

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

---

FAKULTA STROJNÍ – ÚSTAV MECHANIKY,  
BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY

Odbor pružnosti a pevnosti



**Diplomová práce**

**Posouzení výpočtových metod pro návrh kompozitních  
elementů výrobních strojů**

Praha, 2014

Bc. Tomáš Hejnl

## Anotační list

<b>Jméno autora:</b>	Bc. Tomáš Heintl
<b>Název diplomové práce:</b>	Posouzení výpočtových metod pro návrh kompozitních elementů výrobních strojů
<b>Anglický název:</b>	Assessment of computational methods for the design of composite elements of tool machines
<b>Akademický rok:</b>	2014/2015
<b>Obor studia:</b>	Aplikovaná mechanika
<b>Ústav/odbor:</b>	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
<b>Vedoucí diplomové práce:</b>	Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
<b>Bibliografické údaje:</b>	Počet stran: 70 Počet obrázků: 42 Počet tabulek: 19 Počet příloh: 1
<b>Klíčová slova:</b>	Výrobní stroje, kompozity, výpočetní metody
<b>Keywords:</b>	Tool machines, composites, computational methods
<b>Anotace:</b>	V práci se vyskytují základní výpočetní metody používané při návrhu kompozitních elementů výrobních strojů. Tyto metody jsou porovnány jak mezi sebou, tak i s experimentálními výsledky.
<b>Abstract:</b>	In this thesis there are basic computational methods used in the design of composite elements of production machinery. These methods are compared, both between themselves and with the experimental data.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pouze s použitím literatury uvedené v seznamu.

V Praze, dne .....

.....

Podpis

## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat panu doc. Ing. Tomášovi Marešovi, Ph.D. za odborné vedení práce a cenné rady, které mi pomohly tuto práci zkompletovat.

# Obsah

1. Úvod .....	7
2. Materiály používané při stavbě výrobních strojů .....	8
2.1. Konvenční materiály .....	9
2.2. Nekonvenční materiály .....	10
2.2.1. Přírodní žula .....	10
2.2.2. Polymerní betony .....	11
2.2.3. Vláknové kompozity na bázi uhlíkových vláken .....	11
2.3. Motivace pro kompozity při konstrukci výrobních strojů.....	12
3. Kompozitní materiál.....	13
3.1. Rozdělení kompozitních materiálů.....	13
4. Mechanika kompozitního materiálu .....	15
4.1. Konstitutivní vztahy .....	15
4.1.1. Konstitutivní vztahy pro izotropní materiál .....	16
4.1.2. Konstitutivní vztahy pro anizotropní materiál .....	16
4.1.3. Transformace napětí a deformace .....	17
4.1.4. Mimoosová tuhost a poddajnost.....	18
4.2. Laminační teorie.....	20
4.3. Euler-Bernoulliho teorie.....	26
4.3.1. Statické zatížení - Euler-Bernoulliho teorie .....	26
4.3.2. Dynamické zatížení - Euler-Bernoulliho teorie .....	28
4.4. Timošenkova teorie .....	30
4.4.1. Statické zatížení - Timošenkova teorie .....	31

4.4.2.	Dynamické zatížení - Timošenkova teorie.....	32
4.5.	Empirické vztahy.....	33
4.5.1.	Axiální tuhost trubky.....	33
4.5.2.	Axiální tuhost obecného profilu.....	34
4.6.	Metoda konečných prvků (MKP).....	35
4.6.1.	Stavba modelu.....	35
4.6.2.	Skořepinové modelování (Abaqus).....	36
4.6.2.1.	Konveční skořepiny.....	37
4.6.2.2.	Objemové skořepiny.....	37
5.	Výpočtové analýzy profilů silnostěnných nosníků.....	38
5.1.	Výpočet průhybu silnostěnných nosníků.....	39
5.1.1.	Definice profilů a materiálových vlastností.....	39
5.1.2.	Průhybová čára - Euler–Bernoulliho teorie.....	40
5.1.3.	Průhybová čára – Timošenkova teorie.....	41
5.1.4.	Výpočet axiální tuhosti.....	41
5.1.5.	Výsledky – průhyb.....	45
5.2.	Výpočet vlastních frekvencí.....	52
5.2.1.	Výsledky – vlastní frekvence.....	52
5.3.	Porovnání výpočtových analýz s experimentálními daty.....	54
5.3.1.	Definice struktury a geometrie měřených trubek.....	54
5.3.2.	Výsledky – porovnání výpočtů s experimentem.....	56
6.	Analýza deskově tvořeného nosníku.....	59
6.1.	Definice struktury desek.....	60
6.2.	Profil s tlumící vrstvou vs. profil bez tlumící vrstvy.....	61

6.2.1. Výsledky.....	62
6.3. Vliv technologie při výpočtech .....	65
6.3.1. Výsledky.....	65
7. Shrnutí informací o výpočtech kompozitních elementů.....	67
8. Závěr.....	68
Seznam použité literatury .....	69

# 1. Úvod

Hlavním cílem této diplomové práce je otestovat a porovnat základní výpočetní metody elementů z kompozitních materiálů pro výrobní stroje, a ukázat rozdíly mezi nimi. Dalším cílem práce je ukázat v jakých případech jsou možná určitá zjednodušení, a jak velkou chybu tato zjednodušení přinášejí. Téma práce bylo zvoleno z důvodu stále většího uplatňování kompozitního materiálu v průmyslu, přičemž z tohoto důvodu roste i potřeba přesnějších výpočtů.

V teoretické části práce se čtenář seznámí s konvenčními a nekonvenčními materiály používanými při výrobě a konstrukci součástí výrobních strojů. Čtenáři bude ukázáno základní rozdělení kompozitních materiálů, dále bude seznámen s mechanikou kompozitních materiálů. V teoretické části budou také vysvětleny základní teorie pro výpočet nosníků z kompozitního materiálu. Bude zde ukázáno i základní modelování součástí z kompozitního materiálu Metodou konečných prvků.

Praktická část se bude zabývat analýzou silnostěnných kompozitních nosníků různých profilů. Různými metodami se zde budou počítat statické a dynamické vlastnosti, které mezi sebou budou porovnávány. Za porovnávací hodnoty bude považována vlastní frekvence a maximální průhyb při určitém zatížení. Dále budou výsledky, počítané několika výpočetními metodami, porovnány s experimentálními daty.

Práce se bude zabývat také analýzou deskově tvořeného nosníku, u něhož bude posuzován vliv tlumicí vrstvy na statické i dynamické vlastnosti. Také bude posuzován vliv zanedbání technologie výroby nosníku na výsledky.

Na závěr budou uvedena určitá doporučení pro výpočty elementů z kompozitních materiálů.



## 2. Materiály používané při stavbě výrobních strojů

Při výrobě nosných dílů výrobních strojů je používána velká škála materiálů. Tyto materiály lze rozdělit na materiály konvenční a nekonvenční. Mezi konvenční patří například tvárná litina, šedá litina nebo svařence z ocelí třídy 11, mezi nekonvenční materiály patří slitiny hliníku, přírodní žula, polymerní betony, vláknové kompozity na bázi uhlíkových vláken, keramika nebo hybridní struktury.

Hlavními nároky, které jsou kladeny na materiály používané při výrobě výrobních strojů, jsou statická tuhost a modální parametry. Důležitými parametry jsou především: modul pružnosti v tahu a tlaku, měrná hmotnost a materiálové tlumení.

Na obr. 1 jsou některé konvenční a nekonvenční materiály používané při výrobě výrobních strojů. U každého materiálu jsou uvedeny číselně hlavní parametry ovlivňující modální analýzu a statickou tuhost. V této tabulce lze vidět také zhodnocení nákladů a zpracovatelnosti. Důležité hodnoty jsou zvýrazněné oranžovou barvou. Tato tabulka byla převzata z [1].

		Měrná hmotnost [kg/m <sup>3</sup> ]	Modul pružnosti [GPa]	Měrný modul pružnosti [10 <sup>6</sup> .m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	Náklady a zpracovatelnost pro výrobní stroje
Tradiční	Šedá litina	7100-7300	88-140	12-20	★
	Tvárná litina	7040-7060	160-180	23-26	★★
	Svařence z ocelí třídy 11	7850	190-210	26-27	★★
Nekonvenční	Al slitiny	2600-2800	70-79	25-30	★★★
	Přírodní žula	2600-3150	30-70	26-27	★★★
	Polymerní betony	1500-2600	40-50	15-33	★★★
	Vláknové kompozity na bázi uhlíkových vláken	1700-1980	100-580	54-341	★★★★★★
	Keramika na bázi Al a Si	3200-3500	270-300	77-94	★★★★★
	Hybridní struktury a materiály	1000-3500	70-210	20-210	★★★★

Obr. 1 - Srovnání vlastností konvenčních a nekonvenčních materiálů

## 2.1. Konvenční materiály

Velmi rozšířené materiály používané na nosné díly výrobních strojů jsou svařence z oceli třídy 11. Především díky relativně vysokým hodnotám modulu pružnosti. Další výhodou je možnost vytvoření složitých tvarů při nižších nákladech než u nekonvenčních materiálů s podobným modulem pružnosti. Mezi nevýhody patří nízké materiálové tlumení a vnitřní pnutí. Tento materiál je vhodné používat především při malých sériích a při kusové výrobě.

Pro výrobu větších sérií je ekonomicky výhodnější zvolit buď šedou litinu, nebo tvárnou litinu. Pro menší série nemusí být tato varianta příliš vhodná, a to z důvodu vysokých cen forem a jader. Mohou mít lepší materiálové tlumení a obrobitelnost než ocel. Na druhou stranu modul pružnosti může být až o polovinu menší. Je zde také nutnost dodržovat určité tvary a přechody výrobku s ohledem na vyrobitelnost.



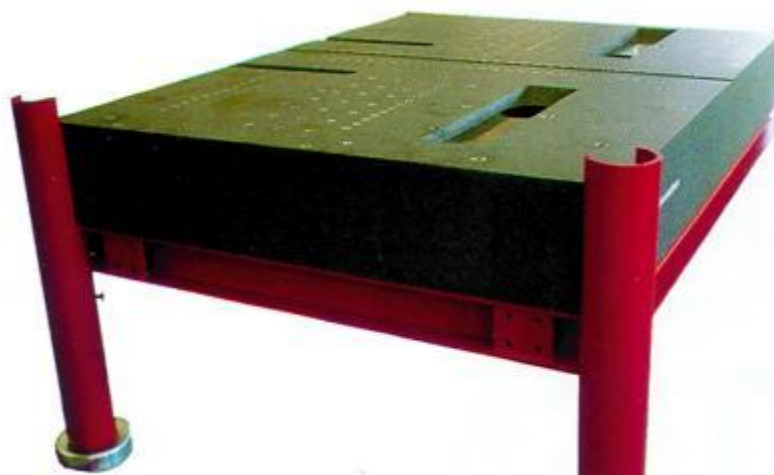
*Obr. 2 - Svařenec podstavce obráběcího stroje*

## 2.2. Nekonvenční materiály

Nekonvenční materiály se používají především pro zlepšení vlastností součástí strojů. Lze je rozdělit na kompozity částicové, vláknové, keramické a hybridní struktury. Používání nekonvenčních materiálů ve stavbě výrobních strojů pozvolna roste, v blízké budoucnosti však nelze očekávat rapidní změny. Nadále se budou používat převážně materiály založené na bázi železa a uhlíku. Mezi nekonvenční materiály s velkým potenciálem patří hybridní materiálové struktury, které využívají kombinaci materiálů konvenčních i nekonvenčních.

### 2.2.1. Přírodní žula

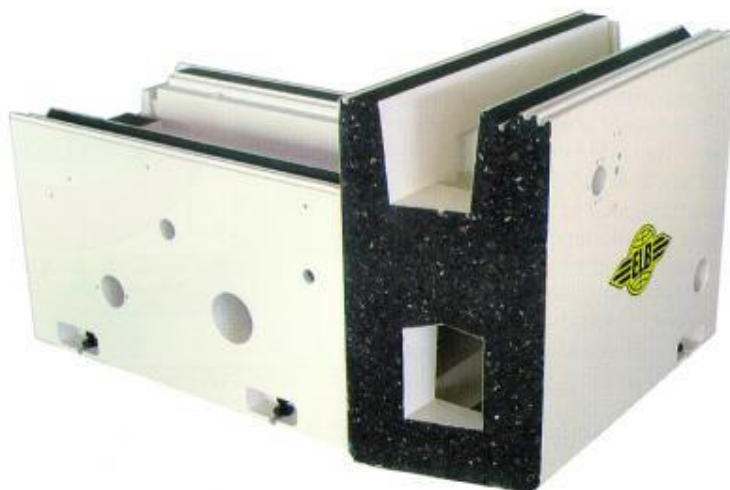
Přírodní žula neboli Granit se používá při výrobě přesných strojů. Výhody tohoto materiálu jsou především absence vnitřních pnutí, velmi vysoká rozměrová stálost a vysoké materiálové tlumení, které je podobné jako u šedé litiny. Výhodou je také nízká hodnota součinitele délkové teplotní roztažnosti. Na druhou stranu je výroba granitových dílců velmi komplikovaná, a tedy i drahá. Každá plocha musí být broušena. Nákladný i komplikovaný problém nastává při spojování dílů s ostatními dílci. Mezi další nevýhody patří vysoká hmotnost a komplikace při zásahu do hotové konstrukce, jako je například vrtání děr či vytváření závitů.



*Obr. 3 - Nosná soustava brusky z granitu*

### 2.2.2. Polymerní betony

Polymerbeton, také nazývaný jako minerální litina, je tvořen směsí přírodní nebo umělé keramiky a epoxidové pryskyřice. Keramika zastává funkce výztuže a pryskyřice funkci matrice (pojiva). Díky svým tlumícím vlastnostem je tento materiál vhodný pro nosné díly frézovacích a brousících strojů. Mezi hlavní výhody patří dobré materiálové tlumení, možnost integrace elektrických obvodů do konstrukce a teplotní stabilita. Také disponují vysokou chemickou odolností, díky čemuž nemusí být díly z polymerbetonu speciálně natírány. Mezi nevýhody patří, stejně jako u přírodní žuly, komplikované spojování s ostatními díly, velká hmotnost a nákladná výroba. Především díky nákladné výrobě se tyto materiály používají převážně v sériové výrobě.



*Obr. 4 - Řez ložem z minerální litiny firmy ELB*

### 2.2.3. Vláknové kompozity na bázi uhlíkových vláken

Ačkoliv má tento materiál velký potenciál, v konstrukci výrobních strojů se ve velké míře prozatím nevyskytuje. Důvod, proč se tímto materiálem zabývají především výzkumná a vývojová centra, je vysoká cena a technické nároky při výrobě. Také je potřeba znalostí techniků a inženýrů při výpočtech a optimalizacích. Mezi výhody uhlíkových vláken patří malá teplotní roztažnost, velká pevnost v tahu, velká tuhost a nízká hmotnost. Hlavní nevýhodou je příliš vysoká cena. Ta je způsobena jak cenou uhlíkových vláken, tak velmi

častou metodou ručního vrstvení. Lze ale zmínit také komplikované spojování součástí nebo velmi omezené možnosti úpravy finálních výrobků.

Pevnost součástí z uhlíkových vláken je ovlivněna především objemovým podílem uhlíkových vláken v laminátu. Tento podíl vychází ze způsobu výroby, kterým může být například ovíjení, navíjení nebo lisování.



*Obr. 5 - Uhlíkovo-grafitový kompozit firmy CompoTech*

### **2.3. Motivace pro kompozity při konstrukci výrobních strojů**

V současné době stále dominují materiály využívající bázi železa a uhlíku. Avšak používání nekonvenčních materiálů neustále pozvolna roste. V blízké budoucnosti ale nelze očekávat výraznou změnu. Největší potenciál pro konstrukci výrobních strojů mají hybridní materiálové struktury, tedy kombinace tradičních a nekonvenčních materiálů. Je to z důvodu možnosti zlepšovat parametry při nevýrazné změně nákladů. Nekonvenční materiály se také mohou uplatňovat v případech, kdy tradiční materiály nemohou vytvořit důležité vlastnosti. Například firma Erwin-Junker používá pokročilou keramiku pro momentovou náhonovou hřídel. Nebo česká firma CompoTech, která se zabývá výrobou součástek z uhlíkových vláken.

Naproti všemu jednou budou nekonvenční materiály s velkou pravděpodobností využívány i v sériových výrobcích. Dobu, kdy tento jev nastane, však zatím brzdí nedůvěřivost výrobců a vysoké náklady.

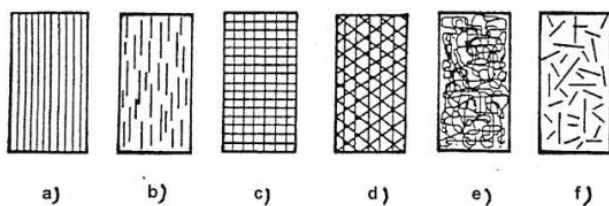
### 3. Kompozitní materiál

Kompozitní materiál, často označovaný jako kompozit, je materiál složený z jednodušších materiálů s různými mechanickými, fyzikálními a chemickými vlastnostmi. Je velmi časté, že jedna složka dodává výslednému kompozitu pevnost (výztuž) a zbylé složky slouží jako pojivo (matrice). Mezi známé kompozity patří například železobeton, což je kompozit složený s ocelových drátů a betonu, skelný laminát, asfaltová směs a kompozity z uhlíkových vláken, které jsou hojně využívány v leteckém, automobilovém a zbrojním průmyslu. Kompozitní materiály se dají rozdělit do velkého množství skupin podle různých hledisek.

#### 3.1. Rozdělení kompozitních materiálů

- Podle geometrického tvaru výztuže
  - vláknové
  - částicové
  - skeletové

Vláknové kompozity lze dále rozdělit na další skupiny podle délky vláken a jejich orientace. Toto rozdělení naleznete na obrázku 6.



- a) jednosměrná dlouhá vlákna
- b) jednosměrná krátká vlákna
- c) dvousměrné vyztužení (křížová tkanina, rohož)
- d) vícesměrné vyztužení
- e) náhodná orientace vláken
- f) náhodná orientace krátkých vláken

Obr. 6 - Druhy vláknových kompozitů



- Podle orientace výztuže
  - preferovaná
  - náhodná
- Podle velikosti výztuže
  - makrokompozity
  - mikrokompozity
  - nanokompozity

Kompozity, jejichž výztuž je tvořena částicemi, lze dále rozdělit na kompozity s izometrickými částicemi a na kompozity s anizometrickými částicemi. Vláknové kompozity, kterými se tato práce bude zabývat především, se dělí na jednovrstvé a vícevrstvé. Jednovrstvé mohou mít vlákna kontinuální nebo diskontinuální. Mezi vícevrstvé vláknové kompozity patří lamináty a sendviče (obrázek 7), které jsou tvořeny nejčastěji ze dřeva, z voštiny nebo z polymerní pěny.



*Obr. 7 - Příklad sendvičového kompozitu*

## 4. Mechanika kompozitního materiálu

### 4.1. Konstitutivní vztahy

Mezi základní vztahy v oboru pružnosti a pevnosti patří Hookeův zákon. Podle tohoto zákona je napětí v materiálu přímo úměrné deformaci, a to podle vztahu  $\sigma = E\varepsilon$ . Je dobré připomenout, že tento vztah platí pouze při dostatečně malé deformaci. Pokud bychom chtěli počítat s trojosou napjatostí, je vhodné tento vztah přepsat do maticového vztahu:

$$\sigma = C\varepsilon \quad \text{nebo} \quad \varepsilon = S\sigma \quad (4.1)$$

$$S = C^{-1} \quad (4.2)$$

Kde  $C$  je matice tuhosti a  $S$  je matice poddajnosti, která se dá vypočítat z matice tuhosti dle rovnice (4.2). Obecně platí, že v matici tuhosti, i v matici poddajnosti, se vyskytuje 36 prvků. Některé z těchto prvků jsou však mezi sebou závislé. Závislost mezi prvky určuje typ anizotropie materiálu. Nejvíce nezávislých prvků v matici tuhosti se vyskytuje u obecného materiálu, kde jedinou závislost mezi prvky určuje symetrie matice tuhosti. Typy anizotropie s počtem nezávislých prvků v matici tuhosti a počty rovin symetrie materiálových vlastností jsou uvedeny v tabulce (1).

Typ materiálu	Počet nezávislých prvků	Počet symetrických rovin	Doplňující informace
Anizotropní	21	0	Obecný materiál
Monoklinický	13	1	Například wollastonit
Ortotropní	9	3	Například dřevo
Příčně izotropní	5	3	V jedné z rovin symetrie je izotropní
Pseudo izotropní	3	3	V osách stejné elastické vlastnosti
Izotropní	2	Nekonečně mnoho	Stejně vlastnosti ve všech směrech

Tab. 1 - Typy anizotropních materiálů



### 4.1.1. Konstitutivní vztahy pro izotropní materiál

Matice poddajnosti pro izotropní materiál vypadá:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

A při rovinné napjatosti:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Modul pružnosti ve smyku je závislý na modulu pružnosti v tahu a Poissonově čísle podle rovnice:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (4.5)$$

To znamená, že v matici poddajnosti pro izotropní materiál jsou potřeba pouze dvě materiálové konstanty, což již bylo uvedeno v tabulce (1).

### 4.1.2. Konstitutivní vztahy pro anizotropní materiál

Matice poddajnosti pro ortotropní materiál vypadá:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_3} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

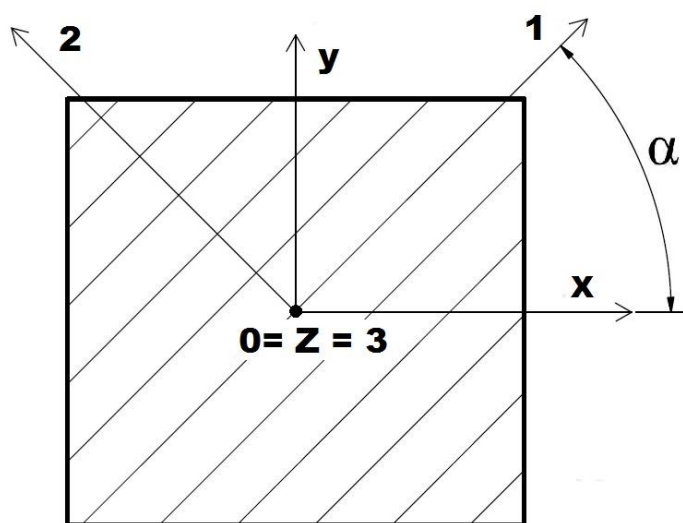
A při rovinné napjatosti:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_3} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

V matici (4.6) se vyskytuje 12 parametrů. Tato matice je však symetrická, proto je možné napsat další tři závislosti:  $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$ ,  $\nu_{31}E_1 = \nu_{13}E_3$  a  $\nu_{32}E_2 = \nu_{23}E_3$ . Z toho důvodu obsahuje matice poddajnosti pro ortotropní materiál 9 nezávislých parametrů.

### 4.1.3. Transformace napětí a deformace

Tato práce se zabývá převážně jednosměrnými kompozity, proto jsou zde ukázány transformace napětí a deformace pro tento typ kompozitu. Jednou z vlastností jednosměrných kompozitních materiálů je změna tuhosti a pevnosti v závislosti na úhlu natočení  $\alpha$  vůči souřadnému systému  $O(x,y,z)$ . Systém, který je natočen vůči systému  $O(x,y,z)$ , označujeme  $O(1,2,3)$ , přičemž osa 1 je ve směru vláken a osa 2 je kolmo na vlákna kompozitu. Osa 3 je totožná s osou  $z$ , jak je znázorněno na obrázku 8.



Obr. 8 - Natočení systému  $O(1,2,3)$  vůči systému  $O(x,y,z)$

Obecně lze zapsat vztahy pro výpočet napětí a deformace v systému O(1,2,3) pomocí napětí a deformace v systému O(x,y,z). Tyto vztahy vypadají:

$$\sigma' = T_{\sigma} \sigma \quad (4.8)$$

$$\varepsilon' = T_{\varepsilon} \varepsilon \quad (4.9)$$

Což lze rozepsat do tvarů:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ -2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Kde  $T_{\sigma}$  a  $T_{\varepsilon}$  jsou transformační matice pro vektory napětí a deformace ze systému O(x,y,z) do systému O(1,2,3), a kde  $\sigma$  je vektor napětí a  $\varepsilon$  je vektor deformace v systému O(x,y,z).

Existují také závislosti mezi transformačními maticemi. Ty mají tvar:

$$T_{\varepsilon} = (T_{\sigma}^{-1})^T \quad (4.12)$$

$$T_{\varepsilon}^{-1} = T_{\sigma}^T \quad (4.13)$$

#### 4.1.4. Mimoosová tuhost a poddajnost

V předchozím odstavci bylo ukázáno, že velikost deformace a velikost napětí jsou závislé na směru. Je tedy pochopitelné, že i matice tuhosti a poddajnosti nebudou závislé pouze na materiálových konstantách, ale i na směru, ve kterém budou vyšetřovány.

V odstavci 4.3 byly ukázány vzorce pro transformaci napětí a deformace do systému O(1,2,3). Mimoosovou tuhost a poddajnost budeme transformovat naopak ze systému O(1,2,3) do systému O(x,y,z).

Transformace matice tuhosti a poddajnosti do systému O(x,y,z) jsou dány:

$$C^x = T_\sigma^{-1} C T_\varepsilon \quad (4.14)$$

$$S^x = T_\varepsilon^{-1} S T_\sigma \quad (4.15)$$

Kde  $C$  je matice tuhosti a  $S$  je matice poddajnosti ve směru vláken. Z Hookova zákona pro rovinnou napjatost je možné vyvodit, že:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^x & C_{12}^x & C_{13}^x & 0 & 0 & C_{16}^x \\ C_{21}^x & C_{22}^x & C_{23}^x & 0 & 0 & C_{26}^x \\ C_{31}^x & C_{32}^x & C_{33}^x & 0 & 0 & C_{36}^x \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^x & C_{45}^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}^x & C_{55}^x & 0 \\ C_{61}^x & C_{62}^x & C_{63}^x & 0 & 0 & C_{66}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Kde pomocí vztahu (4.14) lze vyjádřit prvky tuhosti:

$$\begin{aligned} C_{11}^x &= C_{11} \cos^4(\alpha) + C_{22} \sin^4(\alpha) + 2(C_{12} + 2C_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) \\ C_{21}^x &= C_{12}^x = (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + C_{12} (\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha)) \\ &\dots \text{atd} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Vztahy pro všechny prvky jsou k nalezení v [5] na straně 40 a 41.

Zde zmíněná matice mimoosové tuhosti platí pro ortotropní materiál. Následně bude ukázána také matice tuhosti pro příčně izotropní materiál. Tato matice je pro přehlednost označena  $Q$ . Má tvar:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

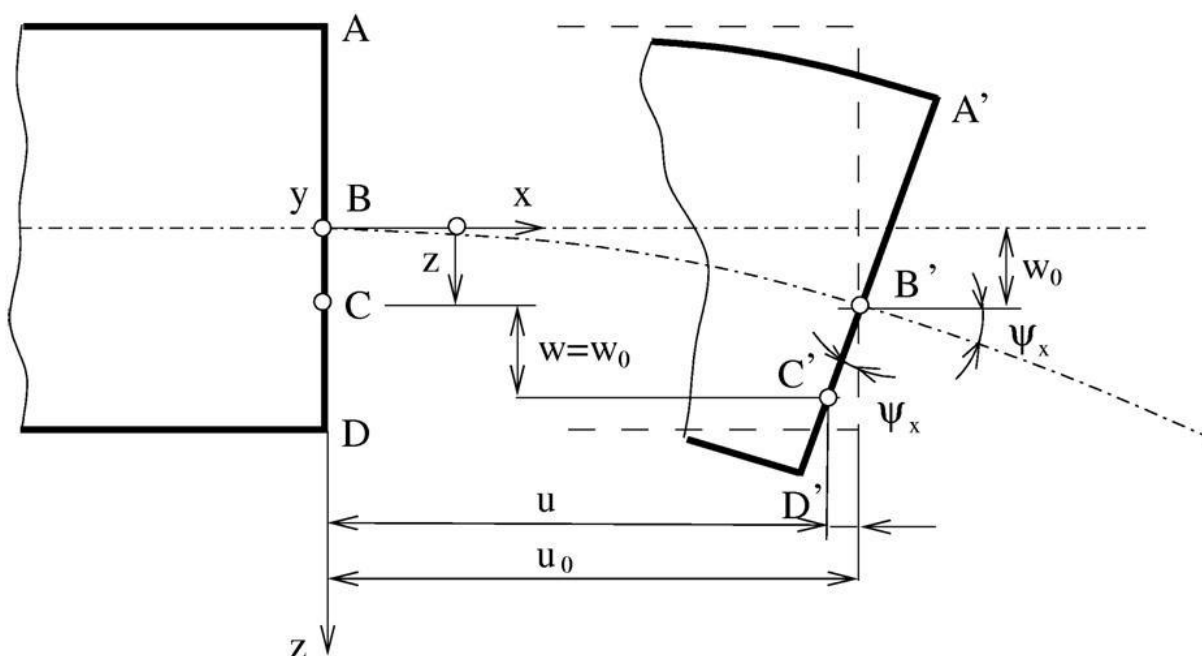
Pro prvky mimoosové tuhosti  $Q$  platí:

$$Q_{ij} = C_{ij}^x - \frac{C_{i3}^x C_{3j}^x}{C_{33}^x} \quad (4.19)$$

## 4.2. Laminační teorie

Při výpočtech kompozitu složeného z více lamel se používá klasická laminační teorie. Tato teorie pracuje s předpoklady, které mohou vnést do výpočtu určitou chybu. Mezi nejdůležitější předpoklady patří:

- Každá lamela je ortotropní a kvazihomogenní.
- Tloušťka lamely je ve srovnání s délkou a šířkou velice malá.
- Z důvodu předchozího předpokladu můžeme uvažovat rovinnou napjatost.
- Lamely jsou k sobě připojeny dokonale a nedochází ke smýkání desek, funkce posunutí jsou tedy spojité funkce.
- Příčné zkosení je rovno nule. To znamená, že kolmice ke středové čáře zůstanou i po deformaci kolmé.
- Závislost mezi deformací a napětím je lineární.



Obr. 9 - Deformace laminátů

Z čehož vyplývá, že pole posuvů bude ve tvaru:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4.20)$$

A pole deformací bude tedy vypadat:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (4.22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (4.23)$$

Rovnice (4.21), (4.22) a (4.23) je možné přepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Kde složky vektoru deformace  $\varepsilon_{xx}^o, \varepsilon_{yy}^o, \gamma_{xy}^o$  označují deformaci střednicové roviny a složky  $k_x, k_y, k_{xy}$  označují křivost. Tedy:

$$k_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad k_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_{xx}^o = \frac{\partial u_o}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy}^o = \frac{\partial v_o}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^o = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \quad (4.26)$$

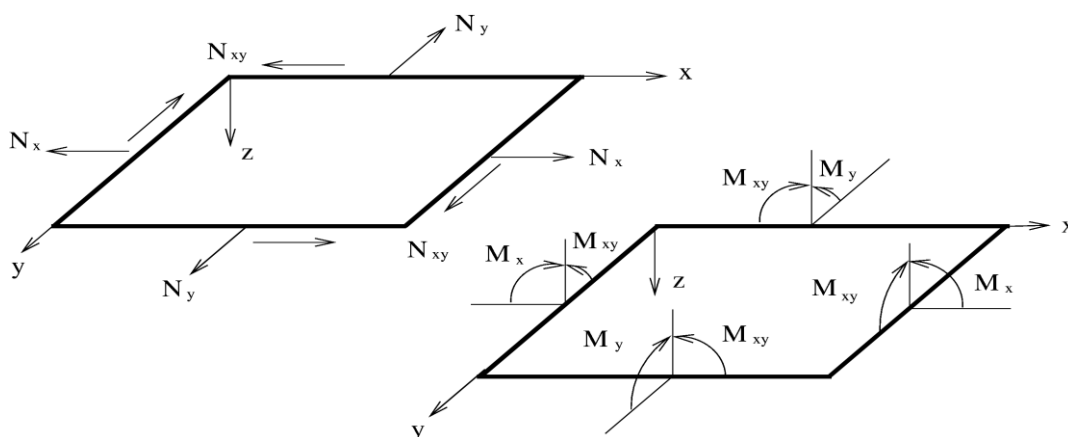
Napětí v libovolné vrstvě lze vyjádřit jako:

$$\sigma' = Q\varepsilon' \quad (4.27)$$

Kde matice  $Q$  je maticí mimoosové tuhosti.

Dosazením vztahu (4.24) do výrazu (4.27) je získán vztah určující napětí v k-té vrstvě:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$



Obr. 10 - Zavedení výsledných sil a momentů

Podle obrázku 10 pro výslednice sil a momentů platí:

$$N_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} dz, \quad N_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} dz \quad (4.29)$$

$$M_x = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xx} z dz, \quad M_y = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{yy} z dz, \quad M_{xy} = \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{xy} z dz \quad (4.30)$$

Jelikož se napětí v laminátu mění nespojitě, mohou být výsledné síly a momenty působící v průřezu laminátu řešeny jako součet účinků všech vrstev. Neboli:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (4.31)$$

Po dosazení rovnic (4.28) do vztahů (4.31) jsou získány vztahy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z dz \right\} \\ \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} z dz + \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

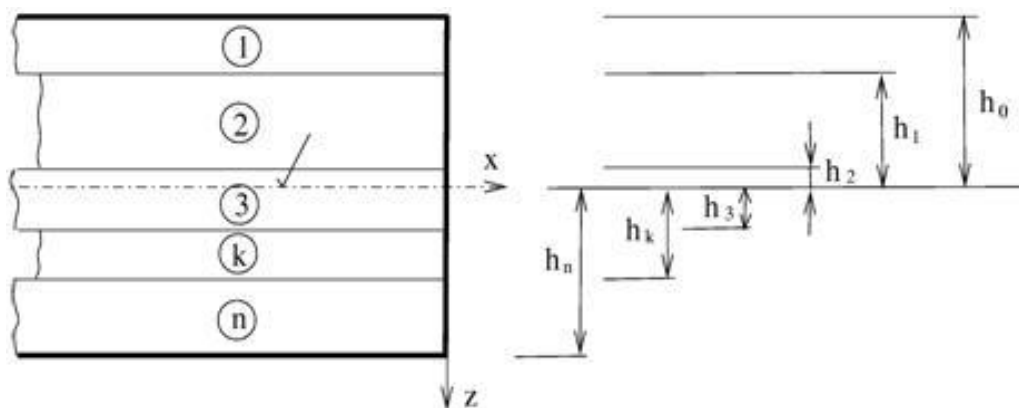
Z kterých po úpravě vzejde výsledná maticová rovnice ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Je dobré si povšimnout, že na levé straně rovnice (4.33) není vektor napětí, ale vektor liniových sil a momentů. Rozměry  $N_x$ ,  $N_y$  a  $N_{xy}$  jsou  $[N \cdot m^{-1}]$  a rozměry pro  $M_x$ ,  $M_y$  a  $M_{xy}$  jsou  $[N]$ . Matici  $\bar{Q}$  je možné rozdělit na tři další matice: matici tahové tuhosti  $A$ , matici vazebné tuhosti  $B$  a matici ohybové tuhosti  $D$ . Tyto matice se dají určit, pokud je dána matice mimoosové tuhosti každé vrstvy. Vztahy pro vyjádření matic  $A, B$  a  $C$  vypadají:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (4.34)$$





Obr. 11 - Laminátová vrstevnatá konstrukce

Kde veličina  $h_k$  označuje  $z$ -tou souřadnici  $k$ -té vrstvy. Rovina  $xy$  je zároveň střednicovou rovinou.

Maticový vztah (4.33) lze přepsat do tohoto tvaru:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Kde  $N$  je vektor liniových sil,  $M$  je vektor liniových momentů,  $\varepsilon^o$  je vektor deformace střednicové roviny a  $k$  je vektor křivosti. Po úpravě této rovnice lze získat Vztah pro výpočet deformace při známých vnějších silových účincích, který vypadá:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Kde:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A^{-1} + A^{-1}BD^{-1}(A^{-1}B)^T \\ \bar{B} &= (A^{-1}B)(D - BA^{-1}B)^{-1} \\ \bar{C} &= (D - BA^{-1}B)^{-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

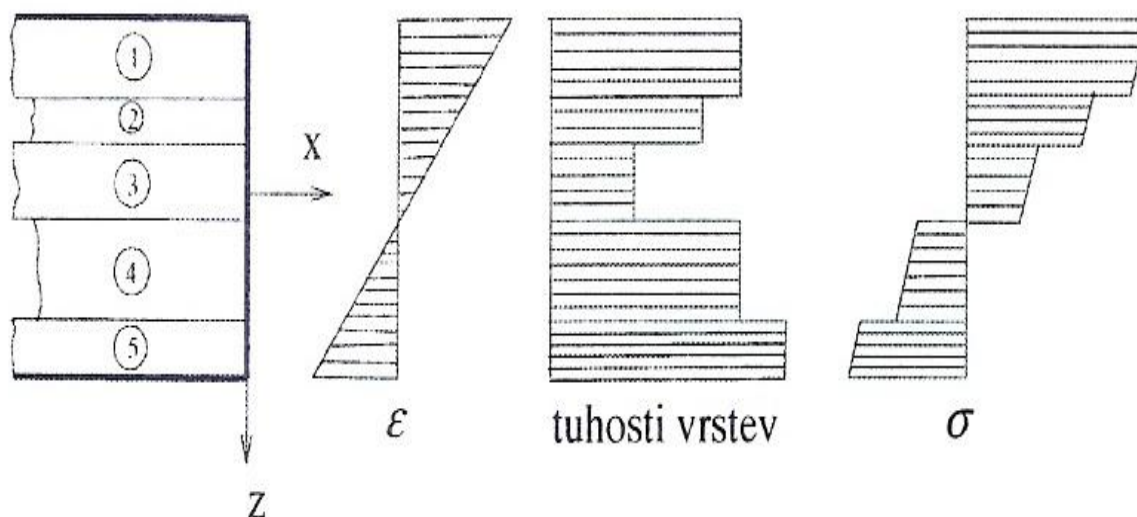
K určení deformace ze silových účinků, nebo naopak určení vnitřních sil z deformace tělesa, je nutné znát materiálové konstanty a úhel natočení vláken každé lamely.

Je dobré si také povšimnout, že kdyby vyšla matice vazebné tuhosti  $\mathbf{B}$  rovna nule, došlo by k odstranění vazby mezi normálovými a smykovými silami. Lamináty, které mají matici tuhosti rovnou nule, se nazývají symetrické.

U symetrických laminátů se rovnice (4.35) rozpadne na dvě rovnice:

$$\begin{aligned} N &= A\varepsilon^o \\ M &= Dk \end{aligned} \tag{4.38}$$

Z tohoto důvodu se nazývá matice  $\mathbf{B}$  také maticí vazbové tuhosti.



Obr. 12 - Příklad rozložení napětí, tuhosti a deformace kompozitu složeného z lamel

### 4.3. Euler-Bernoulliho teorie

Tato teorie je často nazývána také klasickou nosníkovou teorií. Publikoval ji v 18. století švýcarský matematik a fyzik Jacob Bernoulli. Její aplikaci ve stejném století upravil Leonard Euler. Ze začátku nebyla tato teorie rozsáhle využívána, dokud nebyla použita při stavbě Eiffelovy věže a Ruského kola v 19. století. V dnešní době se hojně využívá při výpočtech mnoha inženýrských projektů, především ve strojírenství a stavebnictví.

Touto metodou se dají vypočítat jak statické vlastnosti nosníku, jako je například průhyb či natočení, tak jeho dynamické vlastnosti, mezi které patří především vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu. Při odvozování výsledných rovnic byla použita určitá zjednodušení. Zde budou ukázány ta nejvýznamnější:

- Rovnice platí pouze v lineární teorii pružnosti. Tedy využití se omezuje na oblast deformace, ve které platí Hookeův zákon.
- Každý průřez nosníku po deformaci je kolmý na neutrální osu.
- Nosník je má dostatečnou štíhlost (poměr průřezu vůči délce nosníku je zanedbatelný).
- Je zanedbáno smykové napětí vzniklé od posouvající síly, jelikož při velké štíhlosti nosníku se deformace od posouvající síly projeví jen nepatrně.
- Střednice prutu leží v neutrální rovině a její délka se po deformaci nezmění.
- Úloha je vnímána jako jednodimenzionální problém.

#### 4.3.1. Statické zatížení - Euler-Bernoulliho teorie

Euler-Bernoulliho rovnice pro statické zatížení udává obecný vztah mezi průhybem nosníku a vnějším zatížením.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q \quad (4.39)$$

Kde: E - modul pružnosti v tahu

I - kvadratický moment průřezu

q - spojité zatížení

w - průhyb

Pro kompozitní materiály se používá náhrada součinu EI veličinou D, která se určí pomocí vztahu:

$$EI = D = \int_A Ez^2 dA \quad (4.40)$$

Pokud modul pružnosti a kvadratický moment průřezu jsou konstantní, může být rovnice (4.39) upravena na jednodušší tvar:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (4.41)$$

Použitím Schwedlerovy věty:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q \quad (4.42)$$

v rovnici 4.39 se získají rovnice:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (4.43)$$

$$Q(x) = -\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) \quad (4.44)$$

Rovnice (4.43) je o dva řády nižší než rovnice (4.41), a je tedy diferenciální rovnicí druhého řádu, která udává závislost mezi průhybem nosníku a ohybovým momentem. Pokud je známý ohybový moment vyskytující se na nosníku, může být dvojitým integrováním získána rovnice průhybové čáry střednice. Rovnice (4.44) je diferenciální rovnicí třetího řádu a k určení průhybové čáry stačí znát pouze posouvající sílu.

V obou případech je ale potřeba k určení přesného výsledku získat dostatečný počet okrajových podmínek.

Pro jednoduché případy existuje možnost nalézt řešení v příručkách či různých tabulkách. Pro složitější případy se používají různé techniky řešení Euler-Bernoulliho rovnice, jako je například metoda virtuálních prací, přímá integrace, Castiglianova věta a matice tuhostí.

### 4.3.2. Dynamické zatížení - Euler-Bernoulliho teorie

Stejně jako při statickém zatížení, tak i u dynamického zatížení, se vyskytuje jedna obecná rovnice, která je posléze upravována a zjednodušována.

Rovnice (4.45) byla odvozena pomocí variačního počtu, a tedy minimalizací funkcionálu, proto se také nazývá Euler-Lagrangeova rovnice. Avšak k této výsledné rovnici lze dospět i jinými metodami, například metodou uvolňování a použití Newtonových rovnic.

V rovnici (4.45) se vyskytují určitá zjednodušení. Je zanedbána setrvačnost od rotačních účinků, avšak při dodržení malých průhybů, což je částečně splněno podmínkou lineární deformace, nebude výsledek významně ovlivněn. Základní rovnice pro dynamické případy vypadá:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -\mu \frac{d^2 w}{dt^2} + q(x) \quad (4.45)$$

Tato rovnice je parciálně diferenciální rovnicí čtvrtého řádu. Průhyb bude funkcí nejen souřadnice polohy,  $x$ , ale také funkcí souřadnice času,  $t$ . Veličina  $\mu$  se nazývá lineární hustota a určuje hmotnost na jednotku délky. Lineární hustotu můžeme zapsat jako součin hustoty a průřezu.

Pokud by rovnice (4.45) měla být zjednodušena, byly by hodnoty modulu pružnosti, kvadratického momentu průřezu a lineární hustoty považovány za konstantní. Pak může být tato rovnice upravena na tvar:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -\mu \frac{d^2 w}{dt^2} + q(x) \quad (4.46)$$

Jsou různé možnosti, jak tuto rovnici vyřešit. Může být řešena například numericky pomocí počítače. Ovšem existuje i analytické řešení, které už není tak jednoduché, jako bylo při statickém zatížení. Asi nejpoužívanější analytickou metodou je metoda separace proměnných neboli Fourierova metoda. Podstatou této metody je rozdělení výsledné funkce, tedy funkce průhybu, na funkci závislou pouze na čase (bude označena  $T$ ) a funkci závislou pouze na souřadnici  $x$  (bude označena  $X$ ). Jako při řešení diferenciálních rovnic druhého řádu, i zde lze odhadnout řešení, jehož tvar bude vypadat:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n \quad \text{kde} \quad w_n = X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (4.47)$$

Odhad řešení je ve tvaru nekonečné řady. Funkce  $w_n$  musí splňovat okrajové podmínky řešení, a pomocí konstanty  $c_n$  bude možné splnit i počáteční podmínky.

Nejprve bude řešena homogenní rovnice (4.46), bude tedy řešeno volné kmitání. Důležité hodnoty volného kmitání jsou vlastní frekvence (označeno  $\Omega$ ) a vlastní tvary kmitu. Jelikož je počítáno kmitání kontinua, které lze rozdělit nekonečně mnohokrát, je tedy získáno i nekonečně mnoho vlastních frekvencí a nekonečně mnoho vlastních tvarů.

Po dosazení výsledné funkce (4.47) do (4.46) jsou získány dvě diferenciální rovnice, jedna druhého a jedna čtvrtého řádu:

$$\ddot{T} + \Omega^2 T = 0 \quad (4.48)$$

$$X^{IV} - \alpha^4 X = 0 \quad (4.49)$$

Kde:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EJ} \Omega^2} \quad (4.50)$$

Řešením diferenciálních rovnic (4.48) a (4.49) jsou funkce:

$$T = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (4.51)$$

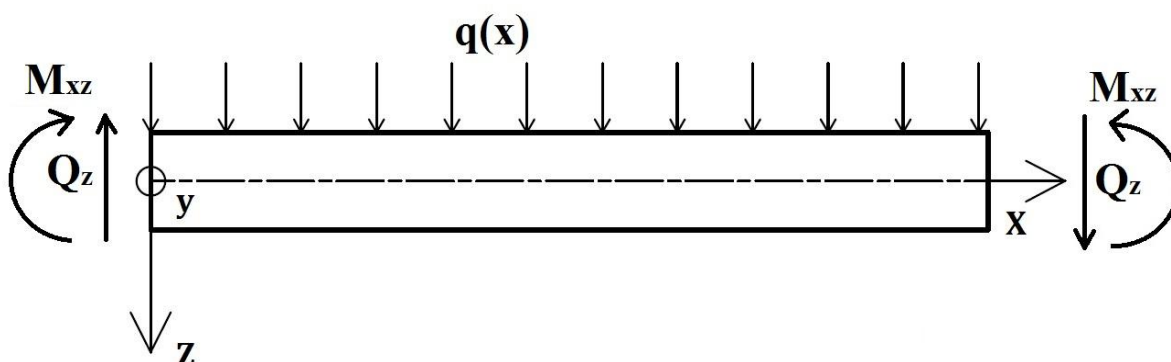
$$X = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x) + C_3 \cosh(\alpha x) + C_4 \sinh(\alpha x) \quad (4.52)$$

## 4.4. Timošenkova teorie

Timošenkovu nosníkovou teorii publikoval poprvé na začátku 20. století ukrajinský inženýr Timošenko. Na rozdíl od Euler-Bernoulliho nosníkové teorie, tato teorie bere v úvahu deformace od posouvající síly a účinky momentu setrvačnosti. Pokud by byl modul pružnosti ve smyku považován za nekonečně velký a moment setrvačnosti nosníku za nekonečně malý, přešla by tato teorie na klasickou nosníkovou teorii.

Tato teorie se používá například pro výpočet průhybu krátkých nosníků, sendvičových kompozitních materiálů nebo při vysokofrekvenčním buzení nosníků. Stejně jako u Euler-Bernoulliho nosníkové teorie, i zde se vyskytují určitá zjednodušení a omezení. Mezi ta nejdůležitější patří:

- Průřez nosníku po deformaci není kolmý na neutrální osu, ale svírá s rovinou kolmou na neutrální osu úhel  $\varphi$ .
- Tloušťka průřezu i vrstev, pokud je z nich nosník složen, se při deformaci nezmění.
- Body střednice nosníku se pohybují pouze ve svislém směru.
- Střednice nosníku leží v neutrální rovině a její délka se po deformaci nezmění.
- Rovnice platí pouze v lineární teorii pružnosti.
- Nosník je dostatečně štíhlý.



Obr. 13 – Vyjmutý obecně zatížený element

Pro zatížení musí platit (Schwedlerovy rovnice):

$$\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} = Q_z \quad \frac{\partial Q_z}{\partial x} = -q(x) \quad (4.53)$$

$$M_{xy} = 0 \quad M_{yz} = 0 \quad (4.54)$$

$$N_x = 0 \quad Q_y = 0 \quad (4.55)$$

#### 4.4.1. Statické zatížení - Timošenkova teorie

Při statickém zatížení a při splnění podmínek (4.54) a (4.55) mohou být napsány rovnice, které jsou převzaté z [6]:

$$M(x) = -D \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (4.56)$$

$$Q(x) = -B \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa A \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (4.57)$$

Kde:

$$A = \int_A E \, dA \quad B = \int_A E z \, dA \quad D = \int_A E z^2 \, dA \quad (4.58)$$

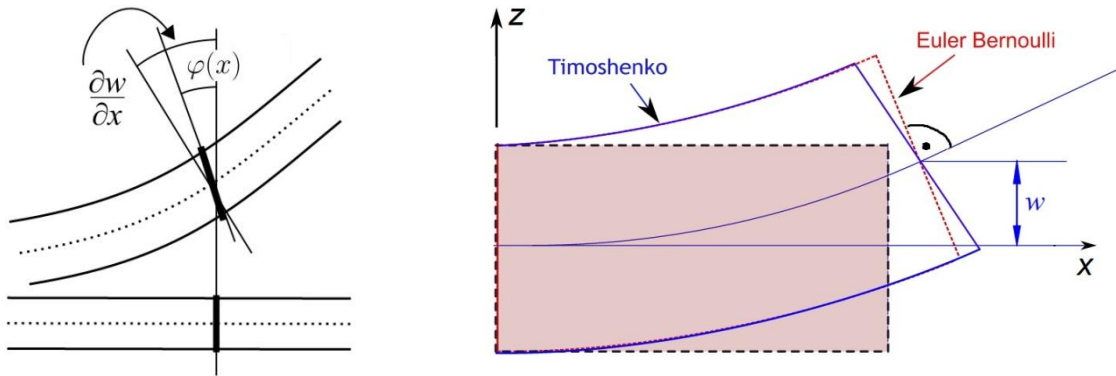
$\kappa$  se nazývá Timošenkův koeficient smyku a vzniká důsledkem nelineárního rozdělení smykových napětí v průřezu. Tento součinitel je závislý v nejjednodušším případě na tvaru průřezu. Například pro obdélníkový průřez a izotropní materiál je tento součinitel roven 5/6. Existují empirické vztahy, jak tento součinitel získat pro určité geometrie průřezu. Například některé rovnice pro výpočet tohoto koeficientu jsou v [8] nebo v [9], kde se vyskytují vztahy závislé nejen na geometrii, ale také na Poissonově čísle.

V případě, že se B bude rovnat nule, rovnice (4.56) a (4.57) se zjednoduší na tvar:

$$Q(x) = \kappa A \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (4.59)$$

$$M(x) = -D \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.60)$$





Obr. 14 - Deformace při Timošenkově teorii (vlevo) a porovnání deformace (vpravo)

#### 4.4.2. Dynamické zatížení - Timošenkova teorie

Pro dynamické řešení jsou připsány Newtonovy pohybové rovnice:

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (4.61)$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + q \quad (4.62)$$

Rovnice (4.59), (4.60), (4.61) a (4.62) jsou upraveny do maticového tvaru pro případ  $q=0$ :

$$P \frac{\partial u}{\partial t} + K \frac{\partial u}{\partial x} + Ru = 0 \quad (4.63)$$

Kde:

$$P = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\kappa A \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

$$u = \left[ \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, D \frac{\partial w}{\partial x}, A\kappa \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \varphi \right) \right] \quad (4.65)$$

Rovnice (4.63) se analyticky řeší velmi obtížně. Ve většině případů se tedy používá numerických metod. Z tohoto důvodu bude i v této práci rovnice (4.63) řešena numericky.

## 4.5. Empirické vztahy

Další možností výpočtů nosníkových profilů vyráběných z kompozitních materiálů jsou empirické vztahy. Zde budou ukázány dva případy vzorců vycházejících z laminační teorie, která byla vysvětlena v předchozích kapitolách.

### 4.5.1. Axiální tuhost trubky

Nejprve budou ukázány empirické vzorce pro výpočet efektivního modulu pružnosti v axiálním směru, Poissonova čísla a efektivního modulu pružnosti ve smyku, které byly odvozeny pro tenkostěnnou trubku vyráběnou navíjením vláken. Tyto vztahy jsou převzaty z publikace Mechanice kompozitních materiálů od profesora Laše [5] na straně 141 a 142.

Jak už bylo uvedeno, axiální tuhost vychází z klasické laminační teorie. To znamená, že platí stejné předpoklady, které jsou uvedeny v kapitole 4.2.

Platí tedy:

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^o \\ k \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

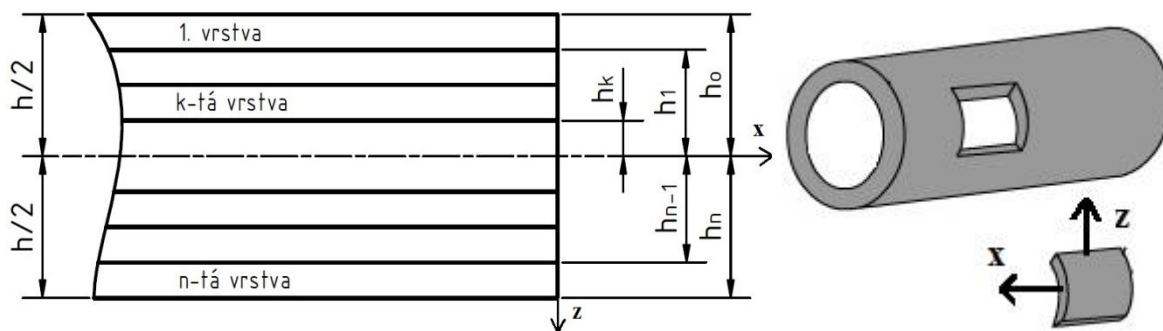
Kde prvky  $A$ ,  $B$  a  $C$  se určí podle vztahů (4.34). Laminát je složený z  $n$  vrstev, kde obecně platí, že každá vrstva je navíjena pod jiným úhlem  $\alpha$ . Pro tloušťku  $k$ -té vrstvy platí:

$$t_k = h_k - h_{k-1} \quad (4.67)$$

A celkovou tloušťku laminátu lze určit ze vztahu:

$$h = \sum_{k=1}^n t_k \quad (4.68)$$

Dále jsou zanedbána zkroucení a křivosti v rovině  $xy$ , kde  $x$  je axiální směr a  $y$  je radiální směr trubky. Díky tomu se zjednoduší závislost mezi napětím a deformací pro  $k$ -tou vrstvu.



Obr. 15 – Struktura elementu (vlevo) a vyjmutý element (vpravo)

Vztahy určující efektivní modul pružnosti axiálního směru a modul pružnosti ve smyku pro trubkový profil vypadají:

$$E_x = \frac{M}{h(A_{66}A_{22} - A_{26}^2)} \quad (4.69)$$

$$G_{xy} = \frac{M}{h(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \quad (4.70)$$

Kde:

$$M = A_{11}A_{22}A_{66} + 2A_{12}A_{16}A_{26} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 - A_{66}A_{12}^2 \quad (4.71)$$

Dále se dá určit Poissonovo číslo, které bude vypadat:

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}A_{66} - A_{16}A_{26}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad (4.72)$$

#### 4.5.2. Axiální tuhost obecného profilu

Jako druhý empirický vztah budou ukázány vzorce, které vznikly, stejně jako v předchozím případě, pomocí obecné laminační teorie. Pro tyto vztahy platí tedy také stejné předpoklady jako pro laminační teorii. Na rozdíl od předchozích vztahů je zde využita celá ABD matice. Modul pružnosti v axiálním směru:

$$E_x = \frac{1}{(ABD^{-1})_{11}h} \quad (4.73)$$

A modul pružnosti ve smyku:

$$G_{xy} = \frac{1}{(ABD^{-1})_{33}h} \quad (4.74)$$

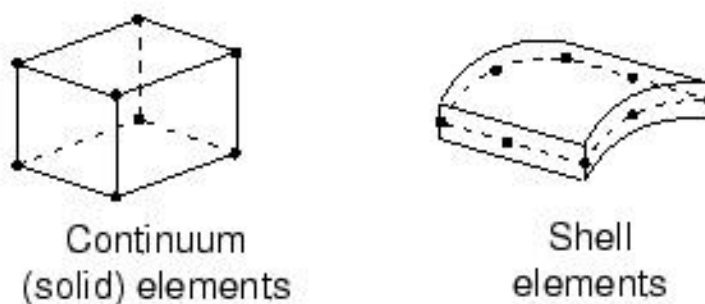
## 4.6. Metoda konečných prvků (MKP)

Metoda konečných prvků (dále už jen MKP) je numerická metoda, která je založena na principu diskretizace kontinua na určitý počet prvků. Hledané parametry jsou ukládány do jednotlivých uzlů. Tato metoda je známá již řadu desetiletí, ale k jejímu masivnímu využití byla zapotřebí dnešní výkonná výpočetní technika. MKP je dnes masivně využívána pro simulace, návrhy a kontrolu mnoha součástí z různých oborů. Existuje i mnoho komerčních programů využívající tuto metodu, jako například programy Abaqus a ANSYS.

### 4.6.1. Stavba modelu

Stavba modelu součásti z kompozitního materiálu je mnohem náročnější než stavba modelu z izotropního materiálu. Například při používání ortotropních či příčně izotropních materiálů je potřeba uvést směry navíjené struktury či transformační matice. Pokud je zadáno příliš mnoho dat v prvku, mohou se vyskytnout komplikace s vyhodnocováním výsledků.

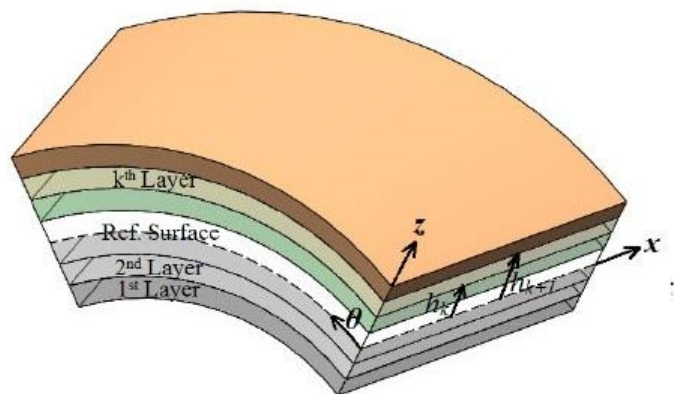
V dnešní době se výrobci MKP programů snaží udržet tempo s rychlostí užívání kompozitů, čímž se v novějších verzích programů vyskytují stále přehlednější funkce pro zadávání kompozitních parametrů.



Obr. 16 - Objemový prvek (vlevo) a skořepinový prvek (vpravo)

Při stavbě kompozitních modelů je možno použít dva typy prvků. Jsou to prvky objemové nebo prvky skořepinové. Rozdíl mezi prvky je znázorněn na obrázku 16. Objemové prvky se při modelování kompozitních materiálů příliš nepoužívají, ve většině případů je nutná hustá síť po tloušťce. Z důvodu snadného zadávání počtu vrstev a snadného

definování natočení a materiálu každé vrstvy, jsou ve většině případů modelování kompozitních součástí používány prvky skořepinové.

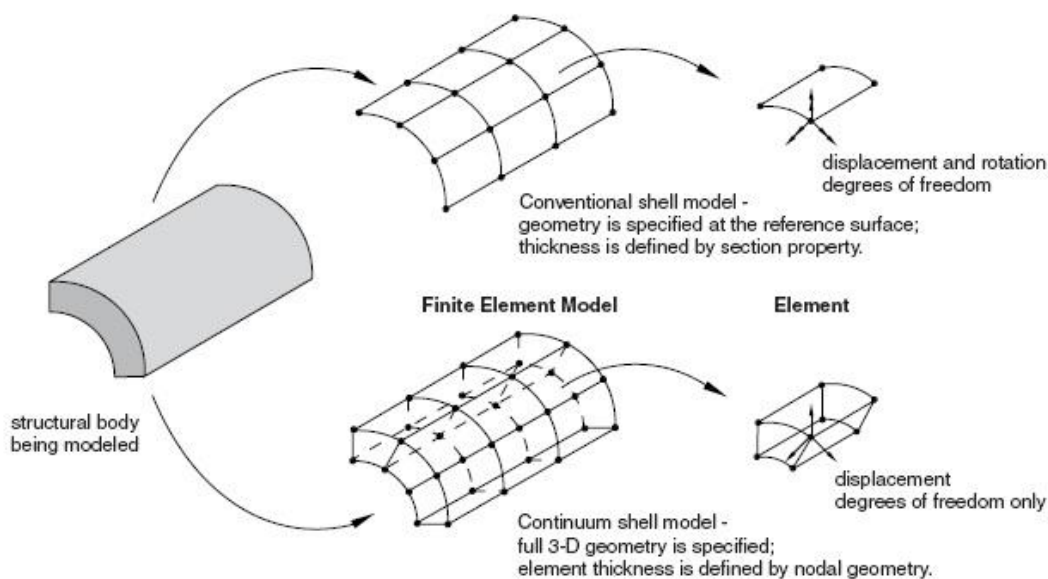


Obr. 17 - Průřez tělesa při modelaci prvkem shell

#### 4.6.2. Skořepinové modelování (Abaqus)

Tato práce se zabývá především modelováním v programu Abaqus, jelikož v tomto programu budou prováděny veškeré MKP výpočty. Při modelování kompozitních materiálů je možné použít dva typy skořepin. Jsou to:

- konvenční skořepiny (conventional shell elements)
- objemové skořepiny (continuum shell elements)



Obr. 18 - Rozdíl mezi konvenčním a objemovým skořepinovým prvkem

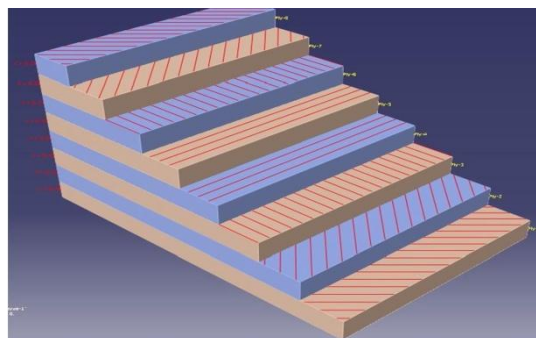
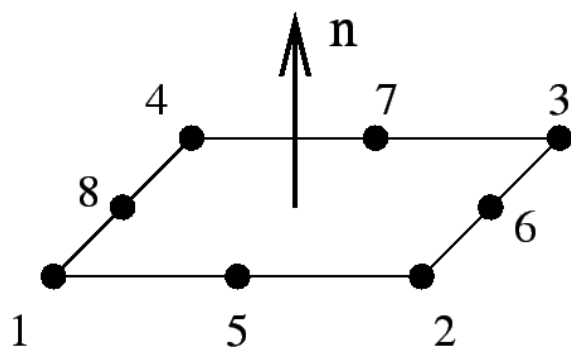
### Podmínky a předpoklady pro skořepinové modelování:

Tyto podmínky a předpoklady byly převzaty z [8].

- Musí být splněny Kirchhoffovy podmínky pro desky či skořepiny.
- Tloušťka skořepiny se s deformací nemění.
- Spojení mezi vrstvami je dokonale tuhé a nekonečně tenké.
- Tloušťka laminy je velmi malá ve srovnání s ostatními rozměry.
- Tuhost laminátu v souřadnicích  $x$ ,  $y$ ,  $z$  skořepiny se neliší více, než o dva řády.

#### 4.6.2.1. Konveční skořepiny

Při použití konvečních skořepin se geometrie modeluje na referenční ploše. Tato referenční plocha však nemusí být vždy shodná se střednicí skořepiny. Pokud to situace vyžaduje, může být referenční plocha definována jako spodní či horní povrch. Tloušťka se zadává pomocí funkce Composite Lay-Up manager, ve které je možno nastavit i orientaci a materiál každé vrstvy. Elementy se volí podle tloušťky skořepiny. Pro tenké jsou to STRI3, S8R5 nebo S9R5 a pro tlusté S8R.



Obr. 19 - Element S8R (vlevo) a orientace vrstev (vpravo)

#### 4.6.2.2. Objemové skořepiny

Při modelování objemové skořepiny je využívána objemová geometrie, což je výhodné pro představivost. Tloušťky se zadávají pouze relativní, jelikož celková tloušťka je dána geometrií. Pro zadání tloušťky se používá stejná funkce jako pro konveční skořepiny. Elementy používané pro tlusté konstrukce jsou SC6R a SC8R.

## 5. Výpočtové analýzy profilů silnostěnných nosníků

Další část této práce se bude zabývat výpočtovými analýzami vybraných profilů silnostěnných nosníků. Nejprve se bude věnovat metodám výpočtů průhybu nosníku tvořeného kompozitním materiálem při statickém zatížení a bude porovnávat průhyby počítané různými výpočetními metodami. Poté se bude zabývat dynamickými vlastnostmi (především vlastními frekvencemi) a bude porovnávat výpočetní metody s experimentálními daty.

Tato práce se omezuje pouze na metody, které byly vysvětleny v předchozích kapitolách. Pro výpočet průhybové čáry či výpočtu vlastních frekvencí jsou použity dvě metody a to:

- Euler–Bernoulliho teorie
- Timošenkova teorie

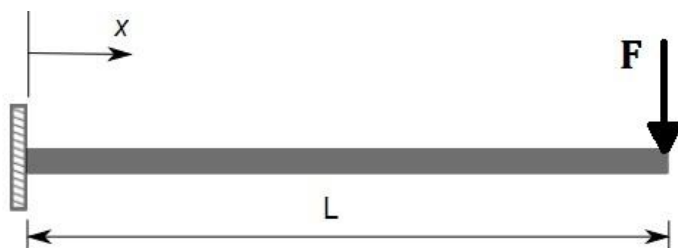
Pro výpočet materiálových konstant elementu (modul pružnosti v tahu a modul pružnosti ve smyku) jsou použity metody:

- Euler–Bernoulliho metoda
- Timošenkova metoda
- Empirické vzorce (4.69) a (4.70) převzaté z publikace [5] od profesora Laše  
(dále budou označovány jako Empirické vzorce A)
- Empirické vzorce (4.73) a (4.74) odvozené z Laminační teorie  
(dále budou označovány jako Empirické vzorce B)
- Metoda konečných prvků (MKP)

Jsou zde tedy dvě metody pro určení průhybové čáry či vlastních frekvencí a pět metod pro určení materiálových konstant kompozitního nosníku.

## 5.1. Výpočet průhybu silnostěnných nosníků

Zde je postup určení rovnice průhybové čáry pro vetknutý nosník podle obrázku 20.



Obr. 20 - Vetknutý nosík

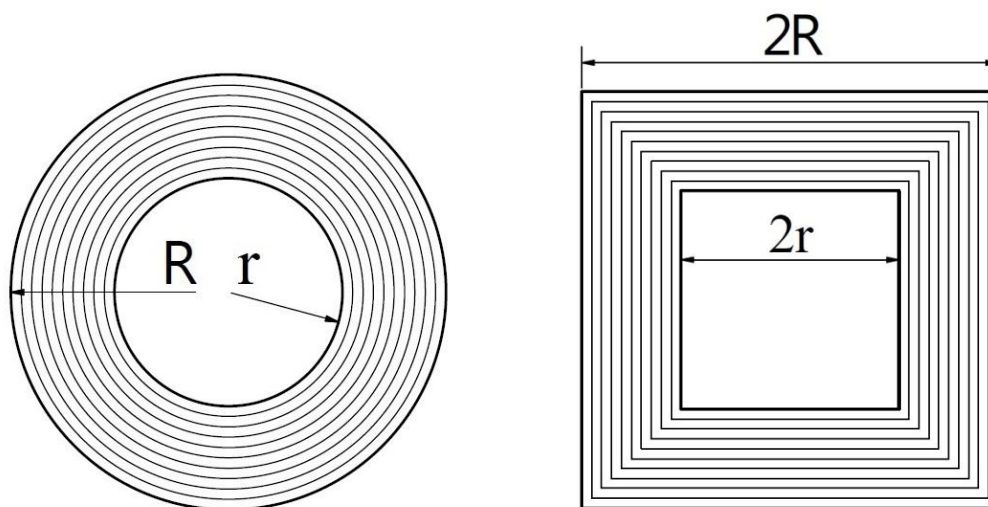
Rovnice ohybového momentu a posouvací síly vypadají:

$$M = -F(L - x) \tag{5.1}$$

$$Q = F \tag{5.2}$$

### 5.1.1. Definice profilů a materiálových vlastností

Tato práce se bude věnovat nejprve dvěma profilům. Každý z profilů bude složen z deseti vrstev, přičemž každá vrstva bude tvořena uhlíkovými vlákny, navíjenými pod určitým úhlem  $\alpha$ . Vrstvy budou mít stejnou tloušťku. Dále se bude předpokládat, že vrstvy jsou k sobě dokonale spojeny a nedochází tedy k prokluzu mezi vrstvami. Geometrická skladba obou profilů je uvedena na obr. 21.



Obr. 21 – Geometrická skladba profilů řešeného nosníku



### **Geometrie:**

Struktura kompozitu	[45,-30,45,-60,0,30,-15,90,-20,10] (první vrstva je navíjena pod úhlem 45°)
Počet vrstev	n = 10
Vnitřní poloměr	r = 22 mm
Vnější poloměr	R = 42 mm
Tloušťka vrstev	h = 2 mm

### **Materiálové vlastnosti:**

Modul pružnosti v tahu (ve směru vláken)	E <sub>1</sub> = 230 GPa
Modul pružnosti v tahu (kolmo na vlákna)	E <sub>2</sub> = 14 GPa
Modul pružnosti ve smyku (rovina 1,2)	G <sub>12</sub> = 5 GPa
Poissonovo číslo	ν <sub>12</sub> = 0,32
Hustota vláken	ρ = 1750 kg/m <sup>3</sup>

### **Zatížení a délka nosníku**

Délka nosníku	L = 300 mm
Zatěžující síla	F = 1000 N

## **5.1.2. Průhybová čára - Euler–Bernoulliho teorie**

Po dosazení (5.1) od rovnice (4.43) se získá:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{Fx}{EI} + \frac{FL}{EI} \quad (5.3)$$

Po dvojí integraci:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{Fx^2}{2EI} + \frac{FLx}{EI} + C_1 \quad (5.4)$$

$$w = -\frac{Fx^3}{6EI} + \frac{FLx^2}{2EI} + C_1x + C_2 \quad (5.5)$$

Z okrajových podmínek se určí konstanty C<sub>1</sub> a C<sub>2</sub>:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (5.6)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad (5.7)$$

Výsledná rovnice průhybové čáry má tedy tvar:

$$w = -\frac{Fx^3}{6EI} + \frac{FLx^2}{2EI} \quad (5.8)$$

### 5.1.3. Průhybová čára – Timošenkova teorie

Výsledkem po dosazení vztahu (5.1) do rovnice (4.60) je:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{F(L-x)}{D} \quad (5.9)$$

Po integraci:

$$\varphi = -\frac{FLx}{D} + \frac{Fx^2}{2D} + C_1 \quad (5.10)$$

Rovnice (5.2) a (5.10) se dosadí do vztahu (4.59) a výsledkem je:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{FLx}{D} + \frac{Fx^2}{2D} + C_1 + \frac{F}{\kappa A} \quad (5.11)$$

Pro určení průhybové rovnice se výraz (5.11) integruje:

$$w = -\frac{FLx^2}{2D} + \frac{Fx^3}{6D} + C_1x + C_2 + \frac{Fx}{\kappa A} \quad (5.12)$$

Z okrajových podmínek se určí konstanty  $C_1$  a  $C_2$ :

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (5.13)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad (5.14)$$

Výsledná rovnice průhybové čáry má tedy tvar:

$$w = -\frac{FLx^2}{2D} + \frac{Fx^3}{6D} + \frac{Fx}{\kappa A} \quad (5.15)$$

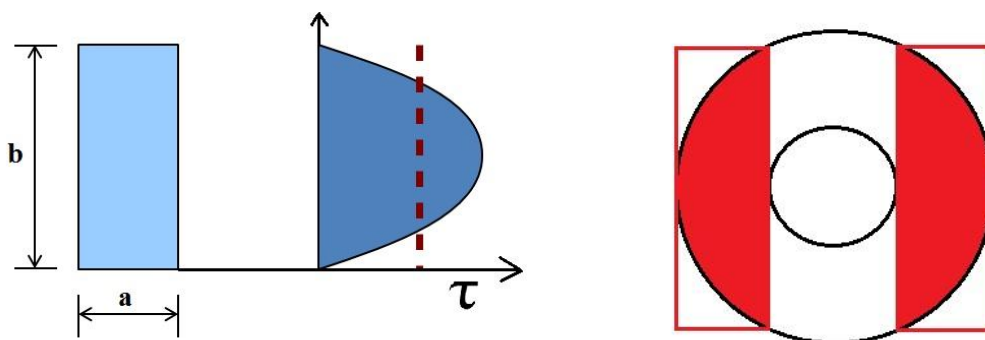
### 5.1.4. Výpočet axiální tuhosti

Aby bylo možné stanovit průhybovou rovnici nosníku, je třeba v rovnicích (5.8) a (5.15) určit neznámé materiálové konstanty. Tyto konstanty budou počítány různými metodami, čímž vzniknou různé průhybové čáry. Maximální průhyb volného konce nosníku, získaný různými postupy, mezi sebou porovnáme.

V rovnici průhybové čáry, řešené Timošenkovou teorií, se také vyskytuje Timošenkův koeficient smyku  $\kappa$ . Ten je u neizotropního materiálu závislý na více faktorech, než jen na geometrii profilu.

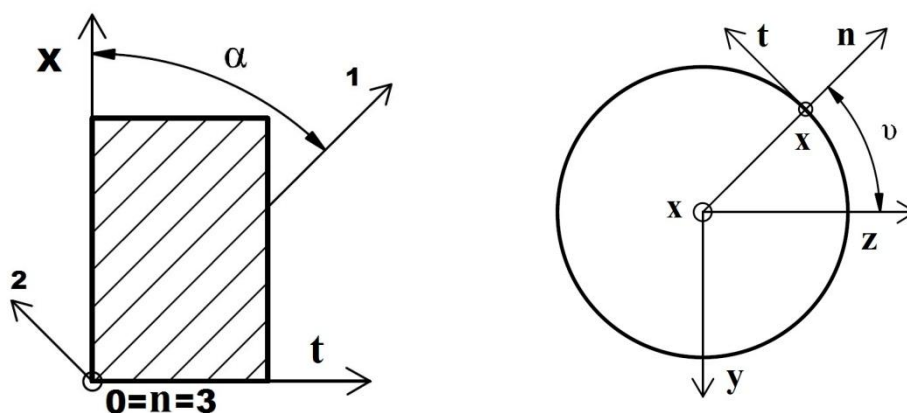
Jelikož se však největší smykové napětí vyskytuje uprostřed profilu (znázorněno na obr. 22), může být část profilu zanedbána. V úvahu budou brány pouze takzvané „stojny“ profilu.

Zavádíme Timošenkův koeficient smyku  $\kappa = 1$



Obr. 22 - Rozložení smykového napětí v profilu (vlevo) a znázornění části zanedbaného profilu při určování Timošenkova koeficientu (vpravo)

Dále je nutné definovat transformační matice pro vektor deformace a napětí u trubkového profilu. Je zaveden nový souřadný systém nazvaný  $O(x,t,n)$ , který je zobrazen na obr. 23 (vpravo). Trubku si lze představit jako rozvinutou desku podle obr. 23 (vlevo). Bude se tedy určovat transformační matice pro vektory deformace a napětí ze systému  $O(1,2,3)$  do systému  $O(x,t,n)$ .



Obr. 23 – Znázornění souřadných systémů u kruhového profilu

Transformační matice pro vektor napětí bude vypadat:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & -2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Pomocí vztahu (4.12) se získá i  $\mathbf{T}_{\varepsilon}$ .

U čtvercového profilu jsou systémy O(1,2,3) a O(x,y,z) definovány identicky podle kapitoly 4. Mohou být použity vztahy (4.10) a (4.11).

Za předpokladu, že se jedná o ortotropní materiál, lze získat matici mimoosové tuhosti ze vztahů:

$$C^x = T_{\sigma}^{-1} C T_{\varepsilon} \quad (5.17)$$

$$Q_{ij} = C_{ij}^x \quad (5.18)$$

Kde  $\mathbf{C}$  je matice tuhosti v systému O(1,2,3), tedy ve směru navíjených vláken.

### **Materiálové koeficienty – Timošenkova a Euler–Bernoulliho teorie.**

Výpočet materiálových koeficientů A, D a EI:

$$A = \sum_1^n G_n^x A_n \quad (5.19)$$

$$EI = D = \sum_1^n E_n^x I_n \quad (5.20)$$

Kde:

$$G_n^x = (Q_{66})_n \quad (5.21)$$

$$E_n^x = (Q_{11})_n \quad (5.22)$$

a) Pro trubkový profil

$$A_n = \pi((r + nh)^2 - (r + (n - 1)h)^2) \quad (5.23)$$

$$I_n = \pi \frac{(r + nh)^4 - (r + (n - 1)h)^4}{4} \quad (5.24)$$

b) Pro čtvercový profil

$$A_n = (2(r + nh))^2 - (2(r + (n - 1)h))^2 \quad (5.25)$$

$$I_n = \frac{1}{12}((2(r + nh))^4 - (2(r + (n - 1)h))^4) \quad (5.26)$$

### **Materiálové koeficienty – Empirické vzorce A a B**

Výpočet materiálových koeficientů A a D je definován:

$$A = G_{xy}A_{celk} \quad (5.27)$$

$$D = E_x I_{celk} \quad (5.28)$$

Kde:

$G_{xy}$  a  $E_x$  se vypočítá pomocí empirických vzorců (4.69) a (4.70) pro variantu A a z empirických vzorců (4.73) a (4.74) pro variantu B.

a) Pro trubkový profil

$$A_{celk} = \pi(R^2 - r^2) \quad (5.29)$$

$$I_{celk} = \pi(R^4 - r^4)/4 \quad (5.30)$$

b) Pro čtvercový profil

$$A_{celk} = (2R)^2 - (2r)^2 \quad (5.31)$$

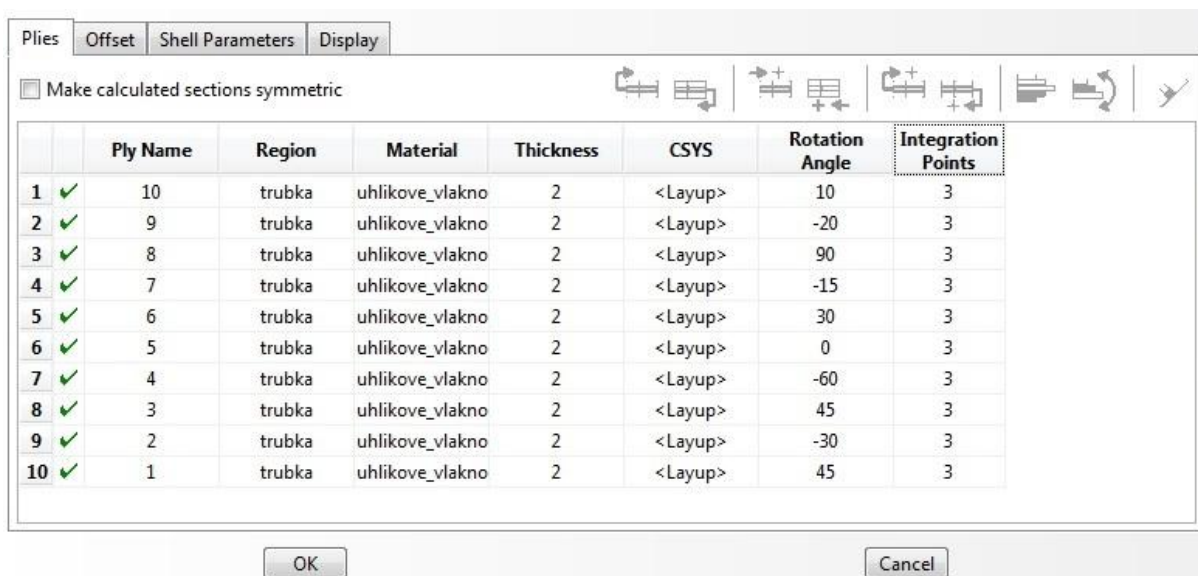
$$I_{celk} = ((2R)^4 - (2r)^4)/12 \quad (5.32)$$

### **MKP model:**

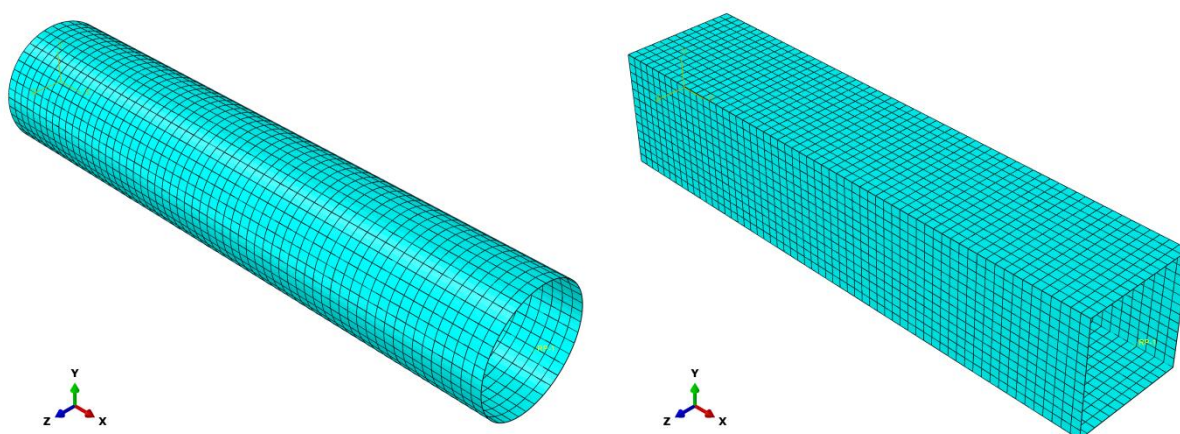
Výpočet průhybu nosíku Metodou konečných prvků byl proveden v programu Abaqus. Model byl definován jako 3D deformovatelná konveční skořepina (shell). Tloušťka, orientace vláken a materiál každé vrstvy byly nastaveny ve funkci Composite Lay-Up manager (obr. 24). Referenční plocha byla zvolena jako střednicová plocha. U kruhového profilu směřuje normálová osa do středu kružnice a u čtvercového profilu směřuje od středu profilu. Sít'ování (Mesh) modelu byl provedeno S8R prvky (conventional shell elements).

- **Stavba modelu v bodech:**

- Part – 3D, Deformable, Shell
- Property - Material – Elastic – Type: lamina
- Property - Composite Lay-Up – definice vrstev dle obr. 24
- Mesh - Approximate global size: 5 , Element: S8R



Obr. 24 – Composite Lay-Up manager



Obr. 25 – Ukázka síťování modelů (Mesh)

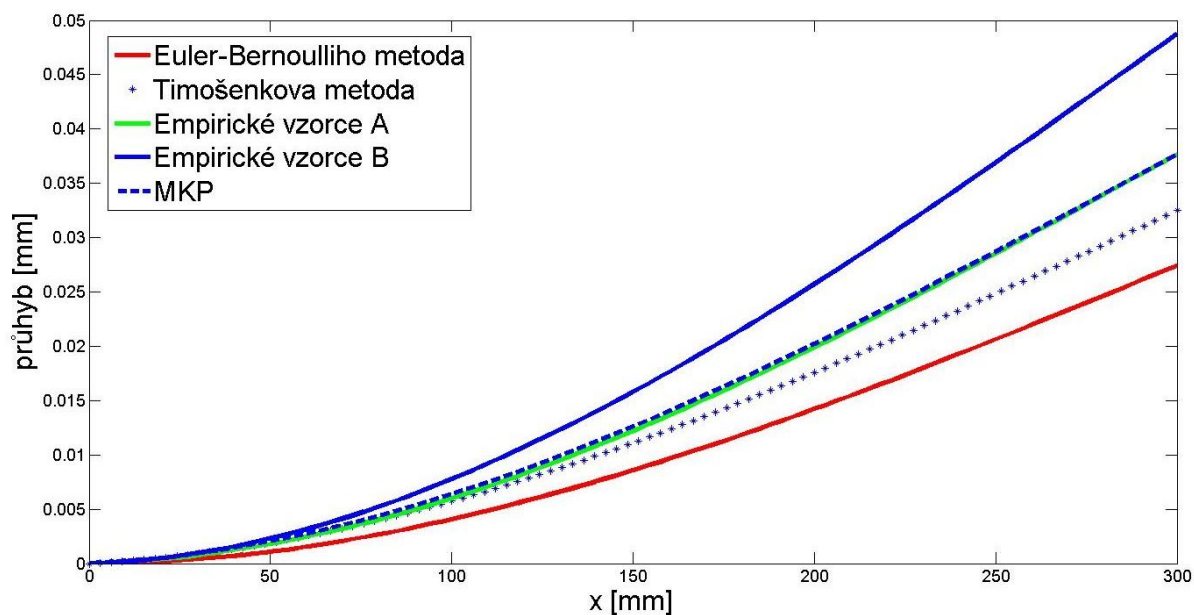
### 5.1.5. Výsledky – průhyb

Nejprve byly vypočítány průhybové čáry definovaného nosníku s kruhovým a čtvercovým profilem. Tyto průhybové čáry, počítané různými metodami, budou pro porovnání vloženy do jednoho grafu.

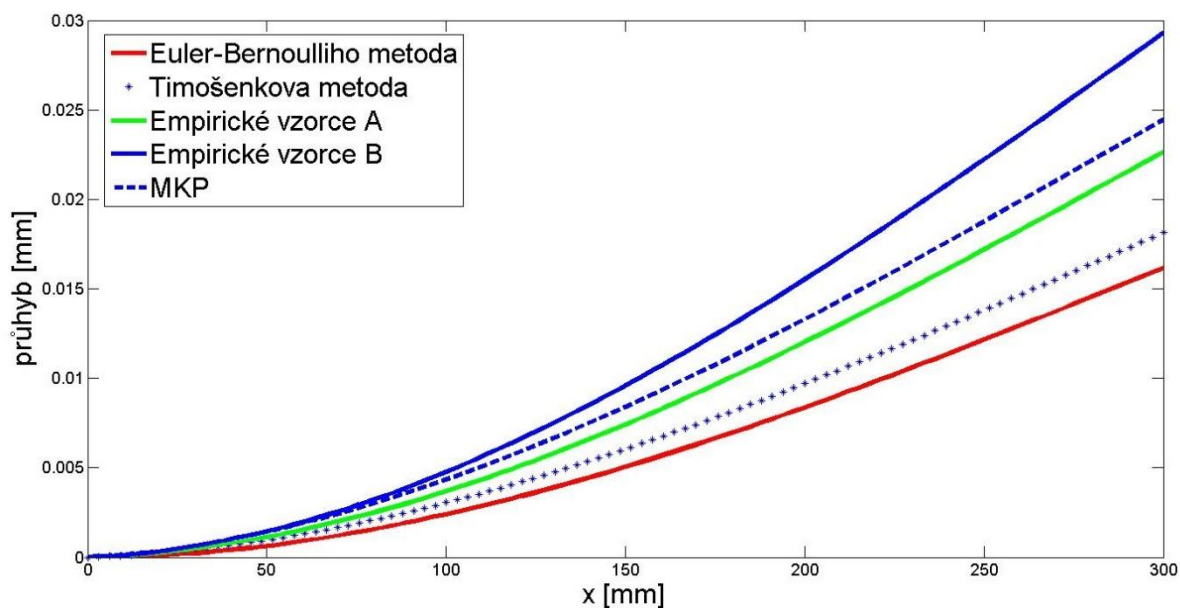
Dále zde bude zobrazena tabulka s maximálními hodnotami průhybu každé metody. Tyto hodnoty budou vyjádřené procentuálně vůči referenční metodě. Jako retenční metodu jsme zvolili metodu MKP.

Dále je zde uvedeno k jakým změnám dojde, pokud se zvětší velikost nosníku. Na závěr bude posouzen vliv Timošenkova koeficientu smyku na výsledcích a bude ukázána změna výsledků při modelování objemovou skořepinou, místo modelování skořepinou konveční, v programu Abaqus.

Grafy porovnávají výpočetní metody průhybu pro kruhový a čtvercový profil vetknutého nosníku délky 300 mm. Vypadají takto:



Obr. 26 – Porovnání průhybových čar 300 mm dlouhého nosníku s kruhovým profilem



Obr. 27 – Porovnání průhybových čar 300 mm dlouhého nosníku s čtvercovým profilem

Podle grafů znázorněných na obr. 26 lze konstatovat, že výsledné průhybové čáry kruhového profilu, vypočítané metodu MKP a Empirickým vzorcem A, jsou skoro totožné. Naproti tomu u čtvercového profilu vznikl mezi těmito metodami určitý rozdíl. Tento fakt byl předpokládán, jelikož Empirický vzorec A byl odvozen pro trubku.

Dále je vidět, že u obou profilů vyšla nejvyšší tuhost nosníku u metody Euler-Bernoulli. Na druhou stranu nejpoddajnější výsledky byly získány v obou případech Empirickým vzorcem B.

Tabulky s maximálními průhyby a s procentuálním porovnáním vypadají:

<b>Kruhový profil (300 mm)</b>			
Metoda	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl vůči MKP [%]
MKP	0,0377	100	0
Euler-Bernoulliho met.	0,0274	72,8	-27,2
Timošenkova met.	0,0325	86,2	-13,8
Empirické vzorce A	0,0377	100	-0,02
Empirické vzorce B	0,0487	129,4	29,4

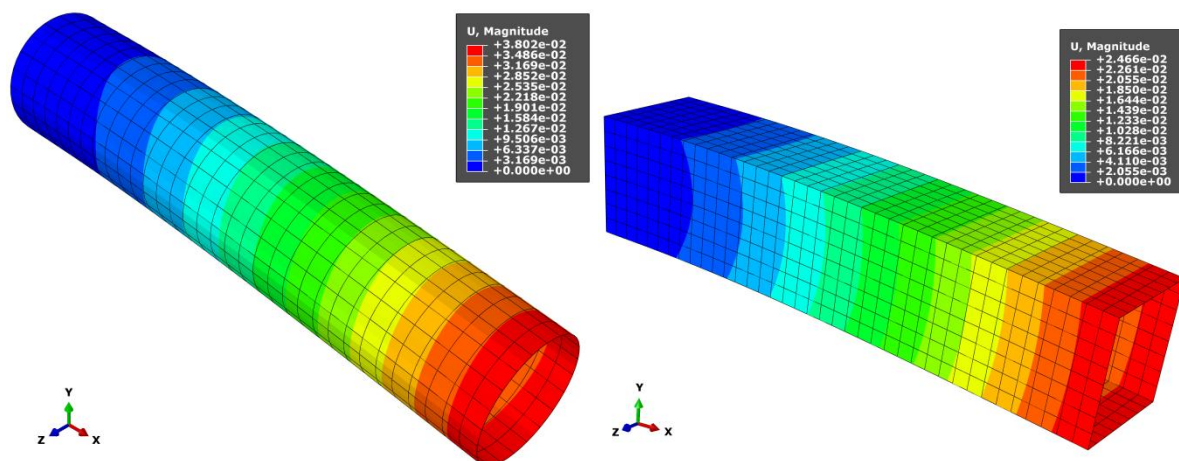
*Tab. 2 – Maximální průhyb 300 mm dlouhého nosníku kruhového profilu*

<b>Čtvercový profil (300 mm)</b>			
Metoda	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl vůči MKP [%]
MKP	0,0244	100	0
Euler-Bernoulliho met.	0,0162	66,1	-33,9
Timošenkova met.	0,0181	74,2	-25,8
Empirické vzorce A	0,0226	92,6	-7,4
Empirické vzorce B	0,0293	119,8	19,8

*Tab. 3 – Maximální průhyb 300 mm dlouhého nosníku čtvercového profilu*

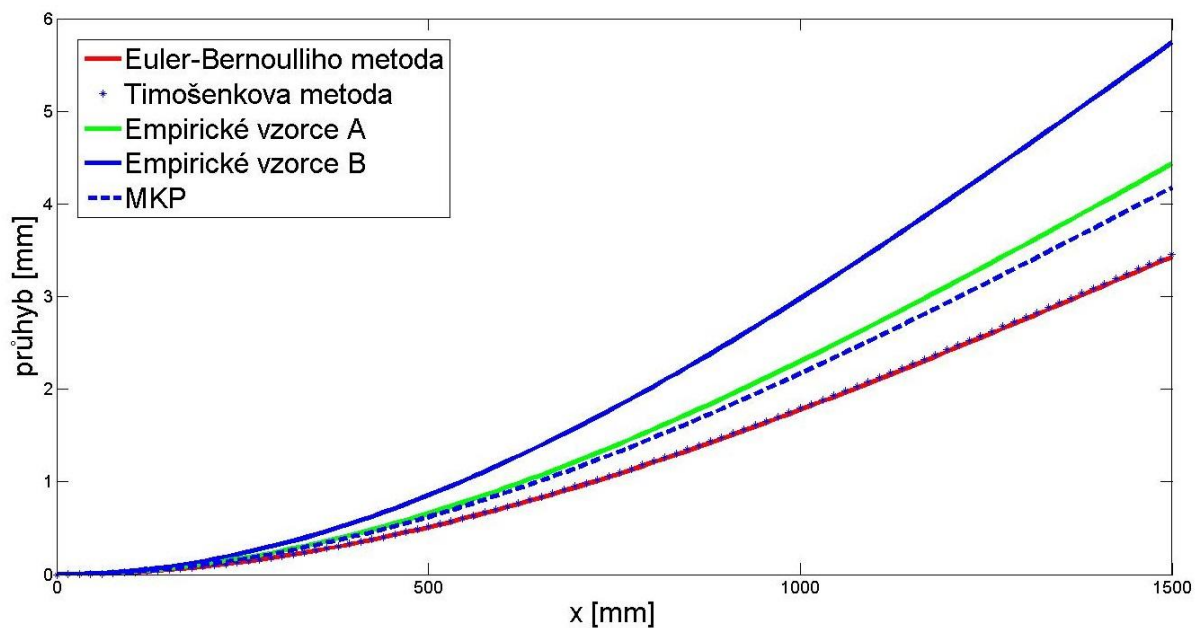
Z tabulek 2 a 3 je vidět, že největší procentuální rozdíl se vyskytuje mezi metodou Euler-Bernoulli a Empirickým vzorcem B. Tento rozdíl je u kruhového profilu okolo 56% a u čtvercového profilu okolo 53 %.





Obr. 28 – Ukázka deformace 300 mm nosníků kruhového a čtvercového profilu

Pokud se zvětší délka nosníku na 1500 mm, je při zachování všech ostatních parametrů pro kruhový profil získán porovnávací graf, který vypadá:



Obr. 29 – Porovnání průhybových čar 1500 mm dlouhého nosníku s kruhovým profilem

Z porovnání výpočetních metod u 1500 mm dlouhého nosníku je zjevné, že deformace od posouvající síly je při této délce velmi nepatrná. Tento fakt dokazuje ztotožnění průhybové čáry u Euler-Bernoulliho metody a Timošenkovy metody, jelikož Timošenkova metoda se liší od Euler-Bernoulliho metody pouze započítáním deformace od posouvající síly.

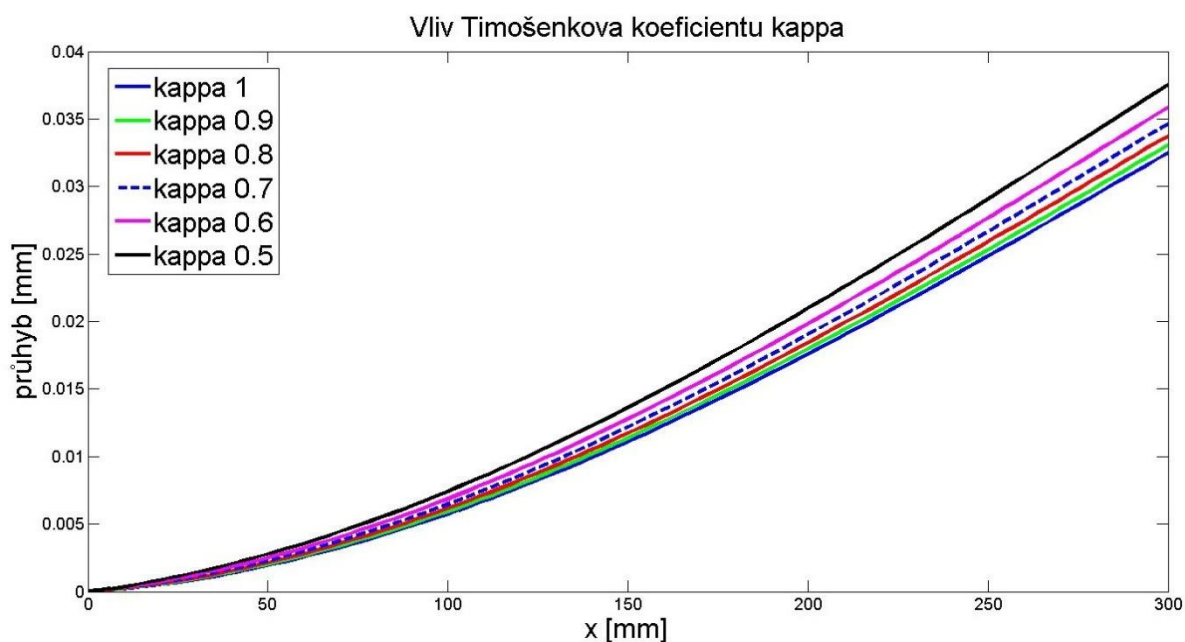
Výsledek počítaný Empirickým vzorcem B dosáhl opět největšího odklonění od ostatních metod. Jak velké procentuální rozdíly se vyskytují mezi metodami, znázorňuje tabulka 4.

<b>Kruhový profil (1500 mm)</b>			
Metoda	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl vůči MKP [%]
MKP	4,2	100	0
Euler-Bernoulliho met.	3,4	82,1	-17,9
Timošenkova met.	3,5	82,7	-17,3
Empirické vzorce A	4,4	106,1	6,1
Empirické vzorce B	5,7	137,6	37,6

Tab. 4 - Maximální průhyb 1500 mm dlouhého nosníku kruhového profilu

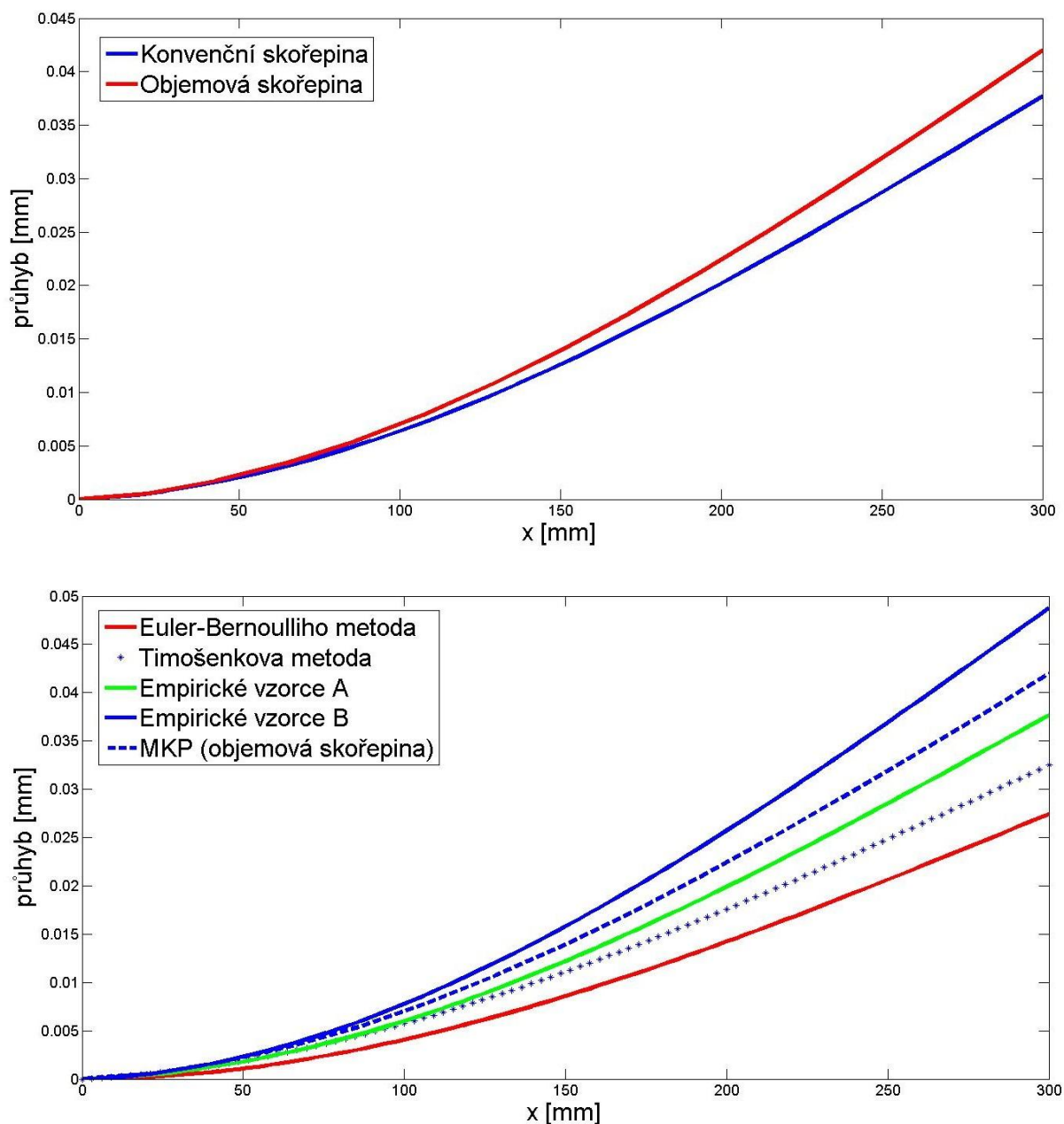
Na obr. 31 je vidět velikost vlivu Timošenkovy koeficientu smyku na výsledném průhybu. Tento vliv byl demonstrován na původním 300 mm dlouhém vetknutém nosníku s kruhovým průřezem, který byl na volném konci zatížen osamělou silou.

Podle obr. 31 může koeficient do jisté míry ovlivnit výsledky průhybu. Avšak při velikosti koeficientu do 0.9 je chyba opravdu nepatrná.



Obr. 31 - Velikost vlivu Timošenkovy koeficientu smyku na výsledcích

V této kapitole byla dosud použita konvenční skořepina při výpočtech pomocí MKP. Na obr. 32 (nahore) je znázorněn rozdíl mezi průhybovou čarou při použití konvenční skořepiny a průhybovou čarou při použití objemové skořepiny v programu Abaqus pro výpočet původního 300 mm dlouhého nosníku kruhového průřezu. Na obr. 32 (dole) jsou porovnány výpočetní metody při použití objemové skořepiny místo konvenční skořepiny u metody MKP.



Obr. 32 – Rozdíl mezi objemovou skořepinou a konvenční skořepinou u metody MKP pro 300mm dlouhý nosník kruhového profilu (nahore) a porovnání s ostatními metodami při použití objemové skořepiny u stejného nosníku (dole)

Rozdíl při výpočtu 300 mm dlouhého nosíku s kruhovým profilem pro použití objemové skořepiny oproti konveční skořepině činí 11,4 %.

V tabulce 5 jsou zobrazeny maximální průhyby nosíku a procentuální rozdíl mezi výpočetními metodami při použití objemové skořepiny u metody MKP.

<b>Kruhový profil (300 mm), Objemová skořepina</b>			
Metoda	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl vůči MKP [%]
MKP	0,0420	100	0
Euler-Bernoulliho met.	0,0274	65,3	-34,7
Timošenkova met.	0,0325	77,5	-22,5
Empirické vzorce A	0,0377	89,9	-10,1
Empirické vzorce B	0,0487	116,1	16,1

*Tab. 5 - Maximální průhyb 300 mm dlouhého nosíku kruhového profilu při použití objemové skořepiny u metody MKP*

Z tabulky 5 je patrné, že procentuální rozdíly vůči referenční metodě (MKP) se výrazně změnily oproti údajům z tabulky 2. Lze tedy říci, že způsob modelování v programu Abaqus ovlivňuje do značné míry výsledky.

## 5.2. Výpočet vlastních frekvencí

Tato kapitola se bude zabývat výpočtem vlastních frekvencí nosníků s profily definovanými v kapitole 5.1.1. Z důvodu snahy snížit tuhost nosníku byla změněna délka z 300 mm na 1500 mm, čímž se vlastní frekvence dostaly do pásma frekvencí, které je běžně používáno v praxi.

Pro výpočet vlastních frekvencí vetknutého nosníku byl odvozen vzorec z Euler-Bernoulliho teorie. Tento vzorec má tvar:

$$\Omega_n = \frac{N_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.33)$$

Kde:

$$N_1 = 1.875, N_2 = 4.694, N_3 = 7.855, N_4 = 10.996 \quad (5.34)$$

Pro výpočet vlastních frekvencí pomocí Timošenkovy teorie byl použit vztah:

$$P \frac{\partial u}{\partial t} + K \frac{\partial u}{\partial x} + Ru = 0 \quad (5.35)$$

Kde matice  $P$ ,  $K$  a  $R$  jsou uvedeny v kapitole 4.4.2.

### 5.2.1. Výsledky – vlastní frekvence

Výsledky byly prováděny v programech Matlab a Abaqus. Rovnice (5.35) byla řešena z důvodu obtížnosti numericky. MKP model byl vytvořen jako konveční skořepina.

Všechny konstanty potřebné k řešení vlastních frekvencí byly počítány identicky s kapitolou 5.1.4. Vlastní frekvence kruhového profilu mají hodnoty:

Kruhový profil, (1500 mm), Vlastní frekvence [Hz]				
MKP	Euler-Bernoulli	Timošenko	Emp. vzorec A	Emp. vzorec B
48,6	53,7	51	47,3	41,5
296,4	336,6	319,7	296,5	260,4
797,6	942,5	895,4	830,3	729,2
1484,1	1846,8	1754,5	1627	1428,8

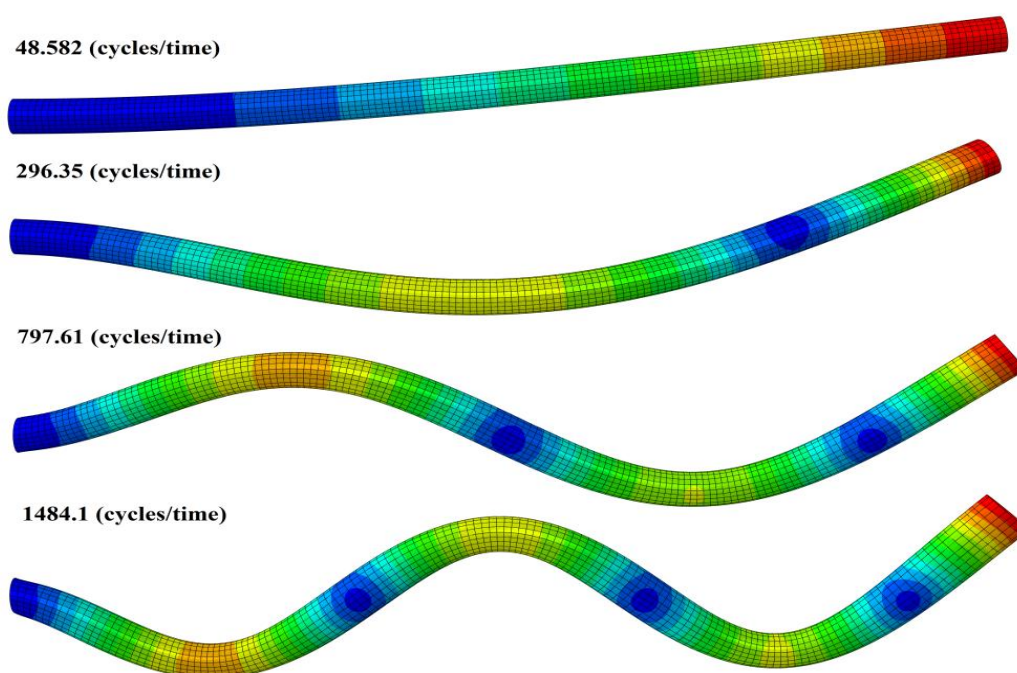
Tab. 6 – Vlastní frekvence vetknutého nosníku s kruhovým profilem

U první vlastní frekvence vyšla největší odchylka od referenční metody (MKP) u metody Empirický vzorec B.

Hodnoty vlastních frekvencí nosníku s čtvercovým profilem jsou uvedeny v tabulce 7:

<b>Čtvercový profil, (1500 mm), Vlastní frekvence [Hz]</b>				
MKP	Euler-Bernoulli	Timošenko	Emp. vzorec A	Emp. vzorec B
54,2	62	59,5	54,6	48,0
326,5	388,6	372,7	342,4	300,7
862,8	1088,3	1043,7	958,8	842
1570,4	2132,5	2045,1	1878,7	1649,8

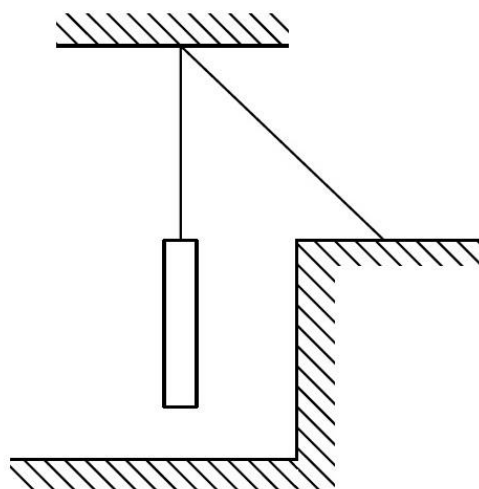
Tab. 7 – Vlastní frekvence vetknutého nosníku s čtvercovým profilem



Obr. 33 – Vlastní tvary kmitu vetkaného nosníku kruhového profilu

### 5.3. Porovnání výpočtových analýz s experimentálními daty

Tato část práce se bude zabývat porovnáváním experimentálně získaných dat s výsledky počítanými různými metody. Experiment byl proveden u dvou trubek různých struktur, ale stejných délek a stejných vnějších i vnitřních průměrů. Při experimentu byly zjištěny vlastní frekvence volného kmitání.



Obr. 34 – Schéma experimentu (vpravo) a měřené trubky (vlevo)

#### 5.3.1. Definice struktury a geometrie měřených trubek

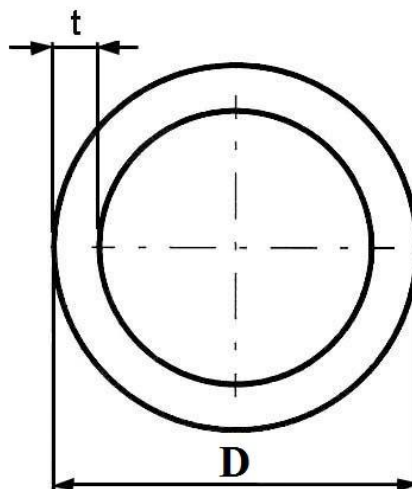
Experimentálně měřené trubky byly nazvány T700-0 a T700-45. Trubka T700-45 je tvořena 13 vrstvami různých velikostí. Každá tato vrstva byla vyrobena technologií navíjení vláken do kříže ze stejného materiálu. Druhou trubku T700-0 tvoří 8 vrstev a byla vyrobena dvěma typy vláken (znázorněno v tabulce 8). U této trubky se vyskytují i vrstvy navíjené pod nulovým úhlem.

Obě trubky mají stejné tloušťky 11,5mm. Některé vrstvy jsou navíjeny křížově, tedy střídavě s orientací +/- navíjený úhel.



### **T700-0:**

Počet vrstev:	$n = 8$
Vnější průměr:	$D = 37 \text{ mm}$
Tloušťka:	$t = 11,5 \text{ mm}$
Délka:	$L = 1900 \text{ mm}$
Hustota:	$\rho = 1457,9 \text{ kg/m}^3$
Hmotnost:	$m = 2,552 \text{ kg}$



### **T700-45:**

Počet vrstev:	$n = 13$
Vnější průměr:	$D = 37 \text{ mm}$
Tloušťka:	$t = 11,5 \text{ mm}$
Délka:	$L = 1900 \text{ mm}$
Hustota:	$\rho = 1482,5 \text{ kg/m}^3$
Hmotnost:	$m = 2,592 \text{ kg}$

Tloušťka, materiálové vlastnosti a orientace výztuže každé vrstvy pro obě trubky jsou uvedeny v tabulkách 8 a 9.

$E_1$  značí modul pružnosti ve směru vláken a  $E_2$  značí modul pružnosti kolmo na vlákna. Pokud není u druhu navíjení nic uvedeno, znamená to, že vlákna mají v celé vrstvě stejný úhel navíjení.

Tabulky struktury trubek vypadají:

<b>Trubka T700-0</b>							
Vrstva	Tloušťka stěny	Orientace výztuže	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	Druh navíjení
	mm	stupeň	MPa	MPa	MPa	-	-
1	5,03	0	118900	4719,1	3100,8	0,343	-
2	0,37	48,4	118900	4719,1	3100,8	0,343	Kříž
3	0,49	49,2	130510	5066,3	3421,7	0,338	Kříž
4	2,14	0	130510	5066,3	3421,7	0,338	-
5	0,36	42,7	130510	5066,3	3421,7	0,338	Kříž
6	1,99	0	130510	5066,3	3421,7	0,338	-
7	0,45	46,9	130510	5066,3	3421,7	0,338	kříž
8	0,66	0	130510	5066,3	3421,7	0,338	-

Tab. 8 – Struktura trubky T700-0



<b>Trubka T700-45</b>							
Vrstva	Tloušťka stěny	Orientace výztuže	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	Druh navíjení
	mm	stupeň	Mpa	Mpa	Mpa	-	-
1	0,872	43,87	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
2	0,778	43,33	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
3	1,113	43,09	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
4	0,988	42,40	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
5	0,903	42,34	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
6	0,828	41,52	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
7	0,800	43,48	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
8	0,930	42,97	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
9	0,900	44,91	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
10	0,822	42,84	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
11	0,801	44,36	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
12	0,783	45,76	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž
13	0,983	44,21	151408	5839,8	4205,2	0,3297	kříž

Tab. 9 – Struktura trubky T700-45

### 5.3.2. Výsledky – porovnání výpočtů s experimentem

Výsledky byly získány z programů Matlab (pro analytické řešení) a Abaqus (pro Metodu konečných prvků). V řešení byl Timošenkův koeficient smyku opět považován za hodnotu 1.

Pokud byla vrstva navíjena křížově, byla rozdělena na čtyři části o stejné tloušťce. První a poslední části mají stejný úhel navíjení, který byl definován v tabulkách 8 a 9. Prostředním částem byl nastaven úhel navíjení se zápornou hodnotou. Například první křížově navíjená vrstva trubky T700-45 byla rozdělena na čtyři vrstvy s tloušťkami 0.218 mm a orientací vláken [43.87; -43.87; -43.87; 43.87].

Výpočetní modely v programu Abaqus byly modelovány jako 3D deformovatelná konveční skořepina (shell). Pro strukturu trubek byla použita funkce Composite Lay-Up manager, do které byly zadávány už rozdělené křížově navíjené vrstvy (obr. 35). To znamená, že do funkce Composite Lay-Up bylo místo 8 vrstev vloženo vrstev 20 u trubky T700-0 a místo 13 vrstev u trubky T700-45 jich bylo vloženo 54. Modely byly síťovány prvky S8R. Při řešení v programu Abaqus vyšlo prvních 6 vlastních frekvencí nulových, jelikož se jednalo o volné kmitání.

Výsledné vlastní frekvence, počítané metodami uvedenými na začátku kapitoly 5, byly pro porovnání vloženy do tabulek 10 a 11.

		Ply Name	Region	Material	Thickness	CSYS	Rotation Angle	Integration Points
41	✓	3	trubka	uhlik	0.0002002	<Layup>	44.36	3
42	✓	3-Copy3	trubka	uhlik	0.0002002	<Layup>	-44.36	3
43	✓	3-Copy2	trubka	uhlik	0.0002002	<Layup>	-44.36	3
44	✓	3-Copy1	trubka	uhlik	0.0002002	<Layup>	44.36	3
45	✓	2	trubka	uhlik	0.0001957	<Layup>	45.76	3
46	✓	2-Copy3	trubka	uhlik	0.0001957	<Layup>	-45.76	3
47	✓	2-Copy2	trubka	uhlik	0.0001957	<Layup>	-45.76	3
48	✓	2-Copy1	trubka	uhlik	0.0001957	<Layup>	45.76	3
49	✓	1	trubka	uhlik	0.0002458	<Layup>	44.21	3
50	✓	1-Copy3	trubka	uhlik	0.0002458	<Layup>	-44.21	3
51	✓	1-Copy2	trubka	uhlik	0.0002458	<Layup>	-44.21	3
52	✓	1-Copy1	trubka	uhlik	0.0002458	<Layup>	44.21	3

Obr. 35 – Ukázka zadávání struktury v programu Abaqus pro trubku T700-45

Tabulka vlastních frekvencí volného kmitání pro trubku T700-0 vypadá:

Vlastní frekvence [Hz], Trubka T700-0					
Experiment	MKP	Euler-Bernoulli	Timošenko	Emp. vzor. A	Emp. vzor. B
76,4	75,9	84,9	84,5	84,1	84,1
208,5	206,9	234,0	232,8	231,8	231,7
403,5	399,3	458,7	456,4	454,6	454,3
653,7	646,6	758,3	754,5	751,4	750,9
952,3	942,2	1132,7	1127,0	1122,4	1121,7
1293,8	1279,4	1582,0	1574,1	1567,7	1566,7
1670,8	1651,5	2106,3	2095,7	2087,2	2085,8

Tab. 10 – Výsledky vlastních frekvencí pro trubku T700-0

Z tabulky 10 je patrné, že experimentálním datům se blíží nejvíce Metoda konečných prvků. Odchylka této metody od experimentálních dat je okolo 1%. Ostatní čtyři metody, počítané analyticky, dávají přibližně stejné výsledky.

Jako metoda s největším rozdílem od experimentálních výsledků vyšla Euler-Bernoulliho metoda. Avšak tato metoda se velmi blíží výsledkům počítaným Timoškovou metodou, jelikož je trubka velmi štíhlá. Z tohoto důvodu se prakticky neprojevují účinky od smykového napětí.

Z analytických výpočtů se nejvíce přibližují vlastní frekvence počítané Empirickým vzorcem B. Na druhou stranu i tato metoda dosáhla při vyšších frekvencích velké chyby.

Tabulka vlastních frekvencí volného kmitání pro trubku T700-45 vypadá:

<b>Vlastní frekvence [Hz], Trubka T700-45</b>					
Experiment	MKP	Euler-Bernoulli	Timošenko	Emp. vzor. A	Emp. vzor. B
31,7	30,9	55,3	55,0	32,9	32,9
87,5	85,0	152,4	151,6	90,7	90,6
171,8	166,6	298,8	297,3	177,8	177,6
284,4	275,3	493,9	491,4	294,0	293,6
424,0	411,0	737,8	734,1	439,1	438,6
592,4	573,8	1030,4	1025,3	613,3	612,5
787,8	763,4	1371,9	1365,0	816,5	815,5

Tab. 11 – Výsledky vlastních frekvencí pro trubku T700-45

Výsledky zobrazené v tabulce 11 ukazují odlišnou situaci, než je v předešlé tabulce. Metoda, která se nejvíce blíží k experimentálním datům, je opět Metoda konečných prvků. Avšak výsledky počítané Empirickými vzorci A a B mají skoro shodnou odchylku od experimentu, jako metoda MKP. Tyto tři metody (MKP, Empirické vzorce A a B) mají odchylku od experimentu okolo 3%. U metody MKP vycházejí frekvence menší než u experimentu, a naopak u metod Empirické vzorce A a B vycházejí frekvence větší.

Výsledky počítané Euler-Bernoulliho metodou a Timošenkovou metodou se o desítky procent liší od výsledků, které vyšly u experimentu i u ostatních metod. Tuhosti trubky u těchto metod jsou počítány obdobně, z toho důvodu došlo v obou případech k podobné chybě.

Porovnáním výsledků u obou tabulek je možné konstatovat, že u Metody konečných prvků vychází velmi malá odchylka od skutečných hodnot. O ostatních čtyřech metodách lze říci, že jejich odchylka od experimentu se liší v závislosti na struktuře kompozitu.

<b>Hodnoty tuhostí EI=A [N·mm<sup>2</sup>]</b>			
	Euler-Bernoulli, Timošenko	Empirické vzorec A	Empirické vzorec B
Trubka T700-0	9946,6	9754,6	9766,9
Trubka T700-45	4291	1520,1	1516,2

Tab. 12. Hodnoty EI=A počítané analytickými metodami

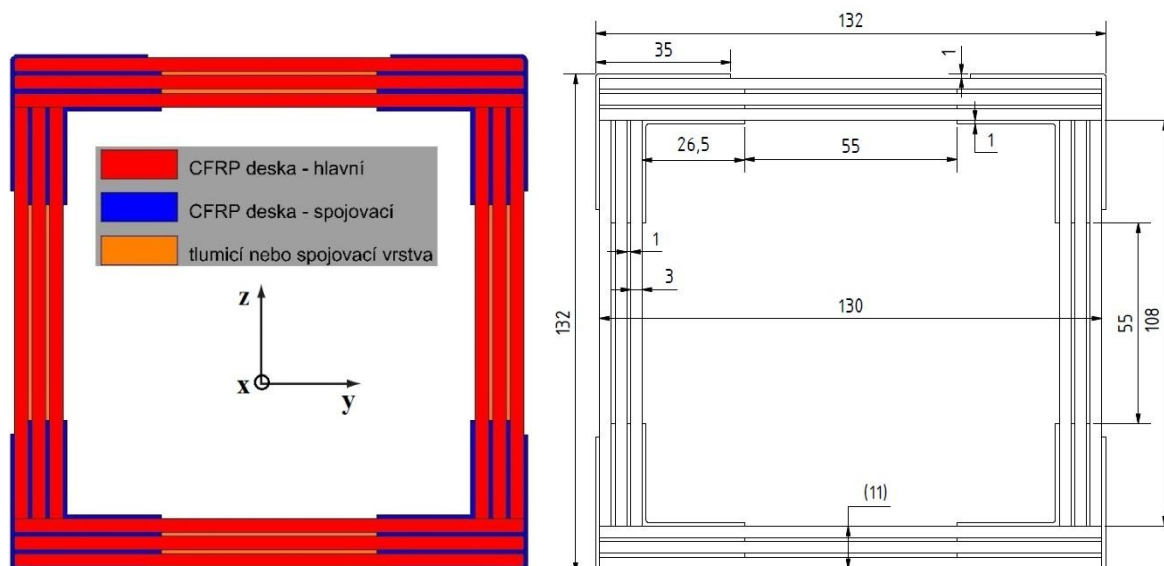
## 6. Analýza deskově tvořeného nosníku

Tato kapitola se zabývá analýzou nosníku složeného z kompozitních desek. Desky můžeme rozdělit na desky hlavní a desky spojovací. V nosníku se také vyskytuje tlumící vrstva, která je izotropní. Nosník je 1200 mm dlouhý. Uspořádání desek a rozměry profilu naleznete na obrázku 36.

Z důvodu obtížnosti profilu nebude v této kapitole nosník řešen analytickými metodami, ale pouze Metodou konečných prvků. Nejprve je znázorněno, jak se změní statické a dynamické výsledky, pokud se změní struktura profilu. Bude tady hodnocena změna maximálního průhybu a vlastních frekvencí při záměně tlumící vrstvy za spojovací desku.

V druhé části této kapitoly bude posuzován vliv technologie výroby profilu na výpočty. Přesněji budou porovnávány maximální průhyby a vlastní frekvence mezi reálným profilem a zjednodušeným profilem.

Všechny výpočty v této kapitole budou prováděny pro jednostranně vetknutý nosník. Při výpočtu průhybové čáry bude nosník zatížen silou  $F$  o velikosti 1000N na volném konci nosníku.



Obr. 36 - Struktura profilu nosníku (vlevo) a parametry řešeného profilu (vpravo)

## 6.1. Definice struktury desek

Jak už bylo zmíněno, profil nosníku je složen ze dvou desek a izotropní tlumící vrstvy. Každá z desek byla vyrobena navíjením uhlíkových vláken, přičemž byla použita vlákna s vysokým modulem pružnosti (označovány jako UHMC) a vlákna s vysokou pevností (označována jako HSC). Přehled použitých materiálů a jejich veličin je uveden v tabulce 13.

Materiály					
Název	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\rho$
	MPa	MPa	MPa	-	kg/m <sup>3</sup>
HSC	111934	4532,7	2935,6	0,35	1610
UHMC	358684	3530	2818,9	0,4	1720
Tlumící vrstva	38	-	-	0,3	800

Tab. 13 – Přehled použitých materiálů

Při definici skladby desek se také rozlišuje, zda byla vrstva navíjena křížově či nikoliv. Pokud vrstva byla navíjena křížově, tak se rozdělila opět na 4 stejně tlusté vrstvy. Tyto vrstvy jsou ze stejného materiálu, ale orientace výztuže se mění podle vzoru [+,-,-,+].

Tabulky s definicí skladeb hlavní a spojovací desky vypadají:

Skladba hlavní desky				
Vrstva	Tloušťka stěny	Orientace výztuže	Materiál	Druh navíjení
1	1,082	47,2	UHMC	kříž
2	0,487	89,7	UHMC	-
3	0,723	0	UHMC	-
4	0,108	0	UHMC	-
5	0,025	87,7	HSC	-
6	1,074	47,7	UHMC	kříž

Tab. 14 – Skladba hlavní desky

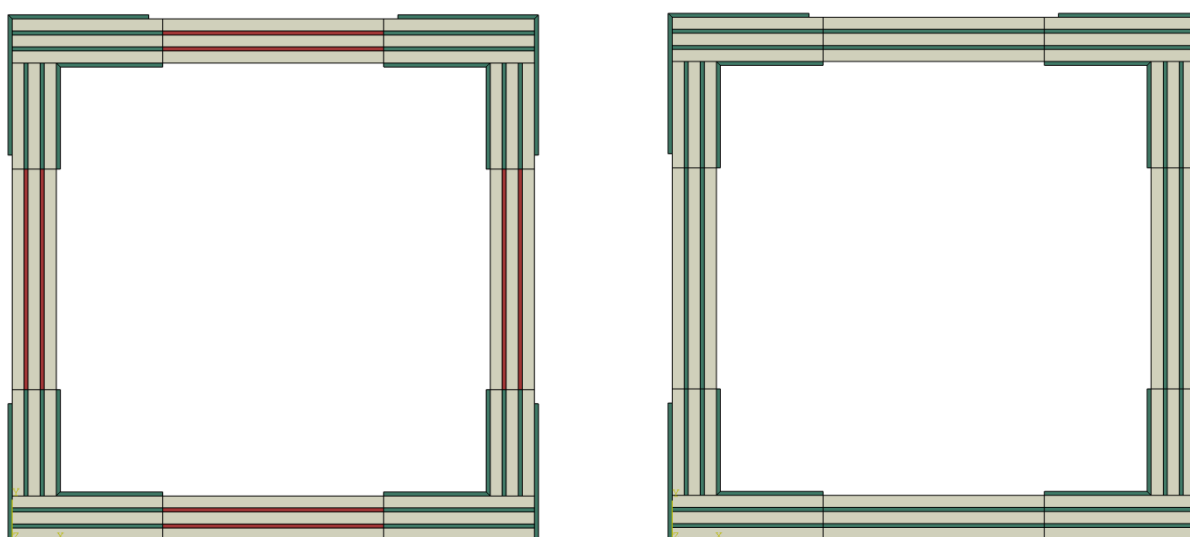
Skladba spojovací desky				
Vrstva	Tloušťka stěny	Orientace výztuže	Materiál	Druh navíjení
1	0,330	67,8	UHMC	kříž
2	0,346	89,70	HSC	-
3	0,329	67,9	UHMC	kříž

Tab. 15 – Skladba propojovací desky

## 6.2. Profil s tlumící vrstvou vs. profil bez tlumící vrstvy

Zde se práce zabývá výpočtem průhybové čáry a vlastních frekvencí profilu s tlumící izotropní vrstvou. Poté bude počítán profil, u kterého tlumící vrstvu nahradí spojovací deska. Výsledky budou mezi sebou porovnány. Schéma obou profilů je vidět na obrázku 37.

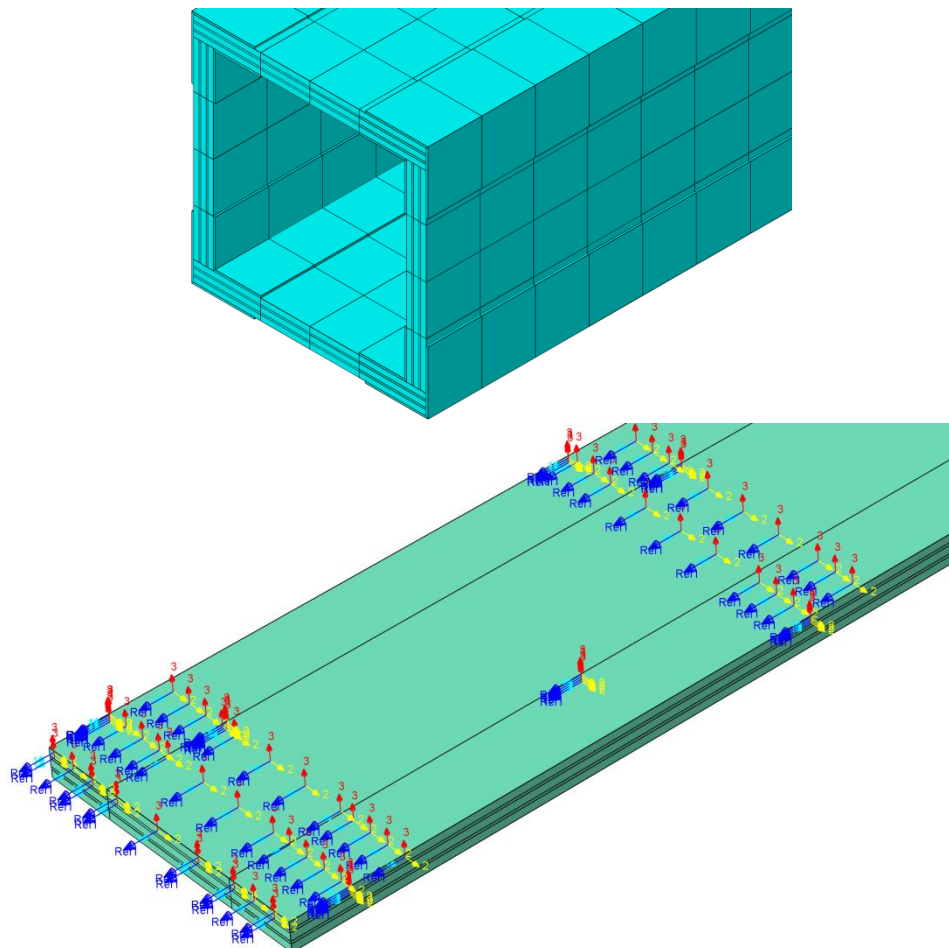
Oba profily byly řešeny Metodou konečných prvků v programu Abaqus. Z důvodu složitosti profilu byly oba profily modelovány jako objemové skořepiny (continuum shell elements). Při tvorbě sestavy byly použity 4 části (part). A to vnější a vnitřní desky ve tvaru L a horní a boční stěny nosníku. Tyto části byly patřičně rozděleny, aby jim bylo možné nadefinovat ve funkci Composite Layup Manager příslušný materiál.



Obr. 37 – Rozdíl mezi profilem s tlumící vrstvou (vlevo) a profilem bez tlumící vrstvy (vpravo)

Pro propojení jednotlivých částí byla použita v sekci Intraction funkce Constraint Manager, ve které byl zvolen typ Tie. Jelikož se jednalo o objemovou skořepinu, bylo nutné

nadefinovat spodní a horní stranu každého prvku. Dále bylo zapotřebí, aby tloušťka prvku odpovídala tloušťce kompozitní desky. Pro síťování byly použity SC8R prvky.

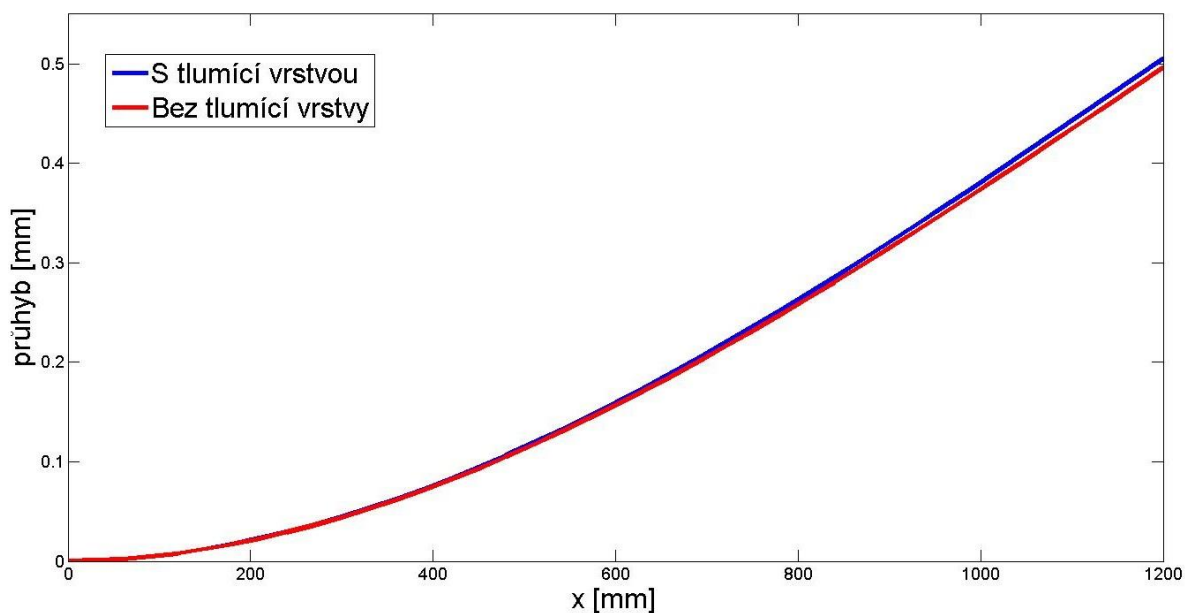


*Obr. 38 – Ukázka síťovaného modelu (nahore) a definice orientace vláken (dole)*

### **6.2.1. Výsledky**

Jako porovnávací veličiny mezi profily byla zvolena: vlastní frekvence pro dynamickou analýzu a maximální průhyb pro statickou analýzu. Jako referenční těleso, od kterého budou odvozeny procentuální odchylky, byl zvolen profil s tlumící vrstvou.

Nejdříve bude řešena průhybová čára obou profilů. Obě průhybové čáry jsou znázorněny na obrázku 39.



Obr. 39 – Průhybové čáry profilu s tlumicí vrstvou a profilu bez tlumicí vrstvy

Z obr. 39 je patrné, že nahrazení tlumicí vrstvy za spojovací desku nepřináší velké změny u výsledné průhybové čáry. Procentuální rozdíl maximálního průhybu vychází do 2%. Z tohoto důvodu lze konstatovat, že většinu tuhosti vytvářejí hlavní desky a spojovací desky v rozích profilu.

Maximální průhyb			
Varianta	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl [%]
S tlumicí vrstvou	0,505	100	-
Bez tlumicí vrstvou	0,496	98,2	1,8

Tab. 16 – Číselné hodnoty maximálního průhybu obou profilů

Dále bude řešen rozdíl v hodnotách vlastních frekvencí. Bude vyšetřována vlastní frekvence v rovinách xy a xz. V předchozích kapitolách byly profily, u kterých vycházely v těchto rovinách stejné hodnoty vlastních frekvencí, jelikož měly více symetrických rovin.

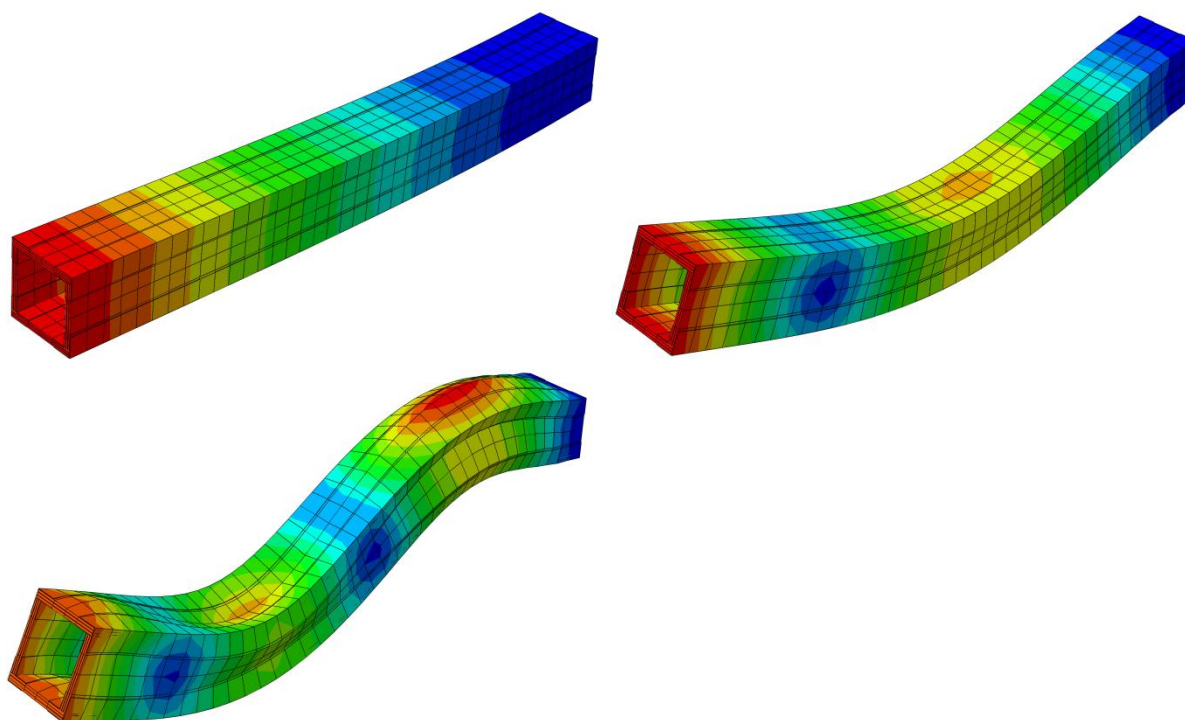
Číselné hodnoty vlastních frekvencí obou profilů jsou uvedeny v tabulce 17, kde se nachází také jejich procentuální rozdíl.



Vlastní frekvence [Hz]					
Rovina xy			Rovina xz		
S tlumící v.	Bez tlumící v.	Rozdíl [%]	S tlumící v.	Bez tlumící v.	Rozdíl [%]
132,1	130,7	1	132,4	131	1
737,5	732,1	0,7	731,7	726,2	0,8
1749,4	1776,3	1,5	1734,1	1751,4	1

Tab. 17 – Vlastní frekvence profilu s tlumící vrstvou a bez tlumící vrstvy

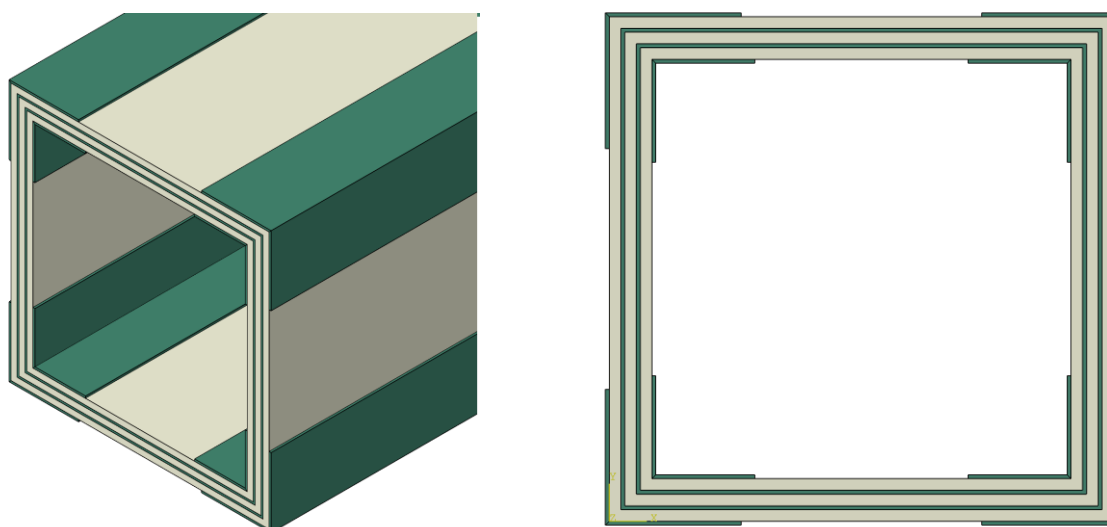
Z tabulky 17 je patrné, že ani rozdíl ve vlastních frekvencích není velký. U první frekvence vychází v obou směrech rozdíl okolo 1%. Velké rozdíly nevycházejí ani mezi rovinami.



Obr. 40 – Vlastní tvary kmitu v rovině xy při frekvencích 132 Hz, 737 Hz a 1749 Hz

### 6.3. Vliv technologie při výpočtech

Dále se budeme zabývat tím, jak velký vliv bude mít zanedbání technologie při výrobě profilu. Tedy profil, ve kterém byla zaměněna tlumící vrstva za spojovací desku, zjednodušíme v rozích. Zjednodušený model je vidět na obr. 41. Díky tomuto zjednodušení by se výrazně zjednodušily také analytické výpočty.



Obr. 41 - Zjednodušený model nosníku

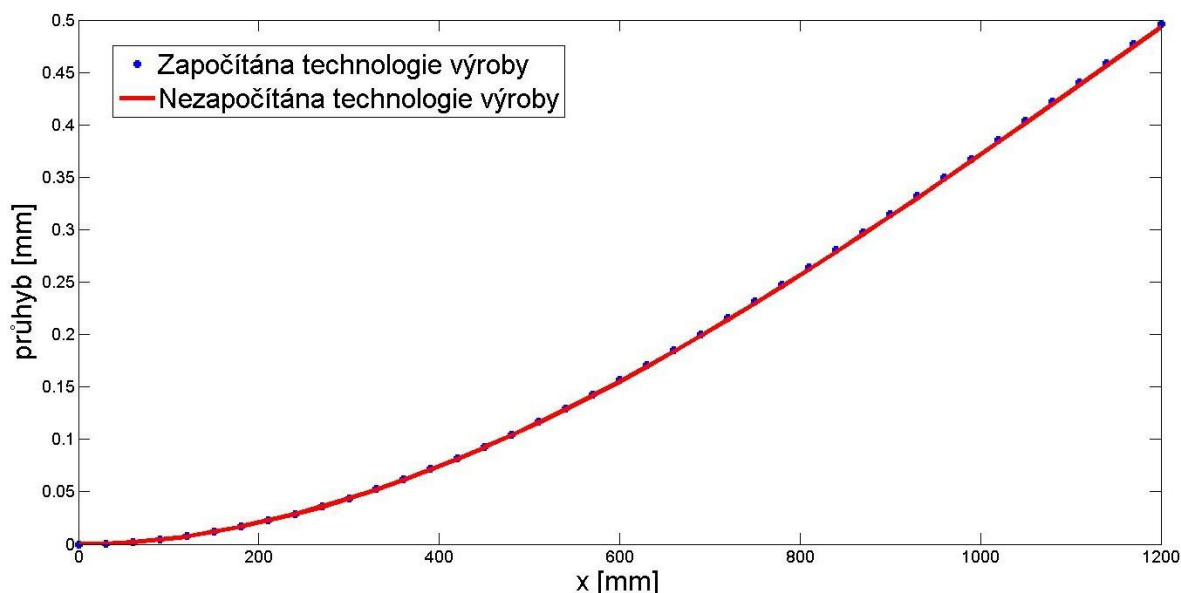
#### 6.3.1. Výsledky

Ještě než budou uvedeny výsledky, je dobré zmínit, že časová náročnost při stavbě zjednodušeného modelu byla výrazně nižší než u nezjednodušeného modelu. To bylo způsobeno menším počtem částí a tím i menším počtem vazeb.

Maximální průhyb			
Varianta	Max. průhyb [mm]	Procentuálně [%]	Rozdíl [%]
Započítána technologie výroby	0,496	100	-
Nezapočítána technologie výroby	0,493	99,43	0,57

Tab. 18 – Maximální průhyby profilu zjednodušeného a nezjednodušeného

Rozdíl mezi zjednodušeným a nezjednodušeným modelem je nepatrný. Procentuální rozdíl nečiní ani jedno procento. Z tohoto důvodu lze konstatovat, že vliv technologie výroby na statické zatížení u tohoto profilu nemá prakticky žádný vliv.



Obr. 42 – Průhybové čáry zjednodušeného a nezjednodušeného profilu

Přehled vlastních frekvencí ve dvou na sebe kolmých rovinách je uveden v tabulce 19.

Vlastní frekvence [Hz]					
Rovina xy			Rovina xz		
Technologie	Bez technol.	Rozdíl [%]	Technologie	Bez technol.	Rozdíl [%]
130,7	131,6	0,7	131	131,6	0,4
732,1	740	1,1	726,2	740	1,9
1776,3	1771,4	0,3	1751,4	1771,4	1,1
2894,6	2742,4	5,3	2865,8	2742,4	4,3

Tab. 19 – Vlastní frekvence zjednodušeného a nezjednodušeného profilu

Z výsledků uvedených v tabulce 19 je patrné, že největší procentuální odchylka se vyskytuje v obou rovinách u čtvrté vlastní frekvence. Tento rozdíl činí okolo 5 %.

## 7. Shrnutí informací o výpočtech kompozitních elementů

V této kapitole budou shrnuty informace získané v předchozích kapitolách této práce, které by mohly být užitečné při výpočtech elementů z kompozitních materiálů pro výrobní stroje.

- Chyby výpočetních metod, které byly použity v této práci, jsou závislé především na struktuře a na profilu kompozitního materiálu.
- Timošenkův koeficient smyku může do jisté míry ovlivnit výsledky.
- U metody MKP může dojít k rozdílným výsledkům pro různé skořepiny (konvenční nebo objemová).
- Nejlepších výsledků porovnáním s experimentálními daty dosahovala metoda MKP.
- Při modelování deskově tvořeného nosníku je možné v některých případech zanedbat technologii výroby a nosík zjednodušit bez zavedení výrazné chyby.

## 8. Závěr

Úkolem této práce bylo seznámit čtenáře s výpočetními metodami pro elementy z kompozitních materiálů pro výrobní stroje, a porovnat rozdíly mezi nimi. V teoretické části byly uvedeny materiály, které se používají při výrobě výrobních strojů. Čtenář byl seznámen s rozdělením kompozitních materiálů a s mechanikou kompozitních materiálů. Byla uvedena Euler–Bernoulliho teorie, Timošenkova teorie a Laminační teorie. Dále byly ukázány některé empirické vzorce pro výpočet materiálových konstant. Na závěr teoretické části bylo objasněno modelování Metodou konečných prvků v programu Abaqus.

V praktické části byl nejprve analyzován silnostěnný nosník s kruhovým a čtvercovým profilem vyráběný z uhlíkových vláken. Pro výpočet průhybové čáry a vlastních frekvencí byly použity různé výpočetní metody, které byly mezi sebou porovnávány. Byl ukázán postup řešení statických i dynamických vlastností pro dané analytické metody a také byl ukázán postup modelování v programu Abaqus. Mezi zvolené metody pro porovnávání patřila Euler–Bernoulliho metoda, Timošenkova metoda, Metoda konečných prvků a dva empirické vzorce. Jako referenční metoda byla zvolena Metoda konečných prvků. Také byl ukázán vliv délky nosníku na výsledky a vliv Timošenkova koeficientu smyku na řešení.

Dále byly porovnány experimentálně získané vlastní frekvence dvou vinutých uhlíkových trubek různých struktur s vlastními frekvencemi, získanými pomocí metod zmíněných v předchozím odstavci. V obou případech se experimentálními datům nejvíce blížila Metoda konečných prvků, provedená pomocí programu Abaqus.

V praktické části se tato práce věnovala analýze deskově tvořeného nosníku poskytnutého firmou CompoTech. Byla ukázána velikost vlivu tlumicí vrstvy, kterou obsahoval tento nosík, na statických a dynamických vlastnostech. Dále se práce zabývala velikostí odchylky výsledků při zanedbání technologie výroby nosníku, tedy při určitém zjednodušení profilu pro výpočty.

V poslední části této práce byly shrnuty informace, které by mohly být užitečné při výpočtech elementů z kompozitních materiálů pro výrobní stroje.

## Seznam použité literatury

- [1] SMOLÍK, Jan. Nosné díly obráběcích strojů z nekonvenčních materiálů. In: [online]. Praha, 2007 [cit. 2014-11-05]. Dostupné z: [www3.fs.cvut.cz/web/fileadmin/documents/12135-VSZ/download/PGS\\_stud/PGS-Teze\\_-\\_Smolik.pdf](http://www3.fs.cvut.cz/web/fileadmin/documents/12135-VSZ/download/PGS_stud/PGS-Teze_-_Smolik.pdf)
- [2] ČUNĚK, Jakub. Kompozitní materiály ve stavbě obráběcích strojů. In: [online]. Brno, 2011 [cit. 2014-11-05]. Dostupné z: [www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=39420](http://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=39420)
- [3] MOHYLA, Miroslav. Nekonvenční strojírenské materiály I. 1. vyd. Ostrava: VŠB, 1994, 129 s. ISBN 80-707-8236-6.
- [4] VRBKA, Jan. Mechanika kompozitů. In: [online]. Brno, 2008 [cit. 2014-12-03]. Dostupné z: [www.vutbr.cz/www\\_base/priloha.php?dpid=83340](http://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340).
- [5] LAŠ, Vladislav. Mechanika kompozitních materiálů. 2., přeprac. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2008, 200 s. ISBN 978-80-7043-689-9.
- [6] Timoshenko beam theory. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-12-03]. Dostupné z: [en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko\\_beam\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko_beam_theory)
- [7] MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009, 308 s. ISBN 978-80-01-04224-3.
- [8] KULÍŠEK, Viktor. Návrh a analýza kompozitních konstrukcí. In: [online]. Praha, 2007 [cit. 2014-12-03]. Dostupné z: [www.mechanika2.fs.cvut.cz/documents/mkmp.pdf](http://www.mechanika2.fs.cvut.cz/documents/mkmp.pdf)
- [9] ČERNOŠEK, J.: Úvod do problematiky kompozitních materiálů, VUT v Brně, Fakulta technologická, Zlín, 1992

- [10] GAY, Daniel a Suong V HOA. Composite materials: design and applications. 2nd. ed. Boca Raton: CRC, 2007, xiv, 548 s. ISBN 978-1-4200-4519-2.
- [11] JONES, Robert M. Mechanics of Composite Materials. 1st ed. New York City, New York (USA) : Hemisphere Publishing Corporation, 1975. 355 p. ISBN 0-89116-490-1.
- [12] Euler–Bernoulli beam theory. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-12-07]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli\\_beam\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory)
- [13] Structural Dynamics - Beam Vibration [online]. 2000 [cit. 2014-12-07]. Dostupné z: <http://www.vibrationdata.com/>
- [14] Abaqus Documentation [online]. 2009 [cit. 2014-12-07]. Dostupné z: <http://abaqusdoc.ucalgary.ca/v6.9/>

## Seznam obrázků

Obr. 1 - Srovnání vlastností konvenčních a nekonvenčních materiálů	8
Obr. 2 - Svařenec podstavce obráběcího stroje	9
Obr. 3 - Nosná soustava brusky z granitu	10
Obr. 4 - Řez ložem z minerální litiny firmy ELB	11
Obr. 5 - Uhlíkovo-grafitový kompozit firmy CompoTech	12
Obr. 6 - Druhy vláknových kompozitů	13
Obr. 7 - Příklad sendvičového kompozitu	14
Obr. 8 - Natočení systému $O(1,2,3)$ vůči systému $O(x,y,z)$	17
Obr. 9 - Deformace laminátů	20
Obr. 10 - Zavedení výsledných sil a momentů	22
Obr. 11 - Laminátová vrstevnatá konstrukce	24
Obr. 12 - Příklad rozložení napětí, tuhosti a deformace kompozitu složeného z lamel	25
Obr. 13 - Vyjmutý obecně zatížený element	30
Obr. 14 - Deformace při Timošenkově teorii a porovnání deformace	32
Obr. 15 - Struktura elementu a vyjmutý element	34
Obr. 16 - Objemový prvek a skořepinový prvek	35
Obr. 17 - Průřez tělesa při modelaci prvkem shell	36
Obr. 18 - Rozdíl mezi konvenčním a objemovým skořepinovým prvkem	36
Obr. 19 - Element S8R a orientace vrstev	37
Obr. 20 - Vetknutý nosík	39
Obr. 21 - Geometrická skladba profilů řešeného nosníku	39
Obr. 22 - Rozložení smykového napětí v profilu a znázornění části zanedbaného profilu při určování Timošenkova koeficientu	42
Obr. 23 - Znázornění souřadných systémů u kruhového profilu	42
Obr. 24 - Composite Lay-Up manager	45
Obr. 25 - Ukázka síťování modelů (Mesh)	45
Obr. 26 - Porovnání průhybových čar 300 mm dlouhého nosníku s kruhovým profilem	46



Obr. 27 - Porovnání průhybových čar 300 mm dlouhého nosníku s čtvercovým profilem	46
Obr. 28 - Ukázka deformace 300 mm nosníků kruhového a čtvercového profilu	48
Obr. 29 - Porovnání průhybových čar 1500 mm dlouhého nosníku s kruhovým profilem	48
Obr. 31 - Velikost vlivu Timošenkova koeficientu smyku na výsledcích	49
Obr. 32 - Rozdíl mezi objemovou skořepinou a konvenční skořepinou u metody MKP a porovnání s ostatními metodami při použití objemové skořepiny	50
Obr. 33 - Vlastní tvary kmitu vetkaného nosníku kruhového profilu	53
Obr. 34 - Schéma experimentu a měřené trubky	54
Obr. 35 - Ukázka zadávání struktury v programu Abaqus pro trubku T700-45	55
Obr. 36 - Struktura profilu nosníku a parametry řešeného profilu	59
Obr. 37 - Rozdíl mezi profilem s tlumící vrstvou a profilem bez tlumící vrstvy	61
Obr. 38 - Ukázka síťovaného modelu a definice orientace vláken	62
Obr. 39 - Průhybové čáry profilu s tlumící vrstvou a profilu bez tlumící vrstvy	63
Obr. 40 - Vlastní tvary kmitu v rovině xy při frekvencích 132 Hz, 737 Hz a 1749 Hz	64
Obr. 41 - Zjednodušený model nosníku	65
Obr. 42 - Průhybové čáry zjednodušeného a nezjednodušeného profilu	66

## Přílohy

- Program porovnávající průhybové čáry

```
clear all; close all; clc;

% parametry tělesa
struk=[45;-30;45;-60;0;30;-15;90;-20;10];
n=length(struk);
r=22;           % mm
R=42;          % mm
t=(R-r)/n;
stred=((R-r)/2)+r;
l=300;         % mm
F=1000;        % N
kappa=1;
ro=1750;       % kg/m^3

% parametry vláken
EL=230000;     % MPa
ET=14000;      % MPa
GLT=5000;      % MPa
VLT=0.32;

% matice tuhosti ve směru x
c11=EL/(1-(ET/EL)*(VLT^2));
c22=(ET/EL)*c11;
c21=VLT*c22;
c12=c21;
c66=GLT;

C=[c11  c12  0
   c21  c22  0
    0    0   c66];

% volná pole
EJ=0;
GA=0;
QQ11=[];
QQ33=[];
W=[];
W1=[];
W2=[];
W3=[];
X=[];
```

```

% výpočet modulu pružnosti do osy X

for i=1:n;

alfa=(pi/180)*struk(i);

To=[cos(alfa)^2  sin(alfa)^2  2*sin(alfa)*cos(alfa)
    sin(alfa)^2  cos(alfa)^2  -2*sin(alfa)*cos(alfa)
    sin(alfa)*cos(alfa) -sin(alfa)*cos(alfa)  (sin(alfa)^2)-
cos(alfa)^2];

Toin=inv(To);
Te=(Toin)';

Q=Toin*C*Te;

Q11=Q(1,1);
QQ11=[QQ11 Q11];

Q33=Q(3,3);
QQ33=[QQ33 Q33];

end;

% výpočet parametrů EI a AG

for ii=1:n;

    EJ=EJ+(((r+(ii)*t)^4-(r+(ii-1)*t)^4)/4)*pi*QQ11(ii);
    GA=GA+(((r+(ii)*t)^2-(r+(ii-1)*t)^2)/2)*pi*QQ33(ii);

end;

% výpočet průhybu - Bernoulliho metoda

for x=0:(1/99):1;

    w=((F*x^2*1)/(2*EJ))-((F*x^3)/(6*EJ));
    W=[W w];
    X=[X x];
end;

% výpočet průhybu - Timošenkova metoda

for x=0:(1/99):1;

```

```

w1=((F*x^2*1)/(2*EJ))-((F*x^3)/(6*EJ))+((F*x)/(kappa*GA));
W1=[W1 w1];

end;

% Laminační teorie A
A=0;

for i=1:n;

alfa=(pi/180)*struk(n+1-i);

To=[cos(alfa)^2 sin(alfa)^2 2*sin(alfa)*cos(alfa)
     sin(alfa)^2 cos(alfa)^2 -2*sin(alfa)*cos(alfa)
     sin(alfa)*cos(alfa) -sin(alfa)*cos(alfa) (sin(alfa)^2)-
     cos(alfa)^2];

Toin=inv(To);
Te=(Toin)';

Q=Toin*C*Te;

A=A+Q*(-((R-(t*i)-stred))+((R-(t*(i-1))-stred)));

end;

h=(R-r);
M=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)+2*A(1,2)*A(1,3)*A(2,3)-A(1,1)*A(2,3)^2-
A(2,2)*A(1,3)^2-A(3,3)*A(1,2)^2;
Ex=M/(h*(A(3,3)*A(2,2)-A(2,3)^2));
Gx=M/(h*(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2));
J=pi*(R^4-r^4)/4;
Acelk=pi*(R^2-r^2);
ExJ=Ex*J;
GxA=Gx*Acelk;

% výpočet průhybu laminační teorie A

for x=0:(1/99):1;

w2=((F*x^2*1)/(2*ExJ))-
((F*x^3)/(6*ExJ))+((F*x)/(kappa*GxA));
W2=[W2 w2];

end;

```

```

% ABD matice

A=0;
D=0;
B=0;

for i=1:n;

alfa=(pi/180)*struk(n+1-i);

To=[cos(alfa)^2  sin(alfa)^2  2*sin(alfa)*cos(alfa)
     sin(alfa)^2  cos(alfa)^2  -2*sin(alfa)*cos(alfa)
     sin(alfa)*cos(alfa) -sin(alfa)*cos(alfa)  (sin(alfa)^2)-
     cos(alfa)^2];

Toin=inv(To);
Te=(Toin)';

Q=Toin*C*Te;

A=A+Q*(-((R-(t*i)-stred))+ (R-(t*(i-1))-stred));
B=B+(1/2)*Q*((-((R-(t*i)-stred)))^2-(-(R-(t*(i-1))-stred))^2);
D=D+(1/3)*Q*((-((R-(t*i)-stred)))^3-(-(R-(t*(i-1))-stred))^3);

end;

ABD=[A  B
      B  D];
ABDinv=inv(ABD);
Ex1=1/(ABDinv(1,1)*h);
Gx1=1/(ABDinv(3,3)*h);
Ex1J=Ex1*J;
Gx1A=Gx1*Acelk;

% výpočet průhybu ABD

for x=0:(1/99):1;

w3=((F*x^2*1)/(2*Ex1J))-
((F*x^3)/(6*Ex1J))+((F*x)/(kappa*Gx1A));
W3=[W3 w3];

end;

```

```
% Graf
plot(X,W,'r','LineWidth',4);
hold on
plot(X,W1,'*');
plot(X,W2,'g','LineWidth',4);
plot(X,W3,'LineWidth',4);
xlabel('x [mm]','FontSize',24);
ylabel('průhyb [mm]','FontSize',24);
legend('Euler-Bernoulliho metoda','Timošenkova
metoda','Empirické vztahy A','Empirické vztah B','MKP');
```