	0,236225082	0,6
88	T700	45,7	0,117723368	0,6
89	CN80	45,44692424	0,151401588	0,51
90	CN80	-45,44692424	0,302166112	0,51
91	CN80	-45,44692424	0,150451321	0,51
92	CN80	0	1,755546474	0,51
93	T700	46,8	0,116096725	0,6
94	T700	-46,8	0,231830574	0,6
95	T700	46,8	0,11555467	0,6
96	34-700-24K	46,55394511	0,162143417	0,51
97	34-700-24K	-46,55394511	0,323583847	0,51
98	34-700-24K	46,55394511	0,161094995	0,51
99	34-700-24K	46,80091883	0,161486673	0,51
100	34-700-24K	-46,80091883	0,322282015	0,51
101	34-700-24K	46,80091883	0,16045556	0,51

Tabulka 4.9: *Skladba kompozitní výztuže smykadla ze [9] použitá v kapitole 4*