

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A
MECHATRONIKY

ZTRÁTA STABILITY PRUTŮ PROMĚNNÉHO PRŮŘEZU
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor
Matěj Mazur

Vedoucí bakalářské práce
Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ PRAZE

Fakulta strojní, Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Technická 4, 166 07 Praha 6

Akademický rok:2014/2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

pro: Mařeje Mazura

program: **Teoretický základ strojního inženýrství**

obor: bez oboru

Název tématu: **Ztráta stability prutů proměnného průřezu**

Title: **Buckling of columns with variable cross section**

Zásady pro vypracování:

1. Seznámit se s Eulerovou metodou vzpěru
2. Rozšířit Eulerovu metodu vzpěru na pruty proměnného průřezu
3. Aplikovat na vybrané případy prutů
4. Představit výsledky a okomentovat daná řešení

Rozsah grafických prací: 5 stran

Rozsah průvodní zprávy: 35 stran

Seznam odborné literatury:

1. Michalec, J. (1999) Pružnost a pevnost II, ČVUT, Praha
2. Wang, C. M., Wang, C. Y., Reddy, J.N. (2005) Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press, Boca Raton

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: 30. 4. 2015

Datum odevzdání bakalářské práce: 19. 6. 2015

Neodevzdá-li student bakalářskou nebo diplomovou práci v určeném termínu, tuto skutečnost předem písemně zdůvodnil a omluva byla děkanem uznána, stanoví děkan studentovi náhradní termín odevzdání bakalářské nebo diplomové práce. Pokud se však student řádně neomluvil nebo omluva nebyla děkanem uznána, může si student zapsat bakalářskou nebo diplomovou práci podruhé

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Zadání diplomové práce převzal dne:

Mareš
.....
diplomant

Milan Růžička
prof. Ing. Milan Růžička, CSc.



Michael Valášek
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.

.....
vedoucí Ú 12 105

.....
děkan FS ČVUT v Praze

V Praze dne 30. 4. 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. Ing. Tomáše Mareše, Ph.D. a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu použité literatury.

V Praze dne

.....

podpis autora

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce
Doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. za jeho rady a připomínky během zpracování a za
jeho přínosné konzultace.

Název práce: Ztráta stability prutů proměnného průřezu

Autor: Matěj Mazur

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Anotace:

Cílem bakalářské práce je popsat Eulerovu metodu na základních případech vzpěru a následně rozšířit její použití na složitější příklady včetně vzpěru s proměnným průřezem. V práci jsou popsány dva postupy: klasické řešení a řešení podle WWR. Klasické řešení je založené na diferenciálním počtu a řešení podle WWR využívá maticového počtu. Oba postupy jsou následně aplikovány v konkrétních příkladech.

Klíčová slova: ztráta stability prutů, vzpěr, pevnost vzpěrná, Eulerova metoda vzpěru, energetická metoda

Title: Buckling of columns with variable cross section

Author: Matěj Mazur

Supervisor: Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Abstract:

The aim of this thesis is to describe the Euler's method on the base cases of bracing and then to expand its use to more complex examples including a brace with variable cross-section. The paper describes two methods: the classical solution and the solution according to WWR. The classical solution is based on the differential calculus and the solution according to WWR uses matrix algebra. Both procedures are then applied in the specific examples.

Keywords: buckling of columns, buckling, stability of columns, structural instability, energy approach, Euler method

Obsah

1	Úvod.....	8
2	Pevnost vzpěrná.....	9
2.1	Základní předpoklady řešení:	11
2.2	Klasické řešení.....	11
2.2.1	I. případ vzpěru	11
2.2.2	II. případ vzpěru	14
2.2.3	III. případ vzpěru.....	16
2.2.4	IV. případ vzpěru	18
2.2.5	I. případ vzpěru se změnou v průřezu	21
2.3	Řešení podle WWR.....	24
2.3.1	I. případ vzpěru	24
2.3.2	II. případ vzpěru	30
2.3.3	III. případ vzpěru.....	32
2.3.4	IV. případ vzpěru	34
2.3.5	V. případ vzpěru.....	36
3	Příklady	38
3.1	Prut s pružinami	38
3.2	Poloha zátěže závislá na vychýlení prutu.....	41
3.3	Vzpěr se změnou v průřezu	45
4	Závěr	47
5	Bibliografie.....	48
6	Seznám obrázků.....	49
7	Seznam tabulek.....	50

1 Úvod

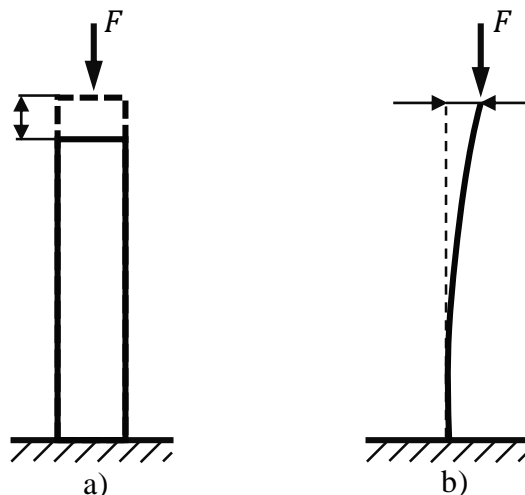
V celé řadě různých konstrukcí se setkáváme s případy, kdy o nosnosti nerozhoduje pevnost materiálu, ale stabilita zatěžované konstrukce. Především u štíhlých prutů, tenkostěnných konstrukcí, otevřených a uzavřených profilů nebo u rovinných a zakřivených desek namáhaných tlakem, ohybem, krutem nebo jejich kombinací je často hlavním faktorem ovlivňujícím únosnost stabilita. Problém stability může nastat jak u nosných celků tak i jen u jednotlivých částí. U jednoduchých případů můžeme mnohdy použít analytické metody, které se dají aplikovat v podobných případech, a tudíž velice zjednodušují a urychlují cestu k bezpečnému konstrukčnímu návrhu. Nicméně takové postupy nelze použít vždy. Proto přichází na scénu numerické metody, jenž jsou ale ve většině situacích příliš specifické, zdlouhavé a nelze je brát jako odrazový můstek pro obdobné konstrukce. Tuto závislost na konkrétní situaci, která je více náchylná k chybovosti, se postupně snažíme ověřovat či dokonce nahrazovat univerzálnějšími analytickými metodami, jenž jsou pro mnoho inženýrů schůdnější.

Cílem této práce je seznámení s výpočty zaměřenými pouze na jeden z případů stability a tím je vzpěr. V úvodu je popsáno řešení Eulerovou metodou vzpěru na několika základních případech. Tato analytická metoda je následně aplikována vzpěr s proměnným průřezem i na komplikovanější příklady, na které použijeme poměrně nový postup řešení navržený profesory C. M. Wangem, C. Y. Wangem a J. N. Reddym.

V závěru jsou diskutovány výsledky a ohodnoceny použité metody.

2 Pevnost vzpěrná

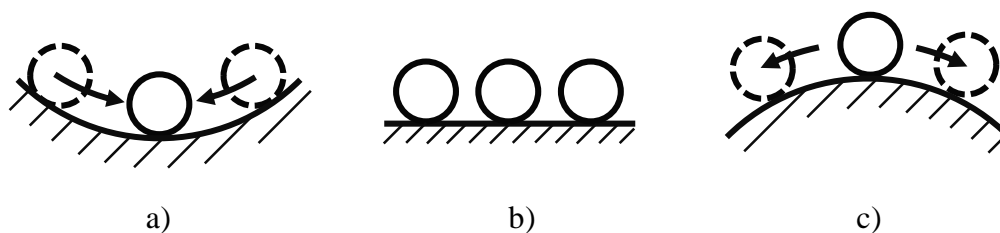
Působením vnější tlakovou silou na masivní prut (v ose prutu),



Obr. 1 – Osově namáhání tlustého a štíhlého vzpěru

dojde k mírnému zkrácení (obr. 1a), pokud je ale ve skutečnosti namáhána tlakem relativně tenká tyč (poměr charakteristického rozměru příčného průřezu prutu k jeho délce je velice malý: $\frac{s}{l} \ll 1$), začne se od určitého okamžiku prohýbat (obr. 1b). U masivního prutu je omezující napětí na mezi kluzu σ_k , kdežto u štíhlého prutu dochází ke ztrátě stability dříve.

Průběh tlakové síly na tlačенý tenký prut má tři fáze rovnováhy, které jsou pro demonstraci popsány na příkladu z mechaniky tuhých těles (obr. 2):



Obr. 2 – Fáze rovnováhy: a) stabilní, b) indiferentní, c) labilní

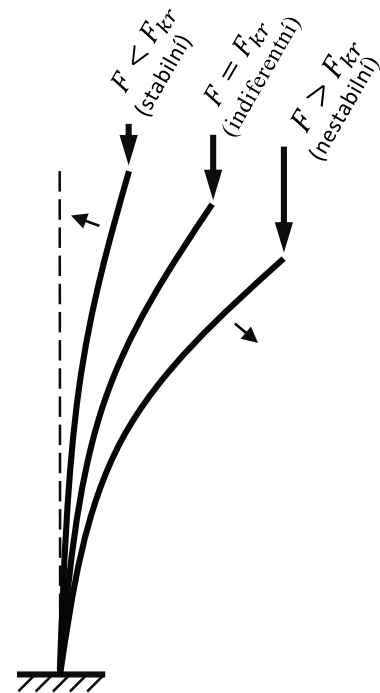
- a) **Stabilní stav.** Dokonale přímý prut je zatížen centrickým tlakem. Tlak bude zvyšován, ale prut zůstane stále přímý až do chvíle, než se příčnou silou dočasně mírně vychýlí z přímé polohy. Jakmile ale tato síla přestane působit, prut se vrátí do své počáteční polohy (obr. 2a).

b) **Indiferentní stav.** Jakmile zatěžující osová síla dosáhne určité hodnoty, prut se při dočasném a malém působení příčné síly vychýlí z přímé polohy, kde i zůstane (obr. 2b). Tato hodnota osově síly se nazývá **kritická síla F_{krit}** .

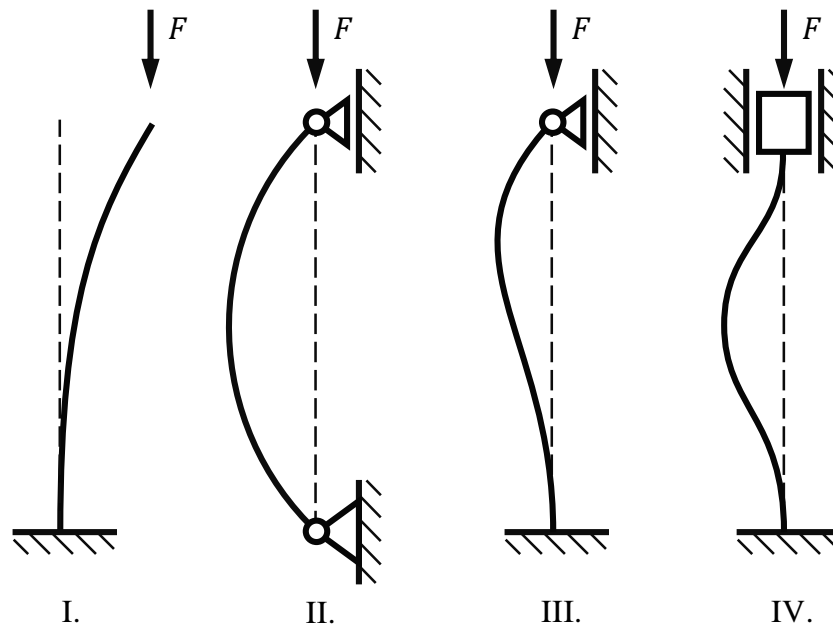
c) **Labilní stav.** Po vychýlení příčnou silou se prut rychle prohýbá, až nastane zlom prutu (obr. 2c). Jelikož mezní osově zatížení je nepatrně větší než kritická síla, uvažuje se F_{krit} jako mez nosnosti tenkých prutů (obr. 3).

Celou problematiku, kdy o nosnosti částí nerozhodne pevnost jejich materiálu, ale stabilitní stav rovnováhy, je shrnuta pod názvem „stabilita“.

Kritická síla závisí na rozměrech vzpěry a na způsobu uložení jejich konců, na materiálu a homogenitě. V předmětu Pružnost a pevnost 2 (PP2) byly ukázány 4 základní případy (obr. 4):



Obr. 3 – Tři fáze rovnováhy



Obr. 4 – Čtyři základní případy vzpěru

2.1 Základní předpoklady řešení:

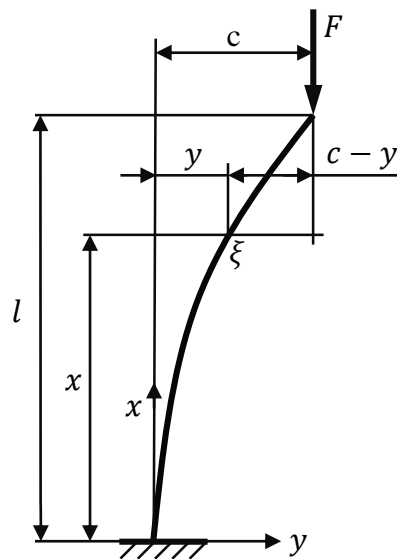
1. Ideální prut
2. Ideální materiál
3. Ideální uložení
4. Ideální síla

2.2 Klasické řešení

Tato metoda bylo probrána v PP2. Na základě působení dočasné příčné síly se prut vychýlí ze své původní pozice a díky tomu lze vyjádřit moment v obecném řezu. Ten je použit v diferenciální rovnici průhybu. Po integrování se v rovnici vyskytnou integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek.

2.2.1 I. případ vzpěru

Jedná se o případ prutu na jednom konci vetknutém (obr. 5).



Obr. 5 – První případ vzpěru

Velikost kritické síly z podmínky rozdělení rovnováhy (vznik indiferentního stavu) ideálního pružného přímého centricky tlačeného prutu stálého průřezu poprvé popsal roku 1744 L. Euler, proto se hovoří o Eulerově kritické síle.

Pro určení kritické síly se uvažuje, že prut se vychýlí na volném konci o vzdálenost c . V obecném řezu ξ vznikne průhyb y a ohybový moment

$$M_o = -F(c - y) \quad (1)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry je

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ} = \frac{F}{EJ}(c - y) \quad (2)$$

a zavede-li se substituce

$$\frac{F}{EJ} = \alpha^2 \quad (3)$$

pak rovnice (2) vypadá

$$y'' = \alpha^2(c - y) \quad (4)$$

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 c$$

Partikulární integrál bude

$$y_p = c \quad (5)$$

Obecné řešení diferenciální rovnice

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + c \quad (6)$$

kde A, B jsou integrační konstanty, které musí vyhovět i okrajovým podmínkám.

Okrajové podmínky jsou dány fyzikálními podmínkami uložení konců vzpěr nebo vzájemnou souvislostí v charakteristickém řezu u vzpěr složených.

Ve vetknutém konci platí

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y = 0 \\ 0 = A \cos 0 + B \sin 0 + c \end{aligned} \quad (7)$$

$$A = -c$$

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y' = 0 \\ y' = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x \\ 0 = -\alpha A \sin 0 + \alpha B \cos 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$B = 0$$

Rovnice průhybové čáry bude po dosazení vypadat následovně

$$y = -c \cos \alpha x + c = c(1 - \cos \alpha x) \quad (9)$$

Platí pro každý řez, tedy i pro volný konec, kde $x = l$ a $y = c$

$$c = c(1 - \cos \alpha l)$$

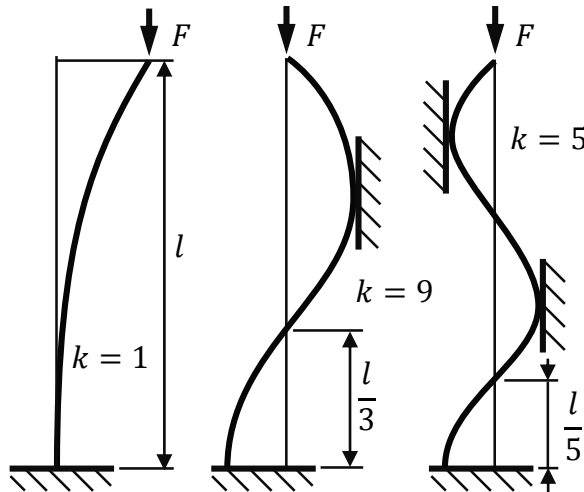
$$c \cos \alpha l = 0 \tag{10}$$

Rovnice (10) je rovna nule ve dvou případech:

1. buď $c = 0$, prut zůstane přímý, rovnováha je stabilní,
2. nebo $\cos \alpha l = 0$, $\alpha l = k \frac{\pi}{2}$ ($k = 1, 3, 5, \dots$)

Minimální hodnota je při $k = 1$

$$l \sqrt{\frac{F}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$



Obr. 6 – Kritický součinitel „k“

Vztah pro sílu bude po úpravě předchozího výrazu

$$F = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \tag{12}$$

Na obr. 6 je vidět, jaký význam má součinitel k . Důležitý je první případ ($k = 1$), kdy nastane nejmenší kritická síla F_{kr} . Velikost síly závisí přímo úměrně na tuhosti prutu, která je dána součinem EJ . A jelikož je potřeba znát nejnižší kritickou sílu, při které hrozí nestabilita prutu, tak u nekrhových profilů musí být uvažován minimální osový kvadratický moment J_{min} .

Vzorec (12) může být použit pouze v rozsahu platnosti Hookova zákona (kritické napětí nepřekročí mez úměrnosti)

$$\sigma_{kr} \leq \sigma_u \quad (13)$$

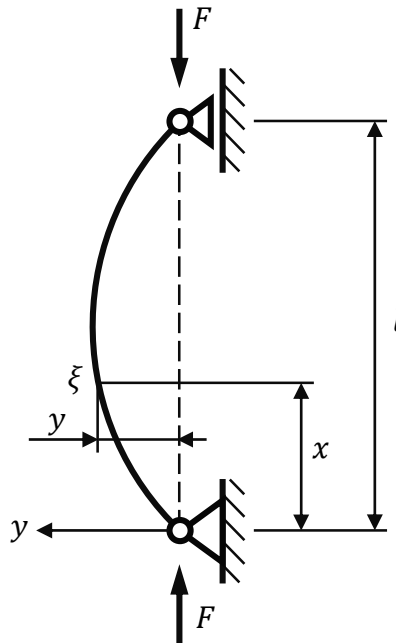
Finální rovnice kritické síly pro I. případ vzpěru vypadá

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{4l^2} \quad (14)$$

Tento postup platí jen v rozsahu malých průhybů, kde bylo možno použít zjednodušenou diferenciální rovnici průhybu (2).

2.2.2 II. případ vzpěru

Jedná se o prut na obou koncích kloubově uložený (obr. 7).



Obr. 7 – Druhý případ vzpěru

Opět je předpokládán osově zatížený prut ve vyhnutém tvaru. V obecném řezu ξ je průhyb y a moment excentricity

$$M_o = Fy \quad (15)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry je

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ} = -\frac{F}{EJ}y \quad (16)$$

Zavede se substituce

$$\frac{F}{EJ} = \alpha^2; \quad y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (17)$$

Řešením této rovnice je

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (18)$$

Okrajová podmínka pro dolní kloub zní

$$x = 0; \quad y = 0 = A \cos 0 + B \sin 0 \Rightarrow A = 0 \quad (19)$$

Průhybová čára

$$y = B \sin \alpha x \quad (20)$$

je tedy sinusovka.

Okrajová podmínka pro druhý konec je

$$x = l; \quad y = 0 = B \sin \alpha l \quad (21)$$

První možnost je $B = 0$, pak $y = 0$ a prut zůstane přímý (stabilní rovnováha). Nicméně z této varianty se nedá zjistit kritickou sílu. Tu naopak lze získat na základě druhé možnosti

$$\sin \alpha l = 0 \quad (22)$$

a tedy

$$\alpha l = k\pi \text{ kde } k = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Minimální hodnota je při $k = 1$

$$l \sqrt{\frac{F}{EJ}} = \pi \quad (24)$$

A tedy kritická síla je

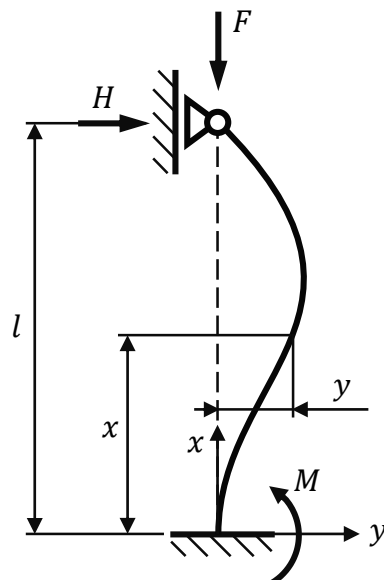
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (25)$$

V případě nekruhových profilů je znovu potřeba brát v potaz pouze nejmenší osový kvadratický moment

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (26)$$

2.2.3 III. případ vzpěru

Prut je na jednom konci vetknutý a na druhém je uchycen v kloubu volně posuvném ve směru osy (obr. 8).



Obr. 8 – Třetí případ vzpěru

Po osovém zatížení silou F na horním konci prutu je vyvolána horizontální reakce H . V obecném řezu ξ o průhybu y působí moment sil H a F

$$M_{\xi} = Fy - H(l - x) \quad (27)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry je

$$y'' = -\frac{F}{EJ} \left[y - \frac{H}{F}(l - x) \right] \quad (28)$$

a za použití substituce (3)

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{H}{F}(l - x) \quad (29)$$

Partikulární integrál úplné rovnice je

$$y_P = \frac{H}{F}(l - x) \quad (30)$$

a obecné řešení

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{H}{F}(l - x) \quad (31)$$

Integrační konstanty se určí z okrajových podmínek vetknutého konce.

První okrajová podmínka

$$x = 0; y = 0 \quad (32)$$

$$0 = A \cos 0 + B \sin 0 + \frac{H}{F}(l - 0) \rightarrow A = -\frac{H}{F}l \quad (33)$$

Druhá okrajová podmínka

$$x = 0; y' = 0 \quad (34)$$

$$y' = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x - \frac{H}{F}$$

$$0 = \alpha \left[-A \sin 0 + B \cos 0 - \frac{H}{\alpha F} \right] \quad (35)$$

$$B = \frac{H}{\alpha F}$$

Obecná rovnice průhybu je

$$y = \frac{H}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x - l \cos \alpha x + (l - x) \right] \quad (36)$$

Tato rovnice musí vyhovovat i pro druhý konec prutu

$$x = l; y = 0 \quad (37)$$

$$0 = \frac{H}{F} \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha l - l \cos \alpha l \right] \quad (38)$$

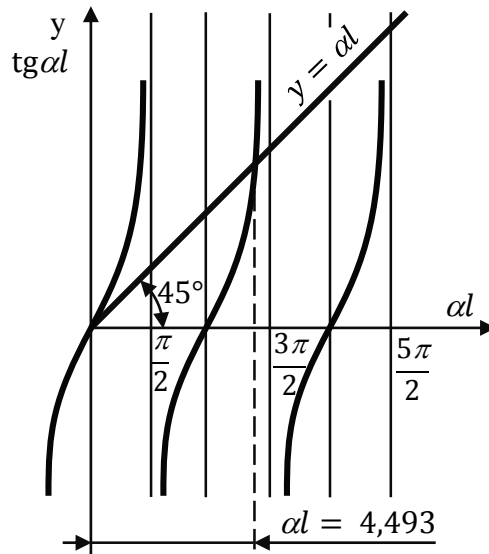
Rovnice je splněna ve dvou případech:

1. Pro $H/F = 0$, poloha je stabilní, $y = 0$
2. pro $1/\alpha \sin \alpha l - l \cos \alpha l = 0$

Po úpravě dostaneme transcendentní rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l \quad (39)$$

Hodnotu αl lze získat graficky (obr. 9). Hledaná hodnota je v průsečíku křivky $\operatorname{tg} \alpha l$ s přímkou $y = \alpha l$.



Obr. 9 – Průsečík křivek

Nejmenší kořen je $\alpha l \doteq 4,493$. Takže

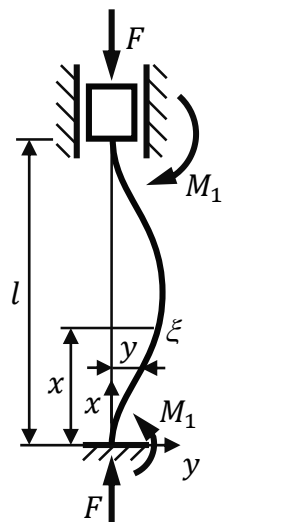
$$4,493 = \alpha l = l \sqrt{\frac{20,16 EJ}{l^2}}$$

(40)

$$F_{kr} = \frac{4,493^2 EJ}{l^2} = \frac{20,16 EJ}{l^2} \cong \frac{2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

2.2.4 IV. případ vzpěru

Jeden konec je vetknutý a druhý je vetknutý a posuvný v ose prutu (obr. 10).



Obr. 10 – Čtvrtý případ vzpěru

V místech vetknutí působí momenty vetknutí M_1 . Obecný moment v řezu ξ je tedy

$$M = Fy - M_1 \quad (41)$$

A diferenciální rovnice průhybové čáry bude

$$y'' = -\frac{F}{EJ} \left(y - \frac{M_1}{F} \right) \quad (42)$$

Opět je provedena substituce výrazu před závorkou, viz (3). Tím vznikne diferenciální rovnice

$$y'' = -\alpha^2 \left(y - \frac{M_1}{F} \right) \quad (43)$$

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \frac{M_1}{F}$$

Partikulární řešení bude ve tvaru

$$y_P = \frac{M_1}{F} \quad (44)$$

a obecné řešení

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{M_1}{F} \quad (45)$$

Integrační konstanty jsou získány z okrajových podmínek

$$x = 0, \quad y = 0$$

$$0 = A \cos 0 + B \sin 0 + \frac{M_1}{F} \quad (46)$$

$$A = -\frac{M_1}{F}$$

$$x = 0, \quad y' = 0$$

$$y' = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x$$

$$0 = -\alpha A \sin 0 + \alpha B \cos 0 \quad (47)$$

$$B = 0$$

Obecná rovnice průhybu je tedy

$$y = -\frac{M_1}{F} \cos \alpha x + \frac{M_1}{F} = \frac{M_1}{F} (1 - \cos \alpha x) \quad (48)$$

Tato rovnice musí vyhovět i druhému koncovému bodu vzpěry

$$\begin{aligned}
 x = l, \quad y = 0 \\
 0 &= \frac{M_1}{F}(1 - \cos \alpha l) \\
 M_1 > 0; F < \infty; \frac{M_1}{F} &\neq 0 \\
 1 &= \cos \alpha l \\
 \alpha l &= k(2\pi); k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{49}$$

Opět je uvažována praktická hodnota $k = 1$.

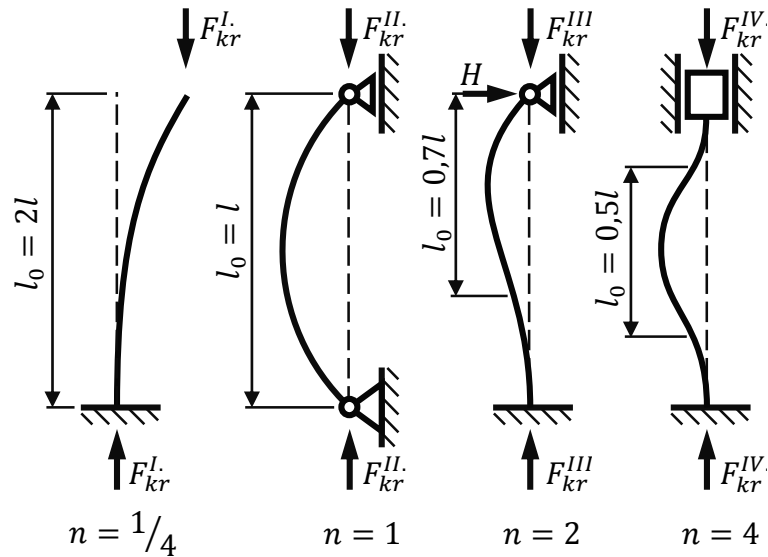
$$\begin{aligned}
 l \sqrt{\frac{F}{EJ}} &= 2\pi \\
 F_{kr} &= \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}
 \end{aligned} \tag{50}$$

Všechny případy lze vyjádřit jednotným výrazem

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_0^2} \tag{51}$$

kde l_0 je srovnávací délka vzpěry, která je rovna vzdálenosti inflexních bodů průhybové čáry. Základem pro srovnávací délku l_0 se bere prut na obou koncích uchycený v kloubových podpěrách (viz 2.2.2), jehož délka se rovná srovnávací $l = l_0$. Poměrem délek je získán korekční součinitel (72) pro ostatní případy vzpěru (obr. 11).

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 = n \tag{52}$$

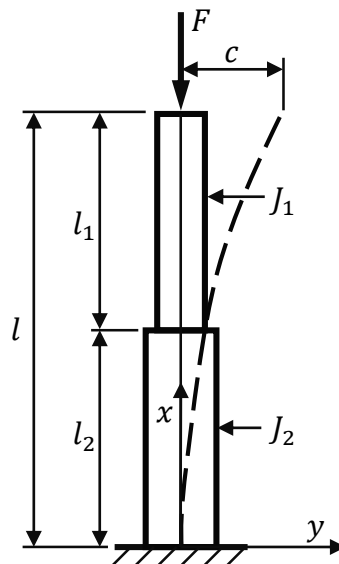


Obr. 11 – Korekční součinitel „n“

Výsledná rovnice kritické síly je

$$F_{kr} = n \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (53)$$

2.2.5 I. případ vzpěru se změnou v průřezu



Obr. 12 – První případ vzpěru se změnou v průřezu

Pro lepší využití materiálu a udržení podobného kritického zatížení se často využívá vzpěru s proměnným průřezem, kdy v místě většího ohybového momentu se zvětší průřez (obr. 12). Zesílení části prutu je provedeno např. přivařením, nebo nýtováním dodatečného plátování.

Pro zjištění kritické hodnoty zátěže F_{kr} je potřeba řešit diferenciální rovnice pro každý úsek zvlášť. Diferenciální rovnice průhybové čáry jsou

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F(c - y_1)$$

$$EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = F(c - y_2)$$
(54)

Jako v předchozích případech se zavedou analogicky substituce

$$\alpha_1^2 = \frac{F}{EJ_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{F}{EJ_2}$$
(55)

Po úpravě

$$y_1'' + \alpha_1 y_1 = \alpha_1 c$$

$$y_2'' + \alpha_2 y_2 = \alpha_2 c$$
(56)

Obecná řešení budou vypadat

$$y_1 = A \cos \alpha_1 x + B \sin \alpha_1 x + c$$

$$y_2 = D \cos \alpha_2 x + F \sin \alpha_2 x + c$$
(57)

Dosadí se okrajové podmínky

$$x = 0, \quad y_2 = 0$$

$$0 = D \cos \alpha_2 0 + F \sin \alpha_2 0 + c$$

$$D = -c$$
(58)

Druhá okrajová podmínka se vztahuje k derivaci průhybu (úhel natočení)

$$x = 0, \quad y_2' = 0$$

$$y_2' = c \alpha_2 \sin \alpha_2 x + F \alpha_2 \cos \alpha_2 x$$

$$0 = c \alpha_2 \sin \alpha_2 0 + F \alpha_2 \cos \alpha_2 0$$

$$F = 0$$
(59)

Rovnice průhybové čáry v první části je

$$y_2 = -c \cos \alpha_2 x + c = c(1 - \cos \alpha_2 x)$$
(60)

Na konci vzpěru je známa okrajová podmínka pro vychýlení od osy x

$$x = l, \quad y_1 = c$$

$$A \cos \alpha_1 l + B \sin \alpha_1 l + c = c \quad (61)$$

$$A = -B \frac{\sin \alpha_1 l}{\cos \alpha_1 l} = -B \operatorname{tg} \alpha_1 l$$

na přechodu první a druhé části musí platit spojitost průhybu

$$x = l_2, \quad y_1 = y_2$$

$$A \cos \alpha_1 l_2 + B \sin \alpha_1 l_2 + c = c(1 - \cos \alpha_2 l_2) \quad (62)$$

$$B = \frac{c \cos \alpha_2 l_2 \cos \alpha_1 l}{\sin \alpha_1 l_1}$$

a na tom samém místě musí být křivka vychýleného vzpěru hladká.

$$x = l_2, \quad y'_1 = y'_2$$

$$y'_1 = -A\alpha_1 \sin \alpha_1 x + B\alpha_1 \cos \alpha_1 x \quad (63)$$

$$y'_2 = c\alpha_2 \sin \alpha_2 x$$

$$-A\alpha_1 \sin \alpha_1 l_2 + B\alpha_1 \cos \alpha_1 l_2 = c\alpha_2 \sin \alpha_2 l_2$$

Po dosazení A a B a následné úpravě vyjde transcendentní rovnice

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (64)$$

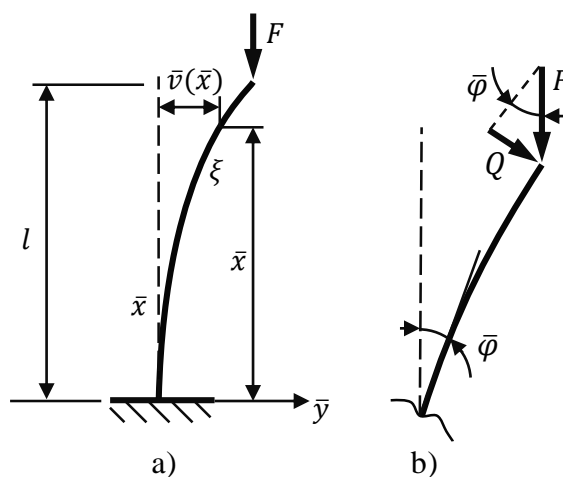
Pro zjištění kritické síly F_{kr} je zapotřebí znát materiál vzpěru, osové kvadratické momenty J_1, J_2 a délky jednotlivých částí l_1, l_2 . Výsledné kritické zatížení lze poté získat graficky.

2.3 Řešení podle WWR

Tento název není oficiální, ale je to mnou vytvořená zkratka pro dále používanou metodu. Tato metoda je pojmenována podle hlavních tvůrců, C. M. Wangovi, C. Y. Wangovi a J. N. Reddym.

I nadále platí základní předpoklady řešení (viz kapitola 0). Značení římskými číslicemi odpovídá značení u klasického řešení (kapitola 2.2) až na poslední nově řešený V. případ vzpěru.

2.3.1 I. případ vzpěru



Obr. 13 – První případ vzpěru: a) celek, b) řez

Diferenciální rovnice průhybové čáry zní

$$M_o = -EJ \frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{x}^2} \quad (65)$$

kde M_o je ohybový moment, \bar{v} je vychýlení (průhyb) ve směru osy y a \bar{x} je souřadnice vedená od základny vzhůru podél prutu. Tato teorie je založená na předpokladu, že příčné působení síly F na prutu je zanedbatelné.

$$dM_o = Q dx$$

$$\frac{dM_o}{dx} = Q \quad (66)$$

Z obr. 13b je patrný vztah mezi Q (smyková síla působící kolmo k nakloněné ose prutu) a F .

$$\sin \varphi = \frac{Q}{F} \approx \varphi; \varphi = \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}}$$

$$Q = F \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad (67)$$

$$\frac{dQ}{d\bar{x}} = F \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{x}^2}$$

Spojením rovnic (65), (66) a (67) je získána rovnice

$$\frac{d^2 M_o}{d\bar{x}^2} = \frac{dQ}{d\bar{x}} = F \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{x}^2} \quad (68)$$

$$EJ \frac{d^4\bar{v}}{d\bar{x}^4} + F \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{x}^2} = 0$$

Pro lepší práci s rovnicemi je eliminován délkový rozměr z derivací

$$v = \frac{\bar{v}}{l}, x = \frac{\bar{x}}{l}$$

$$EJ \frac{d^4 vl}{d(xl)^4} + F \frac{d^2 vl}{d(xl)^2} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{Fl^2}{EJ} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

Pro lepší práci se zavede substituce

$$\alpha = \frac{Fl^2}{EJ} \quad (70)$$

Protože v budoucích příkladech bude nadále používána metoda WWR, tak pod písmenem α bude myšlena výše zmíněná substituce. Tato substituce se nazývá parametr stability a půjde o důležitý parametr v nadcházejících příkladech.

Po dosažení parametru α je získána Eulerova rovnice vzpěru

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (71)$$

Obecné řešení rovnice (71) a její derivace budou pak vypadat:

$$v = C_1 \sin \sqrt{\alpha} x + C_2 \cos \sqrt{\alpha} x + C_3 x + C_4 \quad (72)$$

$$\frac{dv}{dx} = C_1 \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} x - C_2 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} x + C_3$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -C_1 \alpha \sin \sqrt{\alpha} x - C_2 \alpha \cos \sqrt{\alpha} x$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -C_1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} x + C_2 \alpha \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} x$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = C_1 \alpha^2 \sin \sqrt{\alpha} x + C_2 \alpha^2 \cos \sqrt{\alpha} x$$

Neznámé konstanty C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou získány díky znalosti dvou okrajových podmínek na jednom a na druhém konci prutu.

Rovnice pro zjištění konstant C_i jsou napsány ve tvaru, který obecně popisuje průhyb $v(x)$, úhel natočení $\frac{d}{dx} v(x) = \varphi(x)$, moment¹ $\frac{d^2}{dx^2} v(x) \approx M_o(x)$ a sílu¹ $\frac{d^3}{dx^3} v(x) \approx F(x)$

$$\begin{aligned} \bar{s}_1^0 v(0) + \bar{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \bar{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \bar{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\ \hat{s}_1^0 v(0) + \hat{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \hat{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \hat{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\ \bar{s}_1^1 v(1) + \bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) &= 0 \\ \hat{s}_1^1 v(1) + \hat{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \hat{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \hat{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) &= 0 \end{aligned} \quad (73)$$

Hodnoty \bar{s}_i a \hat{s}_i jsou parametry, které říkají, jaké fyzikální podmínky platí na koncích prutu ($x = 0$ a $x = 1$). Horní index ,0' ($,1'$) u parametru s identifikuje hodnotu na ose x , tzn. $x = 0$ ($x = 1$).

Po dosazení obecného řešení (72) a jeho derivací do rovnic (73) a následném seskupení členů se stejnými konstantami C_i jsou získány 4 homogenní rovnice

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}(\bar{s}_2^0 - \bar{s}_4^0 \alpha) & \bar{s}_1^0 - \bar{s}_3^0 \alpha & \bar{s}_2^0 & \bar{s}_1^0 \\ \sqrt{\alpha}(\hat{s}_2^0 - \hat{s}_4^0 \alpha) & \hat{s}_1^0 - \hat{s}_3^0 \alpha & \hat{s}_2^0 & \hat{s}_1^0 \\ S_{31} & S_{32} & \bar{s}_1^1 + \bar{s}_2^1 & \bar{s}_1^1 \\ S_{41} & S_{42} & \hat{s}_1^1 + \hat{s}_2^1 & \hat{s}_1^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

kde S_{ij} jsou substituce dlouhých výrazů

¹ Momentovou podmínku je možné napsat ve tvaru bez EJ ($EJ \neq 0, \infty$) pouze v případě, že se jedná o podmínku s nulovým momentem. V takovém případě je bez ohledu na EJ i nulová druhá veličina. Totéž platí i u síly.

$$\begin{aligned}
S_{31} &= \bar{s}_1^1 \sin \sqrt{\alpha} + \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} - \bar{s}_3^1 \alpha \sin \sqrt{\alpha} - \bar{s}_4^1 \alpha \cos \sqrt{\alpha} \\
S_{32} &= \bar{s}_1^1 \cos \sqrt{\alpha} - \bar{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} - \bar{s}_3^1 \alpha \cos \sqrt{\alpha} + \bar{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} \\
S_{41} &= \hat{s}_1^1 \sin \sqrt{\alpha} + \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} - \hat{s}_3^1 \alpha \sin \sqrt{\alpha} - \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} \\
S_{42} &= \hat{s}_1^1 \cos \sqrt{\alpha} - \hat{s}_2^1 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} - \hat{s}_3^1 \alpha \cos \sqrt{\alpha} + \hat{s}_4^1 \alpha \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}
\end{aligned} \tag{75}$$

Jelikož se uvažuje I. případ vzpěru, pak okrajovými podmínkami ve vetknutí ($x = 0$) budou nulový průhyb $v(0) = 0$ a nulový úhel natočení $\frac{d}{dx}v(0) = \varphi(x) = 0$. Aby první dvě rovnice (73) odpovídali těmto podmínkám, musí se za jednotlivé parametry dosadit

$$\begin{aligned}
\bar{s}_1^0 &= \hat{s}_2^0 = 1 \\
\bar{s}_2^0 &= \bar{s}_3^0 = \bar{s}_4^0 = \hat{s}_1^0 = \hat{s}_3^0 = \hat{s}_4^0 = 0
\end{aligned} \tag{76}$$

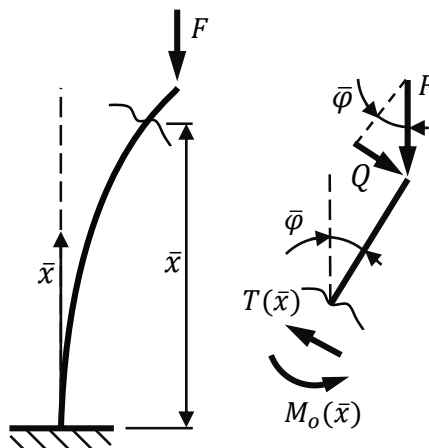
Pro lepší pochopení, jak funguje tento krok, následují rovnice s dosazenými parametry a následnou úpravou.

$$\begin{aligned}
\bar{s}_1^0 v(0) + \bar{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \bar{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \bar{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\
1 \cdot v(0) + 0 \cdot \frac{d}{dx} v(0) + 0 \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(0) + 0 \cdot \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\
v(0) &= 0
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}_1^0 v(0) + \hat{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \hat{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \hat{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\
0 \cdot v(0) + 1 \cdot \frac{d}{dx} v(0) + 0 \cdot \frac{d^2}{dx^2} v(0) + 0 \cdot \frac{d^3}{dx^3} v(0) &= 0 \\
\frac{d}{dx} v(0) &= 0
\end{aligned} \tag{78}$$

Rovnice (74) je obecným řešením použitelným pro všechny typy vzpěrů, které lze popsat okrajovými podmínkami z daných rovnic (73).

Volný konec prutu ($x = 1$) musí být též popsán dvěma okrajovými podmínkami. Jednou z nich může být nulový ohybový moment $\frac{d^2}{dx^2} v(1) = M_o(1) = 0$ a v druhém případě se použije metoda řezu (obr. 14).



Obr. 14 – Volný konec prutu

Z rovnovážné rovnice sil je získán průběh posouvající síly $T(\bar{x})$

$$T(\bar{x}) = Q \quad (79)$$

Protože se uvažuje pouze nepatrné vychýlení prutu mimo osu x , bude platit

$$\sin \bar{\varphi} \approx \bar{\varphi} \quad (80)$$

A tudíž síla Q způsobená příčným působením síly F bude

$$Q = F \bar{\varphi} = F \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad (81)$$

Ze Schwedlerovy věty je známo, že

$$\frac{dM_o}{d\bar{x}} = T(\bar{x}) \quad (82)$$

a po dosazení Bernoulliho diferenciální rovnice (65), rovnice (81) a parametru stability α (70) do Schwedlerovy věty (82) je dostána okrajová podmínka pro volný konec

$$-EJ \frac{d^3 \bar{v}}{d\bar{x}^3} = F \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad (83)$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{Fl^2}{EJ} \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha \frac{dv}{dx} = 0$$

Třetí rovnici z (73) může být použita pro definici nulového momentu v $x = 1$

$$\bar{s}_1^1 v(1) + \bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \boxed{\bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1)} + \bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0$$

$$\bar{s}_3^1 = 1 \tag{84}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} v(1) = 0$$

a čtvrtá rovnice bude použita pro výše napsanou okrajovou podmínku (83)

$$\hat{s}_1^1 v(1) + \boxed{\hat{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1)} + \hat{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \boxed{\hat{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1)} = 0$$

$$\hat{s}_2^1 = \alpha, \quad \hat{s}_4^1 = 1 \tag{85}$$

$$\alpha \frac{d}{dx} v(1) + \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0$$

Jakmile se dosadí do rovnice (73) za parametry s známé hodnoty, značně se zjednoduší tvar rovnice a jedinou neznámou zůstane parametr stability α

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha \sin \sqrt{\alpha} & -\alpha \cos \sqrt{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{86}$$

Nenulové řešení matice existuje tehdy, je-li matice singulární

$$\det = 0 \tag{87}$$

Determinant matice A lze získat například Laplaceovým rozvojem (rozvoj podle čtvrtého sloupce)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha \sin \sqrt{\alpha} & -\alpha \cos \sqrt{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 & 1 \\ -\alpha \sin \sqrt{\alpha} & -\alpha \cos \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \tag{88}$$

$$\det(A) = \sqrt{\alpha^5} \cos \sqrt{\alpha} = 0$$

Vztah (88) platí ve dvou situacích:

1. když $\sqrt{\alpha^5} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ – v takovém případě nedojde ani k vychýlení a tudíž nezjistíme potřebnou kritickou sílu F_{kr} z parametru α , takže jedinou možností přináší druhá varianta
2. $\cos \sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \arccos 0 = k \frac{\pi}{2}; k = 1, 3, \dots \Rightarrow \alpha = k \frac{\pi^2}{4}, k = 1, 3, \dots$

Opět je důležitá nejnižší hodnota ($k = 1$)

$$\alpha = \frac{\pi^2}{4} \quad (89)$$

Vyjádřením kritické síly F_{kr} lze ověřit, že výsledný vztah je totožný se vztahem (14), který byl získán pomocí klasického řešení (kapitola 2.2.1).

$$\frac{Fl^2}{EJ} = \alpha = \frac{\pi^2}{4}$$

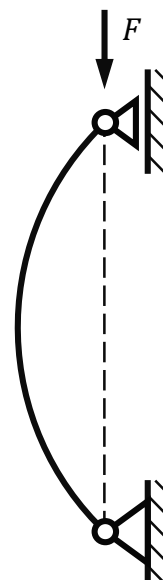
$$F = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (90)$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{4l^2}$$

2.3.2 II. případ vzpěru

Pro připomenutí se jedná o vzpěr na jednom konci s pevnou kloubovou podpěrou a na druhém s posuvnou (obr. 15). Rozdíl oproti prvnímu případu bude pouze v okrajových podmínkách, tj. parametrech s , které se můžou už rovnou dosadit do soustavy 4 homogenních rovnic (74).

Okrajové podmínky v pevné kloubové podpěře jsou uvedeny i se zastupujícím parametrem s zjištěným z rovnic (73), neuvedené parametry s jsou rovny nule.



První je nulový průhyb

Obr. 15 – Druhý případ vzpěru

$$x = 0, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^0 v(0)} + \bar{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \bar{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \bar{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (91)$$

$$\bar{s}_1^0 = 1$$

druhý nulový moment

$$x = 0, \quad M_o = 0$$

$$\hat{s}_1^0 v(0) + \hat{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \boxed{\hat{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0)} + \hat{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (92)$$

$$\hat{s}_3^0 = 1$$

Okrajové podmínky ve vertikálně posuvné kloubové podpěře a parametry s jsou následující.

První okrajová podmínka

$$x = 1, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^1 v(1)} + \bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (93)$$

$$\bar{s}_1^1 = 1$$

Druhá okrajová podmínka

$$x = 1, \quad M_o = 0$$

$$\hat{s}_1^1 v(1) + \hat{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \boxed{\hat{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1)} + \hat{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (94)$$

$$\hat{s}_3^1 = 1$$

Po dosazení parametrů do soustavy rovnic (74) je vztah

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \sin \sqrt{\alpha} & \cos \sqrt{\alpha} & 1 & 1 \\ -\alpha \sin \sqrt{\alpha} & -\alpha \cos \sqrt{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Matice A je singulární, pokud

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \\ -\alpha^2 \sin \sqrt{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (96)$$

Pro zjištění parametru α je použitelný

$$\sin \sqrt{\alpha} = 0 \quad (97)$$

A tedy parametr stability je (pro $k = 1$)

$$\alpha = \pi^2 \quad (98)$$

a rovnice pro kritickou sílu je

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (99)$$

2.3.3 III. případ vzpěru

Jeden konec je vetknutý a druhý uchycen kloubovou podpěrou (obr. 5).

Následují okrajové podmínky a jejich aplikace v rovnicích (73) pomocí parametrů s .

První okrajová podmínka

$$x = 0, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^0 v(0)} + \bar{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \bar{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \bar{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (100)$$

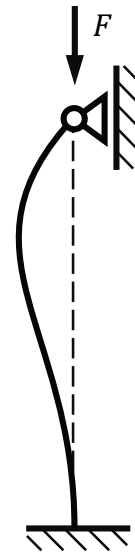
$$\bar{s}_1^0 = 1$$

Druhá okrajová podmínka

$$x = l, \quad \varphi = 0^\circ$$

$$\hat{s}_1^0 v(0) + \boxed{\hat{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0)} + \hat{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \hat{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (101)$$

$$\hat{s}_2^0 = 1$$



Obr. 16 – Třetí případ vzpěru

Třetí okrajová podmínka

$$x = 1, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^1 v(1)} + \bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (102)$$

$$\bar{s}_1^1 = 1$$

Čtvrtá okrajová podmínka

$$x = 1, \quad M_o = 0$$

$$\hat{s}_1^1 v(1) + \hat{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \boxed{\hat{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1)} + \hat{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (103)$$

$$\hat{s}_3^1 = 1$$

Parametry s se dosadí do soustavy rovnic (74)

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sin \sqrt{\alpha} & \cos \sqrt{\alpha} & 1 & 1 \\ -\alpha \sin \sqrt{\alpha} & -\alpha \cos \sqrt{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Matice A je singulární právě tehdy, když

$$\det(A) = 0$$

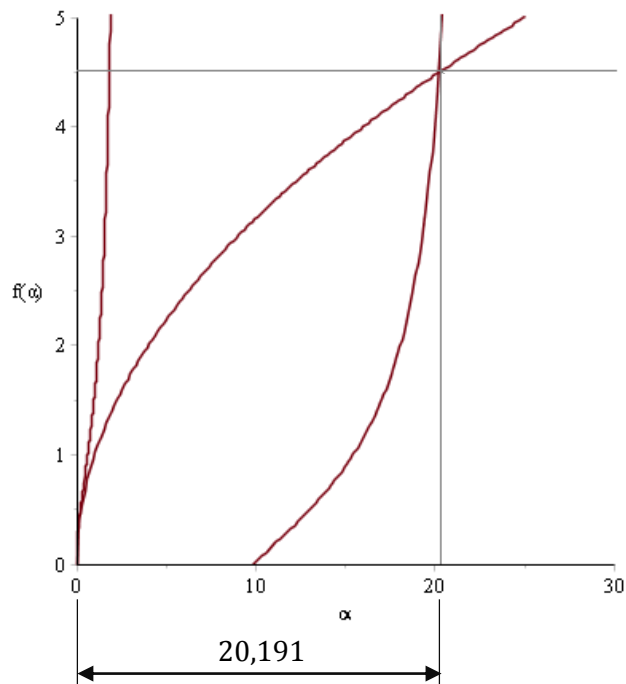
$$-\sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} + \alpha \sin \sqrt{\alpha} = 0 \quad (105)$$

Hodnotu α lze získat graficky (obr. 17).

$$\alpha \doteq \mathbf{20,191} = \mathbf{2,0457 \pi^2} \quad (106)$$

Kritická síla bude

$$F_{kr} = \frac{2,0457 \pi^2 E J_{min}}{l^2} \quad (107)$$



Obr. 17 – Grafické řešení

2.3.4 IV. případ vzpěru

Jedná se o vzpěr na jednom konci pevně vetknutý a na druhém vertikálně posuvný s vetknutím (obr. 18).

Okrajové podmínky a jejich parametry budou vypadat následovně.

První okrajová podmínka

$$x = 0, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^0 v(0)} + \bar{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0) + \bar{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \bar{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (108)$$

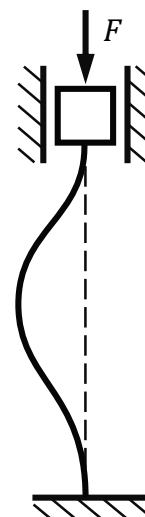
$$\bar{s}_1^0 = 1$$

Druhá okrajová podmínka

$$x = 0, \quad \varphi = 0^\circ$$

$$\hat{s}_1^0 v(0) + \boxed{\hat{s}_2^0 \frac{d}{dx} v(0)} + \hat{s}_3^0 \frac{d^2}{dx^2} v(0) + \hat{s}_4^0 \frac{d^3}{dx^3} v(0) = 0 \quad (109)$$

$$\hat{s}_2^0 = 1$$



Obr. 18 – Čtvrtý případ vzpěru

Třetí okrajová podmínka

$$x = 1, \quad v = 0$$

$$\boxed{\bar{s}_1^1 v(1)} + \bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1) + \bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (110)$$

$$\bar{s}_1^1 = 1$$

Čtvrtá okrajová podmínka

$$x = 1, \quad \varphi = 0^\circ$$

$$\hat{s}_1^1 v(1) + \boxed{\hat{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1)} + \hat{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \hat{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1) = 0 \quad (111)$$

$$\hat{s}_2^1 = 1$$

Po dosazení bude soustava rovnic (74) vypadat

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sin \sqrt{\alpha} & \cos \sqrt{\alpha} & 1 & 1 \\ \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Výsledný parametr α

$$\det(A) = \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0 \quad (113)$$

$$\alpha = 4\pi^2$$

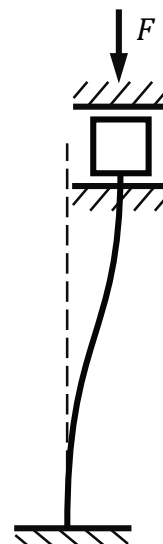
a kritická síla

$$F_{kr} = \frac{4 \pi^2 E J_{min}}{l^2} \quad (114)$$

2.3.5 V. případ vzpěru

Tento případ vzpěru nebyl popsán v PP2. Je podobný čtvrtému případu, ale posuvné vetknutí není vertikálně posuvné nýbrž horizontálně (obr. 19). Bude tedy potřeba nahradit jednu okrajovou podmínku (110) ze čtvrtého případu. Ostatní podmínky (108), (109) a (111) jsou totožné.

Okrajová podmínka nahrazující (110) je stejná jako u volného konce (83)



Obr. 19 – Pátý případ vzpěru

$$x = 1, \quad \frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha \frac{dv}{dx} = 0$$

$$\bar{s}_1^1 v(1) + \boxed{\bar{s}_2^1 \frac{d}{dx} v(1)} + \bar{s}_3^1 \frac{d^2}{dx^2} v(1) + \boxed{\bar{s}_4^1 \frac{d^3}{dx^3} v(1)} = 0 \quad (115)$$

$$\bar{s}_2^1 = \alpha, \quad \bar{s}_4^1 = 1$$

Okrajové podmínky zastoupené parametry s se dosadí do soustavy rovnic (74)

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\alpha} \cos \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Výsledný parametr α

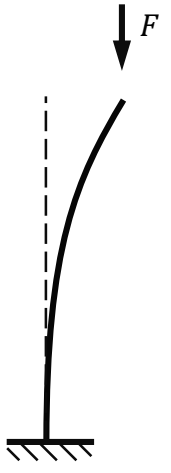
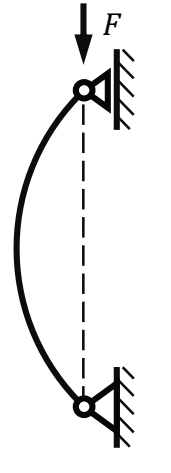
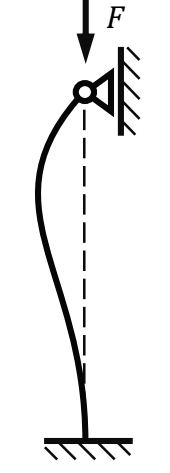
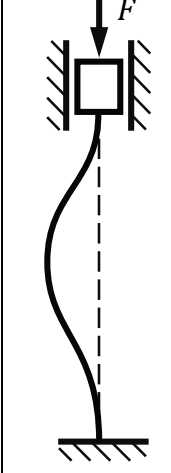

$$\det(A) = \alpha^2 \sin \sqrt{\alpha} = 0 \quad (117)$$

$$\alpha = \pi^2$$

a kritická síla

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (118)$$

Všech pět případů je shrnuto v tab. 1 na následující stránce.

Uložení	Vetknutí x volný konec	Kloubové podpěry	Vetknutí x Kloub. podpěra	Vetknutí x vetknutí (vertikální posuv)	Vetknutí x vetknutí (vodorovný posuv)
Nenulové parametry \bar{s} a \hat{s}	$\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_3^1 = \hat{s}_4^1 = 1$ $\hat{s}_2^1 = \alpha$	$\bar{s}_1^0 = \hat{s}_3^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \hat{s}_3^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \hat{s}_3^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = 1$ $\bar{s}_1^1 = \hat{s}_2^1 = 1$	$\bar{s}_1^0 = \hat{s}_2^0 = 1$ $\hat{s}_2^1 = \bar{s}_4^1 = 1$ $\bar{s}_2^1 = \alpha$
Obrázek					
Kritérium stability	$\cos \sqrt{\alpha} = 0$	$\sin \sqrt{\alpha} = 0$	$\sqrt{\alpha} = \tan \sqrt{\alpha}$	$\sin \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0$	$\cos \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0$
Parametr stability	$\alpha = \frac{\pi^2}{4}$	$\alpha = \pi^2$	$\alpha = 2,0457\pi^2$	$\alpha = 4\pi^2$	$\alpha = \pi^2$

Tab. 1 - Základní případy vzpěru

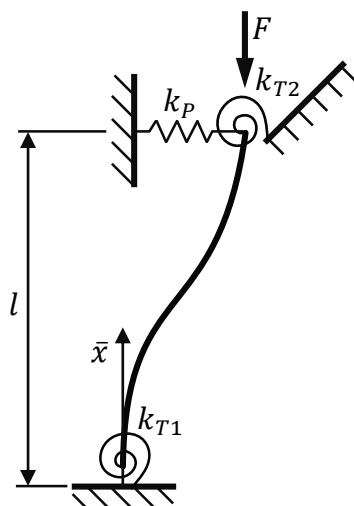
3 Příklady

3.1 Prut s pružinami

Zadání:

Prut o délce $l = 1000$ mm. Tuhost torzních pružin: $k_{T1} = 10$ Nmm/rad, $k_{T2} = 15$ N/mm², tuhost tlačné pružiny $k_P = 16,5$ N/mm², modul pružnosti $E = 2,1 \cdot 10^5$ N/mm² a osový kvadratický moment $J = 800$ mm⁴. Schéma je na obr. 20.

Jaké je kritérium stability α a kritická síla F_{kr} ?



Obr. 20 – Prut s pružinami

Řešení:

V počátku je průhyb nulový

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0, & \bar{v}(0) &= 0 \\ \bar{s}_1^0 &= 1 \end{aligned} \tag{119}$$

a moment je závislý na torzní pružině T1, tudíž druhá okrajová podmínka bude

$$\bar{x} = 0, \quad M_{T1}(0) - M_o(0) = 0 \tag{120}$$

kde

$$M_{T1}(\bar{x}) = k_{T1} \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \tag{121}$$

$$M_o(\bar{x}) \approx \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \bar{v}(\bar{x})$$

Po dosazení bude okrajová podmínka

$$k_{T1} \frac{d}{d\bar{x}} \bar{v}(0) - \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \bar{v}(0) = 0 \quad (122)$$

Provede se substituce výrazů

$$\bar{v} = v \cdot l, \quad \bar{x} = x \cdot l \quad (123)$$

ty se dosadí do rovnice (122) a získají se parametry s

$$x = 0, \quad k_{T1} \frac{d}{d(xl)} v(0)l - \frac{d^2}{d(xl)^2} v(0)l = 0$$

$$k_{T1}l \frac{d}{dx} v(0) - \frac{d^2}{dx^2} v(0) = 0 \quad (124)$$

$$\hat{s}_2^0 = k_{T1}l, \quad \hat{s}_3^0 = -1$$

Na druhém konci je situace zkomplikována torzní pružinou T2, přímou pružinou P a působící silou F . První okrajová podmínka pro tento konec tedy zní

$$\bar{x} = l, \quad M_{T2}(l) + M_o(l) = 0 \quad (125)$$

kde

$$M_{T2}(\bar{x}) = k_{T2} \frac{d\bar{v}}{d\bar{x}} \quad (126)$$

po opětovném zavedení substituce (123) je okrajová podmínka (a parametry s)

$$x = 1, \quad k_{T2}l \frac{d}{dx} v(1) + \frac{d^2}{dx^2} v(1) = 0 \quad (127)$$

$$\bar{s}_2^1 = k_{T2}l, \quad \bar{s}_3^1 = 1$$

a druhá okrajová podmínka je kombinace volného konce a bočního působení síly F_P od přímé pružiny P.

$$\bar{x} = l, \quad F_P + \frac{d^3}{d\bar{x}^3} \bar{v}(l) + \frac{F}{EJ} \frac{d}{d\bar{x}} \bar{v}(l) = 0 \quad (128)$$

Síla působící od tlačné pružiny P je dána vztahem

$$F_P = k_P \bar{v}(l) \quad (129)$$

Po dosazení (129) a substituci (123) bude získán vztah (a parametry s)

$$\begin{aligned}
& k_P \bar{v}(l) + \frac{d^3}{d\bar{x}^3} \bar{v}(l) + \frac{F}{EJ} \frac{d}{d\bar{x}} \bar{v}(l) = 0 \\
x = 1, \quad & k_P l v(1) + \frac{d^3}{d(xl)^3} v(1)l + \frac{F}{EJ} \frac{d}{d(xl)} v(1)l = 0 \\
& k_P l^3 v(1) + \frac{d^3}{dx^3} v(1) + \alpha \frac{d}{dx} v(1) = 0, \quad \alpha = \frac{Fl^2}{EJ_{min}} \\
& \hat{s}_1^1 = k_P l^3, \quad \hat{s}_2^1 = \alpha, \quad \hat{s}_4^1 = 1
\end{aligned} \tag{130}$$

Získané parametry s jsou následně dosazeny do matice A (74)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} k_{T1} l & \alpha & k_{T1} l & 0 \\ k_{T2} l \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) - \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -k_{T2} l \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & k_{T2} l & 0 \\ k_P l^3 \sin(\sqrt{\alpha}) & k_P l^3 \cos(\sqrt{\alpha}) & k_P l^3 + \alpha k_P l^3 & \end{bmatrix} \tag{131}$$

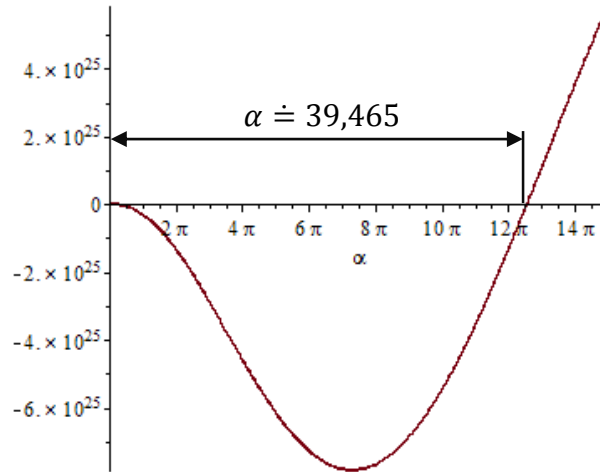
a z té se vyjádří determinant

$$\begin{aligned}
\det(A) = & \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) k_P k_{T1} k_{T2} l^5 - \sqrt{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha})^2 k_P k_{T1} k_{T2} l^5 - \sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha})^2 k_P k_{T1} k_{T2} l^5 \\
& + 2\sqrt{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}) k_P k_{T1} k_{T2} l^5 + \alpha^2 \sin(\sqrt{\alpha}) k_{T1} k_{T2} l^2 + \alpha^{3/2} \cos(\sqrt{\alpha}) k_P k_{T1} l^4 \\
& + \alpha^{3/2} \cos(\sqrt{\alpha}) k_P k_{T2} l^4 - \sqrt{\alpha} k_P k_{T1} k_{T2} l^5 - \sin(\sqrt{\alpha}) \alpha k_P k_{T1} l^4 \\
& - \sin(\sqrt{\alpha}) \alpha k_P k_{T2} l^4 - \sin(\sqrt{\alpha}) \alpha^2 k_P l^3 + \alpha^{5/2} \cos(\sqrt{\alpha}) k_{T1} l \\
& + \alpha^{5/2} \cos(\sqrt{\alpha}) k_{T2} l - \sin(\sqrt{\alpha}) \alpha^3
\end{aligned} \tag{132}$$

A aby byla matice A singulární, musí platit:

$$\det(A) = 0 \tag{133}$$

Parametr stability α je získán graficky (obr. 21).



Obr. 21 - Grafické vyjádření hledaného parametru α

A následně lze spočítat kritickou sílu:

$$\alpha = \frac{F_{kr} l^2}{EJ_{min}} \rightarrow F_{kr} = \frac{\alpha EJ_{min}}{l^2} = \frac{39,478 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 800}{1000^2} = \underline{\underline{6505,850 \text{ N}}}$$

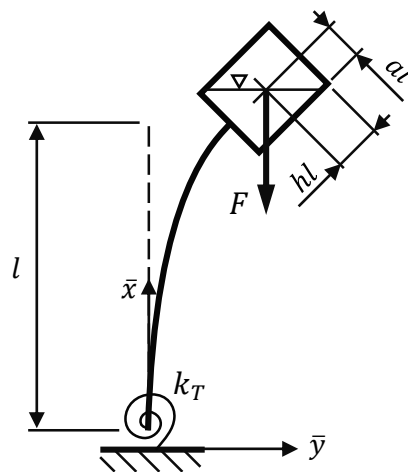
Pro porovnání vypočteme stejný prut bez působení pružin (kap. 2.3.1).

$$\alpha = \frac{\pi^2}{4}$$

$$F_{kr I.} = \frac{\alpha EJ_{min}}{l^2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 800}{1000^2} = 414,53 \text{ N}$$

Na závěr můžeme říct, že pružiny téměř 16krát zvýšily stabilitu prutu.

3.2 Poloha zátěže závislá na vychýlení prutu



Obr. 22 – Zátěž závislá na vychýlení prutu

Zadání:

Je dána nádoba se čtvercovou podstavou ($a_{yz} = 600 \text{ mm}$) o výšce $h_x = 700 \text{ mm}$, která je naplněna vodou do poloviny své výšky. Tato nádoba musí být umístěna 3 m nad zemí pomocí ocelové ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) tyče s kruhovým profilem uchycené v počátku torzní pružinou ($k_T = 2 \text{ Nmm/rad}$). Bezpečnost je $k_k = 3$.

Úkolem je určit minimální průměr tyče d_{min} .

Řešení:

Bezrozměrný vztah (Zyczkowski, 1991) popisující polohu síly F vůči volnému konci prutu je

$$\eta = -\frac{2h^2 + a^2}{h} \quad (134)$$

kde

$$h = \frac{h_x}{2l} = \frac{700}{2 \cdot 3000} = \frac{7}{60} \quad (135)$$

$$a = \frac{a_{yz}}{2l} = \frac{600}{2 \cdot 3000} = 0,1$$

Po dosazení získáme parametr η

$$\eta = -\frac{2 \cdot \left(\frac{7}{60}\right)^2 + 0,1^2}{\frac{7}{60}} = -\frac{67}{210}, \quad (136)$$

který použijeme do okrajových podmínek jako bezrozměrný popis ramene působící síly F .

Okrajové podmínky v $\bar{x} = 0$ jsou stejného rázu jako v předchozím příkladě 3.1

$$x = 0, \quad v(0) = 0 \quad (137)$$

$$\bar{s}_1^0 = 1$$

$$x = 0, \quad k_T l \frac{d}{dx} v(0) - \frac{d^2}{dx^2} v(0) = 0 \quad (138)$$

$$\hat{s}_2^0 = k_T l, \quad \hat{s}_3^0 = -1$$

Jelikož tíha kapaliny F nepůsobí přímo na konec prutu, ale mírně excentricky, je zapotřebí uvažovat i ohybový moment od této tíhové síly.

$$\bar{x} = l, \quad M_F(l) + M_o(l) = 0 \quad (139)$$

Moment od síly F lze vyjádřit pomocí parametru η

$$M_F = \alpha\eta \frac{d}{dx}v(x), \quad \alpha = \frac{Fl^2}{EJ_{min}} \quad (140)$$

Výsledný moment na konci prutu je

$$x = 1, \quad \alpha\eta \frac{d}{dx}v(1) + \frac{d^2}{dx^2}v(1) = 0 \quad (141)$$

$$\bar{s}_2^1 = \alpha\eta, \quad \bar{s}_3^1 = 1$$

A poslední okrajovou podmínku lze získat z výslednice sil (stejný vztah jako v příkladě 3.1)

$$x = 1, \quad \alpha \frac{d}{dx}v(1) + \frac{d^3}{dx^3}v(1) = 0 \quad (142)$$

$$\hat{s}_2^1 = \alpha, \quad \hat{s}_4^1 = 1$$

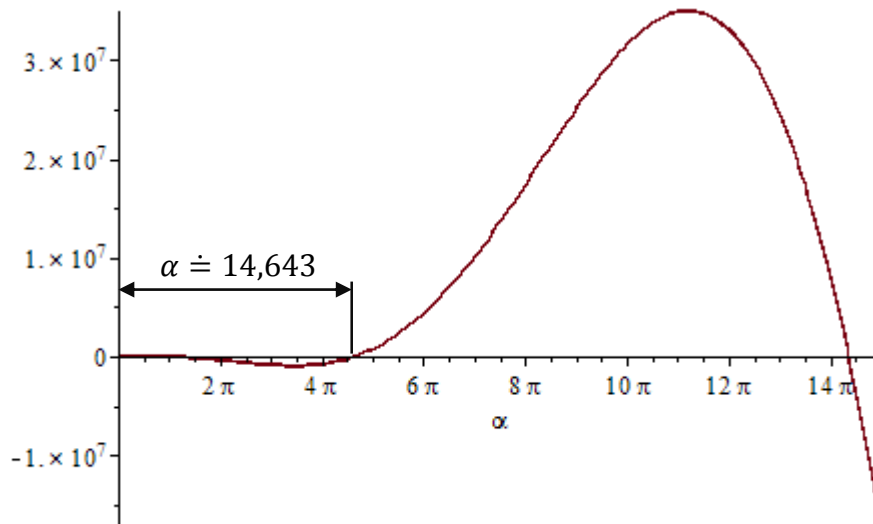
Matice A s dosazenými parametry s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{\alpha} k_T l & \alpha & k_T l & 0 \\ \alpha^{3/2} \eta \cos(\sqrt{\alpha}) - \alpha \sin(\sqrt{\alpha}) & -\alpha^{3/2} \eta \sin(\sqrt{\alpha}) - \alpha \cos(\sqrt{\alpha}) & \alpha \eta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

a determinant matice

$$\det(A) = \alpha^3 \sin(\sqrt{\alpha}) \eta k_T l + \alpha^{7/2} \cos(\sqrt{\alpha}) \eta + \alpha^{5/2} \cos(\sqrt{\alpha}) k_T l - \sin(\sqrt{\alpha}) \alpha^3 \quad (144)$$

Výsledek $\det(A) = 0$ lze opět získat graficky (obr. 23).



Obr. 23 - Grafické řešení

Pro zjištění průměru tyče je zapotřebí spočítat tíhovou sílu F v nádobě.

$$F = \rho V g = \rho \frac{a_{yz}^2 \frac{h_x}{2}}{1000^3} g = 1000 \frac{600^2 \cdot \frac{700}{2}}{1000^3} 9,81 = 1236,06 \text{ N} \quad (145)$$

Do rovnice (71) s parametrem stability α se dosadí kritická síla F_{kr} (tíhová síla F násobená bezpečností k_k).

$$\alpha = \frac{F_{kr} l^2}{EJ} = \frac{F k_k l^2}{EJ} \quad (146)$$

Odtud už vyjádříme osový kvadratický moment kruhového profilu

$$J = \frac{F k_k l^2}{E \alpha} = \frac{1236,06 \cdot 3 \cdot 3000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 24,139} \doteq 10853,25 \text{ mm}^4 \quad (147)$$

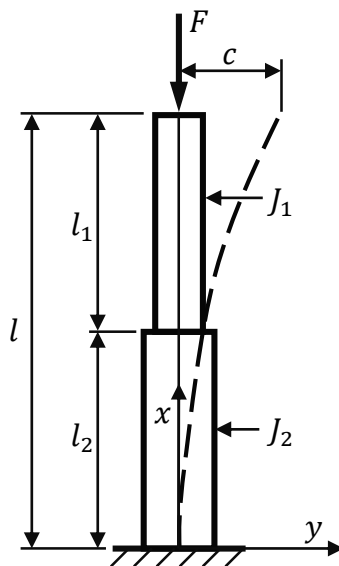
a z něj dostaneme výsledný průměr d_{min}

$$J = \frac{\pi d_{min}^4}{64} \quad (148)$$

$$d_{min} = \sqrt[4]{\frac{64J}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 10853,25}{\pi}} \doteq \underline{\underline{21,68 \text{ mm}}}$$

Z normalizovaných průměrů bude vyhovovat průměr $d = 25 \text{ mm}$.

3.3 Vzpěr se změnou v průřezu



Obr. 24 - Vzpěr s proměnným průřezem

Zadání:

Je dán vetknutý prut ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) proměnného průřezu, který je zatížen osovou silou F na volném konci.

V první části ($l_2 = 2000 \text{ mm}$) je průměr prutu $d_2 = 50 \text{ mm}$ a v druhé $d_1 = 30 \text{ mm}$. Celková délka prutu je $l = 4000 \text{ mm}$.

Jaká je kritická síla F_{kr} ?

Řešení:

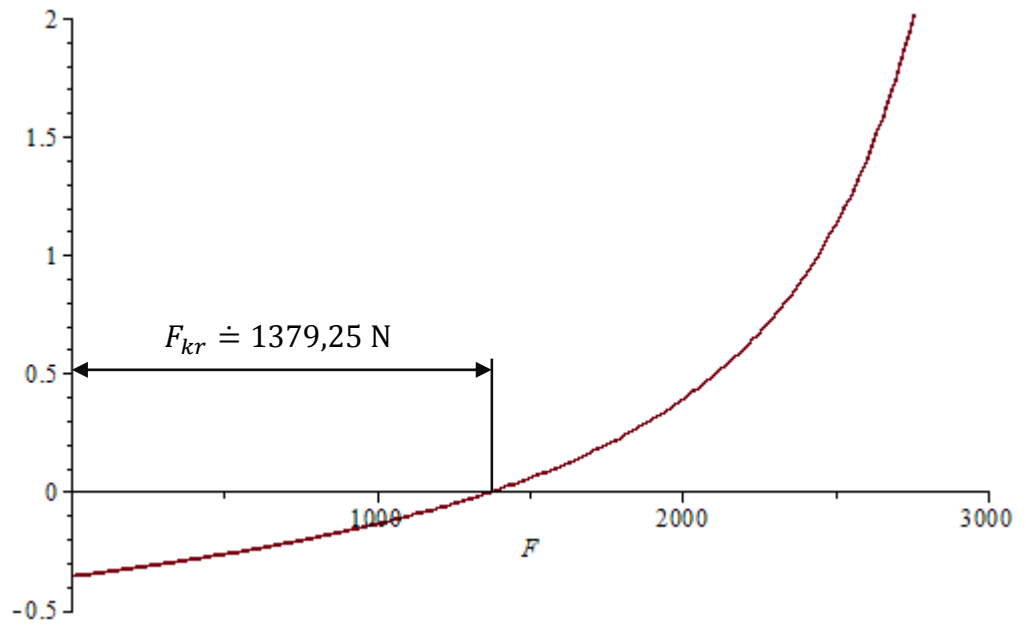
Postup k finálnímu vzorci (64) byl popsán již v teoretické části

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (149)$$

kde

$$\alpha_1^2 = \frac{F}{EJ_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{F}{EJ_2} \quad (150)$$

Výsledná kritická síla je určena z grafického řešení (obr. 25).



Obr. 25 – Grafické řešení kritické síly F_{kr}

Kritická síla je

$$F_{kr} = 1379,25 \text{ N} \quad (151)$$

4 Závěr

Jeden z hlavních cílů bakalářské práce bylo popsat Eulerovu metodu aplikovanou na základních případech vzpěru. V teoretické části jsem uvedl dva postupy řešení.

První uvedené klasické řešení, založené na diferenciálním počtu, bylo použito na čtyřech základních vzpěrech, mezi něž patří vzpěr na jednom konci vetknutý (I. případ), vzpěr na obou koncích uchycený kloubovými podpěrami (II. případ), vzpěr na jednom konci vetknutý a na druhém v kloubové podpěře (III. případ) a na závěr vzpěr na jednom konci pevně vetknutý a na druhém s vertikálně posuvným vetknutím (IV. případ). Pomocí těchto případů jsem byl následně schopen sepsat jednotlivé kroky výpočtu vzpěru se skokově proměnným průřezem.

V druhé části jsem popsal řešení WWR vycházející z maticových počtů. Princip metody spočívá v transformaci okrajových podmínek do maticové podoby a následného výpočtu kritéria stability, kdy velikost zátěžové kritické síly působící na prut je na hranici stability. Pro lepší porozumění jsem vysvětlil jednotlivé kroky na stejných případech vzpěru jako v klasickém řešení a na konci i pro pátý případ podobný čtvrtému, jen s tím rozdílem, že posuv vertikálního vetknutí se změnil na horizontální.

Výsledky práce vedou k závěru, že oba postupy řešení dojdou ke stejným výsledným vzorcům u základních vzpěrů, pouze v případě WWR je obtížnější práce s maticemi, pokud nepoužíváte podpůrnou výpočetní techniku. Též je problematické převádění okrajových podmínek do bezrozměrných verzí vzorců (univerzální zápis).

Na příkladech je názorně vidět možnost rozšíření teoretického základu a použití analytické metody jako náhrady za numerické metody.

Z důvodu větší časové náročnosti bych v navazující práci rozšířil aplikaci metody WWR. A to konkrétně na křivé pruty, prstence, plechy, skořepiny, působení spojitého zatížení, nosníky s tenkostěnným profilem a další, kde může daná metoda sloužit jako validátor používaných numerických metod.

5 Bibliografie

Bažant, Zdeněk P and Cedolin, Luigi. 2010. *Stability of Structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories.* New Jersey : World Scientific, 2010. 978-981-4317-02-3.

Michalec, J. 1999. *Pružnost a pevnost II.* Praha : ČVUT, 1999. 80-01-02375-3.

Timošenko, Stepan Prokof'jevič a Goodier, James N. 1970. *Theory of elasticity.* Auckland : McGraw-Hill, 1970. 0-07-085805-5.

Wang, C. M., Wang, C. Y. and Reddy, J. N. 2004. *Exact solutions for buckling of structural members.* Boca Raton, FL : CRC Press, 2004. 0-8493-2222-7.

Zyczkowski, M. 1991. *Strength of Structural Elements.* Warsaw : PWN-Polish Scientific Publishers, 1991. 978-0444987631.

6 Seznám obrázků

Obr. 1 – Osové namáhání tlustého a štíhlého vzpěru	9
Obr. 2 – Fáze rovnováhy: a) stabilní, b) indiferentní, c) labilní	9
Obr. 3 – Tři fáze rovnováhy.....	10
Obr. 4 – Čtyři základní případy vzpěru	10
Obr. 5 – První případ vzpěru	11
Obr. 6 – Kritický součinitel „k“	13
Obr. 7 – Druhý případ vzpěru	14
Obr. 8 – Třetí případ vzpěru	16
Obr. 9 – Průsečík křivek	18
Obr. 10 – Čtvrtý případ vzpěru	18
Obr. 11 – Korekční součinitel „n“.....	21
Obr. 12 – První případ vzpěru se změnou v průřezu.....	21
Obr. 13 – První případ vzpěru: a) celek, b) řez	24
Obr. 14 – Volný konec prutu	28
Obr. 15 – Druhý případ vzpěru	31
Obr. 16 – Třetí případ vzpěru	32
Obr. 17 – Grafické řešení	34
Obr. 18 – Čtvrtý případ vzpěru	34
Obr. 19 – Pátý případ vzpěru	36
Obr. 20 – Prut s pružinami.....	38
Obr. 21 - Grafické vyjádření hledaného parametru α	41
Obr. 22 – Zátěž závislá na vychýlení prutu	41
Obr. 23 - Grafické řešení	44
Obr. 24 - Vzpěr s proměnným průřezem	45
Obr. 25 – Grafické řešení kritické síly F_{kr}	46

7 Seznam tabulek

Tab. 1 - Základní případy vzpěru	37
--	----