Knižnice Konstrukční Optimalizace — Svazek II.

Nákladem Tomáše Mareše

Základy Konstrukční Optimalizace

Tomáš Mareš

Praha, únor 2006

Ing. Tomáš Mareš, Ph.D., Fakulta strojní, České vysoké učení technické, Technická 4, 166 07 Praha 6
e-mail: Tomas.Mares@fs.cvut.cz
www: http://drone.fsid.cvut.cz/

Lektoroval Prof. Ing. Stanislav Holý, CSc.

Vlastním nákladem, neprodejné, určeno pro vlastní potřebu
Náklad 100 výtisků
Základy konstrukční optimalizace
Ing. Tomáš Mareš, Ph.D., Ústav mechaniky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické
Technická 4, 166 07 Praha 6
e-mail: Tomas.Mares@fs.cvut.cz
www: http://drone.fsid.cvut.cz/

ISBN 80-239-6508-5

Obsah

Seznam definic a vět

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Kapitola 1

Metodologický postup konstrukční optimalizace

1.1 Úvod

Jedním ze základních úkolů inženýra je navrhování konstrukcí. Při konstruování tvoří systém vyhovující účelovým požadavkům (např. pevnostním podmínkám, podmínkám tuhosti) při současném minimalizování těch faktorů, které zmenšují (jsou-li veliké) efektivitu systému (např. hmotnost, poddajnost).

Tvůrčí čin v konstruování není skutkem stvoření ve smyslu Starého zákona. Konstruktér netvoří něco nového na místě, kde dosud nic není. Studuje minulá a stávající díla, vybírá, odkrývá, přeskupuje a kombinuje. Tomuto procesu se říká *syntéza.* Syntéza je racionální (rozumový) přístup ke konstruování, při kterém konstruktér nakládá se známými skutečnostmi, myšlenkami, možnostmi, rovnicemi a dalšími informacemi tak, aby dosáhl svého konstrukčního cíle. Znalost těchto informací představuje *analytickou* schopnost určit a změnit návrhové proměnné s ohledem k jejich vlivu na efektivitu navrhovaného systému.

Bez těchto schopností je konstruování empirický (založený na zkušenosti) a evoluční (postupně se vyvíjející) proces. Většiny z ranných konstrukčních činů bylo dosaženo v nepřítomnosti použitelných analytických (rozborových) podkladů. Postavení gízských pyramid, římských cest a oblouků představuje pouze několik příkladů z nespočetného množství konstrukčních systémů vytvořených *metodou pokusu a omylu* dlouho předtím, nežli se tvůrčím základem konstruování staly výpočetní nástroje.

Metodou pokusu a omylu se však ve velké míře konstruuje do dnešních dnů. Konstruktér stále vychází z již existující skutečnosti, kterou upraví tak, aby dosáhl požadované změny. Vytvořený návrh posléze analyzuje, vyhovuje-li účelovým požadavkům. Takovému konstruování se říká konstruování *evoluční.*

Evoluční konstruování nelze zcela odstranit. Není to ani rozumným přáním. Nikdo a nikdy si nemůže uvědomit všechny souvislosti, všechny vnější a vnitřní vlivy a všechna přání jednotlivých uživatelů konstrukce. Tyto okolnosti lze zjistit pouze opakovaným a všedním užíváním konstrukce. Takováto evoluce, takto užitá metoda pokusu a omylu je žádoucí a v konstruování nezbytná. Nežádoucí je však stále velmi rozšířený úkaz, kdy dnešní konstruktér s velikými výpočetními možnostmi užívá při návrhu konstrukce postupy, sestavené v druhé polovině devatenáctého století a v prvé polovině století dvacátého inženýry s obdivuhodnou intuicí a invencí, které jako výpočetní nástroj předpokládaly logaritmické pravítko. Dle těchto postupů provedený návrh konstrukce se potom náročně analyzuje na výkonných počítačích s užitím moderních metod analýzy a drahými experimenty. Výsledky těchto analýz často vedou k nutnosti provést změny – a to opět intuitivní – v původním návrhu a tento nový návrh opět analyzovat. Tento postup je pak třeba opakovat do té doby, nežli víceméně náhodou dospěje takovýto konstruktér ke stavu, který vyhovuje daným požadavkům. O tomto návrhu však je obtížné prohlásit, je-li *nejlepší* (dle nějakého zvoleného hlediska) ze všech možných řešení. V době moderního strojírenství se empirické a evoluční konsturování stává doplňkem k racionálnímu pojetí navrhování konstrukcí. Toto racionální pojetí se nazývá *konstrukční optimalizace.*

Princip konstrukční optimalizace spočívá v takové volbě změnitelných (tedy těch, které lze měnit – navrhovat) faktorů (činitelů), aby efektivita systému[1] byla maximální, při současném splnění *požadavku účelovosti*[2] vyjádřeného ve formě vedlejší podmínky.

Teorie výpočetního konstruování[3] se většinou soustředí na určení optimálních rozměrů pro různé druhy forem při daném zatížení a na určení tendencí, které vycházejí z pozorování a srovnání dosažených výsledků.[4] V posledních desetiletích se však dosáhlo značného pokroku také v oblasti optimalizace materiálu, tvaru a topologie formy.[5]

Proces (průběh) konstrukční optimalizace se skládá z více fází, které zahrnují *poznání vnějších podmínek*,[6] dále *stanovení kritérií určení optima*, kde slovo *optimum* definujeme následujícím způsobem. Optimální uspořádání konstrukce – její topologie, tvar a rozměry[7] – je takové uspořádání, které je dle jistého (zvoleného) hlediska (tj. kritéria určení optima) to nejlepší ze všech uspořádání, která jsou přijatelná při daných vedlejších podmínkách pro splnění daného účelu. Další fází návrhového procesu je *specifikace formy.*[8] Tato fáze návrhového procesu je z hlediska aplikování analytického postupu snad nejobtížnější. Hledání dokonalé formy konstrukce je nekončícím rysem konstruování a nelze doufat v uzavření analytického postupu a jeho převedení do nějaké rovnosti.[9] Poté, co je vybrána forma konstrukce a napsán její matematický model, je nutné provést *volbu návrhových proměnných.* Souběžně s předcházejícími fázemi probíhá *stanovení vedlejších podmínek.* Na toto místo patří například pevnostní podmínky, podmínky maximální povolené deformace (tzv. podmínka tuhosti), geometrické podmínky, apod.

Předcházející fáze je možné shrnout též pod označení *technická formulace konstrukčních cílů* a *sestavení matematického modelu fyzikálně zjednodušené technické úlohy.* Poté následuje vlastní *optimalizace*, kterou lze rozdělit do více kroků. Nejprve je nutné *vybrat vhodnou matematickou optimalizační metodu a formalizovat extremální úlohu ve vhodném tvaru.* Matematických optimalizačních metod je celá řada a většinou jen úzká jejich skupina je vhodná k řešení dané úlohy. Každá z těchto metod obecně vyžaduje jiný formalizovaný tvar extremální úlohy. Následuje *matematické řešení formalizované extremální úlohy.* Pro takto získané řešení matematické úlohy je nutno provést *technickou interpretaci získaného řešení.*

1.2 Charakteristika návrhu konstrukce

Navrhování konstrukce je proces, při němž dochází k určení konfigurace[10] (materiálu, formy[11] a rozměrů) konstrukce, na kterou je kladen jistý požadavek účelovosti (například z hlediska neseného zatížení) při snaze o dosažení co nejlepšího výsledku v jistým způsobem zavedené míře efektivity. Forma konstrukce popisuje tvar a vzájemné uspořádání jednotlivých prvků konstrukce

[1] Co se rozumí efektivitou systému srvn. II. fázi konstrukčně optimalizačního postupu popsanou na str. 24.

[2] Co nazýváme požadavkem účelovosti jest popsáno níže v této kapitole.

[3] Tímto se rozumí ta část konstrukčního procesu, kdy se provádějí pevnostní a tuhostní výpočty.

[4] Srvn. např. [Mareš, 2000], [Mareš, 2002d], [Mareš, 2002b], [Mareš and Holý, 2001a], [Mareš and Holý, 2001b], [Mareš and Holý, 2002].

[5] Srvn. knihy [Bendsøe, 1995], [Haftka and Gürdal, 1992], [Gürdal *et al.*, 1999], [Cherkaev, 2000] a [Allaire, 2002].

[6] Viz níže.

[7] Topologií se rozumí počet a umístění děr, spojitost oblasti a podobně, kdežto tvarem se míní průběh hranice dané oblasti. Rozměrem pak velikost jednotlivých částí konstrukce i konstrukce jako celku.

[8] Formou konstrukce se rozumí její topologie a tvar. Také v případech, kdy se topologie a tvar stávají předmětem optimalizačního procesu je třeba specifikovat základní formu – tzv. referenční oblast. Srvn. fázi návrhového procesu popsanou v oddílu 1.3.4 na str. 25.

[9] A to ani v případech optimalizace topologie a tvaru, o čemž srvn. pozn. 8 a následující části práce.

[10] Tedy *uspořádání.*

[11] Tvaru a topologie.

(čili topologii konstrukce). *Rozměry* jsou veličiny, které definují velikost jednotlivých konstrukčních prvků a velikost konstrukce jako celku.

Konstrukce může být vylíčena jako hmotné těleso, které je děleno na jiná tělesa a jehož prvotní funkcí je tyto tělesa udržovat a podporovat při působení dynamického a statického zatížení při současném dynamickém a statickém působení těchto těles samých. *Požadavkem splnění účelovosti* rozumíme požadavek zabezpečit jak takovouto prvotní funkci konstrukce, tak i jiné funkce, které jsou od dané konstrukce-zařízení požadovány. Tento požadavek klade na uspořádání konstrukce jistá omezení, která jsou obecně kvantitativně zpodobněna *vedlejší podmínkou.* Poznamenejme, že tak řečená *nejlepší* forma konstrukce není nutně ta, která nejefektivněji čelí vnějším zatěžujícím podmínkám.[12]

V případech, kdy není omezen výběr formy, musí být toto omezení dodáno v závislosti na dřívějších zkušenostech. Pokud nejsou dána omezení limitující parametry definující formu,[13] není možno napsat matematické vztahy a vyjádřit proměnné definující konstrukci. Následkem čehož je hledání efektivní formy vždy, alespoň z jisté části, založeno na metodě pokusu a omylu, kde není zaručeno, bylo-li nalezeno absolutní optimum. Jde v podstatě o problém s otevřeným závěrem. Tento přístup nemůže tedy pro dané zatěžující podmínky předpovědět absolutně optimální formu, avšak i tehdy, omezíme-li naše soustředění pouze na jistou třídu možností, dostává vývoj optimální formy relativní směr.

Jako příklad můžeme uvést případ, kdy třída forem je omezena prvky přenášejícími osové síly bez uvažování a připuštění vzpěrného efektu, kde je za optimální konstrukci považována konstrukce s minimální hmotností. Často je třída forem omezena nastavením (určením) většiny parametrů předem. Zvláště pro prutové uspořádání je obvyklé volit návrhovými proměnnými průřezové plochy A_i jednotlivých prvků. O takovémto řešení předem víme, že je nedostatečné vzhledem k zanedbání vzpěrného efektu a způsobu vzájemného spojení prvků konstrukce.

Taková řešení jsou přesto významná, protože poskytují dolní mez minimální hmotnosti dané prutové sítě pod daným zatížením. Jakožto reálné konstrukce jsou tato řešení zřídkakdy praktická. Takovéto krajní řešení však může založit důležité rámce v konstruování a může zamezit dalšímu zbytečnému sledování optimálního řešení.

Poté, co Thomas Alva Edison[14] přezkoumal sto materiálových kombinací hledaje vlákno pro elektrické žárovky, jeho asistent projevil pocit marnosti. Nevidí dosažení žádného pokroku. Nato Edison odpověděl: „Naopak, dosáhli jsme neobyčejného pokroku. Známe sto kombinací, které nebudou fungovat.“ Edison vlastně řekl, že pravděpodobnost úspěchu roste s počtem neúspěchů. Informace zahrnující velké množství nedostatečných konstrukčních řešení připravuje širokou základnu pro formulaci řešení lepšího. V souvislosti s konstruováním jde o způsob, při kterém rozličné konstrukční formy, které při daném zatížení zklamaly, poskytují základnu, z které je vyvíjeno zdokonalení. Například předpokládejme, že si přejeme určení štíhlého prutu s minimálním objemem při zatížení ohybovým momentem. Soustředíme-li naši pozornost na plný profil, řekněme kruhového či obdélného průřezu, je patrné, že téměř všechen materiál je, co se týče napjatosti, nedostatečně využit. Pouze materiálové vlákno v maximální vzdálenosti od osy ohybu je napjato na své maximální možnosti. Z čehož lze vyvodit, že užití prvků s dutým průřezem, kde je většina neužitečného materiálu odstraněna, přináší zdokonalení. Dlouhý nosník dané šířky a hloubky (křídlo letadla) poskytuje zajímavou ilustraci zmíněného procesu. Následkem pevně dané délky a šířky má právě dutý tvar nedostatky, jelikož za jistých podmínek se povrch stlačený tlakem okolo křídla proudícího vzduchu bude celkově ohýbat pod zatížením značně menším, nežli je zatížení odpovídající původní uvažované únosnosti. Zde opět nepřiměřenost typu formy poskytne vodítko k efektivnějšímu řešení. Stlačovaný povrch může být vyztužen užitím připojených i nedílných (integrálních) prvků či žebrového nosného jádra. Užitím takového vyztužení může

[12]Srvn. ustavení termínu nejlepší na str. 24.

[13]Mluvíme-li zde o formě, máme na mysli nejen jistou topologii, ale v případně optimalizace topologie také referenční oblast.

[14]Thomas Alva Edison *11. II. 1847, Milan, Ohio – †18. X. 1931, West Orange, New Jersey.

být forma optimalizována tak, že k ohýbání dojde v zatížení vyšší úrovně a forma bude efektivnější nežli v případě užití čistě dutého profilu. Což vyplynulo objevením nedostatků primitivnější formy. Důležité je, že se dochází k efektivní formě z forem založených na předešlých alternativách a ne odvozením jako takovým pouze ze zřetele k zatěžovacím podmínkám a míře efektivity. Tím docházíme k závěru, že konstruování metodou *pokusu a omylu* nelze zcela zavrhnout. Je však třeba vhodně kombinovat matematickou dovednost, analytické a syntetické možnosti s evoluční zkušeností.[15]

Většinou je tedy nutno uznat nedostatek jistoty ohledně formy (tj. tvaru a topologie) konstrukce. V otázce rozměrů je však jistota větší. Jak shora naznačeno, bylo v posledních letech dosaženo nadějných výsledků, které připouštějí optimistické vyhlídky také do krajin optimalizace formy konstrukce a optimalizace materiálu konstrukce.

Teorie optimálního návrhu konstrukce se až do sedmdesátých let dvacátého století soustřeďuje výhradně na rozhodování o optimálním rozměru pro různé druhy forem při daném zatížení a pro zjištění tendencí z těchto výzkumů plynoucích. Přes značný pokrok, jehož bylo v posledním dvacetiletí dvacátého století v této problematice dosaženo, je v konstrukční praxi stále běžný postup založený na opakování volby formy bez jistoty, že výsledek je optimální. Optimalizací topologie, tvaru a materiálu se rozumí způsob nalezení optimální topologie a tvaru – tedy formy – konstrukce v závislosti na vnějších podmínkách, požadavku účelovosti a zvoleném měřítku kvality. Jde o způsob využití mechaniky kompozitních materiálů pro modelování neurčité formy konstrukce. Zajímavým závěrem velkého množství úloh na optimalizaci tvaru a topologie konstrukce, k jejichž řešení je užito této metody, je indikace konstrukcí rámového typu (navržených z homogenních a izotropních materiálů) a tenkostěnných konstrukcí laminátového charakteru jakožto konstrukcí optimální formy.[16] Tyto závěry a myšlenky se staly inspirací k hlavnímu tématu této práce: Návrh tenkostěnných laminátových konstrukcí (deska, trubka). Tento návrh bude záměrně omezen pouze na jeden konstrukční cíl (maximalizace tuhosti) při uvažování pouze jednoho vlivu (orientace hlavních směrů jednotlivých ortotropních vrstev).

1.3 Metodologický postup konstrukční optimalizace

Nyní opusťme tyto obecné otázky a zaměřme naši pozornost na formulaci obecného postupu, jímž se vytváří návrh konstrukce v případě využití optimalizačních metod. V dalším popíšeme metodologický postup optimalizačního konstruování ve formě systematické krokové procedury rozdělené do osmi fází.

1.3.1 Technická formulace konstrukčních cílů, I.–IV. fáze metodologického postupu konstrukční optimalizace

Na počátku návrhu se konstruktér seznamuje s daným konstrukčním problémem, s cíli, jichž má býti dosaženo, k čemu bude dané zařízení sloužit a kdo s ním bude nakládat.

Nejdříve konstruktér prohledá svou knihovnu, knihovnu svých přátel a samozřejmě nejbližší knihovny-instituce ve městě a na svůj stůl snese vše, co se do jisté míry vztahuje k jeho úkolu.[17] Nyní konstruktér očekává několik možností.

1. Konstrukční úloha je takového charakteru, který byl v literatuře podrobně probrán a pro který bylo nalezeno dostatečně obecné a přiměřené řešení. Tento stav je našemu pracovníku

[15] Evoluční zkušeností se rozumí znalosti získané (začasté metodou pokusného hledání) našimi předchůdci.

[16] [Allaire, 2002], [Allaire *et al.*, 1997], [Cherkaev, 2000], [Bendsøe, 1995], [Bendsóe and Kikuchi, 1988], [Bendsóe, 1989], [Sigmund, 1996].

[17] A ovšem použije také světové počítačové sítě Internet a co nalezne, uloží na vyhrazeném místě disků svého počítače.

jistě příjemný. Je však velice nebezpečný pro lidský pokrok. Člověk je ve velikém pokušení přijmout daný stav a dále ho nerozvíjet.

2. Literatura nabízí řešení problémů příbuzných, avšak ne totožných. Také příjemný stav. Lze se inspirovat. Na druhou stranu není nutno se obávat výtek přehnané originality.

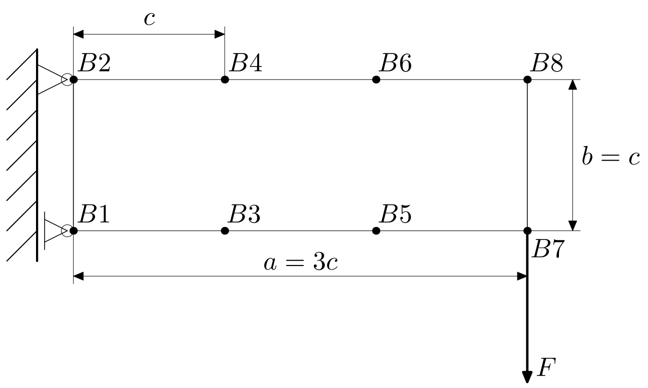
3. Jsou takové podmínky, které vyloučí výběr jakéhokoli dostupného řešení. Zde má konstruktér největší volnost a svobodu. Je to však případ nejpracnější a nejzodpovědnější.

Shrneme-li předcházející body, dospíváme k názoru, že konstruování je vždy příjemná a zábavná událost.

Ať však nastane libovolná shora popsaná situace, konstruktér, který chce postupovat dle pravidel konstrukční optimalizace, se nevyhne následujícím jednotlivým fázím optimalizačního návrhového postupu. Zdůrazněme, že následující fáze návrhu konstrukce, shrnuté pod společné označení *Technická formulace konstrukčních cílů*, jsou chápány jako samostatné a odlišné kroky, ačkoli se běžně překrývají. V některých situacích, například v případě uvažování odporu vzduchu, nemůže být poznání vnějších podmínek dokončeno, dokud není specifikována konstrukční forma.

Kroky metodologického postupu konstrukční optimalizace doprovodíme v jednotlivých fázích ukázkou na jednoduchém ilustračním příkladě. Tento příklad je vždy na příslušném místě zařazen do textu písmem o velikosti poznámky pod čarou.

Představme si, že máme za úkol navrhnout takovou rámovou konstrukci, která bude míti minimální hmotnost a při tom neporuší podmínku únosnosti danou mezním stavem dle teorie plasticity. Tato rámová konstrukce má splňovat základní rozměrové požadavky, patrné z obrázku 1.1, a jednotlivé vnitřní prvky mají se stýkat pouze v naznačených místech. Jinak zůstává počet, umístění, tvar průřezu a rozměr průřezu jednotlivých prvků neurčen a je na nás, abychom stanovili takové, které budou vyhovovat danému požadavku. Těm budeme říkat *optimální*.



Obrázek 1.1: Základní forma referenční oblasti

Předepsaná konstrukce je zatížena v pravém dolním rohu silou F. V této úloze jde především o určení způsobu propojení předepsaných stykových bodů jednotlivými prvky, tedy o jejich počet a polohu.[18] Mimo to se jedná o určení tvaru a velikosti jednotlivých průřezů. Tvar a velikost průřezů bude dán velikostí průřezových charakteristik.[19]

1.3.2 Poznání vnějších podmínek – fáze I.

Počáteční fází každého návrhu je fáze poznávací, která zahrnuje poznávání vnějších podmínek a faktorů účelovosti. Vnějšími podmínkami rozumíme podmínky, za nichž bude daná konstrukce existovat a za nichž bude sloužit svému účelu. Faktorem účelovosti se rozumí činitelé, dle kterých se dá hodnotit, zdali daná konstrukce dokáže či nedokáže sloužit svému účelu – požadavku účelovosti.

[18] Jde tedy vedle optimalizace tvaru a rozměru jednotlivých prvků zejména o optimalizaci topologie celé konstrukce.

[19] Srvn. [Mareš, 1999]

Řešením této fáze návrhu je soubor požadavků kladených na daný systém[20] a soubor parametrů popisujících vnější podmínky. O tomto souboru hovoříme jako o *systémovém prostředí*, někdy také *vnějším* nebo *návrhovém prostředí* a označujeme ho jako množinu veličin $\mathbb{P}_s$. Číselné (kvantitativní) vyjádření vnějších podmínek nazýváme faktory vnějších podmínek.

V našem příkladu můžeme systémové (vnější) prostředí dané konstrukce vyjádřit jako množinu

$$\mathbb{P}_s = \{a, b, c, F, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_8\},$$

kde

$$\mathbf{B}_i = (B_{i_x}, B_{i_y}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Požadavkem účelovosti je, jak plyne ze zadání, zabezpečit nosnost konstrukce pro danou sílu F.

1.3.3 Stanovení kritérií určení optima – fáze II.

V této fázi návrhu hledáme činitele, dle kterých lze hodnotit jakost konstrukce, její kvalitu (efektivitu systému). Dosáhne-li tento *činitel jakosti konstrukce* svého extrému, říkáme, že jsme dosáhli *optimálního stavu*.

V konstruování označuje termín optimum dosažení absolutního maxima (či minima) jedné nebo více měřitelných veličin (či vlastností). Ježto ustavení faktorů-činitelů jakosti, o jejichž extremalizování usilujeme, zahrnuje subjektivní hodnotové ocenění, musí být optimální stav považován za něco, co existuje pouze v pohledu pozorovatele a ne jako vnitřní znak daného požadavku účelovosti.[21] Ten je v návrhovém procesu zohledněn vedlejšími podmínkami, o nichž budeme hovořit později.

Pojem *nejlepší* se často užívá jako synonymum k pojmu optimální. V těchto pojmech je však jemná odlišnost. *Optimum* budí představu absolutního stavu, kdežto *nejlepší* zahrnuje srovnání poskytující stav lepší nežli jisté jiné možnosti. Úroveň naší, tím se rozumí lidské jako druhu, dovednosti nám vnucuje omezení, která nám nedovolují takovéto optimum poznat, a pro která *optimum* jako pojem musíme vyložit jako stav relativně nejlepší z jisté třídy možností. Pak ovšem pojmy *optimum* a *nejlepší* splývají. V této souvislosti také budeme pojem optimum užívat v tomto textu.

Dle toho také vytvoříme pro optimum definici: *Optimální* uspořádání konstrukce (to jest její forma a rozměry) je takové uspořádání, které je dle jistým způsobem zavedeného hlediska nejlepší z třídy možností, které jsou přijatelné při daných vedlejších podmínkách.

Čím je založena přijatelnost, bude uváženo ve fázi čtvrté, označené jako *stanovení vedlejších podmínek*, a ačkoliv podmínka zaručující tuto přijatelnost omezí počet kandidátů na titul *nejlepší*, neovlivní základnu, na které budou zbylí kandidáti porovnáváni k udělení titulu *optimální*. Základnu pro toto porovnávání (či řazení) nazýváme kritérium.[22] Kritérium definuje míru *kvality*,[23] a tím nám dává schopnost rozhodnout se mezi dvěma různými návrhovými uspořádáními (mezi dvěma kandidáty).

Často si však vyjádření kritérií odporuje. Například přání minimální hmotnosti a zároveň minimální ceny si mohou odporovat.[24] Proces uzavírání kompromisu mezi dvěma či více odporujícími si požadavky nutí k dohodě. Například porovnání hmotnosti a ceny může být vyjádřeno následovně: Hmotnost by měla být minimální, ale nemělo by být vynaloženo více nežli 100 korun na každý uspořený kilogram.

[20] Tento soubor je častěji zmíněným požadavkem účelovosti.

[21] To jest požadavku, aby daná konstrukce splňovala účel, ke kterému je určena.

[22] Shora jsme tomuto kritériu říkali také faktor nebo činitel.

[23] Nerozumí se tím kvalita ve smyslu univerzálním, jak ji definuje pan Pirsig ve své knize [Pirsig, 1979], ale naopak kvalita čistě subjektivní, kterou je možno hodnotit právě na základě *konstruktérem* zvoleného kritéria.

[24] Zde a v takovýchto případech se rozevírá prostor pro použití matematických teorií zvaných *teorie her* a *vícekriteriální optimalizace*. Srvn. [Maňas, 1991], [Vincent and Grantham, 1981].

Mějme kritérium či příslušnou dohodu vyjádřenu analyticky ve formě funkce závislé na uspořádání konstrukce. Uspořádání je specifikováno konkrétní číselnou hodnotou níže volených parametrů, kterým se říká *návrhové proměnné*. Tyto návrhové proměnné zapisujeme souhrnným označením jako sloupcový vektor $\boldsymbol{x}_N$. Takové uspořádání, které tuto funkci učiní, při splnění jistých (návrhových) podmínek, extrémem, nazýváme optimální. Tato funkce, existuje-li, je zvána funkcí cílovou, někdy též kriteriální (zde ji značme $f(\boldsymbol{x}_N)$). V aplikaci na konstruování je cílovou funkcí běžně hmotnost, cena či jejich kombinace. Velice často se jako kritérium volí tuhost konstrukce, maximální hodnota minimální vlastní frekvence či maximální odolnost proti ztrátě stability. Je však možno volit jakýkoli tvar a kvalitu cílové funkce z nekonečného počtu možností v závislosti na požadavcích příjemce návrhu a nápaditosti konstruktéra. To vše již konečně bylo svrchu naznačeno.

Stanovení kritérií je obvykle výsledkem vyhodnocení požadavků a cílů kladených na daný systém. Konstruktér musí při založení kritérií projevit svou nápaditost. Vedle hlavních kritérií, která se projevují v cílové funkci, jsou další, tentokrát kvalitativní kritéria, která, třebaže nejsou vyjádřena analyticky, budou ovlivňovat následné fáze návrhu a zejména specifikaci formy. Jedná se o hlediska, o jejichž maximalizaci usilujeme. Příkladem může být estetika, či výrobní proveditelnost konstrukce.

Na tomto místě si můžeme říci, že mírou kvality v našem příkladu zvolíme hmotnost. Její analytické vyjádření však provedeme až po té, co bude specifikována forma konstrukce a zvoleny návrhové proměnné.

1.3.4 Specifikace formy a volba návrhových proměnných – fáze III.

V první fázi návrhu jsme poznali vnější podmínky, tedy podmínky, za nichž bude daná konstrukce existovat a sloužit svému účelu, a faktory účelovosti, které vypovídají o funkčnosti konstrukce. V druhé fázi jsme nalezli činitele, dle kterých hodláme hodnotit jakost konstrukce, její kvalitu.

Předchozí fáze se mohou zdát samozřejmé a ne nutně nedílnou částí systematického přístupu v konstruování. Nicméně následující fáze konstruování jsou velmi závislé na zřejmosti a podrobném poznání okolností v těchto fázích diskutovaných. Vše, co jsme dosud poznali, vnucuje jistá omezení na tvar struktury.

Fáze návrhového procesu zahrnující specifikaci formy je z hlediska aplikování analytického postupu snad nejobtížnější. Hledání dokonalé formy je nekončícím rysem konstruování a přes již dosažené značné pokroky nelze doufat v uzavření analytického postupu a jeho převedení do nějakého matematického vztahu. Je pravdou, že existují metody optimalizace formy. Každý však jistě uvěří, či se přesvědčí v citovaných knihách,[25] že je nutné alespoň rámcově formu hledané konstrukce volit. Specifikace formy – v případě optimalizace topologie a tvaru alespoň rámcová a řekněme kvalitativní – má svou významnou důležitost i tím, že implikuje předpoklady, na nichž je založena analýza daného problému.[26] Na závěrech této analýzy potom závisí celý průběh optimalizace.

K syntetizaci (zkombinování) formy[27] využije konstruktér schopnost předpovědět chování rozličných typů forem při daném zátěžovém stavu a své předcházející zkušenosti s podobným návrhovým problémem.

Výběr alternativních, v úvahu přicházejících forem by měl být založen především na logickém vyhodnocování povahy vnějších podmínek a kritérií. Je-li kritériem zejména cena, bude jistě forma podporující minimální počet členů navíc snadno vyrobitelných označena za vhodnou, kdežto je-li kritériem hmotnost, může být za vhodný považován opak. Zde je, jak již bylo shora řečeno, vše

[25] Srvn. např. souhrnné práce [Allaire, 2002], [Bendsøe, 1995] či [Cherkaev, 2000].

[26] Jde například o přijetí předpokladů o napjatosti – rovinná či prostorová – apod.

[27] Ať již definitivní formy konstrukce (bez uvažování optimalizace topologie a tvaru) či referenční formy konstrukce (při uvažování optimalizace topologie a tvaru).

v rukách člověka a v závislosti na jeho pošetilých přáních. Za zmínku opět stojí existence metod řešících úlohu *vícekriteriální optimalizace*.

Po uvážení shora řečených činitelů může být několik alternativních, tedy v úvahu přicházejících, forem[28] kvalitativním odhadem nerozeznatelných. V těchto případech by každá forma měla být optimalizována a výsledky srovnány kvantitativně. Opět poznáváme, že takovýto postup může zajistit pouze vodítko k určení nejlepšího řešení a nikoliv řešení naprosté.

Poté, co došlo k specifikaci formy,[29] dochází k volbě proměnných tak, aby popisovaly rozměry jednotlivých prvků, jejich vzájemnou orientaci a materiálové charakteristiky. Definují se tři typy návrhových proměnných označené jako soubory proměnných $\boldsymbol{x}_r$, $\boldsymbol{x}_t$ a $\boldsymbol{x}_m$ a nazývané postupně jako *rozměrové proměnné*, *tvarové proměnné* a *materiálové proměnné*. Tyto *návrhové proměnné* pak souhrnně značíme sloupcovým vektorem

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_m \\ \boldsymbol{x}_t \\ \boldsymbol{x}_r \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n. \tag{1.1}$$

Rozměrové proměnné definují jednotlivé rozměry specifikované formy, například tloušťky, šířky a délky rovinných prvků, poloměry křivosti skořepin, vzdálenost mezi výztuhami u vyztužených desek. Tvarové proměnné definují prostorové uspořádání systému prvků v termínech jako počet a umístění uzlů sítě rámové konstrukce, úhly mezi členy prutové konstrukce apod. Zde jde ve značné míře o proměnné vztahující se k optimalizaci formy (topologie a tvaru), kde původně specifikovaná forma ponechává návrhu určitou volnost. Materiálové proměnné definují mechanické vlastnosti přístupných materiálů. Sem patří například modul pružnosti, mez kluzu, hustota či charakteristiky definující kompozitní materiál. Zde se opět otevírá možnost optimalizace topologie. Člen s nulovým tenzorem pružnosti je člen, který z hlediska konstrukce neexistuje, vypadává a mění tím topologii konstrukce. Tento přístup ve spojení s metodou konečných prvků otevírá široké pole, které je postupně úspěšně vyplňováno a které zároveň přináší zajímavé problémy nejen pro moderní konstruktéry, ale zejména pro aplikované matematiky.[30] Budiž poznamenáno, že každý prvek konstrukce (nazývaný prvek, element či subsystém) bude mít odlišnou dvojici souborů proměnných $\mathbf{x}_r$ a $\mathbf{x}_m$, ale pro celou konstrukční formu (nazývanou systém) bude pouze jeden společný soubor proměnných $\mathbf{x}_t$.

V naší úloze znázorněné a dané obr. 1.1 na str. 23 je forma rámcově specifikována samotným zadáním. Tedy rozměry a, b, způsobem uložení, působením síly a uzlovými body. V reálném případě by zřejmě rozhodnutí o umístění uzlových bodů a způsobu uložení celé konstrukce náleželo konstruktéru. Uvažujme prvky konstrukce mezi všemi uzlovými body, jak je naznačeno na obr. 1.2, však jen tehdy, neřekrývají-li se jednotlivé prvky. Pokud se překrývají, potom spojíme pouze nejbližší uzlové body, čímž tomuto překrývání předejdeme.

Při neúčelnosti jistého prvku lze očekávat jeho vynulování – tedy vynulování jeho průřezových charakteristik. Rozměry a tvar jednotlivých prvků buďte dány průřezovými charakteristikami A_i^{pl}, které mají význam velikosti plochy připadající na plastizaci od tahového-tlakového namáhání a průřezovými charakteristikami W_i^{pl} představujícími ohybové plastické moduly průřezů jednotlivých prvků konstrukce, který zbývá po odmyslení střední části průřezu připadající na A_i^{pl}. Vektor návrhových proměnných se v našem případě redukuje na proměnné jistým způsobem rozměrové.

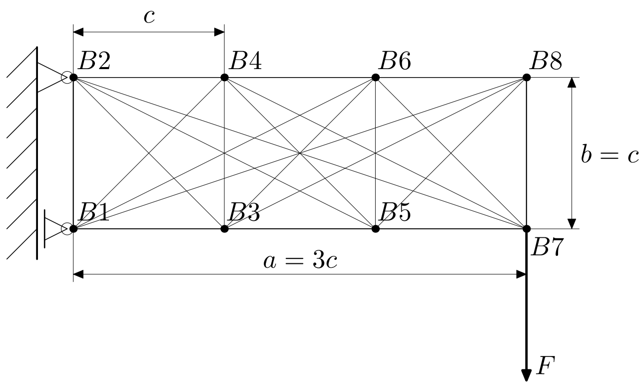
1.3.5 Stanovení vedlejších podmínek – fáze IV.

Uvažujeme-li návrhové proměnné v úloze vystupující jako osy n-dimensionálního nadprostoru, potom každý bod v tomto takzvaném návrhovém prostoru představuje v úvahu přicházející návrh.

[28] Opět ve smyslu poznámky 27.

[29] A to ať způsobem intuitivním, či optimalizací topologie a tvaru.

[30] Například otázky nekonvexnosti a s ní spojené relaxace a kvazikonvexifikace. Srvn. např. [Ball *et al.*, 1999], [Bellido and Pedregal, 2002], [Bousselsal and Brighi, 1997], [Cherkaev, 2000], [Cioranescu and Paulin, 1999], [Dacorogna, 1982], [Dacorogna, 1989], [Dvořák and Haslinger, 1998], [Pedregal, 1999], [Pedregal, 2000], [Pedregal, 2001], [Roubíček, 1997], [Sanchez-Palencia and Zaoui, 1985], [Šverák, 1992].



Obrázek 1.2: Základní forma referenční oblasti s naznačením možných prvků

Otázka, který z dvou bodů představuje lepší návrh, může být zodpovězena dosazením příslušných souřadnic do cílové funkce a porovnáním jejich hodnot. Toto porovnání má však smysl pouze tehdy, představují-li body návrh přijatelný. Návrhový bod je přijatelným, pokud při daných vnějších podmínkách nenastane některý ze základních mezních stavů, např. dosažení meze kluzu, porušení vzpěrné pevnosti či lom a zároveň příslušný systém proměnných neporuší jistým způsobem ustavené limity, jakými jsou například minimální požadovaná tloušťka desky, maximální přípustná tloušťka nosníku, minimální požadovaný průměr trubky nebo minimální tuhost konstrukce či žádaná nejnižší mez pro vlastní frekvenci.

Podmínku, aby přijatelné návrhové body odpovídaly konfiguraci konstrukce, pro kterou nenastane žádný z mezních stavů, nazýváme pevnostní podmínka. Tato podmínka je určena soustavou nerovnic, které vyjadřují, že aktuální napětí v žádném ze subsystémů nesmí překročit napětí, při němž dojde k poškození konstrukce, případně že tuhost neklesne pod minimální požadovanou mez. Daná pevnostní podmínka je obecně funkcí rozměrů prvků konstrukce, materiálových proměnných, tvarových proměnných a vnějších podmínek. Za vedlejší podmínky je nutno považovat také vztahy popisující chování konstrukce, jako jsou rovnice rovnováhy, deformační podmínky a konstitutivní vztahy. O tom však více v následující fázi.

Vedlejší podmínky můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$\overline{g}_\ell(\mathbf{x}_N) \leq 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.2}$$

$$\overline{h}_\ell(\mathbf{x}_N) = 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, K). \tag{1.3}$$

V našem příkladě v případě uvažování pevnostní podmínky bude mít jedna z rovnic (1.2) konkrétní tvar

$$|\sigma(\mathbf{x}_N)| \leq \sigma_D.$$

Omezení, aby přijatelné návrhové body neobsahovaly souřadnice, které porušují zvolené hodnotové limity proměnných, je vyjádřeno geometrickými (někdy jsou také zvány přirozenými) vedlejšími podmínkami. Obecně jde o podmínky tvaru (1.2), které jsou přirozeným způsobem psány jako

$$\boldsymbol{b}_l \leq \boldsymbol{x}_b \leq \boldsymbol{b}_u, \tag{1.4}$$

kde $\boldsymbol{x}_b$ představuje vektor těch proměnných, jejichž žádaná hodnota je omezena dolní $\mathbf{b}_l$ a horní $\boldsymbol{b}_u$ mezí. Je-li pro dané systémové proměnné $\boldsymbol{b}_l = 0$ a $\boldsymbol{b}_u = \infty$, potom jsou tyto proměnné v geometrickém pohledu neohraničené a dle toho jsou zvány jako volné proměnné.

V našem příkladu mějme geometrické vedlejší podmínky

$$A_i^{pl} \leq A_{max}^{pl},$$

$$W_i^{pl} \leq W_{max}^{pl},$$

kde A^{pl}_{max} a W^{pl}_{max} reprezentuje zvolené maximální hodnoty příslušných průřezových charakteristik.

Na rozdíl od geometrických vedlejších podmínek, které jsou voleny, jsou pevnostní vedlejší podmínky a stavové rovnice dány povahou působení vnějšího prostředí na specifikovanou formu. Základní úlohou této fáze tudíž je detailní poznání mezních stavů či jinak uvažovaných omezení, analytického popisu chování konstrukce a jejich matematické vyjádření. Úplnost tohoto poznání závisí na dokonalosti analýzy konstrukce.

1.3.6 Sestavení matematického modelu fyzikálně zjednodušené technické úlohy – fáze V.

Tato fáze návrhu je vyňata z předešlé čtveřice z důvodu odlišného pojetí a přístupu. Ve skutečnosti však probíhá s nimi současně.

Nejprve je třeba uvědomit si rozdíl mezi analýzou (rozborem) a syntézou (sloučením). Tento rozdíl je založen na rozdílu v hledisku a cíli při použití společných soustav vědomostí. Analýza představuje schopnost *předpovědět chování* fyzikálního systému zpracováním matematického modelu, který abstraktně kopíruje chování idealizovaného reálného systému. Syntéza dává možnost manipulovat s hledisky, která ovlivňují odezvu systému tak, že je-li dána způsobilost předpovědi chování systému, *předpoví ty systémy*, které projevují požadované chování.

V průběhu analýzy a syntézy vychází najevo, že proměnných v úloze vystupujících je více nežli jen námi zvolené návrhové proměnné $\boldsymbol{x}_N$. Ty proměnné, které se v úloze vyskytly mimo vůli konstruktéra, zařaďme do společné skupiny tzv. *analytických proměnných* a sestavme je do vektoru analytických proměnných $\boldsymbol{x}_A$. Analytickými jsme je nazvali z toho důvodu, že v drtivé většině případů jde o veličiny, jejichž hodnota je pro konstruktéra zajímavá a v případě klasického postupu návrhu konstrukce tyto veličiny získává na základě *analytického* rozboru navržené konstrukce. Jde většinou o fyzikální veličiny mající charakter složek tenzoru napětí či deformací, změny tvaru, vlastní frekvence, atd. atp. Jak uvidíme později, v průběhu optimalizačního procesu dochází k vyhodnocení také těchto analytických proměnných. Z tohoto důvodu se někdy hovoří o souběžné analýze a optimalizačním návrhu. Spolu s vektorem návrhových proměnných $\boldsymbol{x}_N$ pak vektor analytických proměnných tvoří vektor proměnných úlohy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_N \\ \boldsymbol{x}_A \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^p. \tag{1.5}$$

Jelikož řešení majících požadované chování je více, musí být syntéza založena na zavedené míře efektivnosti (kvality), dle níž může být mnohonásobný systém řešení tříděn. Zmíněnou míru efektivnosti-kvality jsme již definovali na straně 24 ve fázi nazvané *Stanovení kritérií určení optima*. Zde ji na základě analytického rozboru zjednodušeného modelu daného problému (s využitím známých a ověřených fyzikálních hypotéz) vyjádříme v konečné formě matematického výrazu

$$f = f(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

Podobně a na stejném základě matematicky korektně vyjádříme vedlejší podmínky (předběžně formulované na straně 26 ve fázi nazvané *Stanovení vedlejších podmínek*) v kompaktním tvaru

$$g_\ell(\boldsymbol{x}) \le 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.7}$$

$$h_\ell(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, K). \tag{1.8}$$

V případě ilustrační úlohy máme cílovou funkci ve tvaru[31]

$$f(A^{pl}_i, W^{pl}_i) = \sum_{i=1}^{n} (A^{pl}_i L_i + \alpha_i W^{pl}_i L_i),$$

[31]Srvn. [MAREŠ, 1999].

kde α_i jsou jistým způsobem volené parametry a L_i představuje délky jednotlivých prutů a vedlejší podmínku ve tvaru

$$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b},$$

kde význam jednotlivých symbolů není na tomto místě důležitý.[32]

1.3.7 Vlastní optimalizace

Tato fáze obsahuje rozřešení matematické formulace dané úlohy zapsané vztahy (1.6), (6.8) a (6.7). Říkáme, že pro známé prostředí a specifikovanou formu konstrukce bude mít návrhový vektor $\boldsymbol{x}$ optimální nastavení $\hat{\boldsymbol{x}}$, pokud (v případě hledání maxima)

$$f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\wp} f(\boldsymbol{x}), \tag{1.9}$$

kde množina $\wp$ je množina všech přípustných návrhových bodů, tedy množina všech $\boldsymbol{x}$, která vyhovují našim shora formulovaným vedlejším podmínkám

$$g_\ell(\boldsymbol{x}) \leq 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.10}$$

$$h_\ell(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, K). \tag{1.11}$$

Tuto úlohu je možné zapsat také jinými způsoby; např.

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\wp} f(\boldsymbol{x}), \qquad \wp = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}^p \mid g_\ell(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ h_k(\boldsymbol{x}) = 0\ \forall \ell, k\}. \tag{1.12}$$

Termín optimalizace označuje rozličné matematické metody, které minimalizují (resp. maximalizují) cílovou funkci (1.9) při dodržení vedlejších podmínek (1.10) a (1.11). Těchto metod je celá řada a jejich teorií se zaobírá obsáhlá matematická disciplína, které se říká *matematická teorie optimálních procesů*,[33] zkráceně *matematická optimalizace* a jejíž součástí jsou vedle teoreticky formulovaných obecných principů také jednotlivé matematické optimalizační metody.

1.3.8 Výběr vhodné matematické optimalizační metody a formalizace extremální úlohy – fáze VI.

Shora zmíněných matematických optimalizačních metod je, jak již řečeno, celá řada a liší se od sebe mnoha způsoby. Každá optimalizační metoda vyžaduje svým určitým způsobem formalizovanou extremální úlohu popsanou v obecném tvaru vztahy (1.9), (1.10) a (1.11). Každou úlohu však nelze formalizovat libovolným způsobem. Například metoda zvaná *lineární programování* vyžaduje, aby všechny výrazy v problému vystupující byly lineární. Toho jistě nelze vždy dosáhnout. A naopak ne každý je schopen použít libovolnou optimalizační metodu. Konstruktér může použít pouze tu metodu, ke které má dostatečné matematické a programové zázemí a která k řešení vyžaduje takové množství času a námahy, aby řešení problému zvolenou metodou bylo přínosné. Zde se opět naskýtá prostor pro intuici návrháře. Musí vybrat metodu, jejíhož formalizovaného tvaru lze dosáhnout, poskytující dostatečně přesné výsledky v přípustném čase. Získání schopnosti vybrat vhodnou optimalizační metodu vyžaduje vedle vrozené intuice zejména důkladné a léta trvající studium matematické optimalizace.

Pro náš ilustrační případ se okamžitě nabízí formulace ve tvaru úlohy lineárního programování.

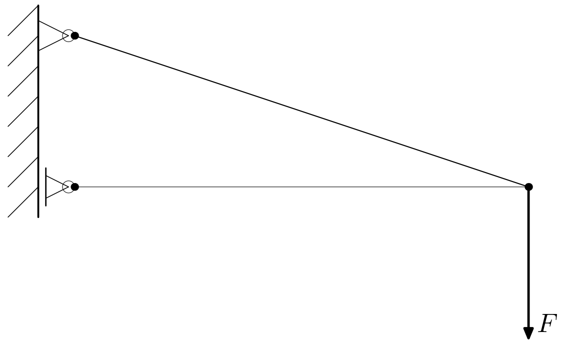
---

[32] Jest podán v [Mareš, 1999].

[33] Srvn. např. [Alexejev *et al.*, 1991], [Gallagher and Zienkiewicz, 1973], [Gürdal *et al.*, 1999], [Haftka and Gürdal, 1992], [Havrda, 1972], [Lavrenťjev and Lusternik, 1952], [Maňas, 1979], [Maňas, 1991], [Mareš, 1999], [Mareš and Holý, 2000], [Mareš and Holý, 2001c], [Mareš and Holý, 2001d], [Mareš *et al.*, 2001], [Mareš, 2002a], [Mareš, 2002d], [Mareš, 2002e], [McMillan, 1975], [Peterson *et al.*, 1967], [Spunt, 1971], [Vincent and Grantham, 1981], [Wilde, 1978].

1.3.9 Matematické řešení formalizované extremální úlohy – fáze VII.

V této fázi návrhu dochází k matematickému zpracování shora formalizované optimalizační úlohy. Postup tohoto zpracování ve značné míře závisí na tvaru formalizované úlohy a na zvolené metodě řešení této úlohy. Problematice vhodné formalizace úlohy a jejímu následnému řešení pro případ laminátových kompozitů je zasvěcena značná část předkládaného elaborátu.



Obrázek 1.3: Řešení s naznačením prvků

K rozřešení shora formalizované úlohy lze použít procedury programu MATLAB. Pro představený příklad se ukazuje, že dle uvažovaných kritérií je nejvýhodnější konstrukcí konstrukce staticky určitá dle obr. 1.3, kde oba členy jsou namáhány toliko osovými silami.[34]

1.3.10 Technická interpretace získaného řešení – fáze VIII.

Je zřejmé, že výsledné řešení optimalizační úlohy je třeba přeložit do jazyku techniků a případně upravit pro praktické použití. Snahou *optimalizatéra* je tuto poslední fázi redukovat na minimum. Naopak snahou konstruktéra je vybírat jednotlivé díly z normalizovaných prvků, mít hladké tvary hraničních křivek apod. To vše je však možné po jistém úsilí zahrnout do vlastního optimalizačního návrhového postupu.

V představeném příkladě je technické řešení zřejmé. Vybereme takový normalizovaný průřez, který se nejvíce blíží vypočteným charakteristikám a provedeme kontrolu navržené konstrukce tak, aby výsledný návrh byl proveden dle příslušné normy.[35] Jest patrno, že tento příklad vyústil v návrh topologie příslušné konstrukce namísto v návrh rozměrů, které jsou navrhovány dle zmíněné normy, tak aby se příslušné charakteristiky ze shora blížily těm, které jsou výstupem příslušné procedury.

[34] Srvn. [Mareš, 1999], [Jamróz and Mareš, 2003], [Jamróz and Mareš, 2003],
[35] ČSN 73 1401.

Kapitola 2

Základy matematické teorie optimalizace

2.1 Úvod do matematické teorie optimálních procesů

Matematická teorie optimálních procesů se zabývá teoretickými i praktickými otázkami spojenými s řešením optimalizačních úloh. Optimalizační úlohou se rozumí úloha nalézt bod, v němž jistý funkcionál či funkce nabývá svého extrému.

Optimalizační úlohy rozdělujeme dle charakteru neznámých veličin na dvě základní skupiny. Na úlohy *parametrické optimalizace* a na úlohy *optimalizace funkční*.

V případě úloh parametrické optimalizace jde o úlohy o nalezení bodu (hodnot jistého návrhového vektoru) $\hat{\boldsymbol{x}}$, v němž daná funkce $f(\boldsymbol{x})$ dosahuje svého extrému (maxima či minima) při splnění jistých podmínek, které jsou předepsány ve formě soustavy rovnic a nerovnic. Tuto úlohu lze zapsat ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}} f(\boldsymbol{x}),$$

$$\mathbb{P} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_p \mid g_l(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ (l = 1, 2, \ldots, L), \ h_k = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, K)\},$$

což čteme jako: Najdi bod $\hat{\boldsymbol{x}}$, v němž funkce $f(\boldsymbol{x})$ reálných proměnných $\boldsymbol{x}$ dosahuje největší hodnoty (svého maxima) mezi všemi body (vektory) $\boldsymbol{x}$, které vyhovují soustavě L nerovností $g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0, g_2(\boldsymbol{x}) \leq 0, \ldots, g_L(\boldsymbol{x}) \leq 0$ a soustavě K rovností $h_1(\boldsymbol{x}) = 0, h_2(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, h_K(\boldsymbol{x}) = 0$.

Úlohou funkční optimalizace nazýváme úlohu o nalezení funkce (či souboru funkcí) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ p-rozměrné proměnné $\boldsymbol{x}$ definované na jisté množině $\Omega \subset \mathbb{E}_p$, v nichž nabývá daný funkcionál největší (případně nejmenší) hodnoty mezi všemi funkcemi splňujícími další (tzv. vedlejší) podmínky dané soustavou nějakých algebraických, transcendentních, diferenciálních či integrálních rovnic případně nerovnic.

2.1.1 Klasifikace (rozlišení) optimalizačních úloh dle charakteru

Optimalizační úlohy – jak parametrické, tak funkční – lze klasifikovat, tak jako ostatně vše ostatní, různými způsoby. V literatuře věnované metodám řešení extremálních úloh se nejčastěji objevují následující pohledy.

- Dle přítomnosti vedlejších podmínek
  - s vedlejšími podmínkami – vázané extrémy
  - bez vedlejších podmínek – volné extrémy.
- Dle charakteru neznámých veličin
  - parametrické optimalizační úlohy
  - funkční optimalizační úlohy.

- Dle charakteru entit v úloze vystupujících
  - lineární
  - konvexní
  - nekonvexní.

Metody řešení těchto úloh lze rozdělit na dvě zásadní skupiny:

- přesné
- přibližné,

či na

- analytické
- numerické.

Metody řešení optimalizačních úloh lze také dělit například na

- metody poskytující řešení jedním výpočtem
- metody iterační, tj. dosahujících řešení řadou opakovaných výpočtů.

Například optimalizační metoda zvaná lineární programování[1] je metodou přesnou, přitom však numerickou a iterační.

2.1.2 Obecně užívaná terminologie

V souvislosti s úlohami vyhledávání extrému funkcí se ustálila jistá terminologie. Vyšetřujeme-li extrémy funkce n-proměnných na celém n-rozměrném prostoru reálných čísel $\mathbb{E}_n$, mluvíme o volných extrémech. Zápis úlohy pak může vypadat následovně:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{E}_n} f(\boldsymbol{x}).$$

Zajímají-li nás pouze takové body maxima či minima, které splňují další podmínky – takřečené *vedlejší podmínky*, mluvíme o *vázaných extrémech.* Vázané extrémy se vyšetřují při podmínkách majících například tvar

$$h_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, K), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

nebo například

$$g_l(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, L), \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.$$

V případě vedlejších podmínek posledního tvaru lze kompletní optimalizační (specielně minimalizační) úlohu zapsat ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}} f(\boldsymbol{x}),$$

$$\mathbb{P} = \{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0} \in \mathbb{E}_L\}.$$

Extremalizační úlohy s omezemím těchto typů se nazývají úlohy *matematického programování.* Funkce, jejíž extrém hledáme, je někdy nazývána funkcí *účelovou* či *cílovou.*

[1]Srvn. s. 41.

Definice 2.1 (Globální extrém) *Největší (nejmenší) hodnotu, jíž funkce nabývá na celém definičním oboru, nazveme globální maximum (minimum). Souhrnně těmto hodnotám říkáme globální extrém.*

Definice 2.2 (Lokální extrém) *Lokálním maximem (minimem) nazýváme hodnotu největší (nejmenší) v jistém svém okolí. Takovým hodnotám říkáme souhrnně lokální extrém.*

Ta $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n$, která vyhovují omezujícím podmínkám, se nazývají přípustná řešení. Přípustné řešení $\boldsymbol{x}$, které je globálním minimem (případně maximem) účelové funkce vzhledem k množině přípustných bodů, se nazývá optimální řešení. Jsou-li všechny funkce vyskytující se v zadání úlohy lineární, můžeme-li tedy psát

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},$$

$$\mathbb{P} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\},$$

kde $\mathbf{A}$ je daná matice, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, dané vektory, pak mluvíme o úloze lineárního programování.

Hledáme-li při těchto podmínkách maximum kvadratické funkce, tedy funkce tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$

kde $\boldsymbol{C}$ je daná čtvercová pozitivně semidefinitní matice,[2] pak mluvíme o kvadratickém programování.

Obecná úloha tvaru maximalizovat (minimalizovat) funkci $f(\boldsymbol{x})$ při omezeních (s vedlejšími podmínkami)

$$h_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, ..., s), \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

kdy chceme zdůraznit, že nejde o speciální lineární případ, se nazývá úloha nelineárního programování. Při řešení úloh nelineárního programování není lehké určit, zdali nalezený extrém je lokální či globání vzhledem k množině přípustných řešení. Nejběžnější podmínkou, která zaručuje, že každý lokální extrém daného typu (maximum či minimum) je i extrémem globálním, je, aby v maximalizační úloze s citovanými podmínkami, byly všechny funkce

$$f(\boldsymbol{x}), \quad g_j(\boldsymbol{x}) \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \quad h_i(\boldsymbol{x})$$

konkávní v $\mathbb{E}^n$, a v úloze minimalizační s podmínkami

$$g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

všechny funkce konvexní. Množina přípustných řešení je pak konvexní množinou. Takovéto úlohy se nazývají konvexním programováním.

2.1.3 Popis obratů transformujících extremalizační úlohy jistého tvaru do tvaru jiného – pro výpočet vhodnějšího

Převedení maximalizace na minimalizaci a opačně: Je-li bod x bodem minima funkce $f(x)$, je bodem maxima funkce $-f(x)$.

Transformace nerovností na rovnosti: Podmínky tvaru

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \geq \boldsymbol{0}$$

[2] Srvn. s. 275.

převedeme na podmínky ve tvaru rovnosti zavedením tzv. přídatných proměnných

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}.$$

Dostáváme podmínky ve tvaru[3]

$$g_j(\boldsymbol{x}) - x_{n+j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n+m).$$

Zde vystupující podmínku nezápornosti jest možno nahradit substitucí

$$x_i = z_i^2 \qquad (i = 1, 2 \dots, n+m).$$

Čímž dostáváme úlohu maximalizovat funkci $f(z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2)$ při podmínkách

$$g_j(z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2) - z_{n+j}^2 = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Úloha původně lineární však tuto vlastnost ztrácí a stává se úlohou nelineární.

Převedení rovnice na nerovnosti: Rovnici

$$g_j(\boldsymbol{x}) = 0$$

lze převést na dvě nerovnosti

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \wedge -g(\boldsymbol{x}) \geq 0.$$

Odstranění znaménkově neomezených proměnných: Znaménkově neomezenou proměnnou x_i nahradíme užitím substituce

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \qquad (x_i^+ \geq 0,\ x_i^- \geq 0)$$

za dvě znaménkově omezené proměnné x_i^+ a x_i^-.

2.2 Obecné principy výpočtu extrémů funkcí

Definice 2.3 (Kompaktní množina) *Nechť množina $\mathbb{S}$ je částí metrického protoru $(\mathbb{M}, \varrho)$. Množinu $\mathbb{S}$ nazveme kompaktní právě, když z každé nekonečné posloupnosti bodů $x_n \in \mathbb{S}$ můžeme vybrat podposloupnost x_{n_k}, která konverguje k prvku x_0 z $\mathbb{S}$.*

Věta 2.4 (Souřadnice bodu extrému) *Nechť $\mathbb{S}$ je kompaktní množina a f spojitá funkce na $\mathbb{S}$. Nechť $f(\boldsymbol{x})$ nabývá svého globálního maxima vzhledem k $\mathbb{S}$ právě v jednom bodě $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{E}_n$. Potom pro souřadnice tohoto bodu platí*[4]

$$\hat{x}_j = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{\int_{\mathbb{S}} x_j e^{\lambda f(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_{\mathbb{S}} e^{\lambda f(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Věta 2.5 (Nutná podmínka lokálního extrému) *Nechť funkce $f(\boldsymbol{x})$ je diferencovatelná v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$. Je-li $\hat{\boldsymbol{x}}$ bodem lokálního extrému funkce $f(\boldsymbol{x})$, potom*

$$\operatorname{grad} f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) = f_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{x}})}{\partial x_n} \right)^T = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

[3] Jistá záměna značení v okamžicích, kdy nehrozí záměna, jest didaktickým záměrem.

[4] Důkaz této věty jest v práci [Maňas, 1979] na s. 19.

Tato věta spolu s vyšetřením konkávnosti (respektive konvexnosti) funkce někdy umožňuje převést problém nalezení extrému na řešení soustavy rovnic. Je-li funkce f konvexní, pak je rovnost (2.1) postačující podmínkou existence minima funkce f v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$. Je-li f konkávní, je tato rovnost postačující podmínkou pro bod maxima této funkce.

Funkce $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}_1$ se zove konvexní, jestliže pro dva libovolné body $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ a $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}$ platí *Jensenova nerovnost*

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)f(\boldsymbol{y}) \quad \forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle.$$

Funkce f je funkcí konkávní, je-li funkce $-f$ konvexní. Bod $\tilde{\boldsymbol{x}}$ splňující podmínku $\nabla f = \boldsymbol{0}$ slove *bod stacionární.*

Větu 2.5 zopakujme s Vojtěchem Jarníkem pozpátku:[5]

Věta 2.6 (Bod není extrémem) *Jestliže alespoň pro jednu hodnotu j $(1 \leq j \leq r)$ derivace*

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_r)}{\partial x_j}$$

existuje a je od nuly různá, pak nemá funkce f v bodě $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ lokální extrém (ostrý ani neostrý).

Věta 2.7 (Postačující podmínka extrému funkce) *Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ nechť má v bodě $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ totální diferenciál druhého řádu; v bodě $\boldsymbol{a}$ buďte splněny rovnice*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_r} = 0.$$

Sestrojme kvadratickou formu[6]

$$\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_r) = \sum_{j,k=1}^{r} \frac{\partial^2 f(a_1, a_2, \ldots, a_r)}{\partial x_j \partial x_k} h_j h_k.$$

Potom platí:

I. *Je-li kvadratická forma Φ pozitivně definitní, má f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum.*

II. *Je-li Φ negativně definitní, má f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum.*

III. *Je-li Φ indefinitní, nemá f v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální extrém (ostrý ani neostrý).*

Vyšetřujeme-li extremalizační úlohu typu maximalizovat $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ při podmínkách

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots, m) \quad (m < n), \tag{2.2}$$

můžeme postupovat dvojím způsobem. Při přímém postupu vypočteme z podmínek úlohy (2.2), je-li to možné, m proměnných, například proměnné $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, které vyjádříme jako funkce zbývajících $n - m$ proměnných

$$x_j = \varphi_j(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

a za něž dosadíme do funkce $f(\boldsymbol{x})$, čímž dostáváme funkci $n - m$ proměnných

$$h(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n),$$

[5] Srvn. [JARNÍK, 1984b] s. 506; tamtéž důkaz této i následné věty.

[6] Srvn. s. 275.

jejíž volný extrém můžeme dále vyšetřovat.

V případě druhého postupu zavádíme funkci $\mathcal{L}$, kterou nazýváme *Lagrangeova funkce* úlohy (2.2), vztahem

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x}),$$

kde proměnné $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ slovou *Lagrangeovy multiplikátory.* Při vyšetřování úlohy (2.2) pak hledáme stacionární bod funkce $\mathcal{L}$. Použití tohoto principu vychází z následující úvahy: V bodě extrému je přírůstek funkce f nulový, tj.

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i = 0,$$

ale pouze $n - m$ proměnných je nezávislých, proměnné $\mathrm{d}x_i$ musí vyhovovat rovnicím plynoucím z podmínek (2.2):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Vynásobím-li posledních m rovnic příslušnými koeficienty λ_j, sečtu-li je a přičtu-li navíc rovnici předcházející, dostávám s ohledem na zákony komutativní, asociativní a distibutivní výraz

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i = 0.$$

Vzhledem k $\mathrm{d}x_i \neq 0$ platí

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a zároveň

$$g_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Jedná se tedy o $n + m$ rovnic pro $n + m$ neznámých $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\lambda}$. Shora uvedené lze formulovat pomocí následující věty.

Věta 2.8 (Metoda Lagrangeových multiplikátorů) *Nechť funkce*

$$f, g_1, g_2, \dots, g_m$$

v úloze (2.2) mají spojité prvé parciální derivace v nějaké otevřené množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{E}_n$. *Nechť v každém bodě* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$ *jsou vektory*

$$\nabla g_i(\boldsymbol{x}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

lineárně nezávislé. Potom platí: Je-li $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{M}$ *bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině*

$$\mathbb{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)\},$$

pak existuje bod $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{E}_m$ *tak, že*

$$\mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \right)^T_{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathbf{0},$$

$$\mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}, \cdots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} \right)^T_{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathbf{0}.$$

Věta 2.9 (O Sedlovém bodě) *Mějme úlohu maximalizovat funkci $f(\boldsymbol{x})$ při splnění vedlejších podmínek*

$$\mathbb{E}_m \ni \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0} \qquad \wedge \qquad \mathbb{E}_n \ni \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

a nechť

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$$

Platí-li pro

$$\hat{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0} \qquad \wedge \qquad \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$$

nerovnosti

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \leq \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \leq \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda})$$

pro všechna

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \qquad \wedge \qquad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0},$$

pak je $\hat{\boldsymbol{x}}$ optimálním řešením uvedené úlohy. Dvojici $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ se pak říká nezáporný sedlový bod funkce $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

Postačující podmínkou pro to, aby bod $\hat{\boldsymbol{x}}$ byl řešením úlohy maximalizovat konkávní funkci $f(\boldsymbol{x})$ při omezeních tvaru

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kde g_j jsou konkávní, je, aby spolu s nějakým $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$ ($\hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$), dvojice $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ tvořila nezáporný sedlový bod funkce

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x}). \tag{2.3}$$

Věta 2.10 (Sedlový bod) *Nechť všechny funkce $f(\boldsymbol{x})$, $g_j(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ jsou konkávní a nechť jsou splněny tyto podmínky regularity omezení: Existuje bod $\bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}$ takový, že $g_j(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ pro všechna j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ současně. Je-li $\hat{\boldsymbol{x}}$ řešením úlohy maximalizovat funkci $f(\boldsymbol{x})$ při omezeních právě uvedeného typu, pak existuje bod $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$ takový, že dvojice $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$, je nezáporným sedlovým bodem funkce (2.3).*

Důležitým oslabením podmínky regularity je, že stačí předpokládat existenci bodu $\bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}$, pro než jsou nerovnosti $g_j(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ splněny pro všechna ta j, pro než jsou funkce $g_j(\boldsymbol{x})$ nelineární. Z toho plyne, že u lineárních omezení není nutné regularitu ověřovat. Pro konvexní úlohy nelineárního programování je tedy metoda pro vyhledání sedlového bodu funkce $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ i metodou pro řešení této úlohy. K výpočtu nezáporného sedlového bodu se často užívá následující věta.

Věta 2.11 (Nezáporný sedlový bod) *Nechť při splnění podmínek předchozí věty jsou navíc funkce $f(\boldsymbol{x})$, $g_j(\boldsymbol{x})$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ diferencovatelné. Pak $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ a $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$ tvoří nezáporný sedlový bod funkce $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ tehdy a jen tehdy, vyhovuje-li tato dvojice $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$ podmínkám*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &\leq \mathbf{0}, & \mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &\geq \mathbf{0}, \\
\hat{\boldsymbol{x}}^T \mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &= 0, & \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) &= 0, \\
\hat{\boldsymbol{x}} &\geq \mathbf{0}, & \hat{\boldsymbol{\lambda}} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Obdobná věta platí i pro úlohu s jinými omezeními. Např. pro omezení tvaru

$$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

to jest s proměnnými $\boldsymbol{x}$ nabývajícími obou znamének, vypadá obdoba podmínek (2.4) takto:

$$\begin{aligned} & & \mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \geq \mathbf{0}, \\ \mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{0}, & \qquad & \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0, \\ & & \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pro omezení tvaru

$$g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

má tato podmínka tvar následující:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \leq \mathbf{0}, & & \\ \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathcal{L}_x(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0, & \qquad & \mathcal{L}_\lambda(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{0}, \\ \hat{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}. & & \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hodnoty proměnných $\boldsymbol{\lambda}$ ze vztahů (2.4) až (2.6) dávají důležitou informaci týkající se závislosti optimální hodnoty extremalizované funkce na omezujících podmínkách.

Totéž vyslovme v pozměněné podobě větou následující:[7]

Věta 2.12 (Theorém Kuhnův-Tuckerův) *Buď $\mathbb{X}$ lineární prostor, $f_i : \mathbb{X} \to \mathbb{E}_1$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ konvexní funkce a $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ konvexní množina. Jestliže $\hat{\boldsymbol{x}}$ je řešením úlohy*

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \inf, \quad f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{A}, \tag{2.7}$$

pak existují Lagrangeovy multiplikátory $\hat{\lambda}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ ne všechny současně rovné nule takové, že

a) pro Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(\boldsymbol{x})$$

platí princip minima

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \hat{\lambda}_0, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\lambda}_0, \hat{\boldsymbol{\lambda}})$$

b) je splněna podmínka nezápornosti Lagrangeových multiplikátorů

$$\hat{\lambda}_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

c) platí podmínka komplementarity

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Jestliže $\lambda_0 \neq 0$, pak podmínky a)–c) jsou postačující k tomu, aby přípustný (tedy splňující vedlejší podmínky) bod $\hat{\boldsymbol{x}}$ byl řešením úlohy (2.7).

K tomu, aby $\lambda_0 \neq 0$ stačí, aby existoval bod $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{A}$, pro který je splněna Slaterova podmínka

$$f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Je-li splněna Slaterova podmínka, můžeme položit $\hat{\lambda}_0 = 1$.

[7] Pro důkaz a podrobnosti srvn. [Alexejev *et al.*, 1991] s. 46.

Vzhledem ke konvexnosti funkcí f_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ a kladnosti Lagrangeových multiplikátorů lze podmínku a) nahradit podmínkou

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\lambda}_0, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0.$$

Připomeňme, že podmnožina $\mathbb{C}$ lineárního prostoru slove konvexní, jestliže s každými svými dvěma body $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ obsahuje také celou úsečku

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}, \quad 0 \le \alpha \le 1\}.$$

Věta 2.13 (O Lagrangeových multiplikátorech pro hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi)
[8]*Nechť* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *realizuje lokální minimum úlohy*

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \min, \qquad f_i(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.8}$$

kde symbol $f_i(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr 0$ *znamená, že* i*-té omezení má tvar buď* $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ *nebo* $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$ *či* $f_i(\boldsymbol{x}) \ge 0$. *Nechť dále* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor,* $\mathbb{U}$ *otevřená množina v* $\mathbb{X}$, $f_i : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ *jsou ostře diferencovatelné v bodě* $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Pak existují takové Lagrangeovy multiplikátory $\hat{\boldsymbol{\ell}} = (\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2, \ldots, \hat{\ell}_m) \in \mathbb{E}_m$, $\hat{\ell}_0 \in \mathbb{E}_1$ *(ne všechny rovny nule), že platí*

a) podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}, \ell_0) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i f_i(\boldsymbol{x})$$

vzhledem k $\boldsymbol{x}$

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\ell}}, \hat{\ell}_0) = \mathbf{0}$$

b) podmínka inverzní korespondence znamének: $\hat{\ell}_0 \ge 0$ *(jedná se o úlohu na minimum) a*

$$\hat{\ell}_i \gtreqless 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

c) podmínka komplementarity

$$\hat{\ell}_i f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Označení $\hat{\ell}_i \gtreqless 0$ *znamená, že je-li ve vztahu (2.8)* $f_i(\boldsymbol{x}) \ge 0$, *pak* $\hat{\ell}_i \le 0$, *je-li* $f_i(\boldsymbol{x}) \le 0$, *pak* $\hat{\ell}_i \ge 0$ *a konečně je-li* $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$, *pak* $\hat{\ell}_i$ *může nabývat libovolného znaménka.*

Věta 2.14 (Postačující podmínka extrému pro hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi)
[9]*Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor,* $\mathbb{U}$ *otevřená množina v* $\mathbb{X}$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{U}$. *Nechť funkce* $f_i : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_1 \quad (i = 0, 1, \ldots, m)$ *a* $F_j : \mathbb{U} \to \mathbb{E}_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ *mají v přípustném bodě* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *úlohy*

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \inf \mid F_j(\boldsymbol{x}) = 0, f_i \le 0$$

druhou derivaci. Utvořme množinu indexů

$$\mathbb{J} \stackrel{\Delta}{=} \{i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0\}.$$

(Neaktivní nerovnosti nemají na řešení vázaného extrému vliv.)

Nechť existují Lagrangeovy multiplikátory $\hat{\boldsymbol{\ell}} \in \mathbb{E}_m$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{E}_n$ *a číslo* $\alpha > 0$ *tak, že*

---

[8]Srvn. [ALEXEJEV *et al.*, 1991] s. 214.

[9]Viz [ALEXEJEV *et al.*, 1991] s. 248.

a)

$$\ell_i > 0 \quad (i \in \mathbb{J}), \quad \ell_0 = 1,$$

b)

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\ell}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = f_{0,\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i \in \mathbb{J}} \hat{\ell}_i f_{i,\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j F_{j,\boldsymbol{x}} = \mathbf{0},$$

c)

$$\boldsymbol{h}^T \mathcal{L}_{\boldsymbol{xx}} \boldsymbol{h} \geq 2\alpha \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{h}$$

pro libovolné $\boldsymbol{h}$ *z prostoru*

$$\mathbb{H} = \{\boldsymbol{h} \mid f_{i,\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad (i \in \boldsymbol{J}), \quad F_{j,\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\} .$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ *realizuje lokální minimum v dané úloze.*

Výpočetní metody matematického programování založené na vyhledávání sedlového bodu příslušné Lagrangeovy funkce se nazývají *nepřímé.*

Kapitola 3

Úlohy s příznačnou strukturou

3.1 Lineární programování

3.1.1 Formulace obecné úlohy lineárního programování

Nechť $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ a $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ jsou z množiny reálných čísel $\mathbb{E}_1$ a m, n z množiny přirozených čísel $\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$ a

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

daná číselná matice.

Uvažujme v $\mathbb{E}_n$ množinu $\mathbb{M}$ všech bodů

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

které vyhovují systému rovnic a nerovnic (lineárním vazbám)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \qquad (j \in \mathbb{I}) \quad (\mathbb{I} \subset \{1, 2, \ldots, m\}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, m\} \smallsetminus \mathbb{I}),$$

tj.

$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \ (j \in \mathbb{I}), \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \ (j \in \{1, 2, \ldots, m\} \smallsetminus \mathbb{I}) \right\}. \tag{3.1}$$

Úlohou je najít v množině $\mathbb{M}$ alespoň jeden bod $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, pro který nabývá (daná) lineární funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{3.2}$$

extrémní hodnoty na $\mathbb{M}$. Tuto úlohu je možné zapsat ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i. \tag{3.3}$$

Zopakujme, že funkci $f(\boldsymbol{x})$ nazýváme *cílovou funkcí*, množinu $\mathbb{M}$ *množinou přípustných bodů* (restrikční množinou) a úlohu

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

respektive

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

lineární optimalizační úlohou. Všechna $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{M}$, pro která

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = f(\hat{\boldsymbol{x}}),$$

nazveme *řešením* či *optimálním bodem* dané lineární optimalizační (maximalizační) úlohy.

3.1.2 Lineární optimalizační úloha v normálním tvaru

Budiž dán optimamizační problém (3.3) s polyedrem (tj. průnikem nadrovin a poloprostorů v $\mathbb{E}_n$) $\mathbb{M}$ jeho přípustných bodů – dle (3.1) – a nechť se v (3.1) vyskytuje alespoň jedna rovnice. Potom v případě, že soustava rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \qquad (j \in \mathbb{I}) \quad (\mathbb{I} \subset \{1, 2, \ldots, m\}) \tag{3.4}$$

nemá řešení, je $\mathbb{M} = \emptyset$ a daný optimalizační problém je neřešitelný.

Je-li soustava (3.4) řešitelná, pak má určitou hodnost s, kde $1 \leq s \leq n$. Je-li $s = n$, jde o triviální optimalizační problém, kdy množina $\mathbb{M}$ je buď jednobodová nebo prázdná. V případě $s < n$ lze ze soustavy (3.4) vyjádřit s proměnných jako lineární funkce zbylých $(n-s)$ proměnných. Předpokládejme, že jde o proměnné $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ a tedy

$$x_i = d_i + \sum_{l=1}^{n-s} d_{il} x_{s+l} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.5}$$

Dosazením do všech nerovností v (3.1) dostáváme lineární nerovnosti

$$\sum_{l=1}^{n-s} \tilde{a}_{jl} x_{s+l} \leq \tilde{b}_j \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \mathbb{I}). \tag{3.6}$$

Jestliže se některé z těchto nerovností redukují na tvar

$$0 \leq \tilde{b}_j$$

a je-li alespoň pro jedno takové j

$$\tilde{b}_j < 0,$$

znamená to, že $\mathbb{M} = \emptyset$ a daný optimalizační problém je neřešitelný. Jsou-li čísla $\tilde{b}_j$ v nerovnostech

$$0 \leq \tilde{b}_j$$

vesměs nezáporná, pak tyto nerovnosti vynecháme a označíme

$$\tilde{\mathbb{I}} = \left\{ j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \mathbb{I} \mid \sum_{l=1}^{n-s} |\tilde{a}_{jl}| > 0 \right\}$$

a dostaneme nerovnosti
$$\sum_{l=1}^{n-s} \tilde{a}_{jl} x_{s+l} \leq \tilde{b}_j \qquad (j \in \tilde{\mathbb{I}}). \tag{3.7}$$
Protože každé z čísel x_{s+l} můžeme psát jako rozdíl dvou nezáporných čísel
$$x_{s+l} = x^+_{s+l} - x^-_{s+l}, \quad x^+_{s+l} \geq 0, \quad x^-_{s+l} \geq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-s), \tag{3.8}$$
dosazením do (3.7) dostáváme
$$\sum_{l=1}^{n-s} \tilde{a}_{jl} x^+_{s+l} + \sum_{l=1}^{n-s} (-\tilde{a}_{jl}) x^-_{s+l} \leq \tilde{b}_j \qquad (j \in \tilde{\mathbb{I}}), \tag{3.9}$$
$$x^+_{s+l} \geq 0, \quad x^-_{s+l} \geq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-s).$$
Dosadíme-li z (3.5) do cílové funkce (3.2), dostaneme určitou lineární funkci
$$f = \sum_{l=1}^{n-s} \tilde{c}_l x_{s+l}$$
a dle (3.8)
$$f = \sum_{l=1}^{n-s} \tilde{c}_l x^+_{s+l} + \sum_{l=1}^{n-s} (-\tilde{c}_l) x^-_{s+l} \tag{3.10}$$
v proměnných
$$x^+_{s+l} \geq 0, \quad x^-_{s+l} \geq 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-s).$$
V případě, že v popisu (3.1) množiny $\mathbb{M}$ se nevyskytují rovnice, omezíme se pouze na substituci (3.8), kde $s = 0$ a dosadíme jak do všech nerovností v $\mathbb{M}$, tak do cílové funkce (3.2).

Tímto způsobem je možno převést obecnou úlohu lineárního programování na ekvivalentní optimalizační úlohu s cílovou funkcí (3.10) a s restrikční množinou s popisem (3.9) (tzn. optimalizační úloha v normálním tvaru), či se během postupu ukáže neřešitelnost původního problému.

Definice 3.1 (Lineární optimalizační úloha v normálním tvaru) *Lineární optimalizační úloha s množinou přípustných bodů*
$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j \ (j = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$
se nazývá lineární optimalizační úloha v normálním tvaru.

3.1.3 Lineární optimalizační úloha v rovnicovém tvaru

Uvažujme obecný lineární optimalizační problém (3.3), tedy úlohu maximalizační s popisem (3.1) restrikční množiny $\mathbb{M}$. V případě, že se vyskytuje v (3.1) alespoň jedna nerovnost, zavedeme další proměnné
$$\xi_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, m\} \smallsetminus \mathbb{I}), \tag{3.11}$$
na které vzhledem k nerovnosti (3.1) klademe podmínku
$$\xi_j \geq 0 \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, m\} \smallsetminus \mathbb{I}).$$

Optimalizační problém s původní cílovou funkcí

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s restrukční množinou danou popisem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \quad (j \in \mathbb{I}), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + \xi_j = b_j \quad (j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \mathbb{I}) \tag{3.12}$$

a s podmínkou

$$\xi_j \geq 0 \qquad (j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \mathbb{I})$$

je ekvivalentní s původním optimalizačním problémem. Položme dále v (3.12)

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0 \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

čímž dojdeme opět k ekvivalentnímu optimalizačnímu problému s proměnnými

$$x_i^+, x_i^- \quad (1, 2, \dots, n), \qquad \xi_j \quad (j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \mathbb{I})$$

vystupujícími v lineární cílové funkci (v níž u proměnných ξ_j jsou nulové koeficienty) a v restrikční množině (3.12).

Definice 3.2 (Doplňkové proměnné) *Veličiny*

$$\xi_j \qquad (j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \mathbb{I})$$

definované vztahem (3.11) nazýváme doplňkovými proměnnými.

3.1.4 Rozklad konvexního polyedru na jeho vnitřek a stěny

Libovolný konvexní polyedr $\mathbb{M}$ je jakožto neprázdný průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů a nadrovin v $\mathbb{E}_n$ uzavřenou konvexní množinou v $\mathbb{E}_n$, tj. platí jednak

$$\bar{\mathbb{M}} = \mathbb{M},$$

jednak pro každý prvek $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$ a každý prvek $\boldsymbol{y} \in \mathbb{M}$ a každou dvojici čísel (α_1, α_2) splňující podmínky

$$\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{x} + \alpha_2 \boldsymbol{y} \in \mathbb{M}.$$

V tomto smyslu je též každá lineární varieta (přímka, rovina, nadrovina) v $\mathbb{E}_n$ (i bod, i $\mathbb{E}_n$ sám) konvexním polyedrem v $\mathbb{E}_n$. Konvexní polyedr $\mathbb{M}$ v $\mathbb{E}_n$ má dimenzi d (píšeme $d = \dim \mathbb{M}$), jestliže lineární varieta nejmenší dimenze (nazývá se též lineárním obalem tohoto polyedru) obsahující tento polyedr má dimenzi d. Nechť $\mathbb{M}$ je konvexní polyedr v $\mathbb{E}_n$ dimenze d $(1 \leq d \leq n)$ a $\mathbb{L}_d$ jeho lineární obal. Bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$, ve kterém existuje $\varepsilon > 0$ takové, že ε-okolí bodu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}_d$, čímž se rozumí množina

$$\mathbb{U}_d(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{L}_d \mid \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\}$$

patří do $\mathbb{M}$, nazveme vnitřkem polyedru $\mathbb{M}$ (označení $\operatorname{rel\,int} \mathbb{M}$, v případě $d = n$ též $\operatorname{int} \mathbb{M}$). Je-li konvexní polyedr jednobodovou množinou, tj. $\mathbb{M} = \{\boldsymbol{x}_0\}$, definujeme

$$\operatorname{rel\,int} \mathbb{M} = \{\boldsymbol{x}_0\}.$$

Hranice konvexního polyedru je množina

$$\partial\mathbb{M} = \mathbb{M} \setminus \operatorname{rel\,int} \mathbb{M}.$$

Nechť $\mathbb{M}$ je konvexní polyedr v $\mathbb{E}_n$, který není lineární varietou, pak jej lze popsat jako průnik lineární variety a konečného počtu uzavřených poloprostorů $\bar{\mathbb{H}}_1, \bar{\mathbb{H}}_2, \ldots, \bar{\mathbb{H}}_p$ tedy jako

$$\mathbb{M} = \mathbb{L} \cap \bar{\mathbb{H}}_1 \cap \bar{\mathbb{H}}_2 \cap \ldots \cap \bar{\mathbb{H}}_p. \tag{3.13}$$

Platí

$$\operatorname{rel\,int} \mathbb{M} = \mathbb{L} \cap \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{H}_p$$

a

$$\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{L}.$$

Jelikož

$$\bar{\mathbb{H}}_i = \mathbb{H}_i \cup \mathbb{R}_i,$$

kde $\mathbb{R}_i$ je hraniční nadrovina poloprostoru $\mathbb{H}_i$, plyne z (3.13)

$$\mathbb{M} = \mathbb{L} \cap (\mathbb{H}_1 \cup \mathbb{R}_1) \cap (\mathbb{H}_2 \cup \mathbb{R}_2) \cap \ldots \cap (\mathbb{H}_p \cup \mathbb{R}_p),$$

$$\mathbb{M} = (\mathbb{L} \cap \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{H}_p) \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^{p} S_p^\ell \right),$$

kde

$$S_p^\ell = \mathbb{L} \cap \mathbb{R}_{i_1} \cap \mathbb{R}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathbb{R}_{i_\ell} \cap \mathbb{H}_{i_{\ell+1}} \cap \mathbb{H}_{i_{\ell+2}} \cap \ldots \cap \mathbb{H}_{i_p} \qquad (1 \le \ell \le p)$$

přičemž

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_\ell, i_{\ell+1}, \ldots, i_p\}$$

je nějaká permutace p-tice $(1, 2, \ldots, p)$ s vlastností

$$i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_\ell, \qquad i_{\ell+1} \le i_{\ell+2} \le \ldots \le i_p.$$

Můžeme tedy psát

$$\mathbb{M} = \operatorname{rel\,int} \mathbb{M} \cup \left(\bigcup_{\ell=1}^{p} S_p^\ell \right). \tag{3.14}$$

Každou z neprázdných množin S_p^ℓ nazýváme *stěnou konvexního polyedru* $\mathbb{M}$ a výraz (3.14) rozkladem konvexního polyedru $\mathbb{M}$ na jeho vnitřek a stěny. Uzávěr $\bar{S}_p^\ell$ stěny S_p^ℓ se nazývá uzavřenou stěnou. Uzavřená stěna konvexního polyedru je, vzhledem k tomu, že $\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{L}$, rovněž konvexním polyedrem, přičemž

$$\bar{S}_p^\ell \subset \partial\mathbb{M}$$

a

$$\dim \bar{S}_p^\ell < \dim \mathbb{M}\,.$$

Stěna dimenze nula se nazývá vrchol konvexního polyedru, stěna dimenze jedna se nazývá hrana konvexního polyedru. Dvě lineární variety $\mathbb{L}_d^i$ $(i = 1, 2)$ v $\mathbb{E}_n$ s dimenzí

$$d_i = \dim \mathbb{L}_d^i \qquad (1 \le d_i \le n - 1) \quad (i = 1, 2)$$

se nazývají rovnoběžné v $\mathbb{E}_n$, platí-li

$$\mathbb{L}_d^1 \cap \mathbb{L}_d^2 = \emptyset, \quad \left(\mathbb{L}_d^1 \cup \mathbb{L}_d^2\right) \subset \mathbb{L}_d,$$

kde

$$d = \max(d_1, d_2) + 1.$$

O konvexních polyedrech obecně platí: Je-li $\mathbb{M}$ konvexní polyedr v $\mathbb{E}_n$ obsahující lineární varietu $\mathbb{L}_d$ dimenze d, kde $(1 \leq d \leq n-1)$, potom každá lineární varieta téže dimenze d jdoucí libovolným bodem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$ a rovnoběžná s $\mathbb{L}_d$ patří k polyedru $\mathbb{M}$. Ze skutečnosti, že první oktant v $\mathbb{E}_n$, tj. množina

$$\mathbb{E}_n^+ \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\},$$

neobsahuje žádnou lineární varietu prostoru $\mathbb{E}_n$ dimenze větší či rovnou 1, plyne důsledek (pro představu je vhodný prostor $\mathbb{E}_3$): Je-li restrikční množina $\mathbb{M}$ lineární optimalizační úlohy v rovnicovém tvaru neprázdná, potom $\mathbb{M}$ je konvexní polyedr v $\mathbb{E}_n$ obsahující vrcholy (tj. alespoň jeden).

3.1.5 Množina optimálních bodů lineární optimalizační úlohy

Označme symbolem $\hat{\mathbb{M}}$ množinu všech optimálních bodů shora uvažovaného problému, tedy

$$\hat{\mathbb{M}} = \left\{ \hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{M} \mid f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} f(\boldsymbol{x}) \right\}.$$

Je-li $\hat{\mathbb{M}} \neq \emptyset$, říkáme, že daný problém je řešitelný. Je-li $\hat{\mathbb{M}} = \emptyset$, tj. $\mathbb{M} = \emptyset$ či $\mathbb{M} \neq \emptyset$, ale $f(\boldsymbol{x})$ nenabývá svého minima na $\mathbb{M}$, hovoříme o neřešitelnosti daného problému.

Věta 3.3 (O množině všech optimálních bodů lineární optimalizační úlohy) *Je-li (obecný) lineární optimalizační problém řešitelný, potom* $\hat{\mathbb{M}}$ *je buď uzavřená stěna příslušného konvexního polyedru* $\mathbb{M}$ *nebo celý tento polyedr.*

Případ $\hat{\mathbb{M}} = \mathbb{M}$ nastává, je-li $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nebo existuji-li nějaký bod $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{M}$ tak, že nadrovina

$$\mathbb{R}_0 \equiv \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n c_i x_{0i} \right\}$$

obsahuje celý polyedr $\mathbb{M}$.

Věta 3.4 (Stěna obsažená v množině všech optimálních bodů lineární optimalizační úlohy) *Je-li (obecný) lineární optimalizační problém řešitelný a obsahuje-li* $\mathbb{M}$ *alespoň jednu stěnu dimenze d a žádnou stěnu dimenze menší než d, pak existuje taková d-rozměrná stěna S_d, že*

$$\bar{S}_d \subset \hat{\mathbb{M}}.$$

Věta 3.5 (Vrchol příslušného konvexního polyedru řešící lineární optimalizační úlohu) *Je-li lineární optimalizační úloha v rovnicovém tvaru řešitelná, potom existuje vrchol příslušného konvexního polyedru* $\mathbb{M}$*, který je optimálním bodem uvažovaného optimalizačního problému.*

3.1.6 Přípustný bázický bod

Uvažujme lineární optimalizační úlohu v rovnicovém tvaru, tj. lineární optimalizační úlohu s restrikční množinou $\mathbb{M}$

$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

a předpokládejme

a)
$$m < n$$

b) matice
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
má maximální možnou hodnost (tj. m).

Je-li $\mathbb{M} \neq \emptyset$, pak z předpokladů a) a b) vyplývá, že množina
$$\mathbb{L}_{n-m} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \right\}$$
je též neprázdná a představuje $(n - m)$ rozměrnou lineární varietu v $\mathbb{E}_n$. V případě $\mathbb{M} \neq \emptyset$ je tedy $\mathbb{M}$ konvexní polyedr v $\mathbb{E}_n$, který je průnikem lineární variety $\mathbb{L}_{n-m}$ s prvním oktantem
$$\mathbb{E}_n^+ \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$
prostoru $\mathbb{E}_n$, přičemž je
$$0 \leq \dim \mathbb{M} \leq n - m.$$
Vzhledem k tomu, že hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je m, existuje alespoň jeden determinant stupně m matice $\boldsymbol{A}$, který je nenulový. Nechť je
$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & a_{m_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$
kde $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ je určitá m-prvková podmnožina indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Potom ze systému rovnic
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.15}$$
lze vyjádřit proměnné $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ jako funkce zbývajících $n-m$ proměnných $(x_{i_{m+1}}, x_{i_{i+2}}, \ldots, x_{i_n})$ ve formě
$$x_{i_s} = d_{i_s} - \sum_{l=m+1}^{n} d_{i_s i_l} x_{i_l} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.16}$$
Zvolíme-li $x_{i_l} = 0$ $(l = m + 1, m + 2, \ldots, n)$, je dle (3.16)
$$x_{i_s} = d_{i_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$
takže bod $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{E}_n$ o souřadnicích
$$\tilde{x}_{i_s} = d_{i_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, m), \qquad \tilde{x}_{i_l} = 0 \quad (l = m + 1, m + 2, \ldots, n) \tag{3.17}$$
splňuje rovnice (3.15) a je tedy bodem lineární variety $\mathbb{L}_{n-m}$. Obráceně, položíme-li v systému rovnic (3.15) $n - m$ proměnných x_{i_l} $(l = m + 1, m + 2, \ldots, n)$ z celkového počtu n proměnných x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rovny nule, přejde systém rovnic (3.15) v systém m lineárních rovnic
$$\sum_{s=1}^{m} a_{ji_s} x_{i_s} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.18}$$

Má-li tento systém právě jedno řešení $x_{i_s} = d_{i_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$, potom bod $\boldsymbol{x}$ o souřadnicích (3.17) je jednoznačně určeným bodem variety $\mathbb{L}_{n-m}$. Tímto způsobem lze získat speciální body lineární variety $\mathbb{L}_{n-m}$, jejichž charakteristika je uvedena dále.

Definice 3.6 (Bázické řešení) *Nechť $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ je bod vyhovující za předpokladů a), b), systému rovnic (3.15) z popisu množiny $\mathbb{M}$ a splňující tyto podmínky:*

1. *Množina*
$$\mathbb{I}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \tilde{x}_i = 0\}$$
obsahuje alespoň $n - m$ prvků.

2. *Z množiny $\mathbb{I}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ lze vybrat takovou její podmnožinu $\{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n\}$ o $n - m$ prvcích, že při označení*
$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n\}$$
její doplňkové množiny má systém rovnic (3.18) jediné řešení a to
$$\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}, \ldots, \tilde{x}_{i_m}.$$

Potom nazýváme bod $\tilde{\boldsymbol{x}}$ bázickým řešením rovnic (3.15), proměnné
$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$$
bázickými proměnnými a proměnné
$$x_{i_{m+1}}, x_{i_{m+2}}, \ldots, x_{i_n}$$
nebázickými proměnnými příslušnými bázickému řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definice 3.7 (Regulární a degenerované bázické řešení) *Je-li $\tilde{\boldsymbol{x}}$ takovým bázickým řešením rovnic (3.15), že bod $\tilde{\boldsymbol{x}}$ má více než $n - m$ nulových souřadnic, potom říkáme, že $\tilde{\boldsymbol{x}}$ je degenerované bázické řešení rovnic (3.15). Má-li bod $\tilde{\boldsymbol{x}}$ právě $n - m$ nulových souřadnic, pak mluvíme o nedegenerovaném (regulárním) bázickém řešení rovnic (3.15).*

Definice 3.8 (Přípustný bázický bod) *Bázické řešení $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ systému rovnic (3.15) s vlastností*
$$\tilde{x}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
tedy $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{M}$, se nazývá přípustný bázický bod uvažované optimalizační úlohy. Má-li přípustný bázický bod více než $n - m$ nulových souřadnic, pak říkáme, že jde o degeneraci v tomto bodě. Má-li právě $n - m$ nulových souřadnic, pak jej nazýváme regulárním.

Věta 3.9 (Vrchol polyedru) *Každý přípustný bázický bod uvažované lineární optimalizační úlohy je vrcholem polyedru $\mathbb{M}$. Každý vrchol polyedru $\mathbb{M}$ je přípustným bázickým bodem uvažované lineární optimalizační úlohy, kterému přísluší buď jediná indexová báze (nejde-li o degeneraci), nebo více než jedna z indexových bází (v případě degenerace).*

3.1.7 Výměna bázických proměnných; kritérium optimality; případ degenerace.

K přípravě algoritmu pro řešení lineární optimalizační úlohy v rovnicovém tvaru za předpokladu a) a b) je třeba předřadit důsledný popis postupu v jednotlivých krocích. Nechť $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ je známý přípustný bázický bod dané lineární optimalizační úlohy s restrikční množinou $\mathbb{M}$, který odpovídá bázickému řešení systému rovnic (3.15) s indexovou bází bázických proměnných $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Lze předpokládat, že

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} = \{1, 2, \ldots, m\},$$

což lze vhodným přečíslováním splnit. Potom rovnice (3.16) mají tvar

$$x_i = d_{i0} - \sum_{j=m+1}^{n} d_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.19}$$

kde je

$$d_{i0} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dosazením z (3.19) do cílové funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

dostaneme

$$f(\boldsymbol{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - z_i) x_i, \tag{3.20}$$

kde je

$$c_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i d_{i0},$$

$$z_l = \sum_{i=1}^{m} c_i d_{il} \qquad (l = m+1, m+2, \ldots, n), \tag{3.21}$$

$$z_l = c_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

příslušná data lze zapsat do tabulky 3.1.

		x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_s	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$d_{1(m+1)}$	$\cdots$	d_{1s}	$\cdots$	d_{1n}	d_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_i	x_i	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$d_{i(m+1)}$	$\cdots$	d_{is}	$\cdots$	d_{in}	d_{i0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$d_{m(m+1)}$	$\cdots$	d_{ms}	$\cdots$	d_{mn}	d_{m0}
		z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	z_{m+1}	$\cdots$	z_s	$\cdots$	z_n	c_0
		$c_1 - z_1$	$\cdots$	$c_i - z_i$	$\cdots$	$c_m - z_m$	$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\cdots$	$c_s - z_s$	$\cdots$	$c_n - z_n$	

Tabulka 3.1: Operační matice

Skalární součin řádkového vektoru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s řádkovým vektorem v i-tém řádku matice operační dává dle (3.19) číslo d_{i0}. Skalární součin sloupcového vektoru $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ na levé straně tabulky s i-tým sloupcovým vektorem v operační matici je číslo z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Číslo c_0 je skalárním součinem sloupcového vektoru $(c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ se sloupcovým vektorem $(d_{10}, d_{20}, \ldots, d_{m0})^T$ a představuje hodnotu cílové funkce v bodě $\boldsymbol{x}_0$.

Následující věta 3.10 dává kritérium pro optimalitu bodu $\boldsymbol{x}_0$; věta 3.11 pak dává kritérium pro neexistenci řešení optimalizačního problému

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{3.22}$$

respektive

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

Věta 3.10 (Kritérium optimality v úloze lineárního programování) *Je-li (v případě minimalizační úlohy)*

$$c_i - z_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

respektive (v případě maximalizační úlohy)

$$c_i - z_i \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

potom je přípustný bázický bod $\boldsymbol{x}_0$ optimálním bodem minimalizačního (respektive maximalizačního) problému (3.22).

Věta 3.11 (Neexistence optimálního řešení v úloze lineárního programování) *Existuje-li v případě minimalizační úlohy (3.22) (resp. následné maximalizační úlohy) takový index $j_0 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, že platí*

$$c_{j_0} - z_{j_0} < 0 \quad \wedge \quad d_{ij_0} \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

(respektive

$$c_{j_0} - z_{j_0} > 0 \quad \wedge \quad d_{ij_0} \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

v případě maximalizační úlohy) potom je cílová funkce zdola neomezená (resp. shora neomezená) na množině $\mathbb{M}$ a daná úloha nemá řešení.

Nenastává-li žádný z případů z vět 3.10 a 3.11, potom v případě minimalizační úlohy (3.22) (resp. maximalizační úlohy) je množina

$$\mathbb{I}_1 = \{j \in \{m+1, m+2, \ldots, n\} \mid c_j - z_j < 0\}$$

resp.

$$\mathbb{I}_2 = \{j \in \{m+1, m+2, \ldots, n\} \mid c_j - z_j > 0\}$$

neprázdná a ke každému indexu $j \in \mathbb{I}_1$ (resp. $j \in \mathbb{I}_2$) existuje index $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ s vlastností

$$d_{i_j j} > 0;$$

to znamená, že v posledním řádku tab. 3.1 – v tzn. charakteristickém řádku – je alespoň jeden element $c_j - z_j$ záporný (resp. kladný) a ve sloupci operační matice nad každým takovýmto elementem existuje aspoň jedno kladné číslo. Proces, kterým pak přejdeme od původního přípustného bazického bodu $\boldsymbol{x}_0$ s indexovou bází

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} = \{1, 2, \ldots, m\}$$

k přípustnému bázickému bodu s bází lišící se od báze $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ v jediném indexu, se nazývá výměna indexové báze a představuje vlastní krok algoritmu, který je popsán dále.

3.1.8 Výměna indexové báze

Vyjdeme od přípustného bázického bodu odpovídajícího výchozímu, shora uvažovanému vrcholu $\boldsymbol{x}_0$ konvexního polyedru $\mathbb{M}$ a příslušného tabelárního záznamu údajů ze vztahů (3.19), (3.20) a (3.21), tj z tab. 3.1. Za předpokladu, že vrchol $\boldsymbol{x}_0$ není optimálním bodem uvažovaného lineárního optimalizačního problému, existují indexy k a s, kde

$$1 \leq k \leq m, \qquad m+1 \leq s \leq n,$$

takové, že je

$$d_{ks} \neq 0.$$

Pak můžeme k-tou rovnici v (3.19) rozřešit dle proměnné x_s

$$x_s = \frac{1}{d_{ks}} \left(d_{k0} - \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^{n} d_{kj} x_j - x_k \right)$$

a dosazením do zbývajících rovnic v (3.19)

$$x_i = d_{i0} - \frac{d_{is} d_{k0}}{d_{ks}} - \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^{n} \left(d_{ij} - \frac{d_{is} d_{kj}}{d_{ks}} \right) x_j + \frac{d_{is}}{d_{ks}} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k).$$

Dosazením do cílové funkce (3.20) s významem (3.21) v ní vystupujících elementů, pak

$$f = c_0 + (c_s - z_s) \frac{d_{k0}}{d_{ks}} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^{n} \left((c_j - z_j) - (c_s - z_s) \frac{d_{kj}}{d_{ks}} \right) x_j - \frac{c_s - z_s}{d_{ks}} x_k.$$

Píšeme-li takto získané rovnice stručně ve tvaru

$$x_s + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^{n} \tilde{d}_{sj} x_j + \tilde{d}_{sk} x_k = \tilde{d}_{s0},$$

$$x_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq s}}^{n} \tilde{d}_{ij} x_j + \tilde{d}_{ik} x_k = \tilde{d}_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k),$$

$$f = \tilde{c}_0 + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \tilde{z}_j) x_j,$$

pak porovnáním koeficientů dostaneme

$$\tilde{d}_{s0} = \frac{d_{k0}}{d_{ks}}, \tag{3.23}$$

$$\tilde{d}_{sj} = \frac{d_{kj}}{d_{ks}} \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n)\ (j \neq s), \tag{3.24}$$

$$\tilde{d}_{sk} = \frac{1}{d_{ks}}, \tag{3.25}$$

$$\tilde{d}_{i0} = d_{i0} - \frac{d_{is} d_{k0}}{d_{ks}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k), \tag{3.26}$$

$$\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{is} d_{kj}}{d_{ks}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k) \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n)\ (j \neq s), \tag{3.27}$$

$$\tilde{d}_{ik} = -\frac{d_{is}}{d_{ks}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k), \tag{3.28}$$

$$\tilde{z}_j = z_j + (c_s - z_s)\tilde{d}_{sj} \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n)\ (j \neq s), \tag{3.29}$$

$$\tilde{z}_k = z_k + (c_s - z_s)\tilde{d}_{sk}, \tag{3.30}$$

$$\tilde{c}_0 = c_0 + (c_s - z_s)\tilde{d}_{s0}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{z}_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k), \tag{3.32}$$

$$\tilde{z}_s = c_s. \tag{3.33}$$

Odtud dále

$$c_j - \tilde{z}_j = (c_j - z_j) - (c_s - z_s)\tilde{d}_{sj} \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n)\ (j \neq s), \tag{3.34}$$

$$c_k - \tilde{z}_k = -(c_s - z_s)\tilde{d}_{sk}, \tag{3.35}$$

$$c_i - \tilde{z}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)\ (i \neq k), \tag{3.36}$$

$$c_s - \tilde{z}_s = 0, \tag{3.37}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} c_i\tilde{d}_{ij} + c_s\tilde{d}_{sj} = \tilde{z}_j \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n)\ (j \neq s), \tag{3.38}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} c_i\tilde{d}_{ik} + c_s\tilde{d}_{sk} = \tilde{z}_k, \tag{3.39}$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} c_i\tilde{d}_{i0} + c_s\tilde{d}_{s0} = \tilde{c}_0. \tag{3.40}$$

Právě popsaná eliminace spolu s příslušnými transformačními zákony (3.23)—(3.40) představují přechod od přípustného bázického bodu k novému bázickému řešení rovnic (3.15), které však obecně nepředstavuje přípustný bázický bod dané optimalizační úlohy, přičemž systémy bázických proměnných původního a nového bázického řešení se liší právě v jediné proměnné. Transformační vztahy (3.23)—(3.40) popisují výpočty potřebné v postupných krocích zamýšleného algoritmu. Za pomoci tab. 3.1 lze tyto operace snadno mechanicky provádět. Za účelem takovéto tabelační transformace vyjdeme z tab. 3.2, v níž zarámujeme shora uvažovaný nenulový element d_{ks} – říkáme mu klíčový (či centrální) element – jenž je elementem k-tého řádku – tzv. klíčového řádku – a elementem s-tého sloupce – tzv. klíčového sloupce – operační matice. Poslední řádek shora zmíněné tabulky obsahující elementy $c_j - z_j$ $(j = 1, 2, \ldots, , n)$ se nazývá charakteristický řádek a je směrodatný pro rozhodování o tom, zda odpovídající přípustný bázický bod (v uvažovaném případě tedy vrchol $\boldsymbol{x}_0$ polyedru $\mathbb{M}$) je optimálním bodem daného lineárního optimalizačního problému.

Od tabulky 3.2 přejdeme k tabulce 3.3 následujícím krokovým postupem.

1. Proměnnou x_k zaměníme za proměnnou x_s v druhém sloupci tab. 3.2. Číslo c_k za číslo c_s v prvním sloupci tab. 3.2.

2. Všechny elementy klíčového řádku v operační matici i poslední element d_{k0} tohoto řádku dělíme klíčovým elementem d_{ks}.

3. Na místa všech elementů klíčového sloupce až na klíčový element d_{ks} vepíšeme nuly.

		x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_s	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$d_{1(m+1)}$	$\cdots$	d_{1s}	$\cdots$	d_{1n}	d_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_k	x_k	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$d_{k(m+1)}$	$\cdots$	$\boxed{d_{ks}}$	$\cdots$	d_{kn}	d_{k0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$d_{m(m+1)}$	$\cdots$	d_{ms}	$\cdots$	d_{mn}	d_{m0}
		z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	z_{m+1}	$\cdots$	z_s	$\cdots$	z_n	c_0
		$c_1 - z_1$	$\cdots$	$c_i - z_i$	$\cdots$	$c_m - z_m$	$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\cdots$	$c_s - z_s$	$\cdots$	$c_n - z_n$	

Tabulka 3.2: Operační matice s klíčovým elementem d_{ks}

4. Všechny elementy operační matice v tab. 3.3, které nejsou ani elementy k-tého řádku, ani s-tého sloupce, vypočteme na základě tzv. křížového pravidla. Máme-li například vypočítat element $\tilde{d}_{ij}$ z tab. 3.3, kde na stejném místě v tab. 3.2 je element d_{ij} $(i \neq k, i \neq s)$ uvažujeme v tab. 3.2 čtveřici

$$\begin{array}{ccccc} d_{ij} & \cdots & d_{is} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ d_{kj} & \cdots & d_{ks} & \leftarrow & \text{klíčový řádek} \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{klíčový sloupec} & & \end{array}$$

   a součin elementů d_{kj} a d_{is} dělený klíčovým elementem d_{ks} odečteme od původního elementu d_{ij}

$$\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{kj} d_{is}}{d_{ks}}.$$

   Zcela analogicky i pro elementy posledního sloupce až na element z klíčového řádku $\tilde{d}_{s0}$, kde jsme již shora zapsali $\tilde{d}_{k0}$.

5. Element $\tilde{z}_j$ obdržíme jako skalární součin prvního sloupce v tab. 3.3 a j-tého sloupce operační matice v tab. 3.3. Obdobně spočítáme c_0.

6. Element $c_j - \tilde{z}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ lze vypočítat dvěma způsoby, a to jednak jako rozdíl druhého a předposledního řádku v tab. 3.3, jednak křížovým pravidlem. Pro kontrolu je vhodné užít oba způsoby.

Při numerickém zpracování na počítači se ukládají vypočítané elementy do paměti počítače na týchž místech, a to v pořadí $(1, 4, 2, 3, 5, 6)$ příslušných úkonů.

Uvedenými výpočetními pravidly je popsán přechod od určitého bázického řešení k jinému bázickému řešení, tato bázická řešení představují buď dva různé body, nebo – v případě degenerace – též někdy jediný bod. Aby shora popsaný proces vedl k sestavení algoritmu pro výpočet optimálního bodu lineární optimalizační úlohy, je třeba v tabelárním záznamu přípustného bázického řešení v každém kroku algoritmu volit klíčový element tak, aby přechodem k novému bázickému řešení byl získán přípustný bázický bod s lepší nebo alespoň stejnou hodnotou cílové funkce. Této volby se týkají dvě následující věty vztahující se k údajům z tabulky 3.2 odpovídající výchozímu přípustnému bázickému bodu $\boldsymbol{x}_0$.

Věta 3.12 (3. věta lineárního programování) *Existuje-li indexová dvojice* $[k, s]$ $(1 \leq k \leq m, m + 1 \leq s \leq n)$ *s vlastností*

		x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_s	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	$\tilde{d}_{11}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{1k}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{1m}$	$\tilde{d}_{1(m+1)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\tilde{d}_{1n}$	$\tilde{d}_{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{k-1}	x_{k-1}	$\tilde{d}_{(k-1)1}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k-1)k}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k-1)m}$	$\tilde{d}_{(k-1)(m+1)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k-1)n}$	$\tilde{d}_{(k-1)0}$
c_s	x_s	$\tilde{d}_{s1}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{sk}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{sm}$	$\tilde{d}_{s(m+1)}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\tilde{d}_{sn}$	$\tilde{d}_{s0}$
c_{k+1}	x_{k+1}	$\tilde{d}_{(k+1)1}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k+1)k}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k+1)m}$	$\tilde{d}_{(k+1)(m+1)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\tilde{d}_{(k+1)n}$	$\tilde{d}_{(k+1)0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	$\tilde{d}_{m1}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{mk}$	$\cdots$	$\tilde{d}_{mm}$	$\tilde{d}_{m(m+1)}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\tilde{d}_{mn}$	$\tilde{d}_{m0}$
		$\tilde{z}_1$	$\cdots$	$\tilde{z}_k$	$\cdots$	$\tilde{z}_m$	$\tilde{z}_{m+1}$	$\cdots$	$\tilde{z}_s$	$\cdots$	$\tilde{z}_n$	$\tilde{c}_0$
		$c_1-\tilde{z}_1$	$\cdots$	$c_k-\tilde{z}_k$	$\cdots$	$c_m-\tilde{z}_m$	$c_{m+1}-\tilde{z}_{m+1}$	$\cdots$	$c_s-\tilde{z}_s$	$\cdots$	$c_n-\tilde{z}_n$	

Tabulka 3.3: Operační matice po přechodu k novému bázickému řešení

a)

$$c_s - z_s < 0 \qquad (\textit{resp. } c_s - z_s > 0),$$

b)

$$d_{k0} > 0, \qquad d_{ks} > 0,$$

$$\frac{d_{k0}}{d_{ks}} = \min_{i\in\tilde{\mathbb{I}}} \frac{d_{i0}}{d_{is}}, \qquad \tilde{\mathbb{I}} = \{i \in \{1,2,\ldots,m\} \mid d_{is} > 0\},$$

potom proměnné $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_s, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ *jsou bázickými proměnnými určitého přípustného bázického bodu* $\tilde{\boldsymbol{x}}$*, jemuž odpovídá tabelární záznam tabulky 3.3 a pro který platí*

$$f(\tilde{\boldsymbol{x}}) < f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \textit{resp. } f(\tilde{\boldsymbol{x}}) > f(\boldsymbol{x}_0).$$

Věta 3.13 (4. věta lineárního programování) *Existuje-li indexová dvojice* $[k,s]$ $(1 \le k \le m, m+1 \le s \le n)$ *s vlastností*

a)

$$c_s - z_s < 0 \qquad (\textit{resp. } c_s - z_s > 0),$$

b)

$$\frac{d_{k0}}{d_{ks}} = \min_{i\in\tilde{\mathbb{I}}} \frac{d_{i0}}{d_{is}} = 0, \qquad \tilde{\mathbb{I}} = \{i \in \{1,2,\ldots,m\} \mid d_{is} > 0\} \ne \emptyset,$$

potom platí (při označení z věty 3.12)

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0, \qquad f(\tilde{\boldsymbol{x}}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Věty 3.12 a 3.13 (3. a 4. věta lineárního programování) jsou užitečné tehdy, když nenastává žádný z případů vět 3.10 a 3.11. Věta 3.12 udává postup, jak lze vhodnou volbou křížového elementu přejít k přípustnému bázickému bodu s jinou indexovou bází s lepší hodnotou cílové funkce výměnou jediné bázické proměnné. Jsou-li splněny předpoklady věty 3.12, pak je tohoto cíle dosaženo. Jde-li však o případ z věty 3.13, pak se hodnota cílové funkce nezmění a nastávají určité potíže s vyhledáváním dalšího přípustného bázického bodu spojené – z geometrického hlediska – s problémem, jak dospět z výchozího vrcholu polyedru $\mathbb{M}$ k jeho sousednímu vrcholu, který dává lepší hodnotu cílové funkce. Avšak i v případě, kdy za platnosti předpokladů věty 3.12 není volba klíčového elementu dle předpisu

$$\frac{d_{k0}}{d_{ks}} = \min_{i\in\tilde{\mathbb{I}}} \frac{d_{i0}}{d_{is}}$$

jednoznačná, může po další výměně bázických proměnných nastat pro příslušný bázický bod případ z věty 3.13. Případ z věty 3.13 nastává tehdy, jde-li o degenerované přípustné bázické řešení. Výskyt této degenerace souvisí se strukturou restrikční množiny $\mathbb{M}$ a existují metody, jak tento případ obejít. Jedna z možností spočívá v tom, že danému lineárnímu optimalizačnímu problému (3.22) přiřadíme jiný, takřečený ε-modifikovaný, lineární optimalizační problém s touž cílovou funkcí

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

avšak s restrikční množinou

$$\mathbb{M}(\varepsilon) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\varepsilon^i \ (j = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\},$$

kde ε je velmi malé kladné číslo z následující věty.

Věta 3.14 (O ε-modifikovaném optimalizačním problému) *Ke každému lineárnímu optimalizačnímu problému v rovnicovém tvaru, pro který jsou splněny předpoklady a), b) existuje číslo ε_0, kde $(0 < \varepsilon_0 < 1)$, tak, že pro každé $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ je každé přípustné bázické řešení přiřazeného ε-modifikovaného optimalizačního problému nedegenerované. Přitom původní a jemu přiřazený ε-modifikovaný optimalizační problém jsou buď současně řešitelné nebo současně neřešitelné. Je-li $\boldsymbol{x}_0(\varepsilon)$ optimálním bodem přiřazeného ε-modifikovaného problému, potom bod*

$$\boldsymbol{x}_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{x}_0(\varepsilon)$$

je optimálním bodem původního optimalizačního problému.

3.1.9 Simplexová metoda

Algoritmus navazující na slova řečená, který se nazývá *simplexová metoda v teorii lineárního programování*, odpovídá následující geometrické představě: Vyjde se od známého vrcholu $\boldsymbol{x}_0$ polyedru $\mathbb{M}$ a – pokud se nejedná o optimální bod úlohy lineárního programování – postupuje se po hranách polyedru $\mathbb{M}$ vždy od jednoho vrcholu k vrcholu sousednímu, a to tak dlouho, nedosáhne-li se vrcholu, který je optimálním bodem daného problému. Jelikož počet vrcholů polyedru $\mathbb{M}$ je konečný, je počet kroků algoritmu opírajícího se o uvedenou geometrickou ideu rovněž konečný. Uvažujme lineární optimalizační problém v rovnicovém tvaru, tedy úlohu určit minimum (resp. maximum) dané lineární funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

na množině

$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}, \tag{3.41}$$

tj. úlohu určit alespoň jeden bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{M}$ vedoucí k minimu (resp. maximu) funkce f na $\mathbb{M}$.

Předpoklady:

1. $$1 \leq m < n$$

2. hodnost matice $\boldsymbol{A} = \{a_{ji}\}_{j\lceil i}$ koeficientů systému rovnic z popisu (3.41) množiny $\mathbb{M}$ je m

3. bod $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ je známý přípustný bázický bod, jemuž přísluší systém bázických proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (čehož lze přečíslováním proměnných vždy docílit).

Přípravný bod algoritmu: Systém rovnic z (3.41) rozřešíme vzhledem k bázickým proměnným $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; tedy shora popsaným postupem vytvoříme tabulku 3.4 (simplexovou tabulku) příslušnou výchozímu přípustnému bázickému bodu $\boldsymbol{x}_0$.

		x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_i	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$d_{1(m+1)}$	$\cdots$	d_{1j}	$\cdots$	d_{1n}	d_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_i	x_i	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$d_{i(m+1)}$	$\cdots$	d_{ij}	$\cdots$	d_{in}	d_{i0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$d_{m(m+1)}$	$\cdots$	d_{mj}	$\cdots$	d_{mn}	d_{m0}
		z_1	$\cdots$	z_i	$\cdots$	z_m	z_{m+1}	$\cdots$	z_j	$\cdots$	z_n	c_0
		$c_1 - z_1$	$\cdots$	$c_i - z_i$	$\cdots$	$c_m - z_m$	$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\cdots$	$c_j - z_j$	$\cdots$	$c_n - z_n$	

Tabulka 3.4: Simplexová tabulka

Jsou-li splněny pro údaje z posledního (charakteristického) řádku tab. 3.4 předpoklady věty 3.10, je bod $\boldsymbol{x}_0$ optimálním bodem a algoritmus končí. V případě splnění předpokladů věty 3.11 je daná úloha neřešitelná a algoritmus rovněž končí. Nenastává-li žádný z těchto případů, následuje 1. krok algoritmu.

1. krok: V charakteristickém řádku (posledním řádku) tab. 3.4 – v němž je, dle shora uvedeného, $c_i - z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – zvolíme index j_0 s vlastností

$$c_{j_0} - z_{j_0} = \min_{l \in \{1,2,\ldots,n\}} (c_l - z_l), \qquad \text{resp. } c_{j_0} - z_{j_0} = \max_{l \in \{1,2,\ldots,n\}} (c_l - z_l). \tag{3.42}$$

V případě více než jednoho indexu s vlastností (3.42) zvolíme např. nejmenší z těchto indexů. Takovýto výběr je motivován snahou o určitou jednoznačnou volbu z množiny indexů j_0 s vlastností

$$c_{j_0} - z_{j_0} < 0, \qquad \text{resp. } c_{j_0} - z_{j_0} > 0,$$

teoretické odůvodnění nemá a pro vlastní algoritmus je nepodstatný (až právě na žádost jednoznačnosti). K jednoznačně zvolenému indexu j_0 s vlastností $c_{j_0} - z_{j_0} < 0$ (resp. $c_{j_0} - z_{j_0} > 0$) definujeme indexovou množinu

$$\mathbb{I}^0_{j_0} \equiv \left\{ l \in \mathbb{I}_{j_0} \mid \frac{d_{l0}}{d_{lj_0}} = \min_{i \in \mathbb{I}_{j_0}} \frac{d_{i0}}{d_{ij_0}} \right\}, \tag{3.43}$$

kde

$$\mathbb{I}_{j_0} \equiv \{ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid d_{ij_0} > 0 \}.$$

Obsahuje-li množina (3.43) právě jeden element i_0, potom zvolíme v tab. 3.4 element $d_{i_0j_0}$ za klíčový element, i_0-tý řádek za klíčový řádek a j_0-tý sloupec za klíčový sloupec (viz tab. 3.5). Obsahuje-li indexová množina $\mathbb{I}^0_{j_0}$ z (3.43) více nežli jeden index, pak zavedeme další indexovou množinu

$$\mathbb{I}^1_{j_0} \equiv \left\{ l \in \mathbb{I}^0_{j_0} \mid \frac{d_{l1}}{d_{lj_0}} = \min_{i \in \mathbb{I}^0_{j_0}} \frac{d_{i1}}{d_{ij_0}} \right\}.$$

Je-li i_0 jejím jediným prvkem, pak zvolíme číslo $d_{i_0j_0}$ za klíčový prvek, i_0-tý řádek za klíčový řádek a j_0-tý sloupec za klíčový sloupec. V případě, že i množina $\mathbb{I}^1_{j_0}$ obsahuje více nežli jeden index, zavedeme v pořadí další indexovou množinu dle obecného zápisu

$$\mathbb{I}^k_{j_0} \equiv \left\{ l \in \mathbb{I}^{k-1}_{j_0} \mid \frac{d_{lk}}{d_{lj_0}} = \min_{i \in \mathbb{I}^{k-1}_{j_0}} \frac{d_{ik}}{d_{ij_0}} \right\}.$$

Teoretický rozbor případu degenerace ukazuje, že uvedený proces končí u určité množiny obsahující právě jeden element i_0, čímž jsou klíčový prvek $d_{i_0j_0}$ a jemu příslušný klíčový řádek a sloupec z tab. 3.5 určeny. Za této jednoznačné volby klíčového prvku $d_{i_0j_0}$ vyznačeného v tab. 3.5 rámečkem přejdeme výměnou původního systému $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ bázických proměnných postupem popsaným v bodech 1–6 k novému systému $(x_1, x_2, \ldots, x_{i_0-1}, x_{j_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_m)$ bázických proměnných. Takto dospějeme k následujícímu tabelačnímu záznamu (tab. 3.6) příslušnému buď novému přípustnému bázickému bodu $\boldsymbol{x}^{(1)} \neq \boldsymbol{x}_0$, nebo (v případě degenerace) k témuž bázickému bodu $\boldsymbol{x}_0$ s jinou indexovou bází. (Zaměňují se pouze řádky, tj. klíčový prvek dosazuji do klíčového řádku, měním hodnoty v tabulce, sloupce nechávám na svém místě.)

		x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_{j_0}	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_{j_0}	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	d_{11}	$\cdots$	d_{1k}	$\cdots$	d_{1m}	$d_{1(m+1)}$	$\cdots$	d_{1j_0}	$\cdots$	d_{1n}	d_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_i	x_i	d_{i1}	$\cdots$	d_{ik}	$\cdots$	d_{im}	$d_{i(m+1)}$	$\cdots$	d_{ij_0}	$\cdots$	d_{in}	d_{i0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{i_0}	x_{i_0}	d_{i_01}	$\cdots$	d_{i_0k}	$\cdots$	d_{i_0m}	$d_{i_0(m+1)}$	$\cdots$	$\boxed{d_{i_0j_0}}$	$\cdots$	d_{i_0n}	d_{i_00}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	d_{m1}	$\cdots$	d_{mk}	$\cdots$	d_{mm}	$d_{m(m+1)}$	$\cdots$	d_{mj_0}	$\cdots$	d_{mn}	d_{m0}
		$\tilde{z}_1$	$\cdots$	$\tilde{z}_k$	$\cdots$	$\tilde{z}_m$	$\tilde{z}_{m+1}$	$\cdots$	$\tilde{z}_{j_0}$	$\cdots$	$\tilde{z}_n$	$\tilde{c}_0$
		$c_1 - \tilde{z}_1$	$\cdots$	$c_k - \tilde{z}_k$	$\cdots$	$c_m - \tilde{z}_m$	$c_{m+1} - \tilde{z}_{m+1}$	$\cdots$	$c_{j_0} - \tilde{z}_{j_0}$	$\cdots$	$c_n - \tilde{z}_n$	

Tabulka 3.5: Simplexová tabulka s klíčovým prvkem $d_{i_0j_0}$

		x_1	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_{j_0}	$\cdots$	x_n	
		c_1	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_{j_0}	$\cdots$	c_n	
c_1	x_1	$d^{(1)}_{11}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{1k}$	$\cdots$	${}^{(1)}d_{1j_0} = 0$	$\cdots$	$d^{(1)}_{1n}$	$d^{(1)}_{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{i_0-1}	x_{i_0-1}	$d^{(1)}_{(i_0-1)1}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{(i_0-1)k}$	$\cdots$	${}^{(1)}d_{(i_0-1)j_0} = 0$	$\cdots$	$d^{(1)}_{(i_0-1)n}$	$d^{(1)}_{(i_0-1)0}$
c_{j_0}	x_{j_0}	$d^{(1)}_{j_01}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{j_0k}$	$\cdots$	${}^{(1)}d_{j_0j_0} = 1$	$\cdots$	$d^{(1)}_{j_0n}$	$d^{(1)}_{j_00}$
c_{i_0+1}	x_{i_0+1}	$d^{(1)}_{(i_0+1)1}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{(i_0+1)k}$	$\cdots$	${}^{(1)}d_{(i_0+1)j_0} = 0$	$\cdots$	$d^{(1)}_{(i_0+1)n}$	$d^{(1)}_{(i_0+1)0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	$d^{(1)}_{m1}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{mk}$	$\cdots$	$d^{(1)}_{mj_0} = 0$	$\cdots$	$d^{(1)}_{mn}$	$d^{(1)}_{m0}$
		$z^{(1)}_1$	$\cdots$	$z^{(1)}_k$	$\cdots$	$z^{(1)}_{j_0} = c_{j_0}$	$\cdots$	$z^{(1)}_n$	$c^{(1)}_0$
		$c_1 - z^{(1)}_1$	$\cdots$	$c_k - z^{(1)}_k$	$\cdots$	$c_{j_0} - z^{(1)}_{j_0} = 0$	$\cdots$	$c_n - z^{(1)}_n$	

Tabulka 3.6: Simplexová tabulka po prvé výměně báze

Shora popsaný postup pro jednoznačnou volbu klíčového prvku zamezuje vzniku tzv. cyklu, tj. případu, kdy po určitém konečném počtu kroků by byl získán bod obsažený již v předchozích krocích. Z charakteristického řádku tab. 3.6 usoudíme, dle vět 3.10 a 3.11 zda algoritmus končí, tj. zda bod $\boldsymbol{x}^{(1)}$ je optimálním bodem či je úloha neřešitelná, nebo zda přichází v úvahu další, druhý krok algoritmu, v němž postupujeme zcela analogicky, jako v kroku 1. jen s tím rozdílem, že za výchozí přípustný bázický bod bereme nyní bod $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a jemu příslušnou tabulku 3.6; takovýmto způsobem dostáváme postupně konečnou posloupnost

$$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(s)}$$

vrcholů polyedru $\mathbb{M}$, přičemž v posledním (s-tém) bodu algoritmu lze na základě údajů z příslušného charakteristického řádku tabulky příslušné přípustnému bázickému řešení $\boldsymbol{x}^{(s)}$ rozhodnout buď o optimalitě bodu $\boldsymbol{x}^{(s)}$, či o neřešitelnosti dané optimalizační úlohy.

3.1.10 Určení přípustného bázického bodu

Simplexová metoda pro případ lineární optimalizační úlohy byla odvozena za předpokladu, že počet rovnic v restrikční množině $\mathbb{M}$ je menší nežli počet proměnných a že je znám výchozí přípustný bod. V praxi jde většinou o rozsáhlé optimalizační úlohy uvažovaného typu, kde počet vazebních rovnic může též přesáhnout počet proměnných, kde (obecně) není znám výchozí přípustný bázický bod a kde též je velmi obtížné zjišťovat i hodnost matice $\boldsymbol{A}$ koeficientů systému omezujících rovnic z popisu restrikční množiny. Je však možno užít metody, která se opírá o simplexovou metodu, v jejímž průběhu se buď ověří, že daná restrikční množina $\mathbb{M}$ je prázdná, nebo která vede k určení výchozího přípustného bázického bodu. K tomuto účelu přiřadíme danému lineárnímu optimalizačnímu problému s restrikční množinou $\mathbb{M}$, v jejímž popisu můžeme předpokládat, že je

$$b_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.44}$$

což lze zařídit násobením číslem (-1), následující pomocný optimalizační problém.

$$\min_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in\tilde{\mathbb{M}}} \varphi(\boldsymbol{u}), \quad \varphi(\boldsymbol{u}) = \sum_{j=1}^{m} u_j, \tag{3.45}$$

$$\tilde{\mathbb{M}} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{E}_{n+m} \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + u_j = b_j,\ u_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, m),\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}.$$

Restrikční množinu $\tilde{\mathbb{M}}$ dostaneme z množiny $\mathbb{M}$ popisu (3.41), jestliže do každé j-té rovnice zavedeme novou proměnnou u_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Proměnné u_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ nazýváme umělými (přídatnými) proměnnými. Pro pomocný lineárně optimalizační problém (3.45) platí jednak (3.44) (dle předpokladů), jednak je počet rovnic v popisu množiny $\tilde{\mathbb{M}}$ menší než počet $n + m$ proměnných, přičemž lze tyto rovnice rozřešit vzhledem k proměnným

$$u_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Bázické řešení $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)$, pro něž platí

$$x_{0i} = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad u_j = b_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

představuje přípustný bázický bod pro problém (3.45). Protože cílová funkce $\varphi(\boldsymbol{u})$ je zdola omezená a spojitá na uzavřené množině $\tilde{\mathbb{M}}$, existuje vždy optimální bod $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ úlohy (3.45).

Věta 3.15 (Optimální bod pomocné optimalizační úlohy) *Je-li*

$$(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_m)$$

optimální bod pomocné optimalizační úlohy (3.45) – jíž je možno řešit simplexovou metodou – potom v případě, že

$$\sum_{j=1}^{m} u_j > 0,$$

je $\mathbb{M} = \emptyset$ *a původní optimalizační problém s restrikční množinou* $\mathbb{M}$ *je neřešitelný; v případě*

$$\hat{u}_j = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

je bod $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ *přípustným bázickým bodem původní optimalizační úlohy s restrikční množinou* $\mathbb{M}$ *z (3.41).*

Následující věta, kterou lze odvodit na základě tzv. teorie parametrického lineárního programování umožňuje vynechat pomocný problém (3.41) pro určení výchozího přípustného bázického bodu úlohy

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{3.46}$$

respektive

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

s restrikční množinou $\mathbb{M}$ z (3.41). Místo původně zadaného problému (3.46) se řeší simplexovou metodou jiný, jemu přiřazený problém

$$\min_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \tilde{\mathbb{M}}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \mu \sum_{j=1}^{m} u_j, \tag{3.47}$$

respektive

$$\max_{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \tilde{\mathbb{M}}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \mu \sum_{j=1}^{m} u_j,$$

s restrikční množinou $\tilde{\mathbb{M}}$, kde μ je parametr, jehož hodnotu si myslíme větší nežli jakékoliv číslo, které se během výpočtu vyskytne. Tato metoda se označuje jako parametrická μ-metoda.

Věta 3.16 (O vztahu parametrické a původní úlohy lineárního programování) *Existuje-li číslo* μ_0 *tak, že pro žádné* $\mu > \mu_0$ *neexistuje optimální bod* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ *úlohy (3.47) s vlastností*

$$\hat{u}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

potom je původní úloha (3.46) neřešitelná. Není-li tomu tak, pak existuje dostatečně velké kladné číslo μ *tak, že bod* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *je optimálním bodem původního problému (3.46) (pokud bod* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ *s vlastností* $\hat{u}_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *je optimálním bodem problému (3.47)).*

3.1.11 Princip duality

Uvažujme lineární maximalizační úlohu v normálním tvaru, tj. úlohu

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{3.48}$$

s restrikční množinou

$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j \ (j = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\} \tag{3.49}$$

a to při libovolně zvolených číslech m a n a bez kladení jakýchkoliv požadavků na hodnost matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Přiřaďme problému (3.48) lineární minimalizační problém

$$\min_{u\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{m} b_j u_j$$

s restrikční množinou

$$\mathbb{N} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{E}_m \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j \ge c_i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad u_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, m) \right\}.$$

V literatuře se často užívá pro tento problém stručný (symbolický) maticový zápis:

Úloha I.

$$\max_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \right\}. \tag{3.50}$$

Úloha II.

$$\min_{\boldsymbol{u}} \left\{ \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0} \right\}. \tag{3.51}$$

Z tabulky 3.7 lze usoudit na strukturu dvojice lineárních optimalizačních úloh I. a II., z nichž první je vždy maximalizační a druhá minimalizační úloha.

	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	
u_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$	a_{1n}	$\le b_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_j	a_{j1}	$\cdots$	a_{ji}	$\cdots$	a_{jn}	$\le b_j$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mi}	$\cdots$	a_{mn}	$\le b_m$
	$\ge c_1$	$\cdots$	$\ge c_i$	$\cdots$	$\ge c_n$	

Tabulka 3.7: Dvojice duálních úloh

Dvojici úloh I. a II. nazýváme duální dvojicí lineárních optimalizačních úloh v normálním tvaru, úlohu II. duální úlohou k původní (primární) úloze I. Platí věty:

Věta 3.17 (Vztah cílových funkcí dvojice duálních úloh) *Jsou-li restrikční množiny $\mathbb{M}$ a $\mathbb{N}$ z dvojice duálních úloh I. a II. neprázdné, pak platí pro libovolný bod $\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}$ a libovolný bod $\boldsymbol{u} \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq \sum_{j=1}^{m} b_j u_j,$$

či zapsáno maticově

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u}.$$

Věta 3.18 (O principu duality) *Jestliže restrikční množiny $\mathbb{M}$ a $\mathbb{N}$ duálních úloh I a II jsou neprázdné, potom existuje optimální bod $\hat{\boldsymbol{x}}$ úlohy I. a optimální bod $\hat{\boldsymbol{u}}$ úlohy II. a hodnoty cílových funkcí z obou těchto úloh jsou si v těchto optimálních bodech rovny, tj.*

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^T \hat{\boldsymbol{u}}.$$

Věta 3.19 (O řešitelnosti dvojice duálních úloh) *Úloha I. je řešitelná právě tehdy, je-li řešitelná úloha II.*

Z hořejších vět plynou následující poznámky. Je-li $\boldsymbol{x}$ libovolný přípustný bod úlohy I. a $\boldsymbol{u}$ libovolný přípustný bod úlohy II, potom existují optimální body $\hat{\boldsymbol{x}}$ a $\hat{\boldsymbol{u}}$ a platí

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^T \hat{\boldsymbol{u}} \leq \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u}.$$

Přípustné body získané v jednotlivých krocích algoritmu při řešení úloh I a II tedy vymezují interval, v němž leží optimální hodnota cílové funkce, přičemž se tento interval s růstem počtu kroků zmenšuje. Význam duální úlohy spočívá též v tom, že v řadě úloh je řešení duálního problému jednodušší a časově méně náročné nežli řešení primární úlohy.

Je-li $\hat{\boldsymbol{x}}$ přípustné řešení úlohy (3.50) a $\hat{\boldsymbol{u}}$ přípustné řešení úlohy (3.51), pro která platí

$$\boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^T \hat{\boldsymbol{u}}, \tag{3.52}$$

pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je řešením úlohy (3.50) a $\hat{\boldsymbol{u}}$ je řešením úlohy (3.51). Dále platí tzv. komplementarita:

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}})^T \hat{\boldsymbol{u}} = 0.$$

Hledáme tedy taková $\hat{\boldsymbol{x}}$ a $\hat{\boldsymbol{u}}$, aby byly splněny vedlejší podmínky obou úloh a rovnost (3.52). Jde tedy o soustavu podmínek[1]

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}_{n\times 1} + \boldsymbol{y}_{m\times 1} = \boldsymbol{b}_{m\times 1},\\
(\boldsymbol{A}^T)_{n\times m}\boldsymbol{u}_{m\times 1} = \boldsymbol{c}_{n\times 1} + \boldsymbol{z}_{n\times 1},\\
\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} = 0,\\
\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0},
\end{gathered}$$

což pišme souhrnně jako

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{\xi} \geq \boldsymbol{0}_{2m\times 2n}, \tag{3.53}$$

kde

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{0}_{m\times m} & \boldsymbol{I}_{m\times m} & \boldsymbol{0}_{m\times n} \\ \boldsymbol{0}_{n\times n} & (\boldsymbol{A}^T)_{n\times m} & \boldsymbol{0}_{n\times m} & -\boldsymbol{I}_{n\times n} \\ (\boldsymbol{c}^T)_{1\times n} & -(\boldsymbol{b}^T)_{1\times m} & \boldsymbol{0}_{1\times m} & \boldsymbol{0}_{1\times n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Dolní index $m \times n$ značí, že matice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ je typu (m, n).

Řešením rovnosti z podmínky (3.53), které lze užitím singulárního rozkladu zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{t},$$

je dáno řešení dvojice duálních úloh I. a II., ovšem najdeme-li $\boldsymbol{t}$ splňující podmínku

$$\boldsymbol{g} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{t} \geq 0.$$

Podobnou dvojici tvoří také například dvojice úloh

$$\max_{\boldsymbol{x}} \left\{ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \right\} \tag{3.54}$$

a

$$\min_{\boldsymbol{y}} \left\{ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \right\}. \tag{3.55}$$

3.2 Kvadratické programování

Uvažujme úlohu

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \right),$$

kde

$$\mathbb{M} = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n} \}.$$

Je-li $\boldsymbol{C}$ symetrická matice splňující podmínku

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{M}, \tag{3.56}$$

pak hovoříme o úloze kvadratického programování.

Řešme tuto úlohu užitím věty o Lagrangeových multiplikátorech pro úlohy s rovnostmi a nerovnostmi.[2] Dle této věty je nutnou[3] podmínkou splnění naší úlohy vyhovění následujícím podmínkám.

a) Podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\ell}^T(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{n})$$

vzhledem k $\boldsymbol{x}$, tedy

$$\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{R}^T\hat{\boldsymbol{\ell}} + \boldsymbol{N}^T\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0}.$$

b) Podmínka inverzní korespondence znamének:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{0}.$$

c) Podmínka komplementarity

$$\operatorname{diag}(\hat{\boldsymbol{\lambda}})(\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}.$$

Navíc je ovšem nutné splnit podmínky vymezující množinu $\mathbb{M}$.

Tuto úlohu je možné řešit užitím pomocné úlohy lineárního programování

$$\{\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{\ell}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\} = \arg\min \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mid \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}, \quad \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq \boldsymbol{0} \right\} \tag{3.57}$$

následujícím způsobem:

[2] Uvedené na straně 39.

[3] A v případě naší úlohy, jak vyplývá z podmínky (3.56) a z charakteru množiny $\mathbb{M}$, také postačující podmínkou

1. Řešíme úlohu (3.57).

2. Pokud pro získané řešení platí podmínka komplementarity

$$\operatorname{diag}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})\,(\boldsymbol{N}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0},$$

pak nalezené řešení úlohy lineárního programování je také řešením původní úlohy programování kvadratického: $\hat{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$. Pokud tato podmínka v některém řádku splněna není, tedy je-li množina

$$\mathbb{I} = \left\{ i \mid \tilde{\lambda}_i \left(\sum_{j=1}^{m} N_{ij}\tilde{x}_j - n_i \right) \neq 0 \right\}$$

neprázdná, potom vybereme index

$$\iota = \arg\max_{i\in\mathbb{I}} \tilde{\lambda}_i$$

a v pomocné úloze lineárního programování přidáme k vedlejším podmínkám ještě podmínku

$$\left(\sum_{j=1}^{m} N_{\iota j}\tilde{x}_j - n_\iota \right) = 0$$

a cílovou funkci nahradíme funkcí

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\iota}}^{N} \lambda_i .$$

3. Atd. dokud nenaleznem řešení či neusoudíme, že ho nalézti nedokážeme.

3.3 Separovatelné úlohy

Poměrně častý jest případ, kdy je účelová funkce tzv. separovatelná, tj. dá se zapsat ve tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Jde tedy o součet funkcí, kde každá funkce závisí pouze na jedné proměnné. Jsou-li vedlejší podmínky lineární, lze separovatelnou úlohu řešit tím, že účelovou funkci vyjádříme pomocí spojité po částech lineární funkce. Obecně lze říci, že vhodnou substitucí vždy mnoho získáme.

3.4 Dynamické programování

Dynamické programování je založeno na myšlence postupného snižování rozměru extremalizační úlohy tím, že hodnotu funkce v bodě maxima uvažujeme jako funkci $F(n, \boldsymbol{b})$, kde n je počet proměnných v úloze vystupujících, a $\boldsymbol{b}$ je vektor hodnot pravých stran vedlejších podmínek. Pro $F(n, \boldsymbol{b})$ sestavíme funkcionální rovnici, kterou vyřešíme. Dosadíme-li pak za n a $\boldsymbol{b}$ konkrétní hodnoty počtu proměnných a pravých stran, dostaneme hodnotu extremalizované funkce v bodě maxima a z údajů získaných při řešení funkcionální rovnice dostaneme i hodnoty bodu maxima. Je nutné, aby účelová funkce byla v jistém smyslu separovatelná a vedlejších podmínek byl co nejmenší počet (pokud možno jediná).

3.5 Lineární lomené programování

Úlohou lineárního lomeného programování nazveme úlohu maximalizovat podíl dvou lineárních forem tvaru

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}}, \tag{3.58}$$

při lineárních vedlejších podmínkách

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \tag{3.59}$$

Pomocí substituce

$$z_i = \frac{x_i}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$z_{n+1} = \frac{1}{\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}}$$

převedeme úlohu (3.58)—(3.59) na úlohu lineárního programování ve tvaru

$$\max_{\boldsymbol{z}} \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$$

při vedlejší podmínce

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i - b_j z_{n+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\sum_{i=1}^{n} d_i z_i = 1, \ z_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

kde předposlední podmínka zabezpečí, že $z_{n+1} \neq 0$. Optimální řešení úlohy lineárního lomeného programování získáme jako

$$x_i = \frac{z_i}{z_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

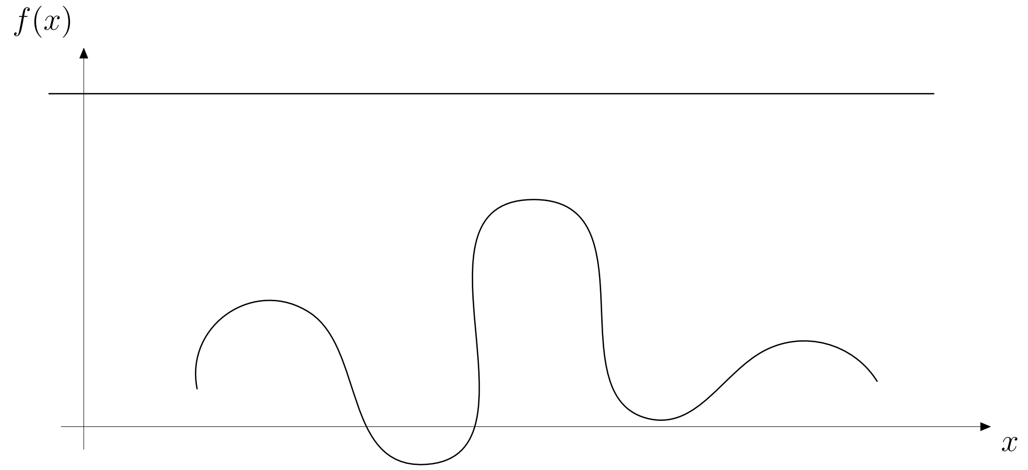
3.6 Geometrické programování

Termín programování se z historických důvodů používá pro označení matematické formulace parametrických optimalizačních úloh a pro metody jejich řešení. Geometrické programování je jednou takovou formulací a metodou, která je, jak níže uvidíme, vyjádřena v třídě funkcí majících tvar součtu součinů mocnin návrhových proměnných X_μ a známých koeficientů c_i.

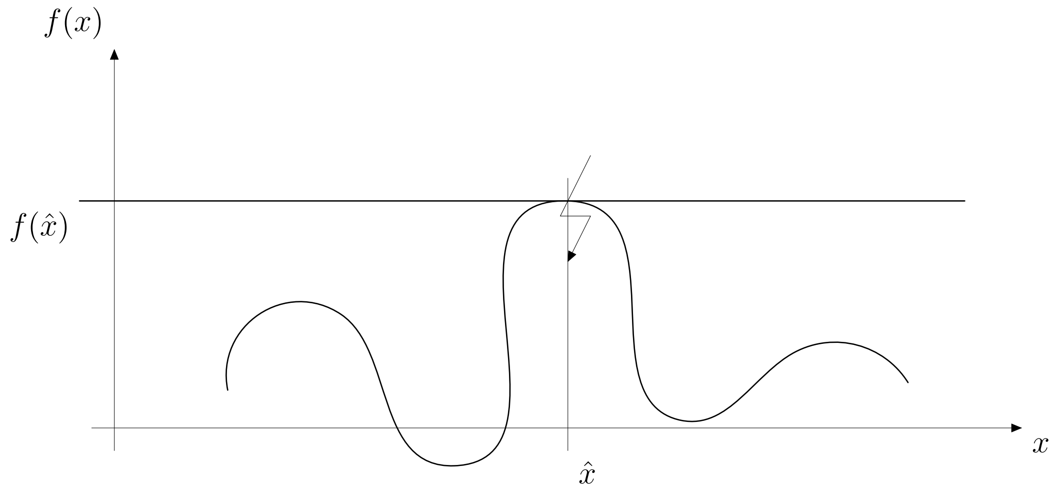
Již od časů Pierre de Fermata[4] je známo, že jisté nerovnosti pomáhají řešit speciální optimalizační úlohy. Těchto nerovností je celá řada.

Vychází se přitom z filozofie naznačené následným podobenstvím. Vyšetřovanou funkci si představme jako členité pohoří. Tato funkce (pohoří) představuje levou stranu nerovnosti. Nad horstvem se snášejí hustá souvislá mračna nazývaná *stratus*. O tomto souvislém pásmu mračen víme, že je výše nežli nejvyšší vrchol (druhá – pravá – strana nerovnosti, viz obrázek 3.1). Navíc je výška mračen jistým, ne složitým způsobem určitelná. Poslední, a pro člověka hledajícího výšku a polohu nejvyššího vrcholu nejdůležitější, vlastností mračna (pravé strany nerovnosti) je zřetelné ohlášení se prvního dotyku klesajících mračen s nejvyšším vrcholem a jeho lokalizace (projetí blesku, splnění nerovnosti jako rovnosti, obrázek 3.2). Výšku mračen známe stále, tedy i v okamžiku projetí blesku. Světlo blesku navíc určí polohu, v níž máme extrém hledat. Matematické vyjádření právě naznačeného podobenství pouze s opačným znaménkem následuje při využití takzvané *geometrické nerovnosti.*

[4]Pierre de Fermat [-má] *1601 (Beaumont de Lomagne), †12. I. 1665 (Castres).



Obrázek 3.1: Povětrnostní podobenství



Obrázek 3.2: Lokalizace extrému – světlo blesku

V šedesátých letech dvacátého století pánové Peterson, Duffin a Zener[5] precizně popsali způsob využití vlastností tzv. geometrické nerovnosti uvádějící vztah mezi váženým aritmetickým průměrem a váženým geometrickým průměrem k řešení parametrické optimalizační úlohy níže uvedeného tvaru. Tento způsob byl dále rozšířen panem D. J. Wildem[6] v letech sedmdesátých.

Geometrická nerovnost[7] říká, že vážený aritmetický průměr je nejméně tak veliký jako vážený geometrický průměr, tedy že

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i U_i \geq \prod_{i=1}^{m} U_i^{\delta_i}, \tag{3.60}$$

kde U_i jsou libovolná *nezáporná* čísla a δ_i jsou libovolné *kladné* váhy, které splňují podmínku normy

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m = 1. \tag{3.61}$$

Geometrická nerovnost se navíc stává rovností právě když

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_m. \tag{3.62}$$

[5] [PETERSON *et al.*, 1967].
[6] [WILDE, 1978].
[7] Srvn. [JARNÍK, 1984b] ss. 211 a [JARNÍK, 1984c].

Položením

$$u_i = \delta_i U_i \tag{3.63}$$

dostáváme geometrickou nerovnost (3.60) ve tvaru

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m \geq \left(\frac{u_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \cdot \left(\frac{u_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{u_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m}. \tag{3.64}$$

Princip využití geometrické nerovnosti (3.64) k řešení úlohy jistého tvaru si ukažme v následujícím artikulu.

3.6.1 Úloha s kladnými koeficienty c_i bez vedlejších podmínek

Uvažujme úlohu[8]

$$\min_{\boldsymbol{X}} g(\boldsymbol{X}), \tag{3.65}$$

$$g = u_1 + u_2 + \ldots + u_m,$$

$$u_i = c_i X_1^{a_{i1}} X_2^{a_{i2}} \ldots X_M^{a_{iM}}, \tag{3.66}$$

kde

$$c_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_M) > \boldsymbol{0}. \tag{3.67}$$

Předpokládejme, že funkce g dosahuje svého minima v bodě $\hat{\boldsymbol{X}} > \boldsymbol{0}$. Dosazením za u_i dle (3.66) do vyjádření geometrické nerovnosti (3.64) dostáváme

$$g \geq V(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X}) = \left(\frac{c_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \cdot \left(\frac{c_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{c_m}{\delta_m}\right)^{\delta_m} \cdot X_1^{D_1} \cdot X_2^{D_2} \cdot \ldots \cdot X_M^{D_M}, \tag{3.68}$$

kde

$$D_\mu = \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{i\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m), \quad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_M).$$

Funkce $V(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X})$ proměnných $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ a $X_1, X_2, \ldots, X_M$ (tak řečená *předduální funkce*) definovaná vztahem (3.68) nabývá svého maxima ve stejném bodě jako funkce[9]

$$\ln V(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right) + D_1 \ln X_1 + D_2 \ln X_2 + \ldots + D_M \ln X_M. \tag{3.70}$$

Jsou-li koeficienty

$$D_\mu = \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{i\mu} \geq 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.71}$$

je funkce (3.70) konkávní funkcí vzhledem k proměnným $\boldsymbol{X}$ a anulováním derivací dostáváme podmínku pro maximum

$$\frac{\partial \ln V(\delta_i, X_\mu)}{\partial X_\nu} = \frac{D_\nu}{X_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{i\nu}}{X_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M). \tag{3.72}$$

[8]Této úloze se v teorii geometrického programování říká primární úloha. Proměnné X_μ se nazývají proměnné primární.

[9]Stačí si uvědomit rostoucí charakter funkce zvané přirozený logaritmus.

Podmínce (3.72) vyhovuje $X_\nu = \infty$, respektive

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Jelikož nás zajímá konečné řešení, použijeme druhou možnost, která navíc vyhovuje podmínce (3.71).

Maximum funkce $V(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X})$ je pak rovno vázanému maximu

$$v_{max} = \max_{\delta \in \mathbb{D}} v(\boldsymbol{\delta}), \quad v(\boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i},$$

kde množina $\mathbb{D}$ je určena $M+1$ lineárními rovnicemi a podmínkou kladnosti duálních proměnných δ_i

$$\mathbb{D} = \left\{ \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{E}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} \delta_i a_{i\mu} = 0,\ (\mu = 1, 2, \ldots, M), \quad \sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1, \quad \delta_i > 0 \right\}. \tag{3.73}$$

Této úloze se říká úloha duální. Proměnné δ_i slovou duální proměnné. Podmínka

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1 \tag{3.74}$$

je shora zmíněnou podmínkou normy.

Vzhledem k tomu, že funkce $v(\boldsymbol{\delta})$ má při uvažování $c_i > 0$ a $\delta_i > 0$ maximum ve stejném bodě jako funkce[10] $\ln v$, hledáme maximum *konkávní*[11] funkce $\ln v$ při splnění lineárních vedlejších podmínek (3.73). Je-li navíc počet M primárních proměnných X_μ o jednu menší nežli počet m členů u_i funkce g,[12] potom vedlejší podmínky duální úlohy mají pouze jedno řešení a duální úloha se redukuje na řešení soustavy lineárních rovnic, což je skutečnost stojící zdůraznit.

Najdeme-li bod $\hat{\boldsymbol{\delta}} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \ldots, \hat{\delta}_m)$, v němž duální funkce $v(\boldsymbol{\delta})$ dosahuje svého vázaného maxima, pak minimalizační bod primární úlohy $\hat{\boldsymbol{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_M)$ nalezneme užitím podmínky, že geometrická nerovnost se stává rovností, tedy že platí

$$\min_{\boldsymbol{X}} g = g(\hat{\boldsymbol{X}}) = \max_{\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X}} V(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{X}) = V(\hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{X}}) = v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = v_{max}\,, \tag{3.75}$$

jedině platí-li[13]

$$\frac{u_i(\hat{\boldsymbol{X}})}{\hat{\delta}_i} = K, \tag{3.76}$$

kde K je konstanta shodná pro všechna i. Velikost konstanty K určíme z platnosti následujících úvah plynoucích ze vztahů (3.74), (3.75) a (3.76). Máme

$$v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = g(\hat{\boldsymbol{X}}) = \sum_{i=1}^{m} u_i(\hat{\boldsymbol{X}}) = K \cdot \sum_{i=1}^{m} \hat{\delta}_i = K$$

---

[10] Funkce $\ln x$ je konkávní na konvexní množině všech kladných čísel x. Proto pro $c_i > 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ a $\delta_i > 0\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ je funkce $\ln v(\delta)$ funkcí konkávní.

[11] Přičemž si uvědomme kvalitativní rozdíl mezi problémem nalezení globálního extrému původní nekonvexní funkce, o které nevíme, kolik má lokálních extrémů, a problémem nalezení maxima konkávní funkce, kde toto maximum je maximem jediným.

[12] Čehož lze dosáhnout vhodnou formalizací původní úlohy optimalizace a zejména vhodnou formulací konstrukčních cílů a vhodným sestavením matematického modelu, či jistými matematickými obraty v průběhu transformace konstrukční optimalizační úlohy na matematickou úlohu parametrické optimalizace.

[13] Srvn. vyjádření (3.62) na str. 65 a (3.63) na straně 66.

a tedy

$$K = v(\hat{\boldsymbol{\delta}}).$$

Tyto podmínky po dosazení za u_i z výrazu (3.66) vedou na vztah pro nalezení minimalizujícího bodu primární úlohy $\hat{\boldsymbol{X}}$ ve tvaru

$$c_i \hat{X}_1^{a_{i1}} \hat{X}_2^{a_{i2}} \dots \hat{X}_M^{a_{iM}} = v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \cdot \hat{\delta}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3.77}$$

Vezmeme-li v úvahu shora položené podmínky

$$c_i > 0, \quad X_\mu > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\mu = 1, 2, \dots, M), \tag{3.78}$$

potom zlogaritmováním vztahů (3.77) dostáváme soustavu lineárních rovnic pro proměnné $\ln \hat{X}_\mu$

$$\sum_{\mu=1}^{M} a_{i\mu} \ln \hat{X}_\mu = \ln(\frac{v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \cdot \hat{\delta}_i}{c_i}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3.79}$$

3.6.2 Úloha s kladnými koeficienty c_i a s vedlejšími podmínkami

V případě úlohy s vedlejšími podmínkami je nutné použít metodu Lagrangeových multiplikátorů a vzniklý problém řešit opět užitím geometrické nerovnosti. Jako ilustraci si uveďme řadu následujících úvah.

Mějme úlohu

$$\min_{\boldsymbol{X}} g_0(\boldsymbol{X}), \quad g_0 = \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \tag{3.80}$$

s q podmínkami

$$g_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \dots, q) \tag{3.81}$$

a M podmínkami

$$X_\mu > 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, M),$$

kde

$$c_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m_q).$$

Užitím geometrické nerovnosti shora předvedeným způsobem na transformaci vyjádření výrazů $g_0, g_1, \dots, g_q$ a uvážením, že $g_k > 0$ a tedy že mocněním *kladným* číslem λ_k nedojde ke změně znaménka nerovností (3.81), dostáváme

$$g_0 \geq \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=1}^{m_0} a_{i\mu}\delta_i},$$

$$1 \geq g_k^{\lambda_k} \geq \left(\prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\Delta_i}\right)^{\Delta_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\mu}\Delta_i} \right)^{\lambda_k} =$$

$$= \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\Delta_i}\right)^{\Delta_i\lambda_k} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\mu}\Delta_i\lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, q),$$

kde podobně jako shora váhy $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, m_0)$ a $\Delta_i > 0$ $(i = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m_q)$ mají splňovat podmínku normy

$$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1, \tag{3.82}$$

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \Delta_i = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{3.83}$$

Veličiny λ_k jsou Lagrangeovy multiplikátory, o čemž se přesvědčíme na straně 70 a níže.[14]

Vzájemným vynásobením levých stran posledních $q+1$ nerovnic a porovnáním s vzájemným vynásobením pravých stran těchto nerovnic dostáváme

$$g_0 \geq \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\Delta_i}\right)^{\Delta_i \lambda_k} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\left(\sum_{i=1}^{m_0} a_{i\mu}\delta_i + \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\mu}\Delta_i\lambda_k\right)}.$$

Zavedením substituce

$$\delta_i = \Delta_i \lambda_k \quad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

dostává poslední nerovnost tvar

$$g_0 \geq \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \lambda_k^{\delta_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu}\delta_i} \tag{3.84}$$

a podmínky normy vyjadřují

$$\sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1,$$

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_i = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{3.85}$$

Podobně jako v případě bez vedlejších podmínek nabývá pravá strana nerovnosti (3.84) svého extrému za podmínky

$$\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu}\delta_i = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.86}$$

čímž, s uvážením

$$\prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \lambda_k^{\delta_i} = \lambda_k^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_i} = \lambda_k^{\lambda_k},$$

dostává tato nerovnost tvar

$$g_0 \geq v(\boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k}.$$

Uvažujeme-li opět

$$\frac{u_i(\hat{\boldsymbol{X}})}{\hat{\delta}_i} = K,$$

pak platí (existuje-li $\hat{\boldsymbol{X}}$)

$$g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=1}^{m_0} a_{i\mu}\delta_i},$$

[14] Pro Lagrangeovy multiplikátory a vedlejší podmínky však platí podmínka komplementarity ze strany 39, dle které buď $g_k = 1$ či $\lambda_k = 0$ a tedy $g_k^{\lambda_k} = 1$. To je významné vzhledem k budoucímu uvažování geometrických nerovností ve tvaru rovností.

$$g_k = \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\Delta_i}\right)^{\Delta_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\mu}\Delta_i}$$

a tedy (srvn. pozn. 14)

$$1 = \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{c_i}{\Delta_i}\right)^{\Delta_i\lambda_k} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\mu}\Delta_i\lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Odtud, s užitím (3.85) a (3.86),

$$g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = v(\boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k}.$$

Nyní, tak jako shora, můžeme vyjádřit základní princip geometrického programování.[15]

Věta 3.20 (Základní princip geometrického programování) *Pokud pro bod $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ vázaného maxima duální úlohy*

$$\{\hat{\boldsymbol{\delta}}\} = \arg\max_{\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{D}} v(\boldsymbol{\delta}), \qquad v(\boldsymbol{\delta}) = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k},$$

kde

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \delta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

a

$$\mathbb{D} = \left\{ \delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m_q) \mid \sum_{i=1}^{m_0} \delta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu}\delta_i = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \right\}$$

existuje bod $\hat{\boldsymbol{X}}$, pro který platí

$$c_i \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \hat{\delta}_i v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0), \tag{3.87}$$

a

$$c_i \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{\hat{\delta}_i}{\lambda_k(\hat{\boldsymbol{\delta}})} \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{3.88}$$

pak také platí, že

$$\min_{X_\mu\in\mathbb{P}} g_0(\boldsymbol{X}) = g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \max_{\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{D}} v(\boldsymbol{\delta}),$$

kde

$$\mathbb{P} = \{X_\mu > 0 \ (\mu = 1, 2, \ldots, M) \mid g_k \leq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, q)\}.$$

Nyní si ukážeme, že čísla λ_k jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory a že platí vztahy (3.87) a (3.88). Podle věty 2.8 o Lagrangeových multiplikátorech pro úlohy s rovnostmi a nerovnostmi uvedené na s. 39 máme, napíšeme-li naši úlohu (3.80) a (3.81) ve tvaru

$$f_0 = g_0, \quad f_k = g_k - 1 \leq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\mathcal{L} = \ell_0 g_0 + \sum_{k=1}^{q} \ell_k (g_k - 1),$$

následující nutné podmínky minima:

[15] Vyčerpávající matematický důkaz najde čtenář ve čtvrté kapitole knihy [Peterson *et al.*, 1967].

a)

$$\mathcal{L}_{X_\nu} = \hat{\ell}_0 \sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} \cdot \hat{X}_\nu^{-1} + \sum_{k=1}^{q} \hat{\ell}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} \cdot \hat{X}_\nu^{-1} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M)$$

b)

$$\hat{\ell}_k \geq 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, q)$$

c)

$$\hat{\ell}_k(g_k(\hat{\boldsymbol{X}}) - 1) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Pokud rovnice a) vynásobíme postupně čísly $\hat{X}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, M)$, všechny potom vydělíme číslem $v(\hat{\boldsymbol{\delta}})$, vidíme, že čísla

$$\hat{\delta}_i = c_i \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} \frac{\hat{\ell}_0}{v(\hat{\boldsymbol{\delta}})} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0) \tag{3.89}$$

a

$$\hat{\delta}_i = c_i \prod_{\mu=1}^{M} \hat{X}_\mu^{a_{i\mu}} \frac{\hat{\ell}_k}{v(\hat{\boldsymbol{\delta}})} \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{3.90}$$

splňují podmínku

$$\sum_{i=1}^{m_0} \hat{\delta}_i a_{i\nu} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \hat{\delta}_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M),$$

což je právě podmínka (3.86)

$$\sum_{i=1}^{m_q} \hat{\delta}_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Porovnáním (3.89) a (3.90) s (3.87) a (3.88) vidíme, že

$$\hat{\ell}_0 = 1 \qquad \text{a} \qquad \lambda_k(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \frac{\hat{\ell}_k}{v(\hat{\boldsymbol{\delta}})} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Z rovnic a) až c) je vidět, že Lagrangeovy multiplikátory $\hat{\ell}$ jsou určeny až na násobek shodným kladným číslem, a proto lze také čísla $\lambda_k(\hat{\boldsymbol{\delta}}) = \hat{\ell}_k / v(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$ nazvat Lagrangeovými multiplikátory. Navíc je možné velikost jednoho nenulového multiplikátoru volit; například $\hat{\ell}_0 = 1$.

3.6.3 Úloha s koeficienty c_i obou znamének bez vedlejších podmínek

V případě úlohy geometrického programování s koeficienty c_i obou znamének bez vedlejších podmínek

$$\{\hat{\boldsymbol{X}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}} g_0, \quad g_0 = \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}}, \tag{3.91}$$

kde tedy $c_i \lesseqgtr 0$, je vhodné k vyšetření[16] stacionárního bodu použít tzv. *semilogaritmických derivací* $\partial f(x)/\partial \ln x$, pro něž platí

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \ln x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial\, x}{\partial \ln x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial\, e^{\ln x}}{\partial \ln x} =$$

[16]V případě $c_i \lesseqgtr 0$ nelze využít geometrické nerovnosti, jelikož $u_i \lesseqgtr 0$.

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot e^{\ln x} = x \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

a které ve stacionárním bodě nabývají nulových hodnot. V našem případě platí

$$\frac{\partial g_0}{\partial \ln X_\nu} = X_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial X_\nu} \left(\sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \right),$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \ln X_\nu} = X_\nu \left(\sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \cdot X_\nu^{-1} \right),$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \ln X_\nu} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Ve stacionárním bodě $\tilde{\boldsymbol{X}}$ úlohy (3.91) máme

$$\left.\frac{\partial g_0}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M). \tag{3.92}$$

Tento vztah dále upravujme zavedením značek $\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i$ a $\tilde{g}_0 = g_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ a váhy

$$\delta_i = \frac{|c_i|}{|\tilde{g}_0|} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} > 0, \qquad \tilde{\delta}_i = \frac{|c_i|}{|\tilde{g}_0|} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0), \tag{3.93}$$

čím z (3.92) dostáváme podmínku

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i |c_i| a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M)$$

a konečně

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{\delta}_i = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M). \tag{3.94}$$

Nově zavedené váhy $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ dále splňují podmínku vyplývající z definičního vztahu (3.93)

$$\sigma_0 = \operatorname{sgn}\, \tilde{g}_0 = \frac{\tilde{g}_0}{|\tilde{g}_0|} = \frac{1}{|\tilde{g}_0|} \cdot \sum_{i=1}^{m_0} |c_i| \sigma_i \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i,$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = \sigma_0 = \operatorname{sgn}\, \tilde{g}_0. \tag{3.95}$$

Každému řešení $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \ldots, \tilde{\delta}_{m_0})$ podmínek (3.94) a (3.95) odpovídá stacionární bod původní úlohy $\tilde{\boldsymbol{X}}$, který po zlogaritmování vztahu (3.93) získáme rozřešením soustavy v proměnných $\ln \tilde{X}_\mu$ lineárních rovnic

$$\sum_{\mu=1}^{M} a_{i\mu} \ln \tilde{X}_\mu = \ln \frac{g_0(\tilde{\boldsymbol{X}}) \cdot \sigma_0 \cdot \tilde{\delta}_i}{\sigma_i c_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0),$$

kde platí $g_0(\tilde{\boldsymbol{X}}) = v(\tilde{\boldsymbol{\delta}})$, jak níže ukázáno vztahem (3.97).

Užitím vztahu (3.95) také platí

$$\tilde{g}_0 \cdot \sigma_0 = |\tilde{g}_0| = |\tilde{g}_0|^{\sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i},$$

a odtud

$$\tilde{g}_0 \cdot \sigma_0 = \left(\prod_{i=1}^{m_0} |\tilde{g}_0|^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_0}.$$

Dále po užití výrazu (3.93)

$$\tilde{g}_0 \cdot \sigma_0 = \left(\prod_{i=1}^{m_0} \left(\left(\frac{|c_i|}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \right) \right)^{\sigma_0},$$

$$\tilde{g}_0 \cdot \sigma_0 = \left(\prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{\sum_{i=1}^{m_0} a_{i\mu} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_0}. \tag{3.96}$$

Dle podmínky (3.94) pro stacionární bod $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ platí

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{\delta}_i = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M)$$

a tedy

$$g_0(\tilde{\boldsymbol{X}}) = \sigma_0 \left(\prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_0} = v(\tilde{\boldsymbol{\delta}}). \tag{3.97}$$

Mají-li podmínky (3.94) a (3.95)

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{\delta}_i = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M),$$

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = \sigma_0, \qquad \tilde{\delta}_i > 0,$$

(kde σ_0 je buď zřejmé z charakteru úlohy či řešíme danou úlohu dvakrát – jednou pro $\sigma_0 = 1$, podruhé pro $\sigma_0 = -1$ – a správným řešením je případ, kdy $\tilde{\delta}_i > 0$ pro všechna i) jediné řešení, pak tímto řešením je určen extrém funkce g_0. O tom, jde-li o maximum či minimum, rozhoduje negativní či pozitivní definitnost snadno konstruovatelného semilogaritmického Hessiánu

$$\left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial \ln X_\nu \, \partial \ln X_\mu} \right\}.$$

V případě více stacionárních bodů $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ je nutné vybrat ten, v němž je dosaženo minimální hodnoty funkce $g_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$.

3.6.4 Úloha geometrického programování s koeficienty c_i obou znamének a s vedlejšími podmínkami

Uvažujme úlohu o nalezení

$$\{\hat{\boldsymbol{X}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{X} \in \Xi} g_0, \qquad g_0 = \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}},$$

$$\Xi = \{X_\mu > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \mid 0 < g_k \leq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, q)\}, \tag{3.98}$$

kde

$$g_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}}.$$

Řešme nejprve případ, kdy **cílová funkce nabývá pouze nezáporných hodnot**, tedy

$$g_0 > 0 \quad \forall \boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}.$$

Povýšením obou stran nerovností (3.98) kladným číslem λ_k nedojde ke změně znaménka nerovnosti. Platí tedy

$$g_0 \geq g_0 \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\lambda_k} \triangleq G(\boldsymbol{X}). \tag{3.99}$$

Hledejme stacionární bod pravé strany poslední nerovnosti označené $G(\boldsymbol{X})$. Ve stacionárním bodě platí, že vedle parciálních a semilogaritmických derivací také tzv. logaritmické derivace dle všech proměnných

$$\frac{\partial \ln G}{\partial \ln X_\mu} = \frac{\partial \ln g_0}{\partial \ln X_\mu} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \frac{\partial \ln g_k}{\partial \ln X_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M) \tag{3.100}$$

nabývají nulové hodnoty.

Podobně jako v předešlém případě zaveďme kladnou primární váhu předpisem

$$w_i = \frac{|c_i|}{|\tilde{g}_k|} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, q),$$

kde $m_{-1} = 0$.

Zavedením označení $\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m_q)$, a uvážením že $g_k > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, q)$, vyjádřeme tyto váhy vztahy

$$w_i = \frac{\sigma_i c_i}{\tilde{g}_k} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, q). \tag{3.101}$$

Jelikož platí

$$\frac{\partial \ln g_k}{\partial \ln X_\nu} = \frac{1}{g_k} \cdot \frac{\partial\ g_k}{\partial \ln X_\nu}$$

a dále, dle shora řečeného,

$$\frac{\partial \ln g_k}{\partial \ln X_\nu} = \frac{1}{g_k} \cdot \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}},$$

při užití vztahu (3.101) pak psáno ve stacionárním bodě jako

$$\frac{\partial \ln \tilde{g}_k}{\partial \ln X_\nu} = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{\tilde{w}_i a_{i\nu}}{\sigma_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

nabývá podmínka (3.100) tvaru (platí $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$)

$$\frac{\partial \ln \tilde{G}}{\partial \ln X_\nu} = \sum_{i=1}^{m_0} \tilde{w}_i \sigma_i a_{i\nu} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \tilde{w}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0.$$

Zavedením duálních proměnných δ_i předpisem

$$\delta_i = w_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0) \tag{3.102}$$

a

$$\delta_i = \lambda_k w_i > 0 \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{3.103}$$

dostává tato podmínka tvar

$$\sum_{i=1}^{m_0} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M),$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{m_q} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M). \tag{3.104}$$

Spolu s touto podmímkou jsou duální proměnné $\tilde{\delta}_i$ vázány také podmínkami

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = 1$$

a

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

jak plyne z následujících úprav. Pro $i \in \{1, 2, \ldots, m_0\}$ sečteme primární váhy $\tilde{w}_i$ násobené znaménkem $\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i$;

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_i^2 c_i}{\tilde{g}_0} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{1}{\tilde{g}_0} \cdot \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 1,$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = 1.$$

Pro $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ a $i \in \{m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k\}$ podobně

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{w}_i = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{\sigma_i^2 c_i}{\tilde{g}_k} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{1}{\tilde{g}_k} \cdot \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 1;$$

potom tedy

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \frac{\tilde{\delta}_i}{\lambda_k} = 1$$

a konečně

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{3.105}$$

Stacionární bod $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ funkce

$$G(\boldsymbol{\delta}) = g_0 \prod_{k=1}^{q} g_k^{\lambda_k} \Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\delta})}$$

splňuje tedy podmínky

$$\sum_{i=1}^{m_q} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.106}$$

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = 1, \tag{3.107}$$

$$\tilde{\delta}_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_q);$$

navíc je číslo

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

dle definice kladné.

Nerovnost (3.99) nabývá postupně tvar

$$g_0 \geq G = g_0 \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\lambda_k} = g_0^{\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \tilde{\delta}_i \sigma_i}, \tag{3.108}$$

$$g_0 \geq G = \prod_{i=1}^{m_0} g_0^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} g_k^{\sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Užitím definice (3.101) a platnosti hořejší nerovnosti také ve stacionárním bodě máme dále

$$\tilde{g}_0 \geq \tilde{G} = \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Přeskupením a použitím definic (3.102) a (3.103) dostáváme

$$\tilde{g}_0 \geq \tilde{G} = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \tilde{\delta}_i \sigma_i}. \tag{3.109}$$

Ve stacionárním bodě $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ funkce G víme, že platí

$$\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \tilde{\delta}_i \sigma_i = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M)$$

a tedy

$$g_0 \geq \tilde{G} = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k}, \tag{3.110}$$

kde $\tilde{\delta}_i > 0$ vyhovuje soustavě lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \tilde{\delta}_i \sigma_i = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M),$$

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = 1$$

a kde

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Nyní formulujme úlohu

$$\max_{\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{D}} \tilde{G}, \quad \tilde{G} = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\delta_i}\right)^{\sigma_i\delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k}, \tag{3.111}$$

kde

$$\mathbb{D} = \left\{\boldsymbol{\delta} \mid \delta_i > 0,\ (i = 1, 2, \ldots, m_q) \quad \sum_{i=1}^{m_q} \sigma_i\delta_i a_{i\nu} = 0\ (\nu = 1, 2, \ldots, M), \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i\delta_i = 1\right\}$$

a

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i\delta_i,$$

jejíž řešení představuje největší dolní mez původní úlohy. O správnosti tohoto tvrzení se můžeme přesvědčit také následující úvahou.

Původní úlohu (3.98) řešme metodou Lagrangeových multiplikátorů, tedy aplikujme shora citovanou větu o Lagrangeových multiplikátorech pro hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi.

Naší úloze (3.98) přísluší Lagrangeova funkce

$$\mathfrak{L} = \ell_0 \cdot g_0 + \sum_{k=1}^{q} \ell_k(g_k - 1) + \sum_{k=1}^{q} \vartheta_k g_k \tag{3.112}$$

a nutnou podmínkou extrému v bodě $\tilde{\boldsymbol{X}}$ je splnění soustavy podmínek

a)

$$\mathfrak{L}_{X_\nu} = \tilde{\ell}_0 \sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\ell}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{q} \tilde{\vartheta}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 0,$$

b)

$$\tilde{\ell}_k \geq 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, q),$$
$$\tilde{\vartheta}_k \leq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

c)

$$\tilde{\ell}_k(g_k - 1) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$
$$\tilde{\vartheta}_k \cdot g_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Z poslední rovnice vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{q} \tilde{\vartheta}_k g_k = 0.$$

Násobíme-li dále rovnici a) číslem $\tilde{X}_\nu$, uvážíme-li dle c) vztah $\tilde{\ell}_k/g_k = \tilde{\ell}_k$, zvolíme-li $\tilde{\ell}_0 = 1/g_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ a zavedeme-li substituce (3.101), dostáváme z rovnic a) vztah

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{w}_i a_{i\nu} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\ell}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{w}_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Dále užitím záměny (3.102), (3.103) a $\lambda_k = \tilde{\ell}_k$ dostáváme podmínku (3.104)

$$\sum_{i=1}^{m_q} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Z definice proměnných δ_i dále plyne

$$\sum_{i=1}^{m_0} \tilde{\delta}_i \sigma_i = 1, \qquad \tilde{\delta}_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m_q).$$

Vidíme tedy, že stacionární bod vázaného extrému funkce g_0 (levé strany nerovnosti (3.109)) je shodný se stacionárním bodem funkce G (pravé strany nerovnosti (3.109)). Navíc vidíme, že tzv. duální proměnné $\boldsymbol{\delta}$ mají ve své vlastní podstatě velmi úzký vztah s Lagrangeovými multiplukátory.

Uvážíme-li shora řečené, pak vidíme, že nejen duální proměnné $\boldsymbol{\delta}$ mají charakter Lagrangeových multiplikátorů, ale také že funkce $G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\delta})$ je transformovanou Lagrangeovou funkcí. Dle vět o sedlovém bodě[17] pak můžeme psát

$$g_0(\boldsymbol{X}) \geq G(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{\delta}}) \geq \min_{\mathbf{X} > \mathbf{0}} G(\boldsymbol{X}, \hat{\boldsymbol{\delta}}) = G(\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{\delta}}) = g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = \max_{\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}} G(\hat{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{\delta}) = \max_{\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{D}} \tilde{G}(\boldsymbol{\delta}) \geq G(\hat{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{\delta}).$$

Opět tedy máme vztah (3.111)

$$\min_{\boldsymbol{X} \in \Xi} g_0(\boldsymbol{X}) = \max_{\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{D}} \tilde{G}, \quad \tilde{G} = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\delta_i} \right)^{\sigma_i \delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k},$$

kde

$$\mathbb{D} = \left\{ \boldsymbol{\delta} \mid \delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m_q), \qquad \sum_{i=1}^{m_q} \sigma_i \delta_i a_{i\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, M), \qquad \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \delta_i = 1 \right\}$$

a

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \delta_i.$$

Pro úplnost diskutovaného přístupu využívajícího metodu Lagrangeových multiplikátorů zopakujme větu o postačující podmínce extrému pro hladké úlohy s rovnostmi a nerovnostmi:[18] Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor, $\mathbb{U}$ otevřená množina v $\mathbb{X}$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{U}$. Nechť funkce $f_i : \mathbb{U} \to \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, \ldots, m)$ a $F_j : \mathbb{U} \to \mathbb{R} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou diferencovatelné v přípustném bodě úlohy

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \inf \mid F_j(\boldsymbol{x}) = 0, f_i \leq 0$$

a nechť mají v tomto bodě druhou derivaci. Utvořme množinu indexů

$$\mathbb{J} \triangleq \{ i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid f_i(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \}.$$

Neaktivní nerovnosti můžeme z našich dalších úvah vyloučit, jelikož nemají na řešení vázaného extrému vliv.

Nechť existují Lagrangeovy multiplikátory $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $\alpha > 0$ tak, že $\lambda_i > 0 \quad (i \in \mathbb{J})$, $\lambda_0 = 1$,

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{y}}) = f_{0,\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i \in \mathbb{J}} \hat{\lambda}_i f_{i,\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j F_{j,\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$$

---

[17] [Alexejev *et al.*, 1991] s. 49.

[18] Srvn. také [Alexejev *et al.*, 1991] s. 248.

a

$$\boldsymbol{h}^T \mathcal{L}_{\boldsymbol{xx}} \boldsymbol{h} \geq 2\alpha \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{h}$$

pro libovolné $\boldsymbol{h}$ z prostoru

$$\mathbb{H} = \{\boldsymbol{h} \mid f_{i,\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad (i \in \mathbb{J}), \qquad F_{j,\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)\}\,.$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ realizuje lokální minimum v dané úloze.

Citovanou větu použijme na naši úlohu (3.98). Máme $\tilde{\vartheta}_k = 0$, což odpovídá neostré nerovnosti $g_k > 0$, a z podmínek $g_k - 1 \leq 0$ uvažujme pouze ty, které jsou aktivní ($g_k(\hat{\boldsymbol{X}}) = 1$), neaktivní vedlejší podmínky neovlivní řešení původní úlohy, a proto je můžeme ze všech úvah vyloučit a myšleným přeznačením používat původní značení. Dle shora řečeného máme

$$\mathcal{L}_{X_\nu} = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_0} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_k} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \tilde{\vartheta}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, M),$$

kde

$$\tilde{\lambda}_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Pro $\nu \neq \eta$ platí

$$\mathcal{L}_{X_\nu X_\eta} = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{c_i a_{i\nu} a_{i\eta}}{g_0} \tilde{X}_\nu^{-1} \tilde{X}_\eta^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{c_i a_{i\nu} a_{i\eta}}{g_k} \tilde{X}_\nu^{-1} \tilde{X}_\eta^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}}$$

Pro $\nu = \eta$ pak

$$\mathcal{L}_{X_\nu X_\nu} = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_0} (a_{i\nu} - 1) \tilde{X}_\nu^{-2} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_k} (a_{i\nu} - 1) \tilde{X}_\nu^{-2} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}}$$

Souhrnně pro všechna ν, η můžeme psát při označení $\mathcal{L}_{X_\nu X_\eta} = \mathcal{L}_{,\nu\eta}$

$$\mathcal{L}_{,\nu\eta} = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{c_i a_{i\nu} a_{i\eta}}{g_0} \tilde{X}_\nu^{-1} \tilde{X}_\eta^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{c_i a_{i\nu} a_{i\eta}}{g_k} \tilde{X}_\nu^{-1} \tilde{X}_\eta^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} -$$

$$-\delta_{\nu\eta} \left(\sum_{i=1}^{m_0} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_0} \tilde{X}_\nu^{-2} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{c_i a_{i\nu}}{g_k} \tilde{X}_\nu^{-2} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right),$$

kde Kroneckerovo delta

$$\delta_{\nu\eta} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \nu = \eta, \\ 0 \text{ pro } \nu \neq \eta. \end{cases}$$

Naší pozornost nyní zaměřme na množinu $\mathbb{H}$ z citované věty. Tam zmíněná podmínka

$$f_{i,\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{h} = 0$$

nabývá v našem případě tvaru

$$g_{k,\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{h} = 0$$

tedy

$$\sum_{\nu=1}^{M} g_{k,X_\nu} \cdot h_\nu = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, q).$$

Na obecnosti se nic nezmění substitucí

$$h_\nu = z_\nu \tilde{X}_\nu,$$

jejímž užitím, vzhledem k tomu, že

$$g_{k,X_\nu}(\tilde{\boldsymbol{X}}) = g_{k,\nu}(\tilde{\boldsymbol{X}}) = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \tilde{X}_\nu^{-1} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}},$$

nabývá poslední podmínka tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \cdot z_\nu = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Dělíme-li dále tyto rovnice příslušným číslem $g_k(\tilde{\boldsymbol{X}})$, můžeme při použití substitucí (3.101), (3.102) a (3.103) psát poslední rovnost jako

$$\sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\nu} \sigma_i \tilde{\delta}_i z_\nu = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Kvadratickou formu

$$\boldsymbol{h}^T \mathfrak{L}_{\boldsymbol{XX}} \boldsymbol{h} = \sum_{\nu,\eta=1}^{M} h_\nu \mathfrak{L}_{,\nu\eta} h_\eta = \sum_{\nu,\eta=1}^{M} z_\nu \tilde{X}_\nu \mathfrak{L}_{,\nu\eta} z_\eta \tilde{X}_\eta$$

z téže věty upravíme podobným způsobem na

$$\sum_{\nu,\eta=1}^{M} z_\nu z_\eta \left(\sum_{i=1}^{m_0} a_{i\nu} a_{i\eta} \sigma_i \tilde{w}_i + \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\nu} a_{i\eta} \sigma_i \tilde{w}_i - \delta_{\nu\eta} \sum_{i=1}^{m_0} a_{i\nu} \sigma_i \tilde{w}_i - \right.$$

$$\left. - \delta_{\nu\eta} \sum_{k=1}^{q} \tilde{\lambda}_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\nu} \sigma_i \tilde{w}_i \right) \geq \sum_{\nu=1}^{M} 2\alpha z_\nu^2.$$

Pokud dále použijeme podmínky (3.104), dostáváme postačující podmínku pro lokální minimum naší úlohy ve tvaru

$$\sum_{\nu,\eta=1}^{M} z_\nu z_\eta \sum_{i=1}^{m_q} a_{i\nu} a_{i\eta} \sigma_i \tilde{\delta}_i \geq \sum_{\nu=1}^{M} 2\alpha z_\nu^2$$

$$\forall \boldsymbol{z} \in \left\{ \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_M) \mid \sum_{\nu=1}^{M} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_{i\nu} \sigma_i \tilde{\delta}_i z_\nu = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q) \right\}.$$

Poněkud přísnější podmínkou je požadavek platnosti pozitivní definitnosti poslední kvadratické formy pro všechna $\boldsymbol{z}$ (tedy bez omezení se pouze na $\boldsymbol{z}$ z poslední množiny).

Uvažujme případ, kdy g_0 nabývá záporných hodnot.
V případě, kdy g_0 nabývá záporných hodnot, je nutno psát nerovnost (3.99) ve tvaru

$$g_0 \geq g_0 \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{-\lambda_k} = g_0 \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\sigma_0 \lambda_k}, \tag{3.113}$$

kde

$$\lambda_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

a

$$\sigma_0 = \operatorname{sgn}\, g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = -1.$$

Platí

$$\arg\min g_0 = \arg\max(-g_0) = \arg\min \frac{-1}{g_0} = \arg\min \sigma_0 g_0^{\sigma_0}.$$

Násobíme-li nerovnost (3.113) záporným číslem $\sigma_0 = -1$, obrací nerovnost svou orientaci. Mocníme-li vzniklou nerovnost záporným číslem $\sigma_0 = -1$, mění tato nerovnost opět svou orientaci:

$$\sigma_0 g_0^{\sigma_0} \geq \sigma_0 g_0^{\sigma_0} \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\sigma_0^2 \lambda_k} = (\sigma_0 g_0)^{\sigma_0} \cdot \prod_{k=1}^{q} g_k^{\lambda_k} \triangleq G_z.$$

Hledejme stacionární bod pravé strany. Ve stacionárním bodě je logaritmická derivace dle všech proměnných rovna nule, tedy

$$\left.\frac{\partial \ln G_z}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \left.\frac{\sigma_0 \partial \ln(\sigma_0 g_0)}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \left.\frac{\partial \ln g_k}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} = 0. \tag{3.114}$$

Zavedeme-li primární váhy předpisem

$$w_i = \frac{\sigma_i c_i}{\sigma_0 \tilde{g}_0} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0) \tag{3.115}$$

a

$$w_i = \frac{\sigma_i c_i}{\tilde{g}_k} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \qquad (i = m_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{3.116}$$

a všimneme-li si, že

$$\sigma_0 \left.\frac{\partial \ln(\sigma_0 g_0)}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 \tilde{g}_0} \cdot \sigma_0 \left.\frac{\partial g_0}{\partial \ln X_\nu}\right|_{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \frac{\sigma_0}{\tilde{g}_0} \sum_{i=1}^{m_0} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{w}_i,$$

nabývá podmínka (3.114) tvaru

$$\sum_{i=1}^{m_0} \tilde{w}_i \sigma_i a_{i\nu} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \tilde{w}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0.$$

Zavedeme-li dále, tak jako shora, duální proměnné δ_i

$$\delta_i = w_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0)$$

a

$$\delta_i = \lambda_k w_i > 0 \qquad (i = m_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2, \ldots, m_k),$$

pro které z hořejších důvodů platí

$$\sum_{i=1}^{m_0} \tilde{\sigma}_i \delta_i = \sigma_0$$

a

$$\lambda_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

dostáváme podmínku kladenou na stacionární bod ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m_q} \tilde{\delta}_i \sigma_i a_{i\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M).$$

Funkci

$$G_z = \sigma_0 g_0^{\sigma_0} \prod_{k=1}^{q} g_k^{\lambda_k}$$

upravíme podobným způsobem jako funkci G v hořejším případě.

$$G_z = \sigma_0 g_0^{\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \prod_{k=1}^{q} g_k^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i},$$

$$G_z = \sigma_0 \prod_{i=1}^{m_0} g_0^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} g_k^{\sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Užitím definic (3.115) a (3.116) máme v bodě $\tilde{\boldsymbol{X}}$

$$\tilde{G}_z = \sigma_0 \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\sigma_0 \tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i},$$

$$\tilde{G}_z = \sigma_0 \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^{\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Ve stacionárním bodě funkce G_z dle shora řečeného platí

$$\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \tilde{\delta}_i \sigma_i = 0$$

a jelikož také

$$\sigma_0 \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^{\sigma_0} = 1,$$

máme

$$\sigma_0 \tilde{g}_0^{\sigma_0} \geq \tilde{G}_z = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k},$$

a konečně

$$\tilde{g}_0 \geq \sigma_0 \left(\prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{\lambda_k} \right)^{\sigma_0}. \tag{3.117}$$

Vztah (3.117) platí nejen pro případ, kdy $\sigma_0 = \operatorname{sgn} g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = -1$, ale také tehdy, je-li $\sigma_0 = \operatorname{sgn} g_0(\hat{\boldsymbol{X}}) = 1$, jak je vidět ze srovnání vztahů (3.110) a (3.117).

3.6.5 Obecnější tvar hořejších úloh

Uvažujme úlohu ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \arg \min_{X_\nu \in \mathbb{X}} g_0, \qquad g_0 = \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}},$$

$$\mathbb{X} \equiv \left\{ X_\nu > 0 \ (\nu = 1, 2, \ldots, M) \mid 0 < \zeta_k g_k^{z_k} \le 1, \ g_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \ (k = 1, 2, \ldots, q) \right\},$$

kde $c_i \lesseqgtr 0$, $\zeta_k = \pm 1$, $z_k = \pm 1$ a kde $a_{i\mu}$ jsou nějaká libovolně pevně daná reálná čísla.

Uvažujme opět kladná čísla λ_k a konstruujme nerovnost

$$g_0 \ge g_0 \cdot \prod_{k=1}^{q} (\zeta_k g_k)^{\sigma_0 \lambda_k z_k} . \tag{3.118}$$

Tuto nerovnost násobme číslem $\sigma_0 = \operatorname{sgn}\, g_0(\hat{\boldsymbol{X}})$ a mocněme opět číslem σ_0, tím dostáváme nerovnost

$$\sigma_0 g_0^{\sigma_0} \ge \sigma_0 g_0^{\sigma_0} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\zeta_k g_k)^{\lambda_k z_k} \triangleq G_\zeta \tag{3.119}$$

platnou jak pro $\sigma_0 = 1$ tak pro $\sigma_0 = -1$. Hledejme stacionární bod pravé strany této nerovnosti. Ve stacionárním bodě je logaritmická derivace dle všech proměnných rovna nule. Tedy

$$\frac{\partial \ln G_\zeta}{\partial \ln X_\nu} = \frac{\sigma_0 \partial \ln \sigma_0 g_0}{\partial \ln X_\nu} + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k z_k \frac{\partial \ln \zeta_k g_k}{\partial \ln X_\nu} = 0. \tag{3.120}$$

Zavedeme-li primární váhy předpisy

$$w_i = \frac{\sigma_i c_i}{\sigma_0 \tilde{g}_0} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0) \tag{3.121}$$

a (jelikož $\zeta_k g_k > 0$)

$$w_i = \frac{\sigma_i c_i}{\zeta_k \tilde{g}_k} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} > 0 \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{3.122}$$

kde $\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i$ a uvážíme-li

$$\frac{\partial \ln \zeta_k g_k}{\partial \ln X_\nu} = \frac{\partial \ln \zeta_k g_k}{\partial \zeta_k g_k} \cdot \frac{\partial \zeta_k g_k}{\partial \ln X_\nu} = \frac{1}{\zeta_k g_k} \cdot \frac{\partial \zeta_k g_k}{\partial \ln X_\nu} = \frac{\zeta_k}{\zeta_k g_k} \cdot \frac{\partial}{\partial \ln X_\nu} \left(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} \right) =$$

$$= \frac{\zeta_k}{\zeta_k g_k} \cdot \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i a_{i\nu} \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}} = \zeta_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i a_{i\nu} w_i,$$

nabývá podmínka (3.120) tvaru

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{w}_i + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k z_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \zeta_k \sigma_i a_{i\nu} \tilde{w}_i = 0.$$

Zavedením duálních proměnných

$$\delta_i = w_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0),$$

$$\delta_i = \lambda_k w_i \zeta_k z_k \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \ (k = 1, 2, \ldots, q)$$

nabývá podmínka stacionárního bodu tvaru

$$\sum_{i=1}^{m_q} \sigma_i a_{i\nu} \tilde{\delta}_i = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, M). \tag{3.123}$$

Vedle této podmínky vyhovují duální proměnné podmínce

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{\delta}_i = \sigma_0,$$

$$\delta_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_0),$$

$$\lambda_k = z_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

kde

$$\operatorname{sgn} \delta_i = \zeta_k z_k \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

což plyne z následujících úprav.

Sečtěme

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \tilde{w}_i = \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_i^2 c_i}{\sigma_0 \tilde{g}_0} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{1}{\sigma_0} = \sigma_0$$

a pro $(k = 1, 2, \ldots, q)$

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{w}_i = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \frac{\sigma_i^2 c_i}{\zeta_k \tilde{g}_k} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{1}{\zeta_k \tilde{g}_k} \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} = \frac{1}{\zeta_k}$$

a ježto

$$\delta_i = \lambda_k w_i \zeta_k z_k \qquad (i = m_{k-1}+1, m_{k-1}+2, \ldots, m_k)$$

máme

$$\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \frac{\tilde{\delta}_i}{\lambda_k} \zeta_k z_k = \frac{1}{\zeta_k} = \zeta_k$$

a tedy

$$\lambda_k = z_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i.$$

Funkci

$$G_\zeta = \sigma_0 g_0^{\sigma_0} \prod_{k=1}^{q} (\zeta_k g_k)^{\lambda_k z_k}$$

upravíme, s použitím $\lambda_k z_k = \sum_{i=m_{k+1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i$, podobně jako shora.

$$G_\zeta = \sigma_0 g_0^{\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\zeta_k g_k)^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i},$$

$$G_\zeta = \sigma_0 \prod_{i=1}^{m_0} g_0^{\sigma_i \delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} (\zeta_k g_k)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Užitím definic (3.121) a (3.122) máme v bodě $\tilde{\boldsymbol{X}}$

$$\tilde{G}_\zeta = \sigma_0 \prod_{i=1}^{m_0} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\sigma_0 \tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \prod_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{w}_i} \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{a_{i\mu}} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i},$$

$$\tilde{G}_\zeta = \frac{\sigma_0}{\sigma_0^{\sigma_0}} \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\lambda_k \zeta_k z_k)^{\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{\mu=1}^{M} \tilde{X}_\mu^{\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \sigma_i \tilde{\delta}_i}.$$

Ve stacionárním bodě navíc platí

$$\sum_{i=1}^{m_q} a_{i\mu} \sigma_i \tilde{\delta}_i = 0,$$

a tedy také

$$\tilde{G}_\zeta = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\lambda_k \zeta_k z_k)^{h_k},$$

kde

$$h_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \tilde{\delta}_i.$$

Nerovnost (3.119) můžeme potom psát ve tvaru

$$\sigma_0 g_0^{\sigma_0} \geq \tilde{G}_\zeta = \prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\lambda_k \zeta_k z_k)^{h_k}$$

a tedy

$$g_0 \geq \sigma_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{m_q} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\tilde{\delta}_i} \right)^{\sigma_i \tilde{\delta}_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} (\lambda_k \zeta_k z_k)^{h_k} \right)^{\sigma_0}. \tag{3.124}$$

Také zde dojdeme užitím metody Lagrangeových multiplikátorů k závěrům analogickým se závěry shora předvedenými.

Porovnáním výsledků předcházejících úvah docházíme k formulaci obecné úlohy geometrického programování, kde uvažujeme $\zeta_k = z_k$ a tedy $\delta_i > 0$.

3.6.6 Obecná úloha geometrického programování

Postup řešení obecné úlohy geometrického programování (3.125) až (3.128) byl na základě shora představené filozofie a zejména na základě práce pánů Peterson, Duffin a Zener [PETERSON *et al.*, 1967] vytvořen panem Wildem[19] v sedmdesátých letech dvacátého století.

Shodně jako v případě úlohy (3.65) na str. 66 je primární úloha nalezení minima funkce

$$g_0 = \sum_{i=1}^{m_0} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}}, \tag{3.125}$$

[19] Srvn. [WILDE, 1978].

při splnění vedlejších podmínek majících tvar[20]

$$X_\mu > 0 \ (\mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.126}$$

$$0 < z_k g_k^{z_k} \leq 1 \ (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{3.127}$$

kde $z_k = 1$ nebo -1 a

$$g_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \prod_{\mu=1}^{M} X_\mu^{a_{i\mu}}, \tag{3.128}$$

přičemž q je počet vedlejších podmínek (3.127), číslu m_0 říkáme počet členů cílové funkce, číslu $(m_k - m_{k-1})$ počet členů k-té vedlejší podmínky a číslu $m = m_q$ celkový počet členů, převedena na řešení duální úlohy nalézti maximum duální funkce $v(\delta)$ dané vztahem (3.129) při splnění duálních vedlejších podmínek (3.131), (3.132) a (3.133). Tato duální úloha má tvar

$$\max_{\delta_1,\ldots,\delta_m} v, \qquad v = \sigma_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\delta_i} \right)^{\sigma_i \delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{h_k} \right)^{\sigma_0}, \tag{3.129}$$

kde

$$\lambda_k = z_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \delta_i > 0, \quad h_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \delta_i \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

a

$$\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.130}$$

při splnění lineárních vedlejších podmínek

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i a_{i\mu} \delta_i = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3.131}$$

$$\sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \delta_i = \sigma_0 = \operatorname{sgn}\, g_0(\hat{\mathrm{X}}) \tag{3.132}$$

a

$$\delta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.133}$$

Řešení této duální úlohy se začíná rozřešením vedlejších podmínek (3.131) a (3.132), kdy za konstantu σ_0 se volí číslo $+1$ či -1 tak, aby byla splněna podmínka (3.133). Tímto dostáváme vyjádření duálních proměnných ve tvaru

$$\delta_i = d_i + \sum_{j=1}^{m-M-1} d_{ij}\, r_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.134}$$

[20]Podmínka $X_\mu > 0$ vyplývá z odvození vztahu mezi primární a duální úlohou geometrického progamování. V případě proměnných X_μ nabývajících obou znamének je možné použít substituci

$$X_\mu = X_\mu^+ - X_\mu^-, \quad \text{kde} \quad X_\mu^+ > 0,\ X_\mu^- > 0.$$

Tato substituce se v podobných případech běžně používá, srvn. například [Maňas, 1979], [Vincent and Grantham, 1981] či [Rektorys, 1995], a to přes zřejmou nejednoznačnost takovéhoto rozkladu, kdy za řešení lze považovat libovolný z možných rozkladů, jehož výslednou hodnotou je řešení (tedy minimální hodnota) původní úlohy. V případě praktických technických optimalizačních úloh navíc většinou není nutné najít všechna řešení (je-li jich více), ale alespoň jedno reálně uskutečnitelné řešení daného problému.

kde r_j $(j = 1, 2, \ldots, m - M - 1)$ jsou tzv. *bázové proměnné*, které mají vyhovovat podmínce kladnosti duálních proměnných

$$d_i + \sum_{j=1}^{m-M-1} d_{ij}\, r_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.135}$$

K získání tohoto řešení je vhodné použít tzv. singulárního rozkladu matice soustavy (3.131). Symboly d_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a d_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, m - M - 1)$ jsou určeny Mooreovou-Penroseovou zobecněnou inverzí využívající právě zmíněný singulární rozklad.[21]

Duální funkce, jako funkce základních proměnných, má nyní tvar

$$v(\mathbf{r}) = \sigma_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\sigma_i c_i}{\delta_i} \right)^{\sigma_i \delta_i} \cdot \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{h_k} \right)^{\sigma_0}, \tag{3.136}$$

kde

$$\lambda_k = z_k \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \delta_i, \quad h_k = \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} \sigma_i \delta_i \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\sigma_i = \operatorname{sgn} c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.137}$$

a

$$\delta_i = d_i + \sum_{j=1}^{m-M-1} d_{ij}\, r_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Následuje řešení úlohy najíti maximum této funkce $v(\mathbf{r})$ při splnění vedlejších podmínek

$$d_i + \sum_{j=1}^{m-M-1} d_{ij}\, r_j \geq 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.138}$$

Duální cílová funkce však v tomto případě není obecně konkávní funkcí a ne vždy zde získáme konkávní funkci prostým zlogaritmováním funkce $v(\mathbf{r})$. Platí však poznámka o možnosti úpravy počtu primárních proměnných a za jistých okolností také počtu členů v primární funkci a primárních vedlejších podmínkách, a tím redukovat duální úlohu na řešení soustavy lineárních rovnic.

Avšak také v případech, kdy duální úloha není k řešení vhodnější nežli úloha primární, je sestavení duální úlohy velice přínosné. Máme totiž možnost řešit obě úlohy (primární i duální) moderní metodou zvanou genetické algoritmy. To je metoda využívající modelu evolučního procesu biologického vývoje k řešení extremálních úloh. Metoda genetických algoritmů překvapivě pěkně funguje, ale neposkytuje žádnou informaci o přesnosti, což její použitelnost velice snižuje. Ovšem v našem případě, najdeme-li s využitím genetických algoritmů nějaký bod řešení (rozumí se ve smyslu genetických algoritmů kandidující na bod řešení) primární úlohy a podobný bod úlohy duální, poskytuje rozdíl hodnot cílových funkcí primární a duální úlohy v těchto bodech odhad přesnosti. (Hodnota extrému dané úlohy musí ležet v tomto intervalu.)

3.6.7 Úprava nekanonických tvarů vedlejších podmínek na tvar kanonický

Je-li ve jmenovateli neznáná funkce – řada

Je-li ve jmenovateli neznámá funkce – řada – pak dostanu kanonický tvar geometrického programování následujícími kroky.

[21] Viz s. 276.

$$\frac{1}{\sum_{\omega=1}^{U} u_\omega} + \frac{1}{\sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon} + \frac{1}{\sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi} \leq \Delta \qquad \Big| \cdot \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi,$$

$$\sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \leq \Delta \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi.$$

Označme (přeskupme)

$$\sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi = \sum_{\pi=1}^{P} p_\pi,$$

kde platí $P = U \cdot V \cdot W$ a pro příslušné členy

$$p_\pi = u_\omega \cdot v_\upsilon \cdot w_\varpi.$$

Potom lze psát

$$\sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \leq \Delta \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi = \Delta \sum_{\pi=1}^{P-1} p_\pi + \Delta \cdot p_P,$$

$$\sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi \cdot \Delta^{-1} p_P^{-1} + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\varpi=1}^{W} w_\varpi \cdot \Delta^{-1} p_P^{-1} + \sum_{\omega=1}^{U} u_\omega \cdot \sum_{\upsilon=1}^{V} v_\upsilon \cdot \Delta^{-1} p_P^{-1} - p_P^{-1} \cdot \sum_{\pi=1}^{P-1} p_\pi \leq 1.$$

Požadavek diskrétnosti – binárnosti – návrhových veličin

Vystupuje-li v úloze požadavek diskrétnosti – binárnosti – návrhových veličin, pak je možno uvažovat spojitou úlohu a doplnit – dodat – vedlejší podmínky

$$(x-1)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, 1\}.$$

Chceme-li se ve spojité úloze vyvarovat *nul* potom zaveďme substituci (záměnu)

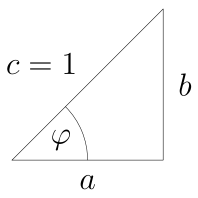
$$x = \tilde{x} - 1$$

a podmímku

$$(\tilde{x}-2)(\tilde{x}-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \in \{1, 2\}.$$

Úloha obsahující goniometrické funkce

V úloze obsahující goniometrické funkce mohu na základě pohledu na pravoúhlý trojúhelník zavést nové proměnné (a, b a c) a užitím substituce



Obrázek 3.3: Úloha obsahující goniometrické funkce

$$\tan\varphi = \tfrac{b}{a}, \quad \sin\varphi = b, \quad \cos\varphi = a$$

a vedlejší podmínky

$$a^2 + b^2 = 1$$

převést původní úlohu na kanonický tvar geometrického programování.

Pevnostní hypotéza Guestova – $\tau_{\max}$

Pevnostní hypotéza největších smykových napětí[22] (Guestova – $\tau_{\max}$) je zvláště vhodná pro práci s geometrickým programováním, ježto sama o sobě vystupuje v kanonickém tvaru.

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_k, \quad \sigma_2 - \sigma_1 \leq \sigma_k, \\
\sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_k, \quad \sigma_3 - \sigma_2 \leq \sigma_k, \\
\sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_k, \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_k.
\end{aligned}
$$

[22] Viz. [Hájek *et al.*, 1988], ss. 340.

Kapitola 4

Iterativní metody hledání extrému

Hledáme-li volné maximum funkce $f(\boldsymbol{x})$ n proměnných $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n$, můžeme pro výpočet bodu maxima využít skutečnosti, že gradient $\nabla f(\boldsymbol{x})$ udává směr největšího růstu funkce $f(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x}$. Vyjdeme-li z libovolného bodu $\boldsymbol{x}^0$, pro nějž $\nabla f(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$, a konstruujeme-li posloupnost bodů $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^t$ dle návodu

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + \eta \nabla f(\boldsymbol{x}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots),$$

můžeme, při vhodné volbě čísla $\eta > 0$, očekávat, že

$$f(\boldsymbol{x}^{t+1}) > f(\boldsymbol{x}^t).$$

Postup založený na shora zmíněném vztahu bývá nazýván gradientní metoda s krátkým krokem.

Vzhledem k neznalosti vhodné délky kroku a k velkému počtu iterací, a z toho plynoucího nasčítání zaokrouhlovacích chyb, bývá tato metoda nahrazována gradientní metodou s dlouhým krokem, kde bývá v každé iteraci volena nejvhodnější délka kroku pomocí jednorozměrné extremalizační úlohy. Například tak, aby platilo

$$f(\boldsymbol{x}^t + \eta^t \nabla f(\boldsymbol{x}^t)) = \max_{\eta \geq 0} f(\boldsymbol{x}^t + \eta \nabla f(\boldsymbol{x}^t))$$

či tak, aby

$$\eta^t = \min_{\eta \geq 0} \left\{ \eta \mid \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} f(\boldsymbol{x}^t + \eta \nabla f(\boldsymbol{x}^t)) = 0 \right\}.$$

Gradientní přístup lze užít též k vyhledávání sedlového bodu funkce $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Například můžeme konstruovat současně dvě posloupnosti

$$\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^t, \ldots,$$

$$\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}^t, \ldots,$$

které se s rostoucím t přibližují k nezápornému sedlovému bodu $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$. Ke konstrukci takovéto posloupnosti lze užít například vztahů

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + \eta \nabla_x \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{\lambda}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots),$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{t+1} = \boldsymbol{\lambda}^t - \varrho \nabla_\lambda \mathcal{L}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{\lambda}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots).$$

Z jednorozměrného případu jest ovšem patrno, že tyto metody selhávají v případě úloh nekonvexních, tj. úloh, kde v případě hledání minima není cílová funkce konvexní a v případě hledání maxima není konkávní.

4.1 Konvergence a chyba iterativních metod

4.1.1 Konvergence iteračních výpočetních postupů

Iterační postup můžeme obecně zapsat jako

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = P(\boldsymbol{x}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots).$$

Definice 4.1 (Hodnotící funkce) *Funkce $h(\boldsymbol{x})$ definovaná na množině $\mathbb{X}$ je hodnotící funkcí zobrazení P, jestliže současně platí*

i.

$$\boldsymbol{x} \notin \widehat{\mathbb{X}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}) \qquad \Rightarrow \qquad h(\boldsymbol{y}) > h(\boldsymbol{x})$$

ii.

$$\boldsymbol{x} \in \widehat{\mathbb{X}} \quad \wedge \quad \boldsymbol{y} = P(\boldsymbol{x}) \qquad \Rightarrow \qquad h(\boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{x}),$$

kde $\widehat{\mathbb{X}} \subset \mathbb{X}$ je množina všech optimálních řešení dané maximalizační úlohy.

Věta 4.2 (Konvergence obrazů zobrazení P) *Mějme iterační postup popsaný zobrazením P. Nechť je posloupnost*

$$\boldsymbol{x}^t \qquad (t = 0, 1, \ldots) \tag{4.1}$$

generována předpisem

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = P(\boldsymbol{x}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots),$$

kde $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{X}$ je daný počáteční bod. Nechť dále h je spojitá hodnotící funkce zobrazení P na $\mathbb{X}$. Jestliže všechny body posloupnosti (4.1) jsou obsaženy v nějaké kompaktní množině $\mathbb{S} \subset \mathbb{X}$ a je-li P spojité alespoň v $\mathbb{X} \smallsetminus \widehat{\mathbb{X}}$, pak každá konvergentní podposloupnost posloupnosti (4.1) konverguje k nějakému bodu $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$.

Za hodnotící funkci bývá volena funkce, jejiž extrém hledáme. Rychlost konvergence se u extremalizačních úloh nejčastěji určuje měřením rychlosti přibližování členů posloupnosti (4.1) k bodu maxima $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{X}$, přičemž se vzdálenosti $\boldsymbol{x}^t$ od $\hat{\boldsymbol{x}}$ měří čtvercem euklidovské vzdálenosti

$$\sigma(\boldsymbol{x}^t, \hat{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^t - \hat{x}_j\right)^2.$$

Definice 4.3 (Lineární a superlineární konvergence) *Je-li*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(\boldsymbol{x}^{t+1}, \hat{\boldsymbol{x}})}{\sigma(\boldsymbol{x}^t, \hat{\boldsymbol{x}})} = \alpha < 1,$$

říkáme, že posloupnost (4.1) konverguje lineárně s konvergenčním poloměrem α. Je-li $\alpha = 0$, mluvíme o superlineární konvergenci.

4.1.2 Chyby a jejich měření

Za měřítko velikosti chyby bereme vhodně zvolenou vzdálenost bodů $\bar{\boldsymbol{x}}$ a $\hat{\boldsymbol{x}}$, kde $\bar{\boldsymbol{x}}$ je řešení nalezené výpočetním postupem a $\hat{\boldsymbol{x}}$ je přesným řešením úlohy. Používaná metrika má tvar

$$\varrho(\bar{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \left((\bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{D}(\bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}})\right)^{0.5},$$

kde $\boldsymbol{D}$ je diagonální matice s nezápornými vahami pro jednotlivé složky.

4.2 Iterační výpočetní postupy při vyšetřování volných extrémů

4.2.1 Jednorozměrná extremalizace

Newtonova metoda: Vyšetřujme maximum funkce $p(y)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolíme-li bod $y_i \in \langle a, b\rangle$ a jsme-li schopni vypočítat hodnoty

$$p(y_i),\ p'(y_i),\ p''(y_i),$$

můžeme aproximovat funkci $p(y)$ v okolí bodu y_i polynomem 2. stupně[1]

$$q(y) = p(y_i) + p'(y_i)(y - y_i) + \frac{1}{2}p''(y_i)(y - y_i)^2.$$

Jako aproximaci bodu maxima funkce $p(y)$ použijeme bod $y = y_{i+1}$, v němž je derivace funkce $q(y)$ nulová; tedy

$$q'(y_{i+1}) = p'(y_i) + p''(y_i)(y_{i+1} - y_i) = 0,$$

z čehož dostáváme

$$y_{i+1} = y_i - \frac{p'(y_i)}{p''(y_i)}.$$

Je-li funkce $p(y)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ ryze konkávní, potom posloupnost $(y_0, y_1, \ldots)$, kde $y_i \in \langle a, b\rangle$, konverguje k bodu maxima $\hat{y}$ funkce $p(y)$ na $\langle a, b\rangle$.

4.2.2 Vícerozměrná extremalizace

Metoda Gaussova-Seidelova: Převádí problém vícerozměrné extremalizace na řadu jednorozměrných optimalizací. Při hledání minima funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ z výchozího bodu $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$ se nejprve uvažuje za jedinou proměnnou proměnná x_1, ostatní proměnné x_2^0, $x_3^0, \ldots, x_n^0$ zůstávají konstantní. Tak vyšetříme bod $\boldsymbol{x}_1^0$, ve kterém má funkce $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ minimum. Z bodu $\boldsymbol{x}_1^0 = (x_1^1, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$ se další jednodimensionální optimalizací s proměnnou x_2 získá bod

$$\boldsymbol{x}_2^0 = (x_1^1, x_2^1, x_3^0, \ldots, x_n^0)^T.$$

Analogickým postupem dospějeme až k získání bodu $\boldsymbol{x}_n^0 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)^T$, který označíme $\boldsymbol{x}^1$. Nyní za proměnnou zvolíme opět x_1 a optimalizace pokračuje dalšími cykly tak dlouho, dokud dochází k poklesu hodnot cílové funkce f a ke změnám hodnot optimalizačních proměnných při přechodu od bodu $\boldsymbol{x}^i$ k bodu $\boldsymbol{x}^{i+1}$.

Gradientní metody a Newtonova metoda: Při gradientních metodách vyjdeme z nějakého bodu $\boldsymbol{x}^0$ a další členy posloupnosti $\{\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots\}$ získáme dle vztahu

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + \eta\nabla f(\boldsymbol{x}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots).$$

Tyto metody jsou východiskem pro odvození složitějších, ale lépe konvergujících postupů. U metod s dlouhým krokem je vztah pro η (byl uveden shora) často upraven na tvar závisející na t. Při odvození Newtonovy metody pro funkci více proměnných se opět vychází z aproximace maximalizované funkce v bodě $\boldsymbol{x}^t$ prvními třemi členy Taylorova rozvoje a tuto aproximaci maximalizujeme anulováním derivace. Tedy

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}^t) + \nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^t) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^t)^T\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^t),$$

[1]Srvn. s prvními třemi členy Taylorovy řady. Viz s. 280.

kde $\nabla^2 = \nabla\nabla^T$, což značí tzv. diadický (též tensorový, resp. direktní či Kroneckerův) součin, jehož výsledkem je matice. Anulováním derivace pravé strany dostáváme

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t - (\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^t))^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x}^t).$$

Jsou-li potíže s analytickým vyjádřením derivací, lze je spočíst numericky dle známých diferenčních schémat.[2]

Definice 4.4 (Konjungované vektory) *Vektory $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, \ldots, \boldsymbol{d}^r$ jsou konjugované vzhledem k matici $\boldsymbol{C}$, jestliže žádný z nich není nulový a*

$$\boldsymbol{d}^{iT}\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}^j = 0 \quad \textit{pro} \quad i \neq j.$$

Metoda konjugovaných směrů: S užitím konjugovaných vektorů lze konstruovat iterační výpočetní postup, který dosáhne bodu maxima u ryze konkávní kvadratické funkce po konečném počtu kroků. Pokud se jedná o obecnou konkávní funkci, i v tom případě lze dosáhnout poměrně rychlé konvergence k bodu maxima. Mějme kvadratickou úlohu maximalizovat funkci

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$

kde $\boldsymbol{C}$ je pozitivně definitní symetrická matice typu (n, n) a $\boldsymbol{c}$ je n-rozměrný vektor. Pro bod maxima $\hat{\boldsymbol{x}}$ uvedené funkce platí

$$\nabla f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}.$$

Věta 4.5 (Konvergence metody konjungovaných směrů) *Nechť $\{\boldsymbol{d}^0, \boldsymbol{d}^1, \ldots, \boldsymbol{d}^{n-1}\}$ je posloupnost nenulových vektorů konjugovaných vzhledem k $\boldsymbol{C}$. Pro každé $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{E}_n$ a*

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y_t\boldsymbol{d}^t \qquad (t = 0, 1, \ldots, n-1),$$

kde

$$y_t = \frac{\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\boldsymbol{d}^t}{2\boldsymbol{d}^{tT}\boldsymbol{C}\boldsymbol{d}^t},$$

platí $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^n$. (Tedy, iterační metoda konverguje nejvýše po n-krocích).

Pro obecný případ maximalizované funkce užíváme shora popsaný iterační postup, kde klademe

$$2\boldsymbol{C} = -\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t).$$

Posloupnost konjugovaných vektorů (směrů) můžeme volit tak, že klademe

$$\boldsymbol{d}^0 = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)$$

a další konjugované vektory klademe rovny lineární kombinaci gradientu v dosaženém bodě a dosavadního směru pohybu . Toto pojetí nazýváme metodou konjugovaných gradientů.

Realizace metody konjugovaných gradientů v případě maximalizační úlohy: Za počáteční bod zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{E}_n$. Dále klademe

$$\boldsymbol{d}^0 = \nabla f(\boldsymbol{x}^0),$$

$$y_t = -\frac{\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\,\boldsymbol{d}^t}{\boldsymbol{d}^{tT}\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\,\boldsymbol{d}^t},$$

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y_t\boldsymbol{d}^t,$$

[2]Srvn. např. [Vitásek, 1987].

$$\boldsymbol{d}^{t+1} = \nabla f(\boldsymbol{x}^{t+1}) - \frac{\nabla^T f(\boldsymbol{x}^{t+1}) \nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\,\boldsymbol{d}^t}{\boldsymbol{d}^{tT} \nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\,\boldsymbol{d}^t} \cdot \boldsymbol{d}^t.$$

Při této metodě se doporučuje výpočetní postup po každých n krocích reinicializovat, tj. položit $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^n$, a pro tuto hodnotu $\boldsymbol{x}^0$ opět použít právě uvedených vztahů pro dalších n kroků.

Úpravou této metody tak, aby nebyl v každém kroku nutný výpočet druhých derivací, vznikla metoda, ve které probíhá výpočet dle následujících pravidel. Volíme $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{E}_n$ a klademe

$$\boldsymbol{d}^0 = \nabla f(\boldsymbol{x}^0),$$

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y_t \boldsymbol{d}^t,$$

kde y_t maximalizuje funkci

$$p_t(y) = f(\boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{d}^t)$$

při $y \in \langle 0, \infty)$ a

$$\boldsymbol{d}^{t+1} = \nabla f(\boldsymbol{x}^{t+1}) + \frac{\nabla^T f(\boldsymbol{x}^{t+1}) \nabla f(\boldsymbol{x}^{t+1})}{\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \nabla f(\boldsymbol{x}^t)} \cdot \boldsymbol{d}^t.$$

Po dosažení bodu $\boldsymbol{x}^n$ provádíme opět reinicializaci, tj. klademe $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^n$ a výpočty opakujeme. Obdobou těchto metod je metoda paralelních tangent.

Metoda paralelních tangent: Základní varianta těchto metod je v případě hledání maxima dána následným postupem. Zvolit $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{E}_n$ a položit

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + y_0 \nabla f(\boldsymbol{x}^0),$$

kde y_0 maximalizuje funkci

$$p_0(y) = f(\boldsymbol{x}^0 + y\nabla f(\boldsymbol{x}^0)).$$

Dále počítáme

$$\boldsymbol{\xi}^t = \boldsymbol{x}^t + y_t \nabla f(\boldsymbol{x}^t),$$

kde y_t maximalizuje funkci

$$p_t(y) = f(\boldsymbol{x}^t + y\nabla f(x^t)).$$

Konečně klademe

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^{t-1} + h_t(\boldsymbol{\xi}^t - \boldsymbol{x}^{t-1}),$$

kde h_t maximalizuje funkci

$$q_t(h) = f(\boldsymbol{x}^{t-1} + h(\boldsymbol{\xi}^t - \boldsymbol{x}^{t-1})).$$

Po n krocích provádíme opět reinicializaci.

Kvasinewtonovské metody: (Metody s proměnnou metrikou, metody odkloněných gradientů) Jedná se o metody snažící se spojit jednoduchost gradientní metody a dobrou konvergenci Newtonovy metody. Uvažují iterační vzorec

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y_t \boldsymbol{S}_t \nabla f(\boldsymbol{x}^t),$$

kde $\boldsymbol{S}_t$ aproximuje (v nějakém smyslu) vztah $\left(\nabla\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)\right)^{-1}$ a y_t se určí extremalizací funkce

$$p_t(y) = f(\boldsymbol{x} + y\boldsymbol{S}_t \nabla f(\boldsymbol{x}^t)).$$

Maximalizační výpočet základní metodou tohoto typu probíhá dle následujících pravidel.

Volíme $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{E}_n$ a $\boldsymbol{S}_0$ jako libovolnou symetrickou[3] pozitivně definitní[4] matici, například jako matici jednotkovou. Dále volíme

$$\boldsymbol{d}^t = \boldsymbol{S}_t \nabla f(\boldsymbol{x}^t) \qquad (t = 0, 1, \ldots)$$

---

[3]Viz s. 273.

[4]Srvn. s. 275.

a

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y_t \boldsymbol{d}^t,$$

kde y_t maximalizuje funkci

$$p_t(y) = f(\boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{d}^t) \quad \text{při} \quad y \geq 0.$$

Při označení

$$\boldsymbol{v}^t = y_t \boldsymbol{d}^t$$

a

$$\boldsymbol{w}^t = \nabla f(\boldsymbol{x}^t) - \nabla f(\boldsymbol{x}^{t+1})$$

se volí[5]

$$\boldsymbol{S}_{t+1} = \boldsymbol{S}_t + \frac{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{v}^{tT}}{\boldsymbol{v}^{tT} \boldsymbol{w}^t} - \frac{\boldsymbol{S}_t \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w}^{tT} \boldsymbol{S}_t}{\boldsymbol{w}^{tT} \boldsymbol{S}_t \boldsymbol{w}^t}.$$

4.3 Iterační metody pro konvexní úlohy s vedlejšími podmínkami

4.3.1 Typy vedlejších podmínek

Pomocí úprav vedlejších podmínek (shora popsaným způsobem) lze úlohu vždy upravit tak, aby odpovídala zařazení do jedné z následných skupin.

Standardní typy vedlejších podmínek:

1. $$g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

2. $$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

3. $$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

4. $$g_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

5. $$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad r_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

6. $$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad r_k(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l), \qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4.3.2 Vyhledávání vyhovujícího bodu

Pokud extremalizační metoda – tj. metoda řešení extremalizační úlohy – vyžaduje, aby výchozí bod byl bodem přípustným, může být při větším počtu vedlejších podmínek 1. typu jeho nalezení poněkud obtížné. Z tohoto důvodu se často sestavuje pomocná minimalizační úloha: minimalizuj funkci

$$S = \sum_{k=1}^{m} g_k^2$$

bez vedlejších podmínek, kterou můžeme řešit některou shora uvedenou metodou. Existuje-li bod, v němž jsou splněny všechny podmínky 1. typu, pak v tomto bodě je funkce S minimální a to $S = 0$.

[5] [Maňas, 1979].

4.3.3 Konvexní programování

Nebude-li dále uvedeno jinak, budeme v tomto paragrafu, tj. v paragrafu 4.3 *Iterační metody pro konvexní úlohy s vedlejšími podmínkami*, hovořit o konvexním programování, čímž rozumíme úlohu o nalezení maxima funkce $f(\boldsymbol{x})$ při omezení některého z typů shora uvedených, při požadavku *konkávnosti* funkce $f(\boldsymbol{x})$ a všech omezení $g_j(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{r}_k$.

4.3.4 Penalizační a bariérové metody

Penalizační a bariérové metody převádějí úlohu nelineárního programování s omezeními 3. typu na extremalizační úlohu bez vedlejších podmínek. Při užití penalizační metody zvolíme funkci jedné reálné proměnné $p(t)$ s vlastnostmi

$$p(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t < 0$$

a

$$p(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \geq 0.$$

Potom nahradíme maximalizační úlohu nelineárního programování s omezeními 3. typu úlohou vyhledat volné maximum funkce

$$P_M(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - M \sum_{j=1}^{m} p(g_j(\boldsymbol{x})) - M \sum_{i=1}^{n} p(x_i), \tag{4.2}$$

kde $M > 0$ je vhodně zvolená konstanta. Funkce $P_M(\boldsymbol{x})$ se nazývá penalizační funkce. Označme symbolem $\boldsymbol{x}^p(M)$ bod (globálního) maxima funkce (4.2) a symbolem $\hat{\boldsymbol{x}}$ bod maxima výchozí nelineární úlohy. Platí následující věta:

Věta 4.6 (Konvergence penalizační metody) *Jsou-li funkce*

$$f(\boldsymbol{x}), \quad g_j(\boldsymbol{x}) \ (j = 1, 2, \ldots, m), \quad p(t)$$

spojité a je-li

$$M_1, M_2, \ldots$$

rostoucí posloupnost s vlastností

$$\lim_{k \to \infty} M_k = \infty,$$

pak každý hromadný bod posloupnosti $\boldsymbol{x}^p(M_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ je bodem globálního maxima úlohy nelineárního programování s omezeními 3. typu.

Na funkci $p(t)$ jsou v praxi kladeny navíc požadavky, aby funkce $P_M(\boldsymbol{x})$ byla konkávní v $\boldsymbol{x}$, je-li původní úloha úlohou konvexního programování, tj. aby každé lokální maximum funkce $P_M(\boldsymbol{x})$ bylo i jejím maximem globálním.

V případě podmínek 6. typu volíme penalizační funkci ve tvaru

$$P_M(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - M \sum_{j=1}^{m} p(g_j(\boldsymbol{x})) - M \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - M \sum_{k=1}^{l} q(r_k(\boldsymbol{x})),$$

kde

$$p(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t < 0,$$

$$p(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \geq 0,$$

$$q(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t = 0,$$

$$q(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t \neq 0.$$

Myšlenka bariérových metod je podobná jako u metod penalizačních, pouze namísto penalizační funkce užíváme funkci bariérovou, která má – v případě vedlejších podmínek 3. typu – tvar

$$B(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{m} p_j(g_j(\boldsymbol{x})) - \sum_{i=1}^{n} p_{m+i}(x_i), \tag{4.3}$$

kde $p_j(t)$ jsou takové funkce jedné proměnné, že

$$\lim_{t \to 0^+} p_j(t) = \infty \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+n).$$

Hledáme volné maximum funkce (4.3), přičemž musíme výpočet začít v bodě, který je *vnitřním* bodem množiny přípustných řešení původní úlohy. Možné tvary funkcí $p_j(t)$ jsou například

$$p_j(t) = t^{-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+n)$$

či

$$p_j(t) = -\ln(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+n).$$

4.3.5 Metody přípustných směrů

Uvažujme úlohu nelineárního programování maximalizovat funkci $f(\boldsymbol{x})$ při omezení 3.typu.

Definice 4.7 (Přípustný směr) *Nechť $\boldsymbol{x}^t$ je bod, splňující omezení 3. typu. Přípustným směrem (v bodě $\boldsymbol{x}^t$) nazveme takový vektor $\boldsymbol{s}$, pro který současně platí:*

1.
$$g_j(\boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{s}) \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad \boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0},$$

2. *Existuje číslo y $(0 < y \leq 1)$ takové, že*
$$f(\boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{s}) > f(\boldsymbol{x}^t).$$

Známe-li přípustný směr v bodě $\boldsymbol{x}^t$, můžeme zavést

$$\boldsymbol{x}^{t+1} = \boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{s}$$

a tímto způsobem pokračovat ve výpočtu vždy přípustným směrem v posledním bodě. Jestliže v bodě $\boldsymbol{x}^{t+k}$ neexistuje již žádný přípustný směr, víme, že jsme nalezli alespoň lokální maximum funkce $f(\boldsymbol{x})$.

Zabývejme se úlohou s lineárními omezeními, tj. úlohou maximalizovat funkci $f(\boldsymbol{x})$ při omezeních

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n), vektor $\boldsymbol{b}$ m-rozměrný vektor a funkce $f(\boldsymbol{x})$ konkávní funkce na množině $\mathbb{X}$. Budeme předpokládat, že $\mathbb{X}$ je množina omezená. Všechny přípustné směry v bodě $\boldsymbol{x}^t$ musí v tomto případě splňovat soustavu nerovností

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{s}) \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{s} \geq 0, \tag{4.4}$$

a vzhledem k 2. požadavku poslední definice i podmínku

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{s} > 0.$$

Z přípustných směrů vybereme ten směr, který zajišťuje pokud možno velký přírůstek funkce $f(\boldsymbol{x})$. Toho dosáhneme tak, že řešíme úlohu maximalizovat funkci

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{s}$$

při omezení (4.4). Je-li $\hat{\boldsymbol{s}}$ řešením této úlohy, volíme y, které použijeme při výpočtu $\boldsymbol{x}^{t+1}$ tak, aby funkce $f(\boldsymbol{x})$ byla na úsečce

$$\boldsymbol{x}^t + y\hat{\boldsymbol{s}} \qquad (0 < y \leq 1)$$

maximální. Jestliže při maximalizaci výrazu

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{s}$$

získáme $\hat{\boldsymbol{s}}$, které nedává již přípustný směr (neexistuje $y > 0$), nalezli jsme globální maximum.

Je-li množina přípustných řešení

$$\mathbb{X} \equiv \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0\}$$

neomezená, může nastat případ, že úloha lineárního programování s účelovou funkcí

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{s}$$

a omezeními (4.4) nemá řešení, neboť účelová funkce není na množině přípustných řešení omezená, přestože původní úloha má optimální řešení. Pak je třeba k podmínkám (4.4) přidat další, takzvanou normalizační, podmínku, která omezí velikost přípustných řešení v podmínkách (4.4). Takovou podmínkou může být například podmínka

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} \leq 1$$

nebo podmínka zachovávající lineární charakter pomocné úlohy[6]

$$\boldsymbol{e}_{1\times n}\boldsymbol{s} \leq 1.$$

Obecně však posloupnost

$$\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1, \ldots$$

generovaná touto metodou nemusí konvergovat k bodu maxima.

4.3.6 Metoda projekce gradientu

Tato metoda je speciálním případem metody přípustných směrů. Přípustným směrem je zde gradient maximalizované funkce promítnutý ortogonálně do množiny určené omezujícími podmínkami, které jsou splněny jako rovnice. Nyní budeme vyšetřovat úlohu maximalizovat diferencovatelnou konkávní funkci při lineárních omezeních tvaru

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \tag{4.5}$$

Vycházíme z bodu $\boldsymbol{x}^0$, vyhovujícího vztahu (4.5). Nyní popíšeme konstrukci bodu $\boldsymbol{x}^{t+1}$, známe-li bod $\boldsymbol{x}^t$. Nechť $\boldsymbol{Q}$ je matice složená z těch řádků matice $\boldsymbol{A}$ a z těch záporně vzatých jednotkových vektorů, které odpovídají v soustavě

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^t \leq \boldsymbol{b}, \quad -\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}$$

[6] Znakem $\boldsymbol{e}_{1\times n}$ rozumíme matici typu $1 \times n$ plnou jedniček.

těm podmínkám, které jsou splněny jako rovnosti. Tyto podmínky nazveme aktivními (v bodě $\boldsymbol{x}^t$). Jsou-li v $\boldsymbol{Q}$ lineárně závislé řádky, pak tyto řádky vynecháme a pracujeme s takto upravenou maticí $\boldsymbol{Q}$. Je zřejmé, že pro zachování přípustnosti $\boldsymbol{x}^{t+1}$ musí směr postupu $\boldsymbol{s}$ splňovat podmínku

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{0}.$$

Aby vektor $\boldsymbol{s}$ byl přípustným směrem, je nutné jej volit tak, aby

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t) \cdot \boldsymbol{s} > 0.$$

Obě naposled uvedené podmínky budou obecně splněny, jestliže za $\boldsymbol{s}$ vezmeme ortogonální projekci

$$\nabla^T f(\boldsymbol{x}^t)$$

do lineárního prostoru, který je ortogonálním doplňkem lineárního prostoru generovaného řádky matice $\boldsymbol{Q}$, tj. do ortogonálního doplňku množiny všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{q} \qquad \boldsymbol{q} \in \mathbb{E}_r,$$

kde r je počet řádků matice $\boldsymbol{Q}$. Gradient se pak nechá rozložit na dvě ortogonální složky $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{k}$ tak, že

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^t) = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{q}. \tag{4.6}$$

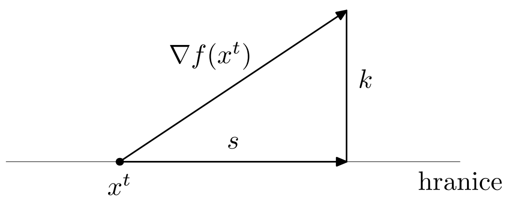
Kde úpravami

$$\boldsymbol{Q}\nabla f(\boldsymbol{x}^t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$$

a užijeme-li $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T)^{-1}\boldsymbol{Q}\nabla f(\boldsymbol{x}^t).$$

Právě řečené ilustrujme nejjednodušším příkladem:



Obrázek 4.1: Gradient a aktivní část hranice přípustné oblasti

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow ax + by \leq c,$$

$$\boldsymbol{Q} = (a, b),$$

$$\nabla f = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{s} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \boldsymbol{q} \qquad (\boldsymbol{q} \in \mathbb{E}_1).$$

Jelikož $\boldsymbol{Q}$ má plnou řádkovou hodnost, matice

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T)^{-1}$$

vždy existuje a pro hledaný vektor platí

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T)^{-1}\boldsymbol{Q})\nabla f \equiv \boldsymbol{P}\nabla f.$$

Matice $\boldsymbol{P}$ se nazývá projekční matice.

Je-li $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ potom se jedná o přípustný směr. Je-li při $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ alespoň jedna složka v $\boldsymbol{q}$ záporná, je možné najít jiný (nenulový) přípustný směr. Je-li například pro nějaké k $(1 \leq k \leq r)$ $q_k < 0$

vynecháme z matice $\boldsymbol{Q}$ k-tý řádek (mohou zůstat nějaké záporné) a utvoříme ze zbývajících řádků novou matici $\boldsymbol{Q}^x$ a dále $\boldsymbol{P}^x$. Pro nově spočtený směr $\boldsymbol{s}^x$ již platí $\boldsymbol{s}^x \neq \boldsymbol{0}$ (jinak by dle (4.6) platilo

$$\nabla f = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{q}$$

a zároveň

$$\nabla f = \boldsymbol{Q}^{xT} \boldsymbol{q}^x$$

což není možné, ježto odebraný řádek je lineárně nezávislý). Je třeba sledovat podmínku, která odpovídá vynechanému řádku v $\boldsymbol{Q}$ při tvorbě matice $\boldsymbol{Q}^x$, aby směr $\boldsymbol{s}^x$ nepůsobil porušení omezujících podmínek. Nechť jde např. o j-té omezení v matici $\boldsymbol{Q}$ zastoupené řádkem $\boldsymbol{a}^{(j)}$. Násobíme-li

$$\nabla^T f = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{Q}$$

vektorem $\boldsymbol{s}^x$, dostaneme (vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{Q}^x \boldsymbol{s}^x = \boldsymbol{0}$)

$$0 < \nabla^T f \boldsymbol{s}^x = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{s}^x = q_k \boldsymbol{a}^{(j)} \boldsymbol{s}^x.$$

Jelikož je $q_k < 0$ je také

$$\boldsymbol{a}^{(j)} \boldsymbol{s}^x < 0$$

a tedy postup ve směru $\boldsymbol{s}^x$ neporuší omezení. Je-li $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$, je již bod, který byl nalezen v předchozím kroku, bodem optimálním pro danou úlohu.

Známe-li přípustný směr $\boldsymbol{s}$ (resp. $\boldsymbol{s}^x$), určíme délku kroku $\hat{y}$ tak, že nejdříve vypočteme

$$y_1 = \max \left\{ y \mid \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{s}) \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \right\}$$

a pak určíme $\hat{y}$ ze vztahu

$$\hat{y} = \arg \max_{0 \leq y \leq y_1} f(\boldsymbol{x}^t + y\boldsymbol{s}).$$

Při sestavování programu je vhodné užít tato zjednodušení: Není třeba po každém kroku počítat matici $(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T)^{-1}$, jelikož matice $\boldsymbol{Q}$ se v každém kroku liší pouze v jednom řádku od kroku předešlého. Lze užít postupy pro úpravu inverzní matice při změně jednoho řádku. Metodu projekce gradientu lze použít i pro obecné úlohy konvexního programování. V bodě $\boldsymbol{x}^t$ určíme aktivní omezení podobně jako u lineárních omezení. Pak tato aktivní omezení linearizujeme s použitím aproximace

$$g_j(\boldsymbol{x}) \approx g_j\left(\boldsymbol{x}^t\right) + \nabla^T g_j(\boldsymbol{x}^t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^t\right) \geq 0$$

a provádíme shodnou ortogonální projekci. Potíž je v tom, že zde dostáváme $y_1 = 1$. Proto se provádí jednorozměrná maximalizace v nalezeném směru $\boldsymbol{s}$ a k takto získanému bodu

$$\boldsymbol{x}^{x,t+1} = x^t + \hat{y}\boldsymbol{s}$$

se hledá nejbližší přípustný bod $\boldsymbol{x}^{t+1}$.

4.4 Sekvenciální kvadratické programování

Sekvenciální kvadratické programování jest poměrně elegantní metodou řešení nekvadratických konvexních úloh. Uvažujme konvexní úlohu

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{M}} \mathcal{F},$$

kde

$$\mathbb{M} = \left\{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{E}_m, \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \quad (n > m) \right\}.$$

Sekvenciální kvadratické programování vychází z aproximace cílové funkce prvními třemi členy Taylorovy řady[7] (tedy až po kvadratický člen) a aproximace levých stran vedlejších podmínek

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \tag{4.7}$$

prvními dvěma členy Taylorovy řady příslušné jednotlivým funkcím a rozvinuté v okolí bodu x_0, který pokud možno náleží k množině $\mathbb{M}$.

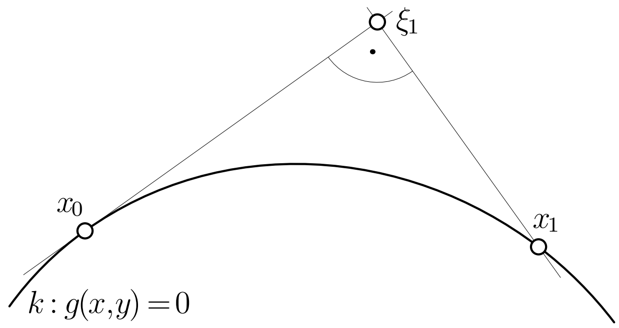
Tím tedy docházíme k úloze kvadratického programování

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \arg\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{M}_0} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_0^T\boldsymbol{x} \right),$$

kde

$$\mathbb{M}_0 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_0\},$$

kterou řešíme shora popsaným způsobem. Pokud pro řešení $\boldsymbol{\xi}_1$ této úlohy nejsou splněny vedlejší podmínky (4.7), pak pomocí ortogonální projekce hledám nejbližší přípustné řešení. Přitom vycházím z rovinné analogie naznačené na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Ortogonální projekce v rovinném případě

Rovnici $\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_0$ rozřešíme užitím singulárního rozkladu[8] ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{inv}}\boldsymbol{r}_0 + \tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{v}, \tag{4.8}$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{V}} \in \mathbb{E}_{n\times p}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{E}_p, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n,$$

přičemž $(p \geq n - m)$ je počet nulových singulárních čísel matice $\boldsymbol{R}_0$. Jen připomeňme, že matice $\tilde{\boldsymbol{V}}$ je složená z těch sloupců matice $\boldsymbol{V}$ ze singulárního rozkladu, které odpovídají nulovým singulárním číslům. Vyjádření (4.8) jest vícerozměrnou obdobou parametrického vyjádření přímky v rovině či třírozměrném prostoru. V třírozměrném prostoru by nás zajímal průnik roviny v bodě $\boldsymbol{\xi}_1$ kolmé na tuto přímku s křivkou danou soustavou rovnic $\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_0$, tedy s průnikem ploch definovaných jednotlivými rovnicemi z této soustavy.

V našem obecném případě tedy hledám nadrovinu v $\mathbb{E}_n$, která je kolmá na p-rozměrnou nadrovinu danou parametrickým vyjádřením (4.8). Jde tudíž o $(n-p)$-rozměrnou nadrovinu parametricky vyjádřenou jako

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\xi}_1, \tag{4.9}$$

kde $\boldsymbol{M} \in \mathbb{E}_{n\times(n-p)}$ jsou sloupce vzájemně lineárně nezávislé a zároveň lineárně nezávislé ke všem sloupcům z matice $\tilde{\boldsymbol{V}}$. Takové sloupce však již máme ze singulárního rozkladu matice $\boldsymbol{R}_0$. Jsou

[7] Srvn. větu A.70 na s. 281.
[8] Viz s. 276.

to ty sloupce matice $\boldsymbol{V}$, které odpovídají *nenulovým* singulárním číslům, tedy ty, které jsme nezahrnuli do matice $\tilde{\boldsymbol{V}}$.

Pokud poslední vyjádření dosadíme do vedlejších podmínek (4.7), dostáváme soustavu nelineárních rovnic

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{m} + \boldsymbol{\xi}_1) = \boldsymbol{0}$$

pro neznámé proměnné $\boldsymbol{m}$. Nalezneme-li řešení $\boldsymbol{m}_1$ této rovnice, pak pro hledaný bod platí

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{\xi}_1.$$

Pokud se nám řešení rovnice (4.9) nalézt nepodaří, musíme bod $\boldsymbol{\xi}_1$ nahradit například bodem

$$\boldsymbol{\xi}_1^1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_1),$$

a tak dále dokud se nám nepodaří nalézt přípustný bod $\boldsymbol{x}_1$. Nalezneme-li pak bod $\boldsymbol{x}_1$, celý postup opakujeme při záměně všech indexů za index o jeden větší. Tak postupujeme až do případné konvergence.

V případě úlohy s vedlejšími podmínkami ve tvaru nerovnosti řešíme stejný problém jako shora, kdy z vedlejších podmínek vybereme pouze podmínky aktivní a ty uvažujeme ve tvaru rovností.

Kapitola 5

Evoluční programování

V poslední době jest mezi inženýry časté používání optimalizačních algoritmů využívajících napodobení přírodních jevů a fyzikálních procesů. Mezi tyto metody patří genetické algoritmy, simulovaný biologický růst, simulované žíhání, optimalizace roje částic.

5.1 Genetické algoritmy

Poprvé se myšlenka napodobení principu přirozeného výběru objevila v sedmdesátých letech dvacátého století v práci Johna Hollanda z University of Michigans.[1]

Existuje celá řada různých variant genetického programování. Následující schéma klasického přístupu může sloužit k pochopení principu metody.

Míra splnění vytčeného cíle je hodnocena nějakou číselnou hodnotou a metoda přiřazení této hodnoty je zvána hodnotící funkcí. Je-li naším cílem maximalizovat nějakou funkci, může tato funkce být sama sobě funkcí hodnotící.

Dalším používaným výrazem je *populace*. Tak se nazývá soubor jedinců, které počítač zpracovává v jednom cyklu výpočtu. Hovoříme tak o populaci příslušné dané generaci, tj. generaci odpovídající příslušnému cyklu výpočtu.

Vlastní algoritmus tvoří

1. Inicializace

   Vytvoření nulté populace (obvykle náhodným vygenerováním jedinců)

2. Začátek cyklu

   Pomocí určité metody (někdy zčástí náhodné) vyber z populace několik jedinců s vysokou hodnotou hodnotící funkce. Z vybraných jedinců vytvoř jedince nové. K tomuto slouží několik operátů, například *křížení* (záměna části několika jedinců mezi sebou), *mutace* (náhodné změny části jedince), *reprodukce* (převzetí jedince z jedné generace do druhé beze změny) a další možnosti dle vynalézavosti tvůrce programu.

3. Výpočet hodnot hodnotící funkce jedinců nové generace

4. Konec cyklu (není-li splněna jistá podmínka, tak algoritmus pokračuje bodem 2).

5. Konec algoritmu *jedinec s nejvyšší hodnotou cílové funkce* představuje nejlepší nalezené řešení.

Jak ukazuje zkušenost získaná řešením celé řady úloh jejichž řešení bylo předem známo, produkuje metoda genetických algoritmů překvapivě přesné a spolehlivé řešení. Avšak při řešení

[1] [Holland, 1975].

konkrétní úlohy nemáme žádnou jistotu ohledně vzdálenosti nalezeného řešení od extrému a skutečné globálnosti tohoto extrému. Tato nejistota a neschopnost odhadu chyby nalezeného řešení do značné míry znehodnocuje právě popsanou metodu.

V jistých případech však existuje jistá možnost získání tohoto postrádaného odhadu chyby řešení. Jde o případ jistého, dosti obecného tvaru extremalizačních úloh. Zmíněný odhad je postaven na metodě využívající geometrickou nerovnost udávající poměr mezi váženým aritmetickým průměrem a váženým průměrem geometrickým.[2]

5.2 Simulovaný biologický růst

Simulovaný biologický růst napodobuje jevy pozorované při růstu stromů. Zahrnuje sebeoptimalizaci živých stromů, které se vždy snaží růst ve tvar konstantního povrchového napětí. Podobný fenomén byl pozorován též v živočišných tkáních. To se projevuje například přírůstkem kostního materiálu v oblastech vysokého napětí a opačně redukcí materiálu v místech napětí nízkého.

5.3 Simulované žíhání

Simulované žíhání jest založeno na statistické termodynamice a simulaci chování atomové stavby pevných látek během žíhání.

5.4 Optimalizace rojení částic

Metoda optimalizace rojení částic napodobuje zjednodušené sociální modely. Tato metoda se snaží například napodobit předávání informací v hejnu ptáků, jež umožňuje náhle měnit směr, přeskupit se či okamžitě se uspořádat.

---

[2] Způsobem shora popsaným na s. 64.

Kapitola 6

Funkční optimalizace

6.1 Variační počet

Vedle úloh parametrické optimalizace, tedy úloh, v nichž hledáme hodnotu parametrů, v nichž daná funkce dosahuje svého extrému, jsou neméně důležité úlohy optimalizace funkční, čímž rozumíme úlohy, jejichž podstatou je nalezení takových funkcí v nichž daný funkcionál dosahuje extrémní hodnoty.

Mnoho konstrukčních optimalizačních úloh je ve skutečnosti založeno na problému nalezení minima daného funkcionálu

$$\int_a^b F\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) \mathrm{d}x \tag{6.1}$$

při splnění vedlejších podmínek ve tvaru diferenciálních rovnic a nerovnic

$$\Phi_j\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.2}$$

$$\Phi_j\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) \leq 0, \qquad (j = k+1, k+2, \ldots, K) \tag{6.3}$$

s nějakými okrajovými podmínkami, a dále při splnění vedlejších podmínek ve tvaru integrálních rovnic a nerovnic

$$\int_a^b \Phi_j\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) \mathrm{d}x = L_j, \qquad (j = K+1, K+2, \ldots, p), \tag{6.4}$$

$$\int_a^b \Phi_j\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)\right) \mathrm{d}x \leq L_j, \qquad (j = p+1, p+2, \ldots, P). \tag{6.5}$$

Tento typ optimalizační úlohy se nazývá *funkční optimalizace*, ježto je hledán, jak již řečeno, nejen extrém daného funkcionálu, ale zejména, a to zdůrazněme, *funkce*, v nichž je tohoto extrému dosaženo. Matematická disciplína, která se věnuje tomuto problému, se nazývá *variační počet.*[1]

[1]Viz [Alexejev *et al.*, 1991].

Za rok zrodu variačního počtu se obvykle pokládá rok 1696, rok, v němž se objevilo pojednání Johanna Bernoulliho s provokujícím názvem: „Problema novum, ad cujus solutionen mathematici invitantur“, tedy „Nová úloha, k jejímuž řešení zveme matematiky“.[2] V ní byl formulován následující problém (tzv. úloha o brachystochroně – *βρᾰχῐ́ς* (*brachys*) znamená řecky krátký, *χρόνος* (*chronos*) znamená čas): „Ve vertikální rovině jsou dány dva body A a B. Najděte dráhu AMB, po níž se těleso M působením vlastní tíže dostane z bodu A do bodu B za nejkratší dobu.“ (Vzdálené narážky na formulaci úlohy o brachystochroně jsou obsaženy již v Galileových besedách. Tam se dokazuje, že když se těleso pohybuje po sečně kružnice, dostane se do konečného bodu později, než pohybuje-li se po příslušném oblouku. Co je tedy kratší, sečna či oblouk?) Tuto úlohu rozřešil sám Johann Bernoulli, ale také Leibniz, Jacob Bernoulli a ještě jeden anonymní autor, ve kterém znalci (dle slov Johanna Bernoulliho „ex unge leonem“, tj. „podle drápů [poznají] lva“, lat.) ihned poznali Newtona.

Podle teorie variačního počtu za předpokladu, že $\boldsymbol{y} = (y_1(\cdot), y_2(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)) \in C^1([a,b], \mathbb{E}_n)$, tedy za předpokladu, že uvažované funkce, spojité i se svou první derivací (hladké) na uzavřeném intervalu $[a,b]$, zobrazují tento interval na n rozměrnou množinu reálných čísel, a podobně za předpokladu, že F a Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, P)$ jsou hladké funkce svých $2n+1$ proměnných, vyhovuje[3] řešení zmíněného problému systému diferenciálních rovnic majících tvar[4]

$$H_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{y_i'} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots, n+K-k), \tag{6.6}$$

$$\Phi_j = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{6.7}$$

$$\Phi_j + y_{n+j-k}^2 = 0, \qquad (j = k+1, k+2, \ldots, K), \tag{6.8}$$

kde

$$H = F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x)\Phi_j + \sum_{j=k+1}^{K} \lambda_j(x)\left(\Phi_j + y_{n+j-k}^2\right) + \sum_{j=K+1}^{p} \lambda_j \Phi_j + \sum_{j=p+1}^{P} \lambda_j \Phi_j. \tag{6.9}$$

Ve vztahu (6.9) vystupují neznámé přídavné funkce $y_i(x)$ $(i = n+1, n+2, \ldots, n+K-k)$, neznámé Lagrangeovy multiplikační funkce $\lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, K)$ a neznámé Lagrangeovy multiplikační konstanty λ_j $(j = K+1, K+2, \ldots, p, p+1, \ldots, P)$. Po rozřešení soustavy $n+2K-k$ diferenciálních rovnic (6.6) až (6.8) pro $n+2K-k$ neznámých funkcí $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+K-k)$ a $\lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, K)$ zbývá vyřešit velikost Lagrangeových multiplikačních konstant λ_j $(j = K+1, K+2, \ldots, P)$ a jistého počtu integračních konstant. Velikost těchto konstant je určena danými okrajovými podmínkami, rovnicemi (6.4)[5] a nerovnostmi (6.5)[6] při

[2] Srvn. [Alexejev *et al.*, 1991] str. 20.

[3] Srvn. [Alexejev *et al.*, 1991].

[4] Zde

$$H_{y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

[5] Po dosazení obecného řešení a provedení integrace se jedná o soustavu algebraických rovnic.

[6] Vedlejší podmínku mající tvar vztahů (6.5) lze uvažovat jako rovnost

$$\underbrace{\int_a^b \Phi \mathrm{d}x = \ell}_{(a)}$$

a nerovnost

$$\ell \leq L.$$

Podle teorie variačního počtu lze konstantu λ určit z rovnice (a) po vyřešení příslušných Eulerových diferenciálních rovnic. V případě nerovnic (6.5) tedy hledám takové konstanty λ_j $(j = p+1, p+2, \ldots, P)$ a takové integrační současné minimalizaci funkce, která vznikne dosazením obecného řešení diferenciálních rovnic (6.6) až (6.8) do funkcionálu (6.1) a jeho následnou integrací.

Na tomto místě se pouze zmíníme, že podobná nutná podmínka platí také v úlohách vyšších řádů i v úlohách o více nezávisle proměnných. Například nutnou podmínkou pro extremálu v úloze

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{Y}} \int_\Omega F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}), \nabla \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\mathbb{Y} = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ y_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ y_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix} \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 \text{ na } \partial\Omega \right\},$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je omezená množina, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega$, $\boldsymbol{y}_0$ je daná vektorová funkce a

$$\nabla \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nm},$$

je – za předpokladu dostatečné hladkosti vystupujících funkcí – splnění n rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kde

$$y_{i,k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

V případě úloh vyšších řádů je například možné použít metodu substituce. Tak úlohu, kde vystupuje druhá mocnina

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2},$$

lze užitím substituce

$$y_{n+1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2}$$

převést na úlohu hořejší doplněnou vedlejší podmínkou (podmínkou vazby)

$$y_{n+1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0.$$

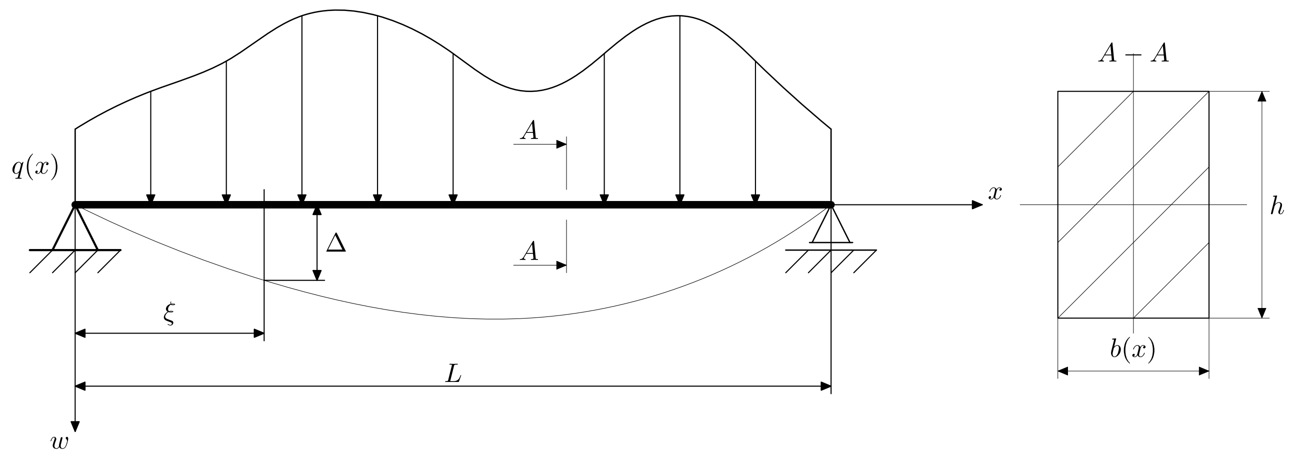
6.2 Ilustrační příklad

Na tomto místě předvedeme řešení jednoduché úlohy *navrhnout* takovou (obecně) po délce proměnnou šířku $b(x)$ obdélného průřezu nosníku dle obrázku 6.1 s konstantní výškou h tak, aby se daný nosník v místě $x = \xi$ deformoval maximálně o předepsanou hodnotu Δ a přitom měl nejmenší možný objem.

Máme tedy úlohu minimalizovat funkcionál

$$V = \int_0^L h \cdot b(x)\, \mathrm{d}x \tag{6.10}$$

konstanty, které minimalizují funkci vzniklou dosazením obecného řešení do daného funkcionálu a provedením integrace při současném splnění jak zmíněných integrálních nerovnic, které jsou podobně jako cílový funkcionál transformovány na algebraické nerovnosti, tak rovnic vzniklých podle poznámky 5 a okrajových podmínek.



Obrázek 6.1: Zadání ilustračního příkladu

vyjadřující velikost objemu našeho nosníku při dodržení vedlejší podmínky dané Mohrovým integrálem[7]

$$\int_0^L \frac{12M(x) \cdot m(x)}{E \cdot b(x) \cdot h^3}\,\mathrm{d}x = \delta \leq \Delta, \tag{6.11}$$

kde $M(x)$ je vnitřní ohybový moment působící po délce nosníku vyvolaný příčným zatížením a $m(x)$ je ohybový moment způsobený jednotkovou silou umístěnou v místě $x = \xi$ a působící ve směru uvažované deformace. Podle shora[8] řečeného lze řešení této úlohy nalézt jako řešení soustavy[9]

$$b(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{12M(x) \cdot m(x)}{E}}, \tag{6.12}$$

$$\int_0^L \frac{12M(x) \cdot m(x)}{E \cdot b(x) \cdot h^3}\,\mathrm{d}x \leq \Delta. \tag{6.13}$$

Vztah (6.13) plyne z poznámky 6 na str. 108.

Dosazením z (6.12) do (6.13) dostáváme po úpravě výraz

$$\lambda^{1/2} \geq \frac{1}{h\Delta} \int_0^L \left(\frac{12M(x) \cdot m(x)}{E}\right)^{(1/2)} \mathrm{d}x \tag{6.14}$$

a užitím tohoto vztahu pro λ ve výrazu (6.12) získáme hledané vyjádření tloušťkové funkce

[7]Srvn. [Hájek *et al.*, 1988] str. 205.

[8]Srvn. kap. 6 na str. 107.

[9]Viz vztah (6.6) na str. 108. Zde máme

$$H = h \cdot b(x) + \lambda \frac{12M(x) \cdot m(x)}{E \cdot b(x) \cdot h^3}$$

a dosazením do vztahu

$$H_b - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_{b'} = 0$$

máme

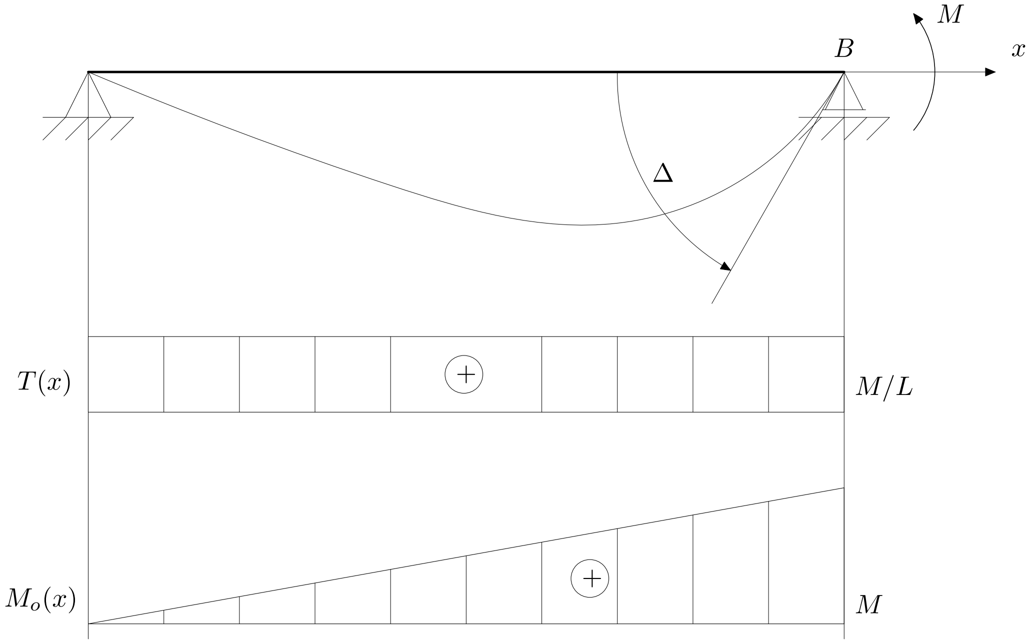
$$h - \lambda \frac{12M(x) \cdot m(x)}{E \cdot b^2(x) \cdot h^3} = 0.$$

Nyní již algebraickou úpravou dostáváme vztah (6.12).

$$b(x) = \frac{12\left(M(x)\cdot m(x)\right)^{1/2}}{E\cdot h^3\cdot\Delta}\cdot\int_0^L \left(M(\eta)\cdot m(\eta)\right)^{1/2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{6.15}$$

kde pro dané vnější zatížení dokážeme průběhy ohybového momentu určit, stejně jako dokážeme určit průběh momentu vyvolaný jednotkovým silovým účinkem v místě předepsané deformace. Zbývá provést integraci ve výrazu (6.15). To lze provést analyticky či numericky v závislosti na daném zatížení.

Uvažujme nosník zatížený dle obrázku 6.2,



Obrázek 6.2: Průběh vnitřních silových účinků vyvolaných daným zatížením

kdy průběh ohybového momentu má vyjádření

$$M_o(x) = \frac{M}{L}\cdot x. \tag{6.16}$$

Deformací Δ, jež nemá býti překročena, nechť jest úhel natočení v podpoře B. Pak

$$m(x) = \frac{\partial M_o(x)}{\partial M} = \frac{x}{L}. \tag{6.17}$$

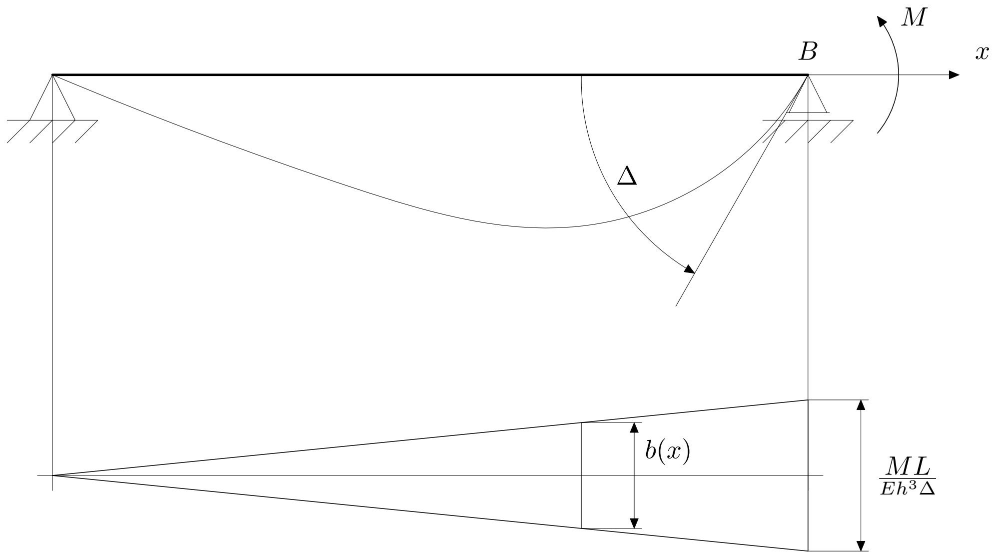
Po dosazení do vztahu (6.15) dostáváme

$$b(x) = \frac{12}{Eh^3\Delta}\left(\frac{M}{L}x\cdot\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\int_0^L\left(\frac{M}{L}\eta\cdot\frac{\eta}{L}\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\eta \tag{6.18}$$

a poté úpravou konečné řešení

$$b(x) = \frac{6M}{Eh^3\Delta}\cdot x, \tag{6.19}$$

které je znázorněno obrázkem 6.3.



Obrázek 6.3: Tvar tloušťkové funkce

Kapitola 7

Maximalizace tuhosti poddajných těles

7.1 Úloha o maximalizaci tuhosti

Uvažujme úlohu, kdy v jisté konstrukci máme možnost určitým způsobem nakládat s mechanickými vlastnostmi materiálu (tj. jistým způsobem volit a měnit tenzor tuhosti). Budiž naším přáním zvolit takovou konfiguraci (takový tenzor tuhosti z množiny dostupných tenzorů tuhosti), která vykáže maximální tuhost.

Zde stojíme před první obtíží. Co nazýváme tuhostí? Touto otázkou se zde zabývat nebudeme a jednoduše si zvolíme jistou veličinu a tu budeme, abychom předešli uštěpačným poznámkám škarohlídů, nazývat *míra tuhosti*. Dle našeho a nejen našeho[1] názoru může vhodnou mírou tuhosti být inverzní hodnota k míře poddajnosti, která je dána veličinou (potenciální energie vnějších sil, práce vnějších sil)

$$\mathfrak{l}(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega p_i u_i \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i \,\mathrm{d}S, \tag{7.1}$$

kde

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} p_x(\boldsymbol{x}) \\ p_y(\boldsymbol{x}) \\ p_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

jsou objemové síly působící na těleso vyplňující prostor $\Omega \subset \mathbb{E}_3$, $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$,

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} t_x(\boldsymbol{x}) \\ t_y(\boldsymbol{x}) \\ t_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

jsou vnější síly působící na část hranice-povrchu tělesa $\partial_t\Omega \subset \partial\Omega$; tedy $\partial_t\Omega$ je právě ta část povrchu tělesa $\partial\Omega$, na kterou působí vnější povrchové síly.[2] Posuvy uvnitř deformovaného tělesa jsou značeny

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} u_x(\boldsymbol{x}) \\ u_y(\boldsymbol{x}) \\ u_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Princip minima úplné potenciální energie říká, že[3] skutečný stav deformovaného tělesa minimalizuje na množině přípustných deformací funkcionál úplné potenciální energie systému

$$\Pi(\boldsymbol{u}) = \mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathfrak{l}(\boldsymbol{u}), \tag{7.2}$$

[1]Srvn. [Bendsøe, 1995] s. 7 a např. [Cherkaev, 2000], [Allaire, 2002]. Viz také [Mareš and Holý, 2002], [Mareš, 2002c], [Mareš, 2003a], [Mareš, 2003c], [Mareš, 2003d].

[2]Viz [Bendsøe, 1995] a [Rektorys, 1995].

[3][Washizu, 1975] ([Вацудзу, 1987] s. 27).

kde elastická potenciální energie (deformační energie tělesa)

$$\mathfrak{a}(\boldsymbol{u}) = \mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \cdot \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \cdot \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \, \mathrm{d}\Omega$$

a kde

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = E_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \cdot \varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$$

je zobecněný Hookeův zákon a konečně

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}(\boldsymbol{x}) + u_{j,i}(\boldsymbol{x}) \right)$$

je Cauchyho tenzor malých deformací.

Princip minima úplné potenciální energie přijmeme jako hypotézu, jež dosud nebyla žádným z dlouhé řady experimentů vyvrácena. Tento princip tedy odpovídá naší dosavadní zkušenosti. Neuvažujeme tento princip jako výsledek použití variačních metod na řešení diferenciálních rovnic matematické teorie pružnosti. Čímž se držíme přání pana Hilberta formulovat přírodní zákony v integrálním namísto v diferenciálním tvaru. Hlavním přínosem tohoto námi použitého pohledu na věc je *snížení* požadavků na hladkost v úloze vystupujících funkcí.

Dle tohoto principu pišme, že pro skutečně deformovaný stav $\hat{\boldsymbol{u}}$ platí

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \arg \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} \Pi(\boldsymbol{u}),$$

kde $\mathbb{U}$ je množina všech kinematicky přípustných deformačních polí. Tedy

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = \mathfrak{a}(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{u}}) - \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} \Pi(\boldsymbol{u}) = \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} (\mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathfrak{l}(\boldsymbol{u})).$$

Z teorie variačních metod řešení diferenciálních rovnic[4] je známo, že v rovnovážném stavu $\hat{u}$ platí

$$\min \Pi = \frac{1}{2}(A\hat{u}, \hat{u}) - (f, \hat{u}) \ \wedge \ (A\hat{u}, \hat{u}) = (f, \hat{u}) \quad \Rightarrow \quad \min \Pi = -\frac{1}{2}(f, \hat{u}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{l}(\hat{u})$$

a tedy v našem případě

$$\Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) = -\frac{1}{2}\mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}) < 0. \tag{7.3}$$

Chceme-li zvolit takový tenzor tuhosti $\boldsymbol{E} = \{E_{ijkl}(\boldsymbol{x})\}$, který maximalizuje naši míru tuhosti – tedy minimalizuje míru poddajnosti $\mathfrak{l}(\boldsymbol{u})$ – pak můžeme řešit následující optimalizační úlohu

$$\{\hat{\boldsymbol{E}}, \hat{\boldsymbol{u}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} (\mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathfrak{l}(\boldsymbol{u})), \tag{7.4}$$

kde $\mathbb{E}$ je množina přípustných tenzorů tuhosti a $\mathbb{U}$ je množina kinematicky přípustných deformačních polí. Hořejší plyne z faktu, že pro $\hat{\boldsymbol{E}}$, jež maximalizuje míru tuhosti (a tedy zároveň minimalizuje míru poddnajnosti), platí

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \arg \min_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \arg \max_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} \left(-\frac{1}{2}\mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}) \right) = \arg \max_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} \Pi(\hat{\boldsymbol{u}}) =$$

$$= \arg \max_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} (\mathfrak{a}(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{u}}) - \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}})) = \arg \max_{\boldsymbol{E} \in \mathbb{E}} \min_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} (\mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathfrak{l}(\boldsymbol{u})).$$

Při návrhu topologie může množina $\mathbb{E}$ obsahovat tenzor tuhosti daného izotropního materiálu E^0_{ijkl} a *nulový* materiál, tj. tenzor tuhosti se všemi prvky nulovými. Což v souhrnu jest dáno předpisem

$$E_{ijkl} = \chi(\boldsymbol{x}) E^0_{ijkl},$$

[4]Viz [Bendsøe, 1995], [Rektorys, 1999] ss. 142, 145, [Михлин, 1957].

kde
$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{je-li v místě } \boldsymbol{x} \text{ daný materiál,} \\ 0 & \text{není-li v místě } \boldsymbol{x} \text{ daný materiál.} \end{cases}$$
Objemové (hmotnostní) omezení je pak dáno podmínkou
$$\int_\Omega \chi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Omega \le V_0.$$
Návrhovou proměnnou celé úlohy se tak stává indikační (charakteristická) funkce $\chi(\boldsymbol{x})$.[5]

V případě shora uvažovaného lineárně elastického materiálu lze úlohu (7.4) psát, při využití doplňkové energie, ve tvaru
$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega \right), \tag{7.5}$$
kde množina staticky přípustných napjatostí
$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega \quad \wedge \quad \sigma_{ij}\cdot \ell_j = t_i \text{ na } \partial_t\Omega\},$$
přičemž $\ell_j = \ell_j(\boldsymbol{x})$ je směrovým kosinem vnější normály hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω v místě $\boldsymbol{x} \in \partial_t\Omega$ a $\boldsymbol{C} = \{C_{ijkl}\}$ je tenzor poddajnosti materiálu z množiny přípustných tenzorů poddajnosti $\mathbb{C}$. Platí
$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}.$$
Shora minimalizovanému funkcionálu
$$\mathfrak{c}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.6}$$
se říká doplňková deformační energie.[6]

V odvození principu minima doplňkové energie bude naším odrazovým můstkem shora přijatý princip minima funkcionálu úplné potenciální energie, pro kterou dle (7.2) jest
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_i u_i\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i\,\mathrm{d}S,$$
kde
$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{7.7}$$
a
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{7.8}$$
při čemž se předpokládá splnění deformačních podmínek $u_i = \tilde{u}_i$ na $\partial_u\Omega$, kde $\tilde{u}_i$ jsou dané funkce.

Na veličiny ε_{ij} a u_i se dívejme jako na nezávislé proměnné svázané vedlejší podmínkou (7.8). Tuto podmínku spolu s deformační podmínkou $u_i = \tilde{u}_i$ zahrneme ve smyslu metody Lagrangeových multiplikátorů do Lagrangeovy funkce
$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\int_\Omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_i u_i\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \lambda_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right)\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_u\Omega} \lambda_i(\tilde{u}_i - u_i)\,\mathrm{d}S. \tag{7.9}$$

[5]Tento přístup sebou přináší řadu zajímavých problémů. Srvn. např. [Ball *et al.*, 1999], [Bellido and Pedregal, 2002], [Bousselsal and Brighi, 1997], [Cherkaev, 2000], [Cioranescu and Paulin, 1999], [Dacorogna, 1982], [Dacorogna, 1989], [Dvořák and Haslinger, 1998], [Pedregal, 1999], [Pedregal, 2000], [Pedregal, 2001], [Roubíček, 1997], [Sanchez-Palencia and Zaoui, 1985], [Šverák, 1992].

[6]Srvn. [Washizu, 1975] (перевод на руский язык: [Вацудзу, 1987]).

V tomto funkcionálu vystupují jako nezávislé funkce ε_{ij}, u_i, λ_{ij} a λ_i a z podmínky stacionárnosti tohoto funkcionálu[7] plyne, že

$$\lambda_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{na} \quad \Omega \tag{7.10}$$

a

$$\lambda_i = \lambda_{ij}\ell_j \quad \text{na} \quad \partial_u\Omega. \tag{7.11}$$

Označme (na základě znalosti Hookeova zákona a vyjádření vektoru napětí)

$$\lambda_{ij} = \sigma_{ij}, \ \lambda_i = t_i. \tag{7.12}$$

Integrujeme-li ve vztahu (7.9) per partes, tj. užitím Gaussova divergenčního teorému

$$\int_\Omega f_{,i} \cdot g \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} f \cdot g \cdot \ell_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega f \cdot g_{,i} \,\mathrm{d}\Omega,$$

a užijeme-li rovnosti (7.11) a označení (7.12), dostáváme

$$\mathfrak{L} = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_i u_i \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i \,\mathrm{d}S - \int_{\partial_u\Omega} (\sigma_{ij}\ell_j u_i - \sigma_{ij}\ell_j\tilde{u}_i)\,\mathrm{d}S +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij}u_i\ell_j + \sigma_{ij}u_j\ell_i)\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_i\sigma_{ij,j} + u_j\sigma_{ij,i})\,\mathrm{d}\Omega.$$

Ježto platí

$$\sigma_{ij,i}u_j = \sigma_{ji,j}u_i = \sigma_{ij,j}u_i,$$
$$t_i = \sigma_{ij}\ell_j$$

a

$$\sigma_{ij}u_i\ell_j = \sigma_{ij}u_j\ell_i$$

je dále při užití Hookeova zákona (7.10)

$$\mathfrak{L} = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - (\sigma_{ij,j} + p_i)u_i\right)\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i \,\mathrm{d}S + \int_{\partial_t\Omega} \sigma_{ij}\ell_j u_i \,\mathrm{d}S + \int_{\partial_u\Omega} \sigma_{ij}\ell_j\tilde{u}_i \,\mathrm{d}S.$$

Pokud ke vztahu

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

zavedeme vztah inverzní

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl},$$

lze psát

$$\mathfrak{L} = -\int_\Omega \frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega (\sigma_{ij,j} + p_i)\,u_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_t\Omega} (\sigma_{ij}\ell_j - t_i)\,u_i\,\mathrm{d}S + \int_{\partial_u\Omega} \sigma_{ij}\ell_j\tilde{u}_i\,\mathrm{d}S. \tag{7.13}$$

Zde jako nezávislé vystupují funkce σ_{kl} a u_i.

Dále se zaměřme na podmínku stacionárnosti posledního funkcionálu

$$\delta\mathfrak{L} = 0.$$

Dle teorie variačního počtu[8] platí následné:

$$\delta\mathfrak{L} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{mn}}\delta\sigma_{mn} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{mn,k}}\delta\sigma_{mn,k} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u_l}\delta u_l = 0,$$

[7] Srvn. variační počet a Gaussův integrační teorém.

[8] [Lavrenťjev and Lusternik, 1952] s. 91, [Alexejev *et al.*, 1991] s. 225.

$$\delta\mathfrak{L} = -\int_\Omega \left(\frac{1}{2}C_{ijkl}\delta_{mi}\delta_{nj}\sigma_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\delta_{mk}\delta_{nl}\right)\delta\sigma_{mn}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{jk}u_i\delta\sigma_{mn,k}\,\mathrm{d}\Omega +$$
$$+\int_{\partial_t\Omega}\delta_{mi}\delta_{nj}\ell_j u_i\delta\sigma_{mn}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial_u\Omega}\delta_{mi}\delta_{nj}\ell_j\tilde{u}_i\delta\sigma_{mn}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega(\sigma_{ij,j}+p_i)\delta_{ip}\delta u_p\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_t\Omega}(\sigma_{ij}\ell_j - t_i)\delta_{ip}\delta u_p\,\mathrm{d}S = 0.$$

Poslední vyjádření upravme užitím Gaussova divergenčního teorému a pravidla o záměně pořadí derivací

$$\int_\Omega u_i\delta\sigma_{ij,j}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}u_i\ell_j\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\Omega$$

do tvaru

$$\delta\mathfrak{L} = -\int_\Omega(C_{ijkl}\sigma_{kl} - u_{i,j})\,\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega}\ell_j u_i\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial_t\Omega}\ell_j u_i\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S + \int_{\partial_u\Omega}\ell_j\tilde{u}_i\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}S -$$
$$-\int_\Omega(\sigma_{ij,j}+p_i)\delta u_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_t\Omega}(\sigma_{ij}\ell_j - t_i)\delta u_i\,\mathrm{d}S = 0.$$

Vzhledem k platnosti předešlého vztahu pro libovolné $\delta\sigma_{mn}$ a δu_p a jelikož pro

$$\delta y = \begin{cases} 1 & \text{na} \quad \partial\Omega \\ 0 & \text{na} \quad \mathrm{int}\Omega \end{cases}$$

je

$$\int_{\partial\Omega}\delta y\,\mathrm{d}S \gtrless 0, \qquad \int_{\partial\Omega}\delta y\,\mathrm{d}S = \partial\Omega,$$

ale

$$\int_\Omega \delta y\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

dostáváme mimo jiné také podmínku rovnováhy tělesa

$$\sigma_{ij,j} + p_i = 0 \quad \text{na} \quad \Omega$$

a silovou okrajovou podmínku

$$\sigma_{ij}\ell_j = t_i \quad \text{na} \quad \partial_t\Omega.$$

Využitím posledních dvou vztahů ve vyjádření (7.13) dostáváme, že skutečný stav napětí splňuje (mimo již zmíněných rovnic rovnováhy a silových okrajových podmínek také) stacionární podmínky funkcionálu doplňkové energie (princip doplňkové energie)

$$\Pi_c = \int_\Omega \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_u\Omega}\sigma_{ij}\ell_j\tilde{u}_i\,\mathrm{d}S,$$

kde vystupuje doplňková deformační energie

$$\mathfrak{c}(\boldsymbol{\sigma}) = \int_\Omega \frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega$$

a práce vykonaná na posuvech daných kinematickými okrajovými podmínkami. Jelikož $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ je, jak známo,[9] pozitivně definitní kvadratickou formou, realizuje stacionární bod úlohy

$$\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\,\mathrm{ext}\;\Pi_c,$$

na množině

$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,j} + p_i = 0 \text{ na } \Omega \;\wedge\; \sigma_{ij}\ell_j = t_i \text{ na } \partial_t\Omega\}$$

[9][Washizu, 1975] (перевод на руский язык: [Вацудзу, 1987]), [Bendsøe, 1995].

minimum funkcionálu doplňkové energie Π_c. Pro skutečný stav napjatosti $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ tedy platí

$$\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \Pi_c. \tag{7.14}$$

Naším stálým zájmem je nalezení takového tenzoru poddajnosti $\hat{\boldsymbol{C}}$, který maximalizuje shora zvolenou míru tuhosti, tj. *minimalizuje* (ovšem při splnění jistých podmínek) funkcionál

$$\mathfrak{l}(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega p_i u_i \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i \,\mathrm{d}S.$$

Pišme rovnice rovnováhy pro skutečný stav napětí $\hat{\sigma}_{ij}$

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + p_i = 0$$

a násobme tuto rovnici skutečným deformovaným stavem $\hat{u}_i$. Výsledek integrujme přes celou oblast Ω. Tím máme

$$\int_\Omega \hat{\sigma}_{ij,j}\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega = 0,$$

což užitím Gaussova divergenčního teorému převeďme na tvar

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_{ij}\hat{u}_i\ell_j \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \hat{\sigma}_{ij}\hat{u}_{i,j} \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega p_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega = 0.$$

Platí tedy

$$\int_\Omega C_{ijkl}\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl} \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \hat{\sigma}_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij} \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \hat{\sigma}_{ij}\hat{u}_{i,j} \,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_{ij}\ell_j\hat{u}_i \,\mathrm{d}S + \int_\Omega p_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega. \tag{7.15}$$

Bylo již vztahem (7.14) řečeno, že

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \Pi_c = \int_\Omega \frac{1}{2} C_{ijkl}\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl} \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_u\Omega} \hat{\sigma}_{ij}\ell_j\tilde{u}_i \,\mathrm{d}S,$$

z čehož, dosazením z (7.15), máme

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \Pi_c = \frac{1}{2}\int_\Omega p_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \hat{\sigma}_{ij}\ell_j\hat{u}_i \,\mathrm{d}S - \int_{\partial_u\Omega} \hat{\sigma}_{ij}\ell_j\tilde{u}_i \,\mathrm{d}S.$$

Pro naše účely uvažujme předepsaná posunutí nulová, tj.

$$\tilde{u}_i = 0 \quad \text{na} \quad \partial_u\Omega,$$

čímž se funkcionál doplňkové energie redukuje na doplňkovou deformační energii a platí

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \Pi_c = \frac{1}{2}\int_\Omega p_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2}\int_{\partial_t\Omega} t_i\hat{u}_i \,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}). \tag{7.16}$$

Ovšem pro minimalizující tenzor poddajnosti je

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \frac{1}{2}\mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{u}}), \tag{7.17}$$

a proto skutečně

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}}\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \,\mathrm{d}\Omega.$$

7.2 Maximalizace tuhosti při nejistém zatížení

Uvažujme úlohu o nalezení tenzoru poddajnosti, který by zabezpečil dosažení nejvyšší tuhosti uvažovaného tělesa v případě, kdy toto je namáháno nejvíce nebezpečnou konfigurací z množiny uvažovaných zatížení.

Obecně máme tedy úlohu nalézt takový tenzor poddajnosti $\hat{\boldsymbol{C}} \in \mathbb{C}$, který minimalizuje míru poddajnosti $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ a to v případě, kdy $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{C})$ jest stav napětí vyvolaný nejméně příznivou konfigurací uvažovaných zatížení $\hat{\boldsymbol{t}} \in \mathbb{T}$ z množiny uvažovaných zatěžovacích stavů $\mathbb{T}$:

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \arg \min_{\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}} \max_{\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}} \mathfrak{l}(\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})), \tag{7.18}$$

což (srovnáním se vztahy (7.16) a (7.17) ze s. 118) jest

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}} \max_{\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\Omega,$$

kde $\mathbb{C}$ jest množina v daném případě přijatelných tenzorů poddajnosti, $\mathbb{T}$ množina uvažovaných zatěžovacích stavů a $\mathbb{S}$ množina přípustných napěťových stavů

$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega \ \wedge \ \sigma_{ij} \ell_j = t_i \text{ na } \partial_t \Omega\} .$$

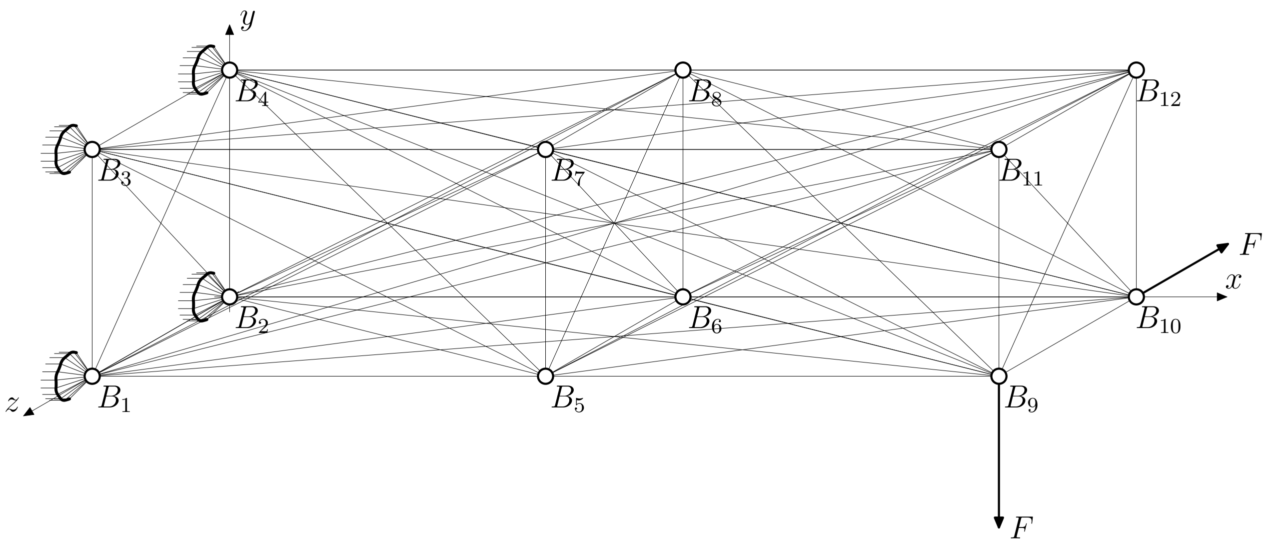
Kapitola 8

Maximalizace tuhosti prutových konstrukcí

Uvažujme problém navrhnout prutovou konstrukci přenášející dané zatížení tak, aby vykazovala při daném objemu maximální shora definovanou[1] míru tuhosti. Uvažované prutové konstrukci je dán jistý základní rámec polohou uzlových (styčných) bodů konstrukce, předepsaným uložením (zamezením pohyblivosti jistých uzlových bodů v jistém směru) a předepsaným zatížením. Součet součinů délek l_ℓ a průřezů A_ℓ jednotlivých prutů ($\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$) má nabývat předepsanou velikost $\mathscr{V}$, tedy

$$\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} A_\ell l_\ell = \mathscr{V}. \tag{8.1}$$

Konstrukce je tvořena přímými prutovými prvky, které vzájemně propojují všechny předepsané uzlové body s výjimkou prvků, které by procházely jiným uzlovým bodem nežli svým bodem koncovým.



Obrázek 8.1: Základní rámec uvažované prutové soustavy

Naše úvahy opřeme o úlohu o maximalizaci tuhosti definovanou pomocí doplňkové deformační energie vztahem (7.5) na s. 115 ve tvaru

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \,\mathrm{d}\Omega \right),$$

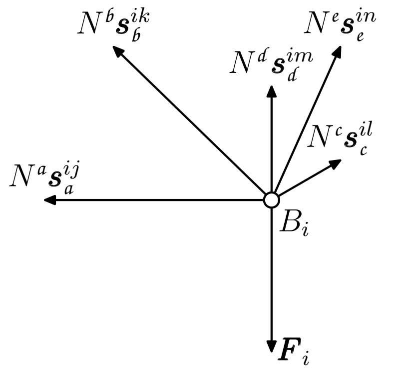
kde množina staticky přípustných napjatostí

$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega \quad \wedge \quad \sigma_{ij} \cdot \ell_j = t_i \text{ na } \partial_t\Omega\}$$

[1] Na s. 113 vztahem (7.1).

a $\mathbb{C}$ jest množina přípustných tenzorů poddajnosti, která je v uvažovaném případě dána podmínkou (8.1).

Tuto úlohu pro případ prutových konstrukcí nyní sestavme. Rovnice rovnováhy a silové okrajové podmínky tvořící množinu $\mathbb{S}$ jsou v případě prutových konstrukcí dány rovnicemi rovnováhy jednotlivých styčných bodů. Styčné body (klouby) značme latinskými indexy, např. i $(i = 1, 2, \ldots, I)$ a jednotlivé pruty značme psacími latinskými indexy, např. ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L})$. Sestavme rovnice rovnováhy bodu i, v němž se stýkají prvky (pruty) $\mathscr{a}$, $\mathscr{b}$, $\mathscr{c}$, $\mathscr{d}$ a $\mathscr{e}$ a na nějž působí vnější síla $\boldsymbol{F}_i$. Z obrázku 8.2 máme okamžitě rovnice rovnováhy



Obrázek 8.2: Rovnováha styčného bodu

$$N^{\mathscr{a}}\boldsymbol{s}_{\mathscr{a}}^{ij} + N^{\mathscr{b}}\boldsymbol{s}_{\mathscr{b}}^{ik} + N^{\mathscr{c}}\boldsymbol{s}_{\mathscr{c}}^{il} + N^{\mathscr{d}}\boldsymbol{s}_{\mathscr{d}}^{im} + N^{\mathscr{e}}\boldsymbol{s}_{\mathscr{e}}^{in} + \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}_{3\times 1}.$$

kde $\boldsymbol{s}_{\mathscr{a}}^{ij}$ je jednotkový směrový vektor prvku $\mathscr{a}$ spojující uzly i a j a orientovaný z bodu i do bodu j (zřejmě jest $\boldsymbol{s}_{\mathscr{a}}^{ij} = -\boldsymbol{s}_{\mathscr{a}}^{ji}$). Což můžeme psát maticově jako

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_{\mathscr{a}}^{ij} & \boldsymbol{s}_{\mathscr{b}}^{ik} & \boldsymbol{s}_{\mathscr{c}}^{il} & \boldsymbol{s}_{\mathscr{d}}^{im} & \boldsymbol{s}_{\mathscr{e}}^{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^{\mathscr{a}} \\ N^{\mathscr{b}} \\ N^{\mathscr{c}} \\ N^{\mathscr{d}} \\ N^{\mathscr{e}} \end{pmatrix} + \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}_{3\times 1}. \tag{8.2}$$

Směrové vektory $\boldsymbol{s}_{\ell}^{ik}$ určíme při programovém zpracování ze zadaných polohových vektorů uzlových bodů $\boldsymbol{B}_i$ a $\boldsymbol{B}_k$ jako

$$\boldsymbol{s}_{\ell}^{ik} = \frac{\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{B}_i}{L_\ell},$$

kde

$$L_\ell = \sqrt{(\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{B}_i)^T(\boldsymbol{B}_k - \boldsymbol{B}_i)}.$$

Incidenční matici[2] $\mathfrak{I}$ příslušnosti prvků z množiny $(\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L})$ k jednotlivým uzlovým bodům sestavíme programově z požadavku kladeného na tvar základní struktury.[3]

Sestavením vektorových rovnic (8.2) pro všechny uzlové body $(i = 1, 2, \ldots, \mathscr{I})$ dostaneme soustavu $3\mathscr{I}$ rovnic (v rovinné úloze $2\mathscr{I}$ rovnic)

$$-\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{f}}$$

s maticemi příslušného typu, jak vyznačeno v následujícím řádku

$$-\boldsymbol{S}_{3I\times\mathscr{L}}\boldsymbol{n}_{\mathscr{L}\times 1} = \tilde{\boldsymbol{f}}_{3I\times 1},$$

[2] Srvn. některou ze základních učebnic metody konečných prvků. Např. [ZIENKIEWICZ, 1971].

[3] Srvn. níže uvedenou část zdrojového programu sestavující matici $\boldsymbol{S}$ v synataxi programu GNU Octave.

kde

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_{\mathscr{L}\times 1} = \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \\ \vdots \\ N^{\mathscr{L}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{f}} = \tilde{\boldsymbol{f}}_{3I\times 1} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{F}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{F}}_I \end{pmatrix},$$

přičemž mezi silami $\tilde{\boldsymbol{F}}_1, \tilde{\boldsymbol{F}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{F}}_I$ vystupují také neznámé reakční síly $\boldsymbol{R}_r$ ($r \in \mathscr{R}$), kde $\mathscr{R}$ je množina uzlů, v nichž jest předepsané nulové posunutí. Matici $\boldsymbol{S}$ lze snadno programově sestavit, jak je zde ukázáno částí zdrojového kódu v syntaxi programu GNU octave:

```
## ==========================================================================================
## 1. sestavení matice $S$
## ------------------------------------------------------------------------------------------
## 1a) sestavení směrových vektorů $s$ (do matice s, obsahující tolik řádků kolik je prutů
## základové struktury, píšeme na řádek postupně číslo výchozího uzlu, číslo koncového uzlu,
## souřadnice x,y,z a délku prutu $L$)
s=[];
rs=rB*(rB-1)/2; ## počet prvků
S=zeros(3*rB,rs);
ell=0; ## číslo prutu (řádek matice s)
for i=1:rB
 for k=i+1:rB
ell=ell+1;
L=sqrt((B(k,:)-B(i,:))*(B(k,:)-B(i,:))');
pros=(B(k,:)-B(i,:))/L;
s=[s;i,k,pros,L];
## 1b) sestavení matice $S$
S(3*i-2:3*i,ell)=pros';
## pro pruty jdoucí z bodu $i$ do bodu s menším indexem nežli $i$:
S(3*k-2:3*k,ell)=-pros';
 endfor %k
endfor %i
```

Pro vektor pravých stran $\tilde{\boldsymbol{f}}$ platí

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{r},$$

kde $\boldsymbol{f}$ je vektor, jehož složkami jsou prostorové vektory vnějších sil působících v uzlech ($i = 1, 2, \dots, I$), $\boldsymbol{r}$ je vektor složek reakcí v uzlech a ve směrech s předepsaným nulovým posuvem a matice $\boldsymbol{R}$ je příslušnou incidenční maticí, programově sestavenou následujícím způsobem:

```
## ==========================================================================================
## 2. sestavení vektoru sil $f$
## ------------------------------------------------------------------------------------------
fp=zeros(rB,3);
fp(F(:,1),:)=F(:,2:4); ## srvn. záhlaví na konci tohoto článku připojeného zdroje
f=vec(fp');
## ==========================================================================================
## 3. sestavení incidenční matice reakcí $R$ (vektor reakcí $r$ je sařazen v pořadí uzlů a
## má-li reakce v určitém uzlu více složek, pak v pořadí x,y,z)
## ------------------------------------------------------------------------------------------
Rp=zeros(rB,3);
Rp(Ul(:,1),:)=Ul(:,2:4);
R=vec(Rp');
RR=diag(R);
R=RR(:,find(sum(diag(R))));
clear RR Rp fp
```

Tím se dostáváme ke specifikaci množiny $\mathbb{S}$ jakožto množiny těch neznámých účinků

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix},$$

které splňují soustavu rovnic

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{S} & -\boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

což plyne z rovnice

$$-\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}.$$

Soustava (8.3) obsahuje méně řádků (rovnic) nežli sloupců (neznámých) a má tedy nekonečné množství řešení, která všechna explicitně vyjádříme užitím singulárního rozkladu[4] jako

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{in}}\boldsymbol{f} + \tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{b}, \tag{8.4}$$

kde

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{in}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{\mathsf{in}}\boldsymbol{U}^T,$$

přičemž singulární rozklad matice $\boldsymbol{P}$ jest

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^T$$

a diagonální matice $\boldsymbol{W}^{\mathsf{in}}$ je složená z inverzních hodnot k číslům singulárním z matice $\boldsymbol{W}$, jsou-li tato nenulová a z nul, jsou-li příslušná singulární čísla nulová; vektor $\boldsymbol{b}_{n\times1}$ obsahuje n libovolných parametrů (n je počet nulových singulárních čísel v matici $\boldsymbol{W}$); pro libovolnou hodnotu těchto parametrů jsou splněny rovnice rovnováhy (8.3). A konečně matice $\tilde{\boldsymbol{V}}$ je složená z těch sloupců matice $\boldsymbol{V}$, které odpovídají nulovým singulárním číslům. Uveďme zde příklad sestavení této inverze:

```
## ======================================================================================
## 4. sestavení  matice $P$ a její inverse
## --------------------------------------------------------------------------------------
P=[-S,-R];
clear S R
[rP,sP]=size(P);
P=[P;zeros(sP-rP,sP)];
## inverze matice P
[U,W,V]=svd(P);
#clear P
nsc=find(diag(W)<W(1,1)/1000000); ## indexy nulových singulárních čísel
Win=diag(W).^(-1);
Win(nsc)=zeros(size(Win(nsc)));
Win=diag(Win);
Pin=V*Win*U';
Vtilda=V(:,nsc);
clear U V W Win
```

Zbývá sestavit výraz pro doplňkovou deformační energii, tj. výraz odpovídající svým smyslem integrálu

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}\Omega.$$

Naše úloha je složená z řady jednorozměrných prvků o stejném Youngově[5] modulu pružnosti E, tedy

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2E}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}}\int_{\Omega_\ell}\sigma_\ell^2\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2E}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}}\sigma_\ell^2 A_\ell L_\ell;$$

s užitím

$$\sigma_\ell = \frac{N^\ell}{A_\ell}$$

[4]Srvn. s. 276 této práce.

[5]Thomas Young ✰1773–✞1829: Anglický fyzik, lékař a egyptolog. Jako čtrnáctiletý dokázal číst latinsky, řecky, francouzsky, italsky, hebrejsky, arabsky a persky. Byl vzdělán v mnoha oblastech takovým způsobem, že ho jeho vrstevníci nazývali fenomén Young. Studoval v Londýně, Edinburghu a Göttingenu. Roku 1799 započal se svou lékařskou praxí v Londýně. Jako profesor přírodní filosofie (od r. 1801) královského institutu v Londýně publikoval *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts (1807)*, kde formuloval moderní fyzikální pojetí energie. Jakožto odborník na mechanismus zraku a optiku vyslovil roku 1807 teorii barevného vidění, dnes známou jako Young-Helmholtzova theorie. Studoval strukturu oka a popsal defect zvaný astigmatismus. Je znám jako znovuoživitel vlnové teorie světla jakožto protiváhy k kvantové teorii světla. Důkaz vycházející z principu interference světla publikoval roku 1801. Youngova univerzálnost jest patrná z jeho příspěvku k teorii přílivu, účasti na rozšifrování egyptských hieroglyfů, jeho vysvětlení (1804) vzlínavosti a stanovení koeficientu pružnosti (Youngův modul).

přicházíme k tvaru

$$\mathfrak{c} = \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{(N^\ell)^2 L_\ell}{2EA_\ell}. \tag{8.5}$$

Nyní použijme prvních $\mathscr{L}$ řádků z vyjádření $\boldsymbol{p}$ dle vztahu (8.4) k určení proměnných N_ℓ. Zapsáno indexově máme

$$N^\ell = p_\ell = \bar{p}_\ell + \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}),$$

kde jsme označili

$$\bar{p}_\ell = \sum_{k=1}^{I} P^{\mathsf{in}}_{\ell k} f_k.$$

Dosazením posledního vyjádření pro N^ℓ do doplňkové deformační energie (8.5) máme postupně

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2E} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(\bar{p}_\ell + \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \right) \left(\bar{p}_\ell + \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{A_\ell},$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2E} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{A_\ell}.$$

Tím přicházíme ke konečné formalizaci naší úlohy o maximalizaci tuhosti prutových konstrukcí ve tvaru

$$\{\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{b}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{A} \in \mathbb{A}} \min_{\boldsymbol{b}} \frac{1}{2E} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{A_\ell},$$

$$\mathbb{A} = \left\{ A_\ell \ (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}) \mid \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} A_\ell L_\ell = \mathscr{V} \right\}.$$

K rozřešení této úlohy použijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech.[6] Podle této věty splňuje stacionární bod Lagrangianu

$$\mathfrak{L}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \lambda) = \frac{1}{2E} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{A_\ell} + \lambda \left(\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} A_\ell L_\ell - \mathscr{V} \right)$$

nutnou podmínku minima naší úlohy. Řešení naší úlohy $(\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{b}})$ je tedy mezi body $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\lambda})$ splňujícími soustavu rovnic (8.6), (8.7) a (8.8)

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\ell} = -\frac{1}{2E} \left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{A_\ell^2} + \lambda L_\ell = 0 \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}), \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial b_m} = \frac{1}{2E} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(2\bar{p}_\ell \tilde{V}_{\ell m} + \sum_{j,k=1}^{n} \left(\tilde{V}_{\ell j} \delta_{jm} \tilde{V}_{\ell k} b_k + \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} \delta_{km} \right) \right) \frac{L_\ell}{A_\ell} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

z čehož

$$\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \left(\bar{p}_\ell \tilde{V}_{\ell m} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell m} \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \frac{L_\ell}{EA_\ell} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.7}$$

[6] Srvn. větu 2.8 ze s. 36.

a konečně podmínka

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} A_\ell L_\ell - \mathscr{V} = 0 \tag{8.8}$$

jest již známou podmínkou vedlejší.

Je známo, že hodnota součinitele $\tilde{\lambda}$, na němž (jakožto parametru) je závislé řešení $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{b}})$ prvních dvou právě uvedených podmínek, je určena rovnicí poslední. Tedy, že každému zvolenému objemu $\mathscr{V}$ odpovídá jistá hodnota součinitele $\tilde{\lambda}$ a naopak každé hodnotě součinitele $\tilde{\lambda}$ odpovídá jistý objem $\mathscr{V}$ tak, že naše rovnice jsou splněny.

Soustavu (8.6), (8.7) a (8.8) řešme metodou alternativního splnění nutné podmínky, která spočívá ve střídavém vyřešení úlohy pružnosti (8.7) s A_ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L})$ z předchozího kroku (v prvém kroku s hodnotou zvolenou) a nutné podmínky maxima tuhosti (8.6) s hodnotou $\boldsymbol{b}$ z právě rozřešené úlohy pružnosti.

Tento postup podrobněji popišme následujícími kroky:

1. Rozřešení úlohy pružnosti (8.7) s hodnotou průřezů jednotlivých prutů A_ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L})$ z předchozí iterace (v prvé iteraci zvolenou a to nenulově). Toto řešení získáme v maticové formě jako

$$\boldsymbol{b} = \mathfrak{V}^{-1}\mathfrak{p},$$

kde

$$\mathfrak{V} = \left\{ \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \tilde{V}_{\ell m} \tilde{V}_{\ell k} \frac{L_\ell}{E A_\ell} \right\}_{m \lceil k}, \quad \mathfrak{p} = \left\{ -\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \bar{p}_\ell \tilde{V}_{\ell m} \right\}_{m \lceil}.$$

Matici $\mathfrak{V}$ a vektor $\mathfrak{p}$ lze programově setavit například následujícím způsobem:

```
pp=Pin*[f;zeros(sP-rP,1)];## $\bar{p}$
nenulA=find(A!=0);
Vgoth=Vtilda(nenulA,:)'*diag(s(nenulA,6)./A(nenulA)/E)*Vtilda(nenulA,:);
pgoth=-Vtilda(nenulA,:)'*pp(nenulA);
## řešení úlohy pružnosti
b=Vgoth^(-1)*pgoth;
```

2. Rozřešení nutné podmínky maxima tuhosti (8.6) s určením λ z podmínky (8.8). Obě strany podmínky (8.6) násobme veličinou A_ℓ^2, dělme L_ℓ a zavedením substituce $\mathfrak{A}_\ell = A_\ell^2 \lambda$ přejděme k vyjádření

$$\mathfrak{A}_\ell = \frac{1}{2E} \left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right) \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}),$$

kde $\boldsymbol{b}$ známe z předchozího bodu. Máme-li $\mathfrak{A}_\ell$ $(\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L})$, dosaďme

$$A_\ell = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}_\ell}}{\sqrt{\lambda}}$$

do podmínky (8.8), čímž

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\mathscr{V}} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \sqrt{\mathfrak{A}_\ell} L_\ell,$$

odkud konečně máme

$$A_\ell = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}_\ell}\mathscr{V}}{\sum_{p=1}^{\mathscr{L}} \sqrt{\mathfrak{A}_p} L_p}.$$

3. Atd. až do konvergence,[7] tj. do té doby, kdy pro dvě následné iterace platí

$$\left|A_\ell^{\text{iterace}} - A_\ell^{\text{iterace}+1}\right| < \varepsilon \quad \forall \ell,$$

kde ε je zvolené malé číslo.

Úlohu pružnosti z bodu 1. však v této podobě řešit nebudeme a to z důvodu dělení průřezem A_ℓ, který v případě nejednoho prvku očekáváme nulový. Úlohu pružnosti v podobě silové nahraďme úlohou pružnosti v podobě deformační. Pro zjištěné posuvy uzlových bodů $\boldsymbol{u}$ určíme odpovídající vnitřní síly a ty použijeme v modifikované podobě podmínky z bodu 2.

Vyjdeme z principu minima úplné potenciální energie

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \arg\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_i u_i\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i \mathrm{d}S \right), \tag{8.9}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je vektor posuvů, $\hat{\boldsymbol{u}}$ řešení úlohy pružnosti, $\mathbb{U}$ množina kinematicky přípustných deformačních polí, $\boldsymbol{p}$ vektor objemových sil, $\partial_t\Omega$ část povrchu tělesa, na níž působí daná vnější síla t_i (sem patří také volný povrch, kde t_i=0) a význam dalších symbolů je podán na s. 113.

V souvislosti s analýzou prutových konstrukcí (konstrukcí složených z prvků přenášejících pouze tahové síly) dochází ke značnému zjednodušení této úlohy:

Objemové síly neuvažujeme, tedy

$$\int_\Omega p_j u_j = 0;$$

vnější síly na konstrukci působící uvažujeme pouze jako izolované a působící v bodech uzlových, odtud

$$\int_{\partial_t\Omega} t_j u_j\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{\mathscr{I}} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{u}_i,$$

kde $\boldsymbol{u}_i$ je vektor posuvů uzlových bodů, v nichž působí vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ a $\mathscr{I}$ je počet uzlů (v uzlech nezatížených vnějšími silami je $\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}_{3\times1}$); a konečně (vzhledem ke konstantnosti osové deformace ε_ℓ ($\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$) po délce jednotlivých prutů) máme

$$\int_\Omega E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} E\varepsilon_\ell^2 L_\ell A_\ell = \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{E\Delta_\ell^2 A_\ell}{L_\ell}, \tag{8.10}$$

kde $\Delta_\ell = \varepsilon_\ell L_\ell$ jest prodloužení prutu ℓ ($\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$), které je nutné vyjádřit jako funkci posuvů uzlových bodů u_i ($i = 1, 2, \ldots, \mathscr{I}$). Tímto vyjádřením zabezpečíme kompatibilitu konstrukce, tedy možnost sestavit spojitou konstrukci také ze zdeformovaných (zkrácených, či prodloužených) prvků.

Dle obrázku 8.3, kde je čerchovaně vyznačen stav před deformací a silně stav po deformaci, vidíme, že za předpokladu malých deformací – tedy přibližné rovnoběžnosti prvku po deformaci s prvkem před deformací – je

$$\Delta_\ell = \boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} - \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij},$$

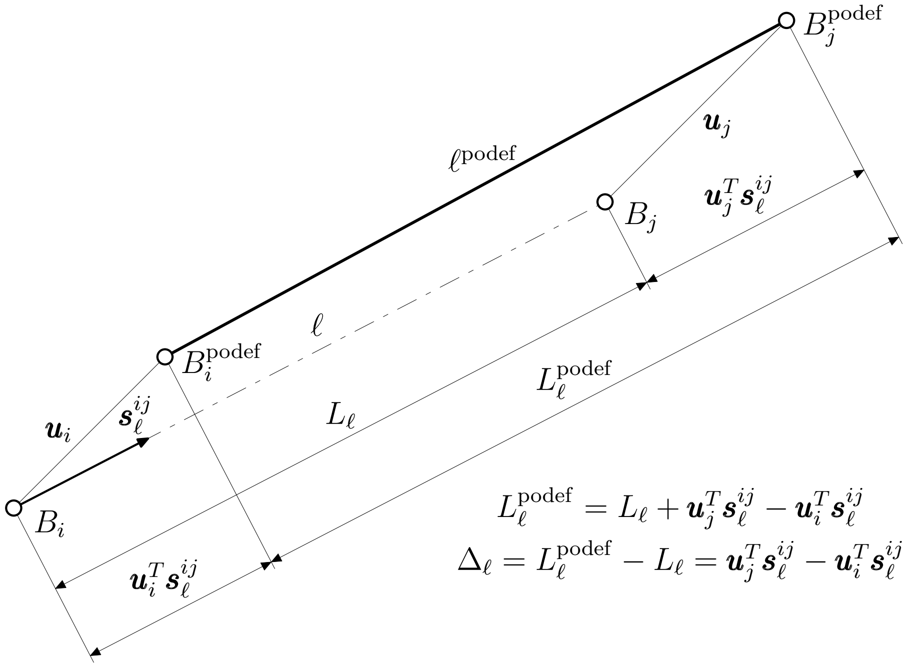
tedy

$$\Delta_\ell = \boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji}. \tag{8.11}$$

Dosazením do výrazu (8.10) dostává úloha (8.9) tvar

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \arg\min_{\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}} \left(\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{EA_\ell}{L_\ell} \left(\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji}\right)^2 - \sum_{i=1}^{\mathscr{I}} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{u}_i \right),$$

[7] Srvn. [Allaire, 2002] o konvergenci tohoto postupu v případě konvexních úloh.



Obrázek 8.3: Vyjádření prodloužení prvku

kde $\mathscr{U}$ jest množinou staticky přípustných polí posuvů, v našem případě tedy množina nulových posuvů vybraných uzlových bodů.

Nutnou a postačující podmínkou minima naší funkce je podmínka

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}, \tag{8.12}$$

kde vektor $\boldsymbol{u}$ je vektor vzniklý seřazením vektorů $\boldsymbol{u}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$) vzestupně dle čísla uzlu, vektor $\boldsymbol{F}$ vzniká obdobným způsobem seřazením vektorů vnějších sil (v nezatížených uzlech uvažovaných jako vektor $\boldsymbol{0}_{3\times1}$) a matice $\boldsymbol{K}$ je sestavena na základě následujících úprav vyjádření deformační energie

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\left(\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji}\right)^2,$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\left(\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} \boldsymbol{u}_j + 2\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{jiT} \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji} \boldsymbol{s}_\ell^{jiT} \boldsymbol{u}_i\right),$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i^T & \boldsymbol{u}_j^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_\ell^{ji} \boldsymbol{s}_\ell^{jiT} & \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{jiT} \\ \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{jiT} & \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_j \end{pmatrix}$$

a jelikož $\boldsymbol{s}_\ell^{ij} = -\boldsymbol{s}_\ell^{ji}$, máme také

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i^T & \boldsymbol{u}_j^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} & -\boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} \\ -\boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} & \boldsymbol{s}_\ell^{ij} \boldsymbol{s}_\ell^{ijT} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_j \end{pmatrix}$$

a odtud

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \ldots & \boldsymbol{u}_i^T & \ldots & \boldsymbol{u}_j^T & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & \sum_{\ell\in\mathcal{I}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\boldsymbol{s}_\ell^{ik(\ell)}\boldsymbol{s}_\ell^{ik(\ell)T} & \ldots & -\frac{EA_\ell}{L_\ell}\boldsymbol{s}_\ell^{ij}\boldsymbol{s}_\ell^{ijT} & \ldots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \ldots & -\frac{EA_\ell}{L_\ell}\boldsymbol{s}_\ell^{ij}\boldsymbol{s}_\ell^{ijT} & \ldots & \sum_{\ell\in\mathcal{J}} \frac{EA_\ell}{L_\ell}\boldsymbol{s}_\ell^{l(\ell)j}\boldsymbol{s}_\ell^{l(\ell)jT} & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{u}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_j \\ \vdots \end{pmatrix},$$

kde I je množina těch prutů, které mají jeden ze svých koncových bodů spojený s uzlum i a $k(\ell)$ je druhý koncový uzel prutu vycházejícího z (resp. končícího v) uzlu i. Matice v poslední kvadratické formě vystupující je námi hledanou maticí tuhosti $\boldsymbol{K}$.

Takto sestavená matice je maticí singulární. Její regularizace se dosáhne zohledněním okrajových podmínek (předepsaných nulových posuvů), a to vynulováním celých řádků a sloupců odpovídajících svým indexem označení předepsaného posuvu. Jedinou výjimkou bude diagonální prvek, kam vložíme jedničku. V průběhu výpočtu podobným postupem vypustíme také posuvy bodů, z nichž vychází pouze pruty nulového průřezu.[8]

Rozřešením soustavy (8.12), kde matice $\boldsymbol{K}$ je dle teorie metody konečných prvků regulární, dostáváme posuvy uzlových bodů pro uvažované průřezy A_ℓ ($\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$). Ze známých posuvů uzlových bodů získáme vektor osových sil jednotlivých prutů N^ℓ ($\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}$) ze vztahu (8.11) a známého vztahu mezi změnou délky elasticky namáhaného prutu Δ_ℓ a jeho vnitřní silou

$$\Delta_\ell = \frac{N^\ell L_\ell}{E A_\ell}$$

jako

$$N^\ell = \frac{E A_\ell}{L_\ell} \left(\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji} \right). \tag{8.13}$$

Rozřešení úlohy z druhého kroku – nutná podmínka maxima tuhosti – je rovněž potřeba upravit do podoby příhodné našim účelům. Nejdříve nahradíme vyjádření

$$\left(\bar{p}_\ell^2 + 2\bar{p}_\ell \sum_{j=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{V}_{\ell j} b_j \tilde{V}_{\ell k} b_k \right)$$

ve vztahu (8.6) vyjádřením vnitřní síly dle výrazu (8.13), čímž

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\ell} = -\frac{(N^\ell)^2 L_\ell}{2 E A_\ell^2} + \lambda L_\ell = 0 \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}),$$

odkudž okamžitě řešení úlohy z bodu 2.

$$A_\ell = \frac{\mathscr{V} \sqrt{\mathfrak{A}_\ell}}{\sum_{p=1}^{\mathscr{L}} L_p \sqrt{\mathfrak{A}_p}} \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}),$$

kde

$$\mathfrak{A}_\ell = \frac{(N^\ell)^2}{2E}.$$

Shrňme tedy právě popsaný postup výpočtu do tří bodů:

1.
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{F},$$
$$N^\ell = \frac{E A_\ell}{L_\ell} \left(\boldsymbol{u}_j^T \boldsymbol{s}_\ell^{ij} + \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_\ell^{ji} \right).$$

2.
$$A_\ell = \frac{\mathscr{V} N^\ell}{\sum_{p=1}^{\mathscr{L}} L_p N^p} \quad (\ell = 1, 2, \ldots, \mathscr{L}).$$

3. Atd. až do konvergence, tj. do té doby, kdy pro dvě následné iterace platí

$$\left| A_\ell^{\text{iterace}} - A_\ell^{\text{iterace}+1} \right| < \varepsilon \quad \forall \ell,$$

kde ε je zvolené malé číslo.

---

[8] Viz níže připojený zdrojový kód.

Na základě právě popsaného postupu bylo sestaveno interaktivní síťové prostředí pro návrh maximálně tuhých rámových konstrukcí.[9]

Na závěr uveďme kompletní zdrojový kód v syntaxi programu GNU octave zpracovávající popsanou úlohu.[10]

```
## maxtuhprutovky.m
## zdrojový kód v syntaxi programu GNU Octave pro řešení úlohy o
## MAXIMALIZACI TUHOSTI PRUTOVÉ SOUSTAVY O DANÉM OBJEMU
## DODĚLAT: zamezení překrývání prvků
1;
#clear
format long # none
## ==========================================================================================
## ZADÁNÍ
#zadani4bodu
#zadani8bodu
#zadani12bodu
## ==========================================================================================
## Zadej UZLOVÉ BODY konstrukce ve formě matice $B$, kde každý řádek náleží jednomu bodu
## a v každém řádku jsou postupně $x$-ová, $y$-ová a $z$-ová souřadnice příslušného bodu
#a=100; %mm ## rozteč ve směru osy $x$
#b=100; %mm ## rozteč ve směru osy $y$
#c=100; %mm ## rozteč ve směru osy $z$
#B=[
#0,0,c;
#0,0,0;
#0,b,c;
#0,b,0;
#a,0,c;
#a,0,0;
#a,b,c;
#a,b,0;
#2*a,0,c;
#2*a,0,0;
#2*a,b,c;
#2*a,b,0;
#];
## Zadej PŘEDEPSANÁ NULOVÁ ULOŽENÍ: matici U obsahující v prvním sloupci číslo uzlu (číslo
## řádku v matici B, na který je uvalená nějaká vazba), v dalších třech sloupcích buď 1, kde
## je zapovězený -- tedy nulový -- posuv a nulu na ostatních pozicích -- tam, kde je posuv umožněn)
#Ul=[
#1,1,1,1;
#2,1,1,1;
#3,1,1,1;
#4,1,1,1;
#];
## Zadej VNĚJŠÍ SÍLY: matici F obsahující v prvním sloupci číslo uzlu (číslo
## řádku v matici B, v němž je aplikována nějaká síla), v dalších třech sloupcích pak velikosti
## x,y,z-ových složek těchto sil
#F=[
#9,0,-100,0;
#10,0,0,-100;
#];
## Youngův modul pružnosti v tahu
#E=210000;
## připuštěný objem konstrukce
#Vol=1000; %mm^3
## ==========================================================================================
## nastavuji pomocné veličiny
[rB,sB]=size(B);
historieA=[];
## indexy řádků a sloupců odpovídajících nulovým posuvům
nuluj=vec((kron(ones(1,3),(Ul(:,1)-ones(size(Ul(:,1))))*3)+(kron(ones(size(Ul(:,1))),[1,2,3])))');
## ==========================================================================================
## ŘEŠENÍ
## ==========================================================================================
## 1. sestavení vektoru sil $f$
## ------------------------------------------------------------------------------------------
fp=zeros(rB,3);
fp(F(:,1),:)=F(:,2:4);
f=vec(fp');
## ==========================================================================================
```

[9] Viz <http://drone.fsid.cvut.cz/mtp.php>.

[10] Tento zdroj je volně dostupný na adrese <http://drone.fsid.cvut.cz/student/mtp.m>.

```
## 2. sestavení matice směrových kosinů $s$
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## do matice s, obsahující tolik řádků, kolik je prutů
## základové struktury, píšeme na řádek postupně číslo výchozího uzlu, číslo koncového uzlu,
## složky směrového vektoru prvku x,y,z a délku prutu $L$
s=[];
rs=rB*(rB-1)/2; ## počet prvků
ell=0; ## číslo prutu (řádek matice s)
for i=1:rB
 for k=i+1:rB
ell=ell+1;
L=sqrt((B(k,:)-B(i,:))*(B(k,:)-B(i,:))');
pros=(B(k,:)-B(i,:))/L;
s=[s;i,k,pros,L];
 endfor %k
endfor %i
## =============================================================================================
## 5. Rozřešení optimalizační úlohy:
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## krok č. 1. (sestavení matice $S$)
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## počáteční volba průřezů
A=ones(rs,1);
Amj=A;
epsilon=1;
iterace=0;
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## začátek iterační smyčky
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
while (epsilon > 0.0001)
iterace=iterace+1;#
## =============================================================================================
## sestavení matice $S$
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## tak jak se sestavuje matice tuhosti při kmitání hmot na pružinách
ell=0;
clear S
S=zeros(3*rB,3*rB); ## budoucí matice tuhosti (sestavovaná v každém kroku řešení etrem. úlohy)
for i=1:rB
 for k=i+1:rB
ell=ell+1;
## příspěvek prutu spojujícího bod $i$ s bodem $k$:
S(3*i-2:3*i,3*i-2:3*i)=S(3*i-2:3*i,3*i-2:3*i)+s(ell,3:5)'*s(ell,3:5)*E*A(ell)/s(ell,6);
S(3*k-2:3*k,3*k-2:3*k)=S(3*k-2:3*k,3*k-2:3*k)+s(ell,3:5)'*s(ell,3:5)*E*A(ell)/s(ell,6);
S(3*i-2:3*i,3*k-2:3*k)=-s(ell,3:5)'*s(ell,3:5)*E*A(ell)/s(ell,6);
S(3*k-2:3*k,3*i-2:3*i)=-s(ell,3:5)'*s(ell,3:5)*E*A(ell)/s(ell,6);
 endfor %k
endfor %i
## zohlednění předepsaných nulových posuvů uzlových bodů
S(:,nuluj)=zeros(size(S(:,nuluj)));
S(nuluj,:)=zeros(size(S(nuluj,:)));
p1=diag(S);
p1(nuluj)=ones(length(nuluj),1);
S1=S-diag(diag(S));
S=S1+diag(p1);
clear S1 p1
## zabezpečení regulárnosti matice S pro nulový průřez prvku (mimo diagonálu jsou nuly--to je v
## pořádku; na diagonále, u uzlu, z kterého vychází pouze pruty s nulovým průřezem, jsou nuly,
## ty nahradím jedničkou. Je-li vnější síla v tomto uzlu nulová, pak vyjde nulový posuv u, je-li
## nenulová, pak vyjde nenulový posuv a něco je v nepořádku... tu sílu nic nenese..)
## tedy ta náhrada:
p1=diag(S);
jednickuj=find(abs(p1)<0.000001);
p1(jednickuj)=ones(length(jednickuj),1);
S1=S-diag(diag(S));
#S=S1+diag(p1);
clear S1 p1
neuchyceneUzly=jednickuj;
## řešení úlohy pružnosti
u=S^(-1)*f;
## vnitřní síly v jednotlivých prutech
for ell=1:rs
np(ell)=E*A(ell)*s(ell,3:5)*(u(s(ell,2)*3-2:s(ell,2)*3)-u(s(ell,1)*3-2:s(ell,1)*3))/s(ell,6);
endfor
n=np';
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## krok č. 2. (rozřešení nutné podmínky maxima tuhosti -- vektor průřezů $A$)
```

```
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
Afrak=(n.^2)/2/E;
A=(Vol*sqrt(Afrak))/(sqrt(Afrak)'*s(:,6));
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
## krok č. 3. (zodpovězení konvergenční otázky)
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
epsilon=sum(abs(A-Amj));#;
Amj=A;
historieA=[historieA;[epsilon,A']];
if (iterace==2000)
epsilon=0;
endif
endwhile
## =============================================================================================
## 6. Zápis výsledků
## ---------------------------------------------------------------------------------------------
Atl=A/max(A);
uVmikrometrech=u*1000;
utl=u/max(abs(u));
save -ascii vypis.data B A Atl s Ul F E Vol uVmikrometrech utl n iterace epsilon
save -ascii historie.data historieA
```

Kapitola 9

Laminátová deska a maximalizace míry tuhosti

9.1 Mechanické vlastnosti laminátových desek

Proč používat vláknové kompozity místo klasických (objemových) materiálů:[1]

1. Možnost nastavení požadovaných mechanických vlastností (zejména směrových).
2. Vyšší pevnost materiálu s malým průřezem (∅ 10–20 μm) – menší pravděpodobnost přítomnosti skrytých vad.[2]

Nevýhody:

1. Náročná výroba.
2. Malá znalost a předpověditelnost únavových vlastností.
3. Jejich výhoda (směrovost vlastností) se může snadno (při zatížení pod neočekávaným směrem) stát jejich nevýhodou.[3]

Laminát se skládá z vrstev (layers, plies) majících většinou jednosměrnou orientaci vláken.

Laminát a způsob jeho složení z různě orientovaných vrstev se označuje posloupností hodnot úhlu svíraného směrem orientace vláken jednotlivých vrstev a osou x souřadného systému. Toto značení mívá různé provedení, které je patrné z obrázků 9.2 a 9.3.

V jistém měřítku jsou všechny materiály heterogenní. Toto tvrzení je zřejmé, snížíme-li se na úroveň atomů. Uvažujeme-li však v tomto měřítku, stávají se i nejjednodušší problémy výpočetní mechaniky prakticky neřešitelné (snad s výjimkou užití metody matematické homogenizace periodických struktur).[4] K překonání této skutečnosti se zavádí hypotéza materiálové kontinuity, která ústí v teoretickou homogennost materiálu.

V úrovni inženýrské se heterogenita objevuje tehdy, jsou-li fyzikální či mechanické vlastnosti funkcí souřadnic. Změna vlastností je potom dvojího druhu: spojitá či nespojitá. V případě kompozitních materiálů dochází k nespojitým změnám mechanických vlastností na mezipološe rozličných fází. Každou fázi samu o sobě však většinou uvažujeme jako homogenní a izotropní.

V případě kompozitního materiálu (například dvousložkového z obrázku 9.4) rozeznáváme dvě měřítka:

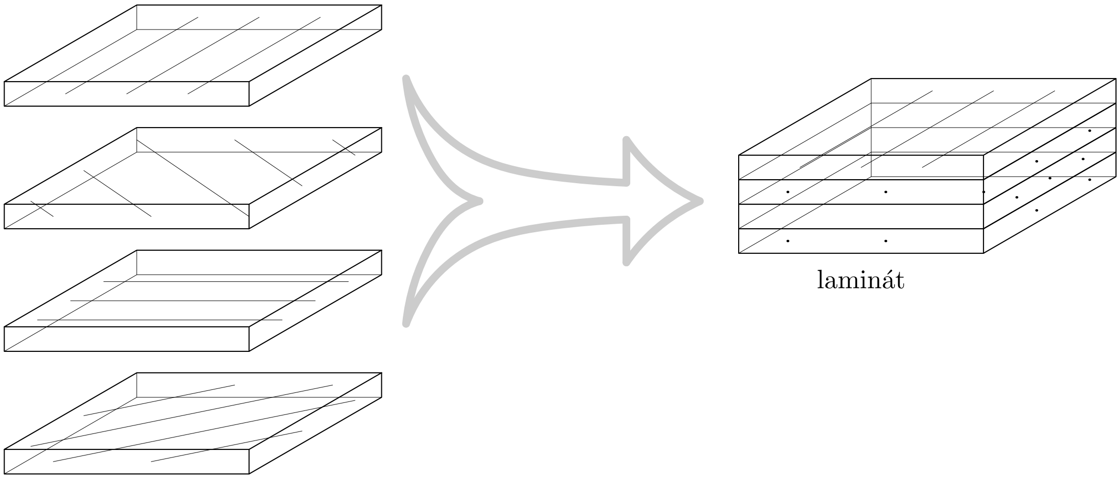
---

[1] Srvn. [Bareš, 1989], [Berthelot, 1999], [Brebbia *et al.*, 1988], [Cherkaev, 2000], [Gürdal *et al.*, 1999], [Manevitch *et al.*, 2002], [Sanchez-Palencia and Zaoui, 1985], [Sobotka, 1981], [Soremekun, 1997], [Timoshenko, 1940], [Tsai, 1992], [Tsai, 1988].

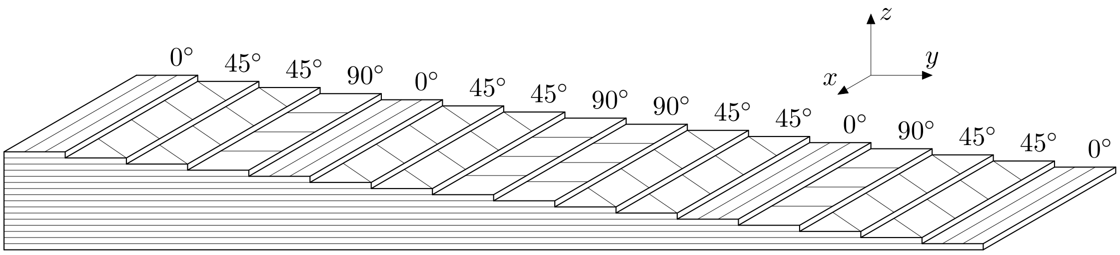
[2] Viz [Berthelot, 1999].

[3] [Soremekun, 1997].

[4] O matematické homogenizaci heterogenních struktur srvn. např. [Allaire, 2002], [Bendsøe, 1995], [Cherkaev, 2000], [Cioranescu and Paulin, 1999], [Sanchez-Palencia and Zaoui, 1985], [Šejnoha *et al.*, 2001].



Obrázek 9.1: Složení laminátu z vrstev



Obrázek 9.2: Laminát s označením $[0/45_2/90/0/45_2/90_2/45_2/0/90/45_2/0]$ (případně $[(0/45_2/90)_2]_s$)

1. charakteristické měřítko (rozměr) heterogenity

2. průměrující měřítko (rozměr) δ.

Vždy existuje taková velikost měřítka δ, v níž mohou být vlastnosti daného materiálu dobře aproximovány jistou průměrnou hodnotou a považovány za prostorově nezávislé – homogenizované. Toto měřítko jest vždy větší nežli charakteristický rozměr. Je-li navíc menší nežli rozměr vyšetřovaného tělesa, říkáme, že materiál může být homogenizován.

Poznamenejme, že existují také přístupy, které pracují s materiálem na úrovni heterogenní, kdy se každá fáze uvažuje jako homogenní a zohledňují se vzájemné interakce na rozhraní těchto fází.[5]

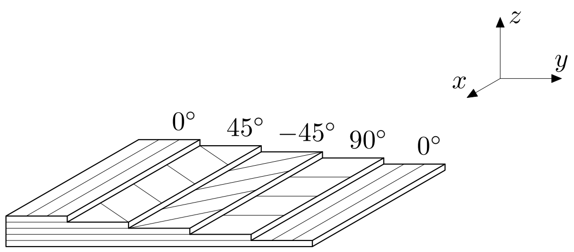
Homogenizované elastické konstanty kompozitních materiálů můžeme vyšetřovat následujícími způsoby:

1. Experimentálním testováním a měřením vzorků průměrujícího rozměru.[6]

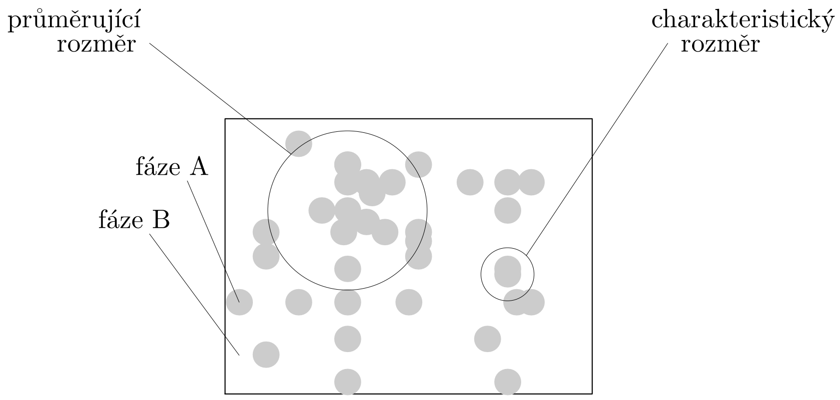
2. Metodou matematické homogenizace heterogenního mareriálu.[7]

3. Rozřešením rovnic teorie pružnosti pro vzorek kompozitového materiálu[8] s přijetím jednoho z předpokladů:

[5][Manevitch *et al.*, 2002].
[6][Berthelot, 1999] s. 153d.
[7]Např. citace poznámky 4.
[8][Berthelot, 1999] s. 166.



Obrázek 9.3: Laminát s označením $[0/\pm 45/90/0]$



Obrázek 9.4: Materiálová měřítka kompozitu

a) deformace vlákna a matrice jest shodná,

b) napjatost vlákna a matrice jest shodná.[9]

O nepřesnosti tohoto přístupu srvn. úvod k teorii matematické homogenizace.[10]

9.2 Laminátová deska a deformační varianty úlohy o maximalizaci míry tuhosti

V tomto paragrafu se zabývejme formulací deformační varianty úlohy o maximalizaci míry tuhosti při návrhu obdélné prostě podepřené laminátové desky s volitelnou orientací jednotlivých vrstev. Uvažujme obdélnou prostě podepřenou laminátovou desku složenou z daného počtu laminátových ortotropních vrstev dané tloušťky a daných materiálových vlastností. Naším přáním budiž najít takové orientace jednotlivých vrstev, pro které by daná deska, při uvažování platnosti lineárně elastického chování použitého materiálu, vykázala maximální tuhost.

Deformační variantou této úlohy (úlohy maximalizace míry tuhosti) rozumíme úlohu (7.4)

$$\{\hat{\boldsymbol{E}}, \hat{\boldsymbol{u}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{E}\in\mathbb{E}} \min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} (\mathfrak{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - \mathfrak{l}(\boldsymbol{u})),$$

kde $\mathbb{E}$ je množina přípustných tenzorů tuhosti a $\mathbb{U}$ je množina kinematicky přípustných deformačních polí.

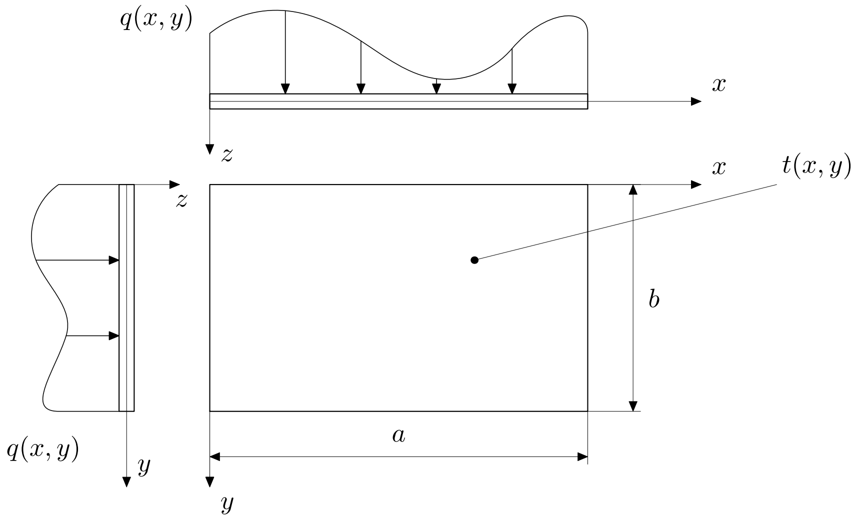
Při formulaci této úlohy v případě obdélné desky dle obrázků 9.5 a 9.6 budeme postupovat následným způsobem.[11]

---

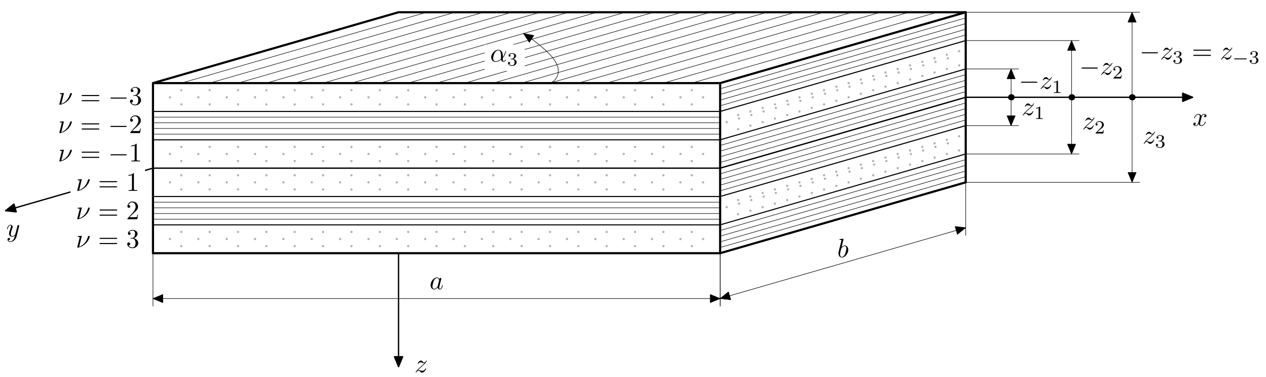
[9] [Tsai, 1992].

[10] Srvn. citace poznámky 4.

[11] Srvn. [Timoshenko, 1940], [Berthelot, 1999], [Gürdal *et al.*, 1999].



Obrázek 9.5: Uvažovaná obdélná deska



Obrázek 9.6: Uvažovaná laminátová deska složená z $2N = 2 \cdot 3$ ortotropních symetricky kladených vrstev

9.2.1 Formulace zobecněného Hookeova zákona laminátové vrstvy

Na tomto místě vyjádřeme zobecněný Hookeův zákon ortotropní laminátové vrstvy (označené pořadovým číslem ν a naznačené na obrázku 9.7) v námi uvažované globální soustavě souřadnic x–y. Soustava souřadnic x^ν– y^ν je hlavní soustavou souřadnic materiálových vlastností ortotropní vrstvy (často značené jako 1–2 a zvané hlavní ortotropní směry).

Klasický konstitutivní vztah laminátové vrstvy (zobecněný Hookeoův zákon ortotropní laminátové vrstvy) vyjádřený v soustavě souřadnic položené do hlavních ortotropních směrů[12] je dán výrazem

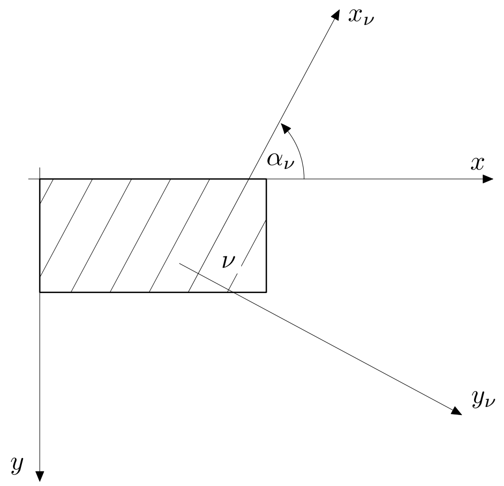
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^\nu \\ \sigma_{22}^\nu \\ \sigma_{12}^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^\nu & Q_{12}^\nu & 0 \\ Q_{12}^\nu & Q_{22}^\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{12}^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^\nu \\ \varepsilon_{22}^\nu \\ \varepsilon_{12}^\nu \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

kde

$$Q_{11}^\nu = \frac{E_1^\nu}{1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu}, \qquad \nu_{21}^\nu = \nu_{12}^\nu \frac{E_2^\nu}{E_1^\nu}, \tag{9.2}$$

$$Q_{22}^\nu = \frac{E_2^\nu}{1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu}, \qquad Q_{12}^\nu = \frac{\nu_{12}^\nu E_2^\nu}{1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu} \tag{9.3}$$

[12] [GÜRDAL *et al.*, 1999] ss. 53, 63. Viz také [MAREŠ, 2003k].



Obrázek 9.7: Vztah globální soustavy souřadnic x–y a hlavní soustavy souřadnic materiálových vlastností ν-té ortotropní vrstvy x^ν–y^ν

a kde ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) udává pořadí vrstvy od střední plochy desky a E_1^ν, E_2^ν a G_{12}^ν jsou po řadě modul pružnosti v prvním hlavním směru, modul pružnosti v druhém hlavním směru a modul pružnosti ve smyku v rovině 1–2 ν-té vrstvy. Pro hlavní (major) Poissonovo číslo ν_{12} v případě zatížení jen v 1. hlavním směru platí

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Podobně pro vedlejší (minor) Poissonovo číslo v případě zatížení jen ve 2. hlavním směru je

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Dále platí

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}.$$

Při formulaci konstitutivního vztahu, stejně jako při vyjádření úplné potenciální energie, uvažujeme rovinný stav napětí.

9.2.2 Vyjádření konstitutivní rovnice užitím dvourozměrného tenzorového zápisu

Zaveďme tenzory napětí a deformací ν–té vrstvy vyjádřené v soustavě souřadnic, která splývá s hlavními směry příslušné ortotropní vrstvy, zápisem

$$\{\sigma_{ij}^\nu\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^\nu & \sigma_{12}^\nu \\ \sigma_{21}^\nu & \sigma_{22}^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^\nu & \sigma_{xy}^\nu \\ \sigma_{yx}^\nu & \sigma_{yy}^\nu \end{pmatrix},$$

$$\{\varepsilon_{ij}^\nu\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^\nu & \varepsilon_{12}^\nu \\ \varepsilon_{21}^\nu & \varepsilon_{22}^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^\nu & \varepsilon_{xy}^\nu \\ \varepsilon_{yx}^\nu & \varepsilon_{yy}^\nu \end{pmatrix},$$

kde alternativně, tak jako v budoucím, dle momentálních potřeb používáme ekvivalentní značení 11 či xx. Vztah mezi napětím a deformací vyjádřenými v soustavě souřadnic ležící v hlavních směrech ortotropní vrstvy – tedy vztah (9.1) – má potom tvar

$$\sigma_{ij}^\nu = E_{ijkl}^\nu \varepsilon_{kl}^\nu,$$

kde

$$
\{E^{\nu}_{ijkl}\}_{ij\lceil kl} = \begin{array}{c|cccc} {\scriptstyle ij\lceil kl} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 21} & {\scriptstyle 22} \\ \hline {\scriptstyle 11} & & & & \\ {\scriptstyle 12} & & & & \\ {\scriptstyle 21} & & & & \\ {\scriptstyle 22} & & & & \end{array} \left(\begin{array}{cccc} Q^{\nu}_{11} & 0 & 0 & Q^{\nu}_{12} \\ 0 & G^{\nu}_{12} & G^{\nu}_{12} & 0 \\ 0 & G^{\nu}_{12} & G^{\nu}_{12} & 0 \\ Q^{\nu}_{12} & 0 & 0 & Q^{\nu}_{22} \end{array} \right), \tag{9.4}
$$

kde pravý dolní index $ij\lceil kl$ říká, že jednotlivé řádky následné matice odpovídají postupně indexům ($ij = 11, 12, 21, 22$) a jednotlivé sloupce indexům ($kl = 11, 12, 21, 22$). Uvedený tvar konstitutivní relace je zjevný z následného rozepsání vztahů (9.1):

$$
\sigma^{\nu}_{11} = Q^{\nu}_{11}\varepsilon^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{22}
$$

$$
\sigma^{\nu}_{22} = Q^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{22}\varepsilon^{\nu}_{22}
$$

$$
\sigma^{\nu}_{12} = \sigma^{\nu}_{21} = G^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{12} + G^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{21} = 2G^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{12} = 2G^{\nu}_{12}\varepsilon^{\nu}_{21} \quad (\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}).
$$

Provedením transformace právě vyjádřených tenzorů napětí a deformací z lokální soustavy souřadnic x^{ν}–y^{ν} do globální soustavy souřadnic laminátové desky x–y zavedeme vyjádření tenzoru napětí vrstvy ν v globální soustavě souřadnic x–y

$$
\sigma_{ij}(x,y,z) = \ell^{\nu}_{ik}\ell^{\nu}_{jl}\sigma^{\nu}_{kl} \qquad \begin{array}{l} \forall\ z \in \langle z_{\nu-1}, z_{\nu}\rangle \text{ je-li } \nu > 0, \\ \forall\ z \in \langle z_{\nu}, z_{\nu+1}\rangle \text{ je-li } \nu < 0, \end{array}
$$

jako funkce tenzoru deformace vrstvy ν vyjádřeného také v globálním souřadném systému x–y

$$
\varepsilon_{ij}(x,y,z) = \ell^{\nu}_{ik}\ell^{\nu}_{jl}\varepsilon^{\nu}_{kl} \qquad \begin{array}{l} \forall\ z \in \langle z_{\nu-1}, z_{\nu}\rangle \text{ je-li } \nu > 0, \\ \forall\ z \in \langle z_{\nu}, z_{\nu+1}\rangle \text{ je-li } \nu < 0. \end{array} \tag{9.5}
$$

Transformační matice zde má (dle obrázku 9.7) tvar

$$
\{\ell^{\nu}_{ik}\}_{i\lceil k} = \{\ell_{ik}(\alpha_{\nu})\}_{i\lceil k} = \{\cos(x_i, x^{\nu}_k)\}_{i\lceil k} = \left(\begin{array}{cc} \cos(x,x^{\nu}) & \cos(x,y^{\nu}) \\ \cos(y,x^{\nu}) & \cos(y,y^{\nu}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \cos\alpha_{\nu} & \sin\alpha_{\nu} \\ -\sin\alpha_{\nu} & \cos\alpha_{\nu} \end{array} \right). \tag{9.6}
$$

Jelikož

$$
\ell^{\nu}_{ik}\ell^{\nu}_{jk} = \delta_{ij}
$$

a

$$
\ell^{\nu}_{ki}\ell^{\nu}_{kj} = \delta_{ij},
$$

kde Kroneckerova delta[13]

$$
\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad l = k \\ 0 & \text{pro} \quad l \neq k, \end{cases}
$$

dostáváme vynásobením obou stran rovnosti (9.5) výrazem $\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}$ inverzní transformační vztah

$$
\varepsilon^{\nu(z)}_{mn}(x,y,z) = \ell^{\nu(z)}_{im}\ell^{\nu(z)}_{jn}\varepsilon_{ij}(x,y,z),
$$

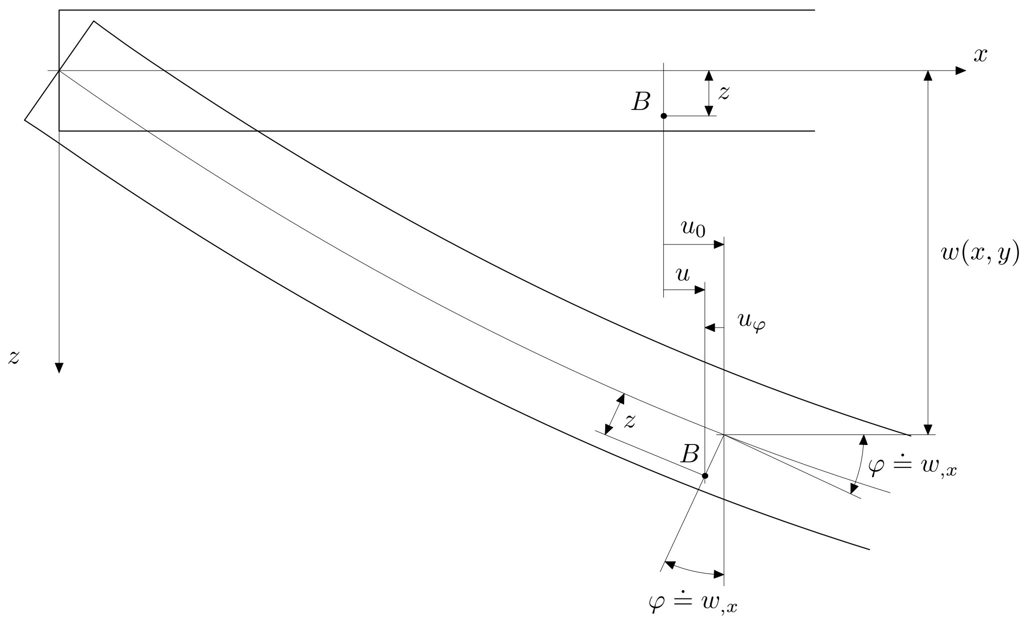
kde tenzor ℓ^{ν}_{im} odpovídá vrstvě $\nu = \nu(z)$ příslušné uvažované souřadnici $z \in \langle z_{\nu-1}, z_{\nu}\rangle$, je-li $z > 0$ a $z \in \langle z_{\nu}, z_{\nu+1}\rangle$, je-li $z < 0$.

Shora slibovaný vztah mezi tenzorem napětí vztaženým ke globální soustavě souřadnic a tenzorem deformací vyjádřeným v téže globální soustavě souřadnic je potom získán vztahy

$$
\sigma_{ij}(x,y,z) = \ell^{\nu(z)}_{im}\ell^{\nu(z)}_{jn}\sigma^{\nu(z)}_{mn} = \ell^{\nu(z)}_{im}\ell^{\nu(z)}_{jn}E^{\nu(z)}_{mnop}\varepsilon^{\nu(z)}_{op},
$$

z nichž dostáváme konstitutivní vztah pro tenkou laminátovou desku

$$
\sigma_{ij}(x,y,z) = \ell^{\nu(z)}_{im}\ell^{\nu(z)}_{jn}E^{\nu(z)}_{mnop}\ell^{\nu(z)}_{ko}\ell^{\nu(z)}_{lp}\varepsilon_{kl}(x,y,z). \tag{9.7}
$$



Obrázek 9.8: Řez málo deformovanou deskou vedený rovnoběžně s rovinou x–z

V další práci vyjdeme od myšleného řezu deskou vedeného rovinou rovnoběžnou s rovinou x–z, jak je znázorněn na obrázku 9.8. Z tohoto obrázku, kde jest znázorněn předpoklad zachování přímosti a kolmosti úseček kolmých k nezdeformované střední ploše také po deformaci a kde $w(x, y)$ značí velikost průhybu střední plochy, lze usoudit, že pro malé úhly φ, tedy za požadavku **malých deformací**, pro náš případ platí (sledujme posunutí bodu B)

$$u = u_0 - u_\varphi = u_0 - z\sin\varphi \doteq u_0 - zw_{,x}.$$

Podobně lze pro řez rovinou $y-z$ psát

$$v = v_0 - v_\varphi = v_0 - z\sin\psi \doteq v_0 - zw_{,y}.$$

Použitím **Cauchyho vztahů**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

máme

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} = u_{0,x} - zw_{,xx},$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{,y} = v_{0,y} - zw_{,yy},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) = \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) - zw_{,xy}$$

a ježto $w = w(x, y)$, $u_0 = u_0(x, y)$ a $v_0 = v_0(x, y)$, máme dále[14]

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) = \frac{1}{2}(-w_{,x} + w_{,x}) = 0$$

a

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(v_{,z} + w_{,y}) = \frac{1}{2}(-w_{,y} + w_{,y}) = 0.$$

Dále platí

$$\varepsilon_{zz} = t_{,z},$$

[13]Kronecker, Leopold (1823–1891).

[14]Což je přímým důsledkem předpokladu zachování přímosti a kolmosti úseček před deformací kolmých ke střední ploše

kde $t = t(x, y, z)$ je funkce vyjadřující vzdálenost zdeformovaného bodu majícího před deformací souřadnice (x, y, z) od nezdeformované polohy měřenou ve směru osy z. Dle předpokladu o rovinné napjatosti by $\varepsilon_{zz} = t_{,z}$ mělo býti od nuly různé a rovno

$$\varepsilon_{zz} = -\nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}).$$

Pro diskutovaný případ pišme souhrnně

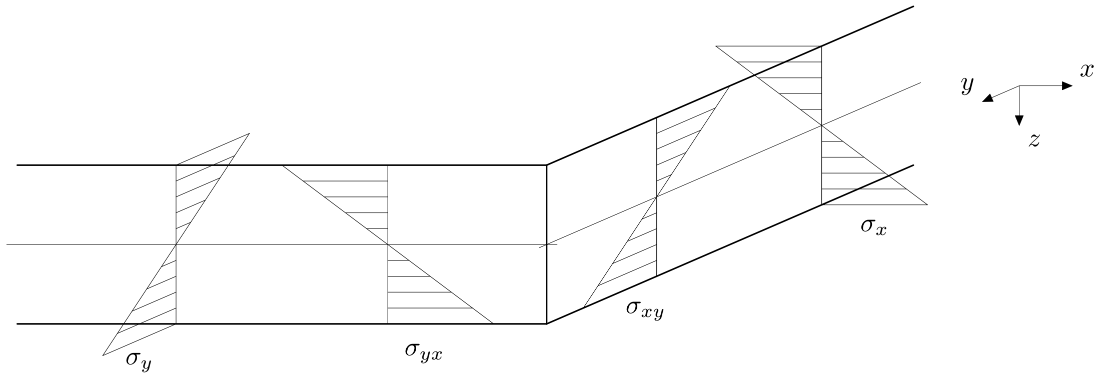
$$\varepsilon_{kl}(x, y, z) = \varepsilon^0_{kl} - zw_{,kl},$$

čili

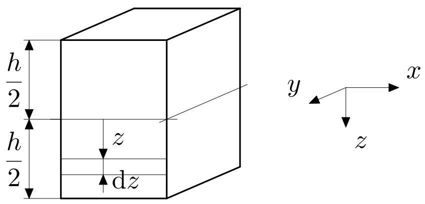
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{kl}\}_{k\lceil l} = \{\varepsilon_{kl}(x,y,z)\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} & \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) \\ \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x}) & v_{0,y} \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,yy} \end{pmatrix},$$

což značme

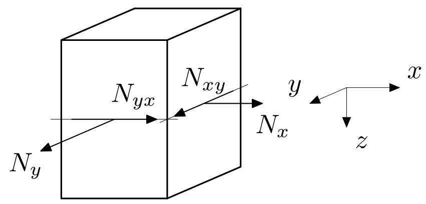
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon^0_{kl}\} - z\{w_{,kl}\} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 - z\boldsymbol{w}''.$$



Obrázek 9.9: Průběh napětí v řezu málo deformovanou deskou pro případ $N_{ij} = 0$



(a) Jednotkový element



(b) Umístění sil

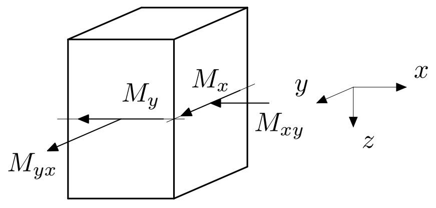
Obrázek 9.10: Vnitřní síly na jednotku délky

Síly, ležící v rovině desky a na ni působící, vztažené na jednotku šířky, lze potom zapsat jako

$$\boldsymbol{N} = \{N_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{yx} & N_{yy} \end{pmatrix},$$

kde

$$N_{ij} = \int_{z_{-N}}^{z_N} \sigma_{ij}(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \sigma_{ij}(x,y,z)\,\mathrm{d}z + \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} \sigma_{ij}(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$



Obrázek 9.11: Vnitřní momenty na jednotku délky

a kde $z_0 = 0$. Dalšími úpravami je následující

$$N_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \ell_{im}^{\nu(z)} \ell_{jn}^{\nu(z)} E_{mnop}^{\nu(z)} \ell_{ko}^{\nu(z)} \ell_{lp}^{\nu(z)} \varepsilon_{kl}(x,y,z)\,\mathrm{d}z + \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} \ell_{im}^{\nu(z)} \ell_{jn}^{\nu(z)} E_{mnop}^{\nu(z)} \ell_{ko}^{\nu(z)} \ell_{lp}^{\nu(z)} \varepsilon_{kl}(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

$$N_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \left(\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}\right)\,\mathrm{d}z + \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \left(\varepsilon_{kl}^0 - z w_{,kl}\right)\,\mathrm{d}z,$$

$$\begin{aligned} N_{ij} = {} & \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \mathrm{d}z - \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} w_{,kl} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z\,\mathrm{d}z + \\ & + \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \varepsilon_{kl}^0 \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} \mathrm{d}z - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} w_{,kl} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{ij} = {} & \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \varepsilon_{kl}^0 (z_\nu - z_{\nu-1}) - \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} w_{,kl} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2} + \\ & + \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \varepsilon_{kl}^0 (z_{\nu+1} - z_\nu) - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} w_{,kl} \frac{z_{\nu+1}^2 - z_\nu^2}{2}. \end{aligned}$$

Zavedeme-li tenzory čtvrtého řádu v dvourozměrném prostoru N_{ijkl}^0 a N_{ijkl}^w, kde

$$N_{ijkl}^0 = \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} (z_\nu - z_{\nu-1}) + \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} (z_{\nu+1} - z_\nu),$$

čili

$$N_{ijkl}^0 = \sum_{\nu=-N+1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} (z_\nu - z_{\nu-1})$$

a

$$N_{ijkl}^w = -\sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2} - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \frac{z_{\nu+1}^2 - z_\nu^2}{2},$$

tedy

$$N_{ijkl}^w = -\sum_{\nu=-N+1}^{N} \ell_{im}^{\nu} \ell_{jn}^{\nu} E_{mnop}^{\nu} \ell_{ko}^{\nu} \ell_{lp}^{\nu} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2}$$

můžeme psát

$$N_{ij} = N_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0 + N_{ijkl}^w w_{,kl},$$

čili

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{N}^w \boldsymbol{w}''. \tag{9.8}$$

Podobně v případě s momenty. Momenty působící na desku, ležící v rovině desky a vztažené na jednotku šířky desky, lze zapsat

$$\boldsymbol{M} = \{M_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix},$$

při čemž

$$M_{ij} = \int_{z_{-N}}^{z_N} z\sigma_{ij}(x,y,z)\ \mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z\sigma_{ij}(x,y,z)\ \mathrm{d}z + \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z\sigma_{ij}(x,y,z)\ \mathrm{d}z$$

a kde opět $z_0 = 0$. Dalšími úpravami dostáváme

$$M_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z\ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\varepsilon_{kl}(x,y,z)\ \mathrm{d}z +$$

$$+ \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z\ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\varepsilon_{kl}(x,y,z)\ \mathrm{d}z,$$

$$M_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z\ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\left(\varepsilon_{kl}^0 - zw_{,kl}\right)\ \mathrm{d}z +$$

$$+ \sum_{\nu=-N}^{-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z\ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\left(\varepsilon_{kl}^0 - zw_{,kl}\right)\ \mathrm{d}z,$$

$$M_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\varepsilon_{kl}^0 \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z\ \mathrm{d}z - \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}w_{,kl} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} z^2\ \mathrm{d}z +$$

$$+ \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\varepsilon_{kl}^0 \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z\ \mathrm{d}z - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}w_{,kl} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} z^2\ \mathrm{d}z,$$

$$M_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\varepsilon_{kl}^0 \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2} - \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}w_{,kl} \frac{z_\nu^3 - z_{\nu-1}^3}{3} +$$

$$+ \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\varepsilon_{kl}^0 \frac{z_{\nu+1}^2 - z_\nu^2}{2} - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}w_{,kl} \frac{z_{\nu+1}^3 - z_\nu^3}{3}.$$

Zavedeme-li tenzory čtvrtého řádu v dvourozměrném prostoru M_{ijkl}^0 a M_{ijkl}^w předpisem

$$M_{ijkl}^0 = -N_{ijkl}^w = \sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2} + \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu} \frac{z_{\nu+1}^2 - z_\nu^2}{2},$$

tj.

$$M_{ijkl}^0 = -N_{ijkl}^w = \sum_{\nu=-N+1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2}$$

a

$$M_{ijkl}^w = -\sum_{\nu=1}^{N} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu} \frac{z_\nu^3 - z_{\nu-1}^3}{3} - \sum_{\nu=-N}^{-1} \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu} \frac{z_{\nu+1}^3 - z_\nu^3}{3}$$

tedy

$$M^w_{ijkl} = -\sum_{\nu=-N+1}^{N} \ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}\frac{z^3_\nu - z^3_{\nu-1}}{3} \tag{9.9}$$

můžeme psát

$$M_{ij} = M^0_{ijkl}\varepsilon^0_{kl} + M^w_{ijkl}w_{,kl},$$

čili

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{M}^w\boldsymbol{w''}.$$

Uvažujme případ, kdy

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{0}.$$

Ptejme se kdy – při jakém tvaru tenzorů $N^0_{ijkl}, N^w_{ijkl}, M^0_{ijkl}, M^w_{ijkl}$ – tento případ skutečně nastává. Tedy pro $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ máme dle (9.8)

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{N}^0\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{N}^w\boldsymbol{w''} = \boldsymbol{0}.$$

Naše přání, aby

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = -(\boldsymbol{N}^0)^{-1}\boldsymbol{N}^w\boldsymbol{w''} = \boldsymbol{0},$$

je bezpečně splněno tehdy, je-li

$$\boldsymbol{N}^w = \sum_{\nu=1}^{N}\left\{\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}\right\}_{ij\lceil kl}\frac{z^2_\nu - z^2_{\nu-1}}{2} + \sum_{\nu=-N}^{-1}\left\{\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}\right\}_{ij\lceil kl}\frac{z^2_{\nu+1} - z^2_\nu}{2} = \boldsymbol{0}. \tag{9.10}$$

Tato podmínka je splněna v případě tak zvaných **symetrických laminátů**. Tak se nazývají laminátové desky, pro které platí

$$E^\nu_{ijkl} = E^{-\nu}_{ijkl} \wedge \ell^\nu_{im} = \ell^{-\nu}_{im},$$

tedy které jsou symetrické dle střední roviny desky. Splnění podmínky (9.10) je zřejmé z – pro symetrické lamináty platných – následujících rovností.

$$\left\{\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}\right\}_{ij\lceil kl} = \left\{\ell^{-\nu}_{im}\ell^{-\nu}_{jn}E^{-\nu}_{mnop}\ell^{-\nu}_{ko}\ell^{-\nu}_{lp}\right\}_{ij\lceil kl} \tag{9.11}$$

a

$$z_\nu = -z_{-\nu}, \quad z_{\nu-1} = -z_{-(\nu-1)} = -z_{-\nu+1} \tag{9.12}$$

a tedy

$$\frac{z^2_\nu - z^2_{\nu-1}}{2} = \frac{z^2_{-\nu} - z^2_{-\nu+1}}{2} = \left.\frac{z^2_\mu - z^2_{\mu+1}}{2}\right|_{\mu=-\nu} = -\left.\frac{z^2_{\mu+1} - z^2_\mu}{2}\right|_{\mu=-\nu}.$$

9.2.3 Vyrovnaný laminát

V případě vyrovnaného laminátu (balanced laminate)[15] každé vrstvě s orienací $+\alpha$ odpovídá vrstva s orientací $-\alpha$. Členy matice $\boldsymbol{M}^w$ v pozici M^w_{1112}, M^w_{2212}, M^w_{1121} a M^w_{2221} mají za následek zkrut desky pod zatížením momenty $M_x, M_y (M_{xy} = 0)$. Těmto členům se proto říká „členy svazující ohyb a krut“. Má-li být toto spojení eliminováno, tedy mají-li zmíněné členy uvažované matice býti nulové, je nutno použít vyrovnaný (balanced) laminát a to takový, kde vrstvy $+\alpha$ a $-\alpha$ leží v těsném sousedství.

[15] [GÜRDAL *et al.*, 1999] ss. 18, 74, 83, 128, 172, 287, 298, 301.

9.2.4 Symetrický laminát a jeho úplná potenciální energie

V dalším uvažujme shora definovaný **symetrický laminát**, tedy případ, kdy ($\boldsymbol{\varepsilon^0} = \mathbf{0}$). A to takový, který *není* nutně vyrovnaný. Dle shora řečeného platí pro symetrický laminát

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{kl}\}_{k\lceil l} = \{\varepsilon_{kl}(x,y,z)\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} w_{,xx} & w_{,xy} \\ w_{,yx} & w_{,xy} \end{pmatrix} = -z\{w_{,kl}\} = -z\boldsymbol{w''}, \quad (9.13)$$

čili

$$\varepsilon_{kl}(x,y,z) = -zw_{,kl}.$$

Věta o minimu úplné potenciální energie říká, že v rovnovážném stavu deformované těleso nabývá mezi všemi deformovanými stavy vyhovujícími daným deformačním okrajovým podmínkám minimální hodnoty potenciální energie Π, kde (srvn. výraz (7.2) ze strany 113)

$$\Pi = \int_\Omega \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{mn}(u_k))\varepsilon_{ij}(u_k)\ \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega p_i u_i\ \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial_t\Omega} t_i u_i\ \mathrm{d}S.$$

V námi uvažovaném případě obdélné desky – kdy zanedbáváme účinek objemových sil – vyjádřeme úplnou potenciální energii[16]

$$\Pi = \int_\Omega \frac{1}{2}\ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\varepsilon_{kl}(x,y,z)\varepsilon_{ij}(x,y,z)\ \mathrm{d}\Omega - \int_\omega q(x,y)w(x,y)\ \mathrm{d}\omega,$$

kde $q(x,y)$ je obecné příčné zatížení vztažené na jednotku plochy a $\omega = (0,a)\times(0,b)$ je průmět desky do roviny x–y.

Dosazením za ε_{kl} ze vztahu (9.13) dostaneme

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \int_\omega \ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}E_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)} w_{,kl}w_{,ij}\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}z - \int_\omega qw\ \mathrm{d}\omega.$$

V případě námi uvažovaného symetrického laminátu naznačeného na obrázku 9.6 s $2N$ vrstvami máme vzhledem k $z_0 = 0$ a vztahům (9.11) a (9.12)

$$\Pi = \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{\nu=1}^{N}\int_{z=z_{\nu-1}}^{z_\nu} z^2\ \mathrm{d}z \cdot \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\int_\omega w_{,kl}w_{,ij}\ \mathrm{d}\omega - \int_\omega qw\ \mathrm{d}\omega$$

a nakonec lze úplnou potenciální energii symetrického laminátu psát ve tvaru

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{N}\zeta_\nu \ell_{im}^{\nu}\ell_{jn}^{\nu}E_{mnop}^{\nu}\ell_{ko}^{\nu}\ell_{lp}^{\nu}\int_\omega w_{,kl}w_{,ij}\ \mathrm{d}\omega - \int_\omega qw\ \mathrm{d}\omega, \quad (9.14)$$

kde

$$\zeta_\nu = \frac{1}{3}(z_\nu^3 - z_{\nu-1}^3).$$

Toto vyjádření úplné potenciální energie obdélné laminátové desky platí za shora diskutovaných předpokladů:

1. Platnost Hookeova zákona homogenní lineárně elastické anizotropní (ortotropní) vrstvy. Materiálové konstanty tohoto anizotropního materiálu jsou určeny mechanickými vlastnostmi svých složek (komponent) a schopností soudržet. Zjištěny jsou experimentálně na vzorku vrstvy. Užití tohoto homogenního modelu vrstev z vláknových kompozitů je oprávněno mnohými experimentálními výsledky.[17]

---

[16] Srvn. [Washizu, 1975] (перевод на руский язык: [Вацудзу, 1987]) s. 221. Tam ve vyjádření potenciální energie vystupují pouze složky $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$. Síly $\tilde{Q}_x, \tilde{Q}_y$ tamtéž jako výslednice integrace per partes $\tilde{Q}_x = M_{x,x} + M_{xy,y}, \tilde{Q}_y = M_{xy,x} + M_{y,y}$.

[17] [Berthelot, 1999].

2. Při formulaci zobecněného Hookeova zákona laminátové vrstvy předpokládáme rovinnou napjatost, což není pravdou absolutní, ale pouze přibližnou.

3. Tloušťka je taková, že platí

   - průhyby w jsou malé ve srovnání s tloušťkou h ($w \leq 0{,}3h$),
   - tloušťka je malá ve srovnání s ostatními rozměry ($h \leq 0{,}1a$, kde a je nejmenší podélný rozměr).

4. Střední plocha se deformuje pouze svisle ($\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{0}$).

5. Úsečky kolmé ke střední ploše zůstanou kolmé a přímé i po deformaci

6. Dále předpokládáme

   - laminátová deska složená z $2N$ ortotropních vrstev, po obvodě prostě podepřená,
   - vrstvy stejné orientace jsou kladeny symetricky[18] kolem roviny x–y (to má za následek splnění bodu 4.),
   - sousední vrstvy jsou vzájemně dokonale spojeny (hranice mezi sousedními vrstvami je nekonečně tuhá), deformace napříč hraniční plochou je spojitá.

9.2.5 Nutné podmínky řešení tří variant úlohy

Uvažujme tři různé úlohy a pro každou z nich formulujme nutné podmínky vztažené na jejich řešení.

w) Mějme úlohu najít skutečný deformovaný stav laminátové desky při zadané orientaci jednotlivých vrstev $\boldsymbol{\alpha}$. Řešení $\hat{w}$ této úlohy minimalizuje funkcionál potenciální energie Π.[19] Tento funkcionál je pozitivně definitní (konvexní), a proto níže vyjádřená nutná podmínka minima tohoto funkcionálu je i podmínkou postačující a tedy také nutnou a postačující podmínkou řešení úlohy (w). Pišme

$$\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}) = \arg \min_{w \in \mathbb{W}} \Pi(w, \boldsymbol{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{W}(\hat{w}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O} \wedge \hat{w} \in \mathbb{W}, \tag{w}$$

kde nutná podmínka vystupující za znaménkem implikace je tvořena předpisem

$$\mathcal{W}(w, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\delta \Pi(w, \boldsymbol{\alpha})}{\delta w}$$

a kde množina $\mathbb{W}$ je množinou všech staticky přípustných deformací.

α) Jako druhou úlohu si představme úlohu o nalezení takové orientace jednotlivých vrstev $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, která maximalizuje míru tuhosti, známe-li závislost skutečného deformovaného stavu $\hat{w} = \hat{w}(\boldsymbol{\alpha})$ na orientaci vrstev $\boldsymbol{\alpha}$. V tomto případě jde o následující úlohu[20] a nutnou podmínku:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}} \Pi(\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\hat{w}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}), \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathcal{O} \wedge \hat{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{A}, \tag{α}$$

kde množina $\mathbb{A}$ je množina materiálově dostupných stavů (tedy množina přípustných úhlů natočení). Nutná podmínka vystupující za znaménkem implikace je tentokráte dána vztahem

$$\mathcal{A}(\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \Pi(\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

---

[18] [Gürdal *et al.*, 1999] s. 298.

[19] Jak známo. Srvn. kapitolu 7 a např. [Bendsøe, 1995] a [Washizu, 1975] (перевод на руский язык: [Вацудзу, 1987]) s. 94.

[20] Srvn. vztah (7.4) na s. 114.

$w\alpha$) Třetí úlohou buď úloha (7.4) v námi diskutovaném případě nabývající tvaru[21]

$$\{\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}} \min_{w \in \mathbb{W}} \Pi(w, \boldsymbol{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{W}(\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathcal{O} \wedge \hat{w} \in \mathbb{W} \wedge \mathcal{A}^w(\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathcal{O} \wedge \hat{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{A}, \tag{$w\alpha$}$$

kde $\mathbb{A}$ je množina přípustných úhlů natočení, $\mathbb{W}$ je množina kinematicky přípustných deformačních polí a výrazy $\mathcal{W}(w, \boldsymbol{\alpha})$ a $\mathcal{A}^w(w, \boldsymbol{\alpha})$ jsou definovány následným způsobem:

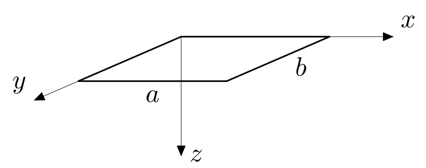
$$\mathcal{W}(w, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\delta \Pi(w, \boldsymbol{\alpha})}{\delta w}$$

a

$$\mathcal{A}^w(w, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial \Pi(w, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

Na tomto místě obraťme svou pozornost na vyjádření okrajových podmínek ustavujících množinu kinematicky přípustných deformačních polí $\mathbb{W}$.

9.2.6 Okrajové podmínky, specifikace množiny $\mathbb{W}$



Obrázek 9.12: Deska a souřadný systém

Okrajové podmínky je zvykem dělit na

a) deformační

b) silové (síly a momenty působící na jednotku délky kolmého řezu deskou v místě (x, y) hranice – okraje – desky).

Nejdříve se tímto problémem zabývejme obecně a na závěr vyjádřeme okrajové podmínky naší úlohy ve formě množiny $\mathbb{W}$ v naší úloze přípustných deformací w.

1. V případě vetknutí desky např. podél strany $x = a$ je

$$w|_{x=a} = 0 \quad \wedge \quad w_{,x}|_{x=a} = 0.$$

2. Je-li kraj desky na straně $x = a$ prostě podepřen, pak platí

$$w|_{x=a} = 0 \quad \wedge \quad M_{xx}|_{x=a} = 0.$$

Z podmínky

$$M_{xx}|_{x=a} = 0$$

plynou dle hořejšího jisté důsledky pro funkci průhybové plochy w. Pro vztah mezi vnitřními momentovými účinky $\boldsymbol{M}$ a funkcí průhybu w platí, v případě symetrického laminátu ($\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{0}$), dle strany 143

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^w \boldsymbol{w}'',$$

[21] Je tato úloha dobře podmíněná? Tj. je $\min \Pi = \inf \Pi$? Tedy je integrand kvazikonvexní? Je! viz [Bendsøe, 1995] s. 80.

čili

$$M_{ij} = M^w_{ijkl} w_{,kl},$$

což rozepsáno

$$M_{ij} = -\sum_{\nu=-N+1}^{N} \ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}E^\nu_{mnop}\frac{z^3_\nu - z^3_{\nu-1}}{3}\, w_{,kl}.$$

Podmínka

$$M_{xx}|_{x=a} = 0$$

je tedy podmínkou

$$M^w_{xxkl}\, w_{,kl}|_{x=a} = 0. \tag{9.15}$$

Jelikož však okraj desky je pro $x = a$ podepřen přímou podporou, platí $w(a, y) = 0$ a tedy $w_{,y}|_{x=a} = 0$ a

$$w_{,yy}|_{x=a} = 0.$$

V případě vyrovnaných laminátů je $M^w_{xxxy} = 0$ a $M^w_{xxyx} = 0$. Tím se podmínka (9.15) úží na tvar

$$M^w_{xxxx}\, w_{,xx}|_{x=a} = 0$$

a to dále na

$$w_{,xx}|_{x=a} = 0.$$

Podobně pro $x = 0$, $y = 0$ a $y = b$.

V případě laminátu nevyrovnaného jest třeba uvažovat celý tvar této vedlejší podmínky. To však nemění požadavky na volbu bázových funkcí užitých v Ritzově metodě řešení diferenciálních rovnic, kdy postačuje vyhovět stabilním okrajovým podmínkám. Naposledy diskutovaná podmínka je však nestabilní a není proto nutné hledět na to, je-li splněna či nikoliv.[22]

3. Pro volný okraj platí

   a)
   $$M_{xx}|_{x=a} = 0,$$

   b)
   $$M_{xy}|_{x=a} = 0,$$

   c)
   $$Q_{xz}|_{x=a} = 0,$$

   kde podmínky b) a c) se združují a degenerují v podmínku jednu[23]

   $$V_{xz} = Q_{xz} - M_{xy,y}.$$

Zajímavá a za pozornost stojící je také situace v rohu.[24]

Množina $\mathbb{W}$ v naší úloze přípustných deformací w má tedy tvar

$$\mathbb{W} = \left\{ w \mid w|_{x=0,a} = 0,\;\; w|_{y=0,b} = 0,\;\; w_{,xx}|_{x=0,a} = 0,\;\; w_{,yy}|_{y=0,b} = 0 \right\}.$$

---

[22]Srvn. [Berthelot, 1999] a [Rektorys, 1999].

[23]Srvn. například [Timoshenko, 1940], [Donnell, 1976] (перевод на руский язык: [Доннелл, 1982]), [Šubrt, 1981].

[24]Srvn. literaturu hořejší poznámky.

9.2.7 Nutná podmínka řešení úlohy (w) – diferenciální rovnice deformované střednice laminátové desky

V této kapitole najdeme tvar části nutné podmínky (w)

$$\mathcal{W}(\hat{w}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O}$$

odpovídající úloze w).

Úplnou potenciální energii našeho systému shora upravenou vztahem (9.14)

$$\Pi = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \int_\omega w_{,kl} w_{,ij} \, \mathrm{d}\omega - \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega$$

zapišme ve tvaru

$$\Pi = \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \, \mathrm{d}\omega - \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega,$$

kde

$$\mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp}.$$

Často také použijeme zápis

$$\Pi = \mathfrak{a}(w, \boldsymbol{\alpha}) - \mathfrak{l}(w),$$

kde

$$\mathfrak{a}(w, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \, \mathrm{d}\omega \tag{9.16}$$

a

$$\mathfrak{l}(w) = \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega.$$

Dle teorie Variačního počtu[25] vyhovuje řešení $\hat{w}$ úlohy (w)

$$\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}) = \arg \min_{w \in \mathbb{W}} \Pi(w, \boldsymbol{\alpha})$$

soustavě tak zvaných Eulerových–Lagrangeových rovnic. Zavedeme-li substituce

$$g_i = w_{,i} \quad (i = 1, 2) \quad (x_1 \equiv x, x_2 \equiv y)$$

a

$$g_3 = w,$$

pak lze psát naší úlohu jako

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \arg \min_{\boldsymbol{g} \in \mathbb{G}} \int_\omega \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) g_{i,j} g_{k,l} \, \mathrm{d}\omega - \int_\omega q g_3 \, \mathrm{d}\omega,$$

kde

$$\mathbb{G} = \{ g_i \ (i = 1, 2, 3) \mid g_1 - g_{3,x} = 0, g_2 - g_{3,y} = 0 \}.$$

Nyní pišme Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro tuto úlohu v následujícím tvaru:

$$H_{g_i} - \frac{\partial}{\partial x_p} H_{g_{i,p}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{9.17}$$

[25] Např. [ALEXEJEV *et al.*, 1991], [DACOROGNA, 1982], [DACOROGNA, 1989], [LAVRENŤJEV and LUSTERNIK, 1952].

kde

$$H = \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha})g_{i,j}g_{k,l} - qg_3 + \Lambda_1(g_1 - g_{3,x}) + \Lambda_2(g_2 - g_{3,y}),$$

přičemž funkce $\Lambda_1 = \Lambda_1(x,y)$ a $\Lambda_2 = \Lambda_2(x,y)$ jsou Lagrangeovy multiplikační funkce. Připomeňme, že sčítáme přes opakující se indexy v dvourozměrném prostoru $(i,j,k,l,p = 1,2)$.

Rozepsáním třetí z rovnic (9.17) dostáváme

$$-q - \frac{\partial}{\partial x}(-\Lambda_1) - \frac{\partial}{\partial y}(-\Lambda_2) = 0$$

a tedy

$$\Lambda_{1,x} + \Lambda_{2,y} = q \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_{k,k} = q. \tag{9.18}$$

Prvé dvě rovnice (9.17) vyjádřeme souhrnným zápisem $(t = 1,2)$ v následujících postupných krocích.

$$H_{g_t} - \frac{\partial}{\partial x_p} H_{g_{t,p}} = 0 \qquad (t = 1,2),$$

$$\Lambda_t - \mathcal{E}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial g_{t,p}} g_{k,l} + g_{i,j}\frac{\partial g_{k,l}}{\partial g_{t,p}}\right) = 0,$$

$$\Lambda_t - \mathcal{E}_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\delta_{ti}\delta_{jp}g_{k,l} + g_{i,j}\delta_{tk}\delta_{lp}\right) = 0.$$

Z důvodů, které se ukáží později, na tomto místě přeznačme $t \to i$, $i \to o$, $j \to p$, $k \to m$, $l \to n$ a $p \to k$.

$$\Lambda_i - \mathcal{E}_{opmn}\frac{\partial}{\partial x_k}(\delta_{io}\delta_{kp}g_{m,n} + \delta_{im}\delta_{kn}g_{o,p}) = 0 \qquad (i = 1,2),$$

$$\Lambda_i = \mathcal{E}_{opmn}\delta_{io}\delta_{kp}g_{m,nk} + \mathcal{E}_{opmn}\delta_{im}\delta_{kn}g_{o,pk}.$$

Za předpokladu

$$\mathcal{E}_{opmn} \gtreqless \mathcal{E}_{mnop}$$

máme dále

$$\Lambda_i = \mathcal{E}_{ipmn}g_{m,np} + \mathcal{E}_{opin}g_{o,pn}.$$

Přeznačením $m \to o$, $n \leftrightarrow p$ v prvém členu pravé strany je

$$\Lambda_i = g_{o,pn}(\mathcal{E}_{inop} + \mathcal{E}_{opin})$$

a položením $g_i = w_{,i}$ konečně

$$\Lambda_i = w_{,opn}(\mathcal{E}_{inop} + \mathcal{E}_{opin}). \tag{9.19}$$

Dosazením z (9.19) do (9.18) dostáváme lineární parciální diferenciální rovnici IV. řádu

$$w_{,opnm}(\mathcal{E}_{mnop} + \mathcal{E}_{opmn}) = q,$$

kterou je možné přejmenováním sčítacích indexů následujcím způsobem

$$w_{,mnpo}\mathcal{E}_{opmn} + w_{,opnm}\mathcal{E}_{opmn} = q$$

a uvážením

$$w_{,mnpo} = w_{,opnm}$$

psát jako

$$w_{,opmn}\mathcal{E}_{opmn} = \frac{q}{2}, \tag{9.20}$$

což je lineární parciální diferenciální rovnice IV. řádu (v případě dané laminátové desky) s konstantními koeficienty $\mathcal{E}_{opmn}$, a to zapsaná ve tvaru vhodném pro naše další účely. Řešení této rovnice $\hat{w}(x,y)$ splňuje nutnou podmínku kladenou na skutečný deformovaný stav. Navíc, ježto funkcionál úplné potenciální energie Π je funkcionálem konvexním,[26] splňuje toto řešení také postačující podmínku k tomu, aby tato funkce splňující navíc dané okrajové podmínky, byla funkcí skutečné deformované plochy při daném zatížení $q(x,y)$ a dané orientaci $\boldsymbol{\alpha}$ jednotlivých vrstev desky.

Čili pro úlohu (w) máme

$$\hat{w} = \arg\min_{w\in\mathbb{W}} \Pi(w,\boldsymbol{\alpha}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{w}_{,opmn}\mathcal{E}_{opmn} - \frac{q}{2} = 0 \quad \wedge \quad \hat{w}\in\mathbb{W}. \tag{$(w)_2$}$$

Na základě právě získaného tvrzení a výše diskutovaných úvah je možné naší obecně formulovanou úlohu $(w\alpha)$ ze strany 146 o nalezení skladby laminátové desky s maximální tuhostí zapsat také ve tvaru

$$\{\hat{w},\hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg\min_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}\\ w\in\hat{\mathbb{W}}}} \int_\omega w(x,y)\cdot q(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \tag{$(w\alpha)_2$}$$

kde

$$\mathbb{A} = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \alpha_\nu \in \langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\},$$

$$\hat{\mathbb{W}} = \left\{ w\in\mathbb{C}^4(\omega) \mid w_{,opmn}\mathcal{E}_{opmn} = \frac{q}{2} \quad \wedge \quad w\in\mathbb{W} \right\}.$$

Přitom je – z věty o jednoznačnosti řešení úloh matematické pružnosti – známo, že existuje právě jedno $w\in\hat{\mathbb{W}}$.

9.2.8 Nutná podmínka řešení úlohy (α) jako součást úlohy $(w\alpha)$

Pokud úloha splňuje podmínku existence sedlového bodu, potom je možná záměna pořadí maximalizační a minimalizační části úlohy,[27] tj.

$$\min_y \max_x f(x,y) = \max_x \min_y f(x,y).$$

Pro vrstvený materiál je efektivní materiálový tenzor konkávní,[28] čímž je splněna podmínka existence sedlového bodu a záměna má za následek ekvivalentní problém.

V původním tvaru úlohy $(w\alpha)$ máme

$$\{\hat{w},\hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}\min_{w\in\mathbb{W}} \Pi(w,\boldsymbol{\alpha}) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}\min_{w\in\mathbb{W}}(\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}) - \mathfrak{l}(w)) = \tag{9.21}$$

$$= \arg\min_{w\in\mathbb{W}}\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}(\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}) - \mathfrak{l}(w)) =$$

$$= \arg\min_{w\in\mathbb{W}}(\mathfrak{a}(w,\hat{\boldsymbol{\alpha}}(w)) - \mathfrak{l}(w)),$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(w) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}(\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}) - \mathfrak{l}(w)) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}).$$

Na tomto místě sledujme nutnou podmínku řešení poslední úlohy, tedy úlohy

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(w) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}}\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}). \tag{9.22}$$

---

[26] Srvn. [Washizu, 1975] (перевод на руский язык: [Вацудзу, 1987]), [Bendsøe, 1995], [Alexejev *et al.*, 1991].

[27] [Bendsøe, 1995] s. 80.

[28] V případě úlohy $\min\max\Pi$ nejsou (v obecném nasazení) splněny podmínky sedlového bodu a tedy nelze prohodit pořadí $\min\max$; viz [Allaire, 2002] s. 279 poznámka 4.1.11. Je-li však hustota konstantní a navrhována pouze orientace (náš případ), pak tato záměna možná je (jsou splněny podmínky sedlového bodu). Srvn. [Lipton, 1994].

Podmínkou, kterou řešení hořejší úlohy nutně splňuje, je podmínka

$$\frac{\partial \mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{9.23}$$

kde dle vztahu (9.16) máme

$$\mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega$$

a kde

$$\mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp}.$$

Výraz na levé straně podmínky (9.23) lze upravovat v následných krocích.

$$\frac{\partial \mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} = \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega =$$

$$= \zeta_\nu \frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega + \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \frac{\partial \ell^\nu_{jn}}{\partial \alpha_\nu} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega +$$

$$+ \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega + \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \frac{\partial \ell^\nu_{lp}}{\partial \alpha_\nu} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega.$$

Jelikož

$$E_{mnop} = E_{nmop} \quad \wedge \quad w_{,ij} = w_{,ji},$$

lze vzájemně zaměnit dvojice indexů (im) a (jn) a podobně z platnosti

$$E_{mnop} = E_{mnpo} \quad \wedge \quad w_{,kl} = w_{,lk}$$

lze vzájemně zaměnit také dvojice indexů (ko) a (lp). Z toho důvodu je možné hořejší výraz psát ve tvaru

$$\frac{\partial \mathfrak{a}(w,\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} = 2\zeta_\nu \left(\frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega + \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega \right),$$

čímž nutná podmínka nabývá tvaru

$$\left(\frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} + \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{lp} \cdot \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \right) \cdot \int_\omega w_{,ij} w_{,kl} \,\mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Pro derivaci směrových kosinů pišme

$$\left\{ \frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \right\}_{i\lceil m} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \begin{pmatrix} \cos\alpha_\nu & \sin\alpha_\nu \\ -\sin\alpha_\nu & \cos\alpha_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_\nu & \cos\alpha_\nu \\ -\cos\alpha_\nu & -\sin\alpha_\nu \end{pmatrix}.$$

Zavedením Levi-Civitova antisymetrického tenzoru ve dvourozměrném prostoru $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, který má následující vlastnosti

$$\{\epsilon_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\epsilon_{ij}\epsilon_{lm}\}_{il\lceil jm} = \{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\}_{il\lceil jm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lj} = \epsilon_{ji}\epsilon_{jl} = \delta_{il},$$
$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2,$$

přepišme výraz pro derivaci směrových kosinů ve formě

$$\frac{\partial \ell^{\nu}_{im}}{\partial \alpha_{\nu}} = \epsilon_{ir}\ell^{\nu}_{rm}.$$

Nutnou podmínku tedy přepišme do tvaru

$$\left(\epsilon_{ir}\ell^{\nu}_{rm}\ell^{\nu}_{jn}\ell^{\nu}_{ko}\ell^{\nu}_{lp}E^{\nu}_{mnop} + \epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop}\right) \cdot \int_{\omega} w_{,ij}w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Přejmenováním indexů (ij) na (kl) a (mn) na (op) a *vice versa* v prvním sčítanci vzniklém roznásobením dostáváme, při uvážení $w_{,kl}w_{,ij} = w_{,ij}w_{,kl}$ a $E^{\nu}_{mnop} = E^{\nu}_{opmn}$, následující tvar nutné podmínky

$$\left(\epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{opmn} + \epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop}\right) \cdot \int_{\omega} w_{,ij}w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

a tedy

$$2\epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop} \cdot \int_{\omega} w_{,ij}w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

či po vykrácení dvojkou

$$\epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop} \cdot \int_{\omega} w_{,ij}w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{9.24}$$

Tím tedy formulujeme nutnou a postačující podmínku pro řešení úlohy (9.22)

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(w) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}} \mathfrak{a}(w, \boldsymbol{\alpha}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop} \cdot \int_{\omega} w_{,ij}w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \qquad \wedge \qquad \ell^{\nu}_{ij} \in \mathbb{A}^{\ell},$$

kde

$$\mathbb{A}^{\ell} = \left\{ \ell^{\nu}_{ij} \mid \ell_{11} = \ell_{22} = \cos\hat{\alpha}_{\nu},\ \ell_{12} = -\ell_{21} = \sin\hat{\alpha}_{\nu} \ \wedge\ \hat{\alpha}_{\nu} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \right\}.$$

Ze vztahů o záměně pořadí minimalizace a maximalizace předcházejících formulaci úlohy (9.22) je vidět ekvilalence $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\widehat{w}) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ úlohy

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\widehat{w}) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}} \mathfrak{a}(\widehat{w}, \boldsymbol{\alpha}),$$

kde

$$\widehat{w} = \hat{w}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$$

považujeme za známou funkci proměnných x, y a úlohy (α)

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}} \Pi(\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}),$$

přičemž[29] $\hat{w}(\boldsymbol{\alpha})$ považujeme za známou funkci proměnných x, y a zejména $\boldsymbol{\alpha}$. A tedy také, že nutná (a postačující?[30]) podmínka pro řešení úlohy (α) je tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}} \Pi(\hat{w}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_{kr}\ell^{\nu}_{ro}\ell^{\nu}_{lp}\ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}E^{\nu}_{mnop} \cdot \int_{\omega} \widehat{w}_{,ij}\widehat{w}_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \qquad \wedge \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A} \text{ resp. } (\ell^{\nu}_{ij} \in \mathbb{A}^{\ell}).$$

[29]Sic! Pozoruj rozdíl mezi $\widehat{w}$ a $\hat{w}$.

[30]Srvn. [Bendsøe, 1995] s. 80. Teze o konkávnosti efektivního materiálového tenzoru vrstveného materiálu (laminátu).

9.2.9 Nutná podmínka řešení úlohy $(w\alpha)$

Ze shora řečeného při důrazu na vztahy (9.21) je okamžitě v případě úlohy $(w\alpha)$

$$\{\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{A}} \min_{w\in\mathbb{W}} \Pi(w, \boldsymbol{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \hat{w}_{,ijkl} \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} = \frac{q}{2} \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \epsilon_{kr} \ell^\nu_{ro} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \cdot \int_\omega \hat{w}_{,ij} \hat{w}_{,kl} \, \mathrm{d}\omega = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N) \quad \wedge \tag{9.25}$$

$$\wedge \quad \hat{w} \in \mathbb{W} \quad \wedge \quad \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{A}^\ell.$$

9.2.10 Modifikovaná formulace úlohy $(w\alpha)$ – označení $(w\alpha)_b$

Z výše uvedeného vyplývá, vedle formulace $(w\alpha)$ – dále značené jako $(w\alpha)_a$ – také formulace dále citovaná pod bodem b). Máme tedy dvě následné formulace úlohy $(w\alpha)$.

a)

$$\{\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle^N} \min_{w\in\mathbb{W}} \Pi, \tag{$(w\alpha)_a$}$$

$$\Pi(w, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \int_\omega w_{,kl} w_{,ij} \, \mathrm{d}\omega - \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega, \quad \ell^\nu_{im} = \ell^\nu_{im}(\boldsymbol{\alpha}).$$

b)

$$\{\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg \min_{\{w,\boldsymbol{\alpha}\}\in\hat{\mathbb{A}}} \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega, \tag{$(w\alpha)_b$}$$

$$\hat{\mathbb{A}} = \left\{ w \in \mathbb{W}, \boldsymbol{\alpha} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle^N \mid w_{,ijkl} \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} = \frac{q}{2}, \ \ell^\nu_{im} = \ell^\nu_{im}(\boldsymbol{\alpha}) \right\},$$

kde

$$\mathbb{W} = \left\{ w \mid w|_{x=0,a} = 0, \ w|_{y=0,b} = 0, \ w_{,xx}|_{x=0,a} = 0, \ w_{,yy}|_{y=0,b} = 0 \right\}.$$

9.3 Nutná podmínka řešení diskretizované úlohy $(w\alpha)_a$

V dalším se věnujme sestavení nutných podmínek řešení úlohy[31]

$$\{\hat{w}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}\in\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle} \min_{w\in\mathbb{W}} \Pi(w, \boldsymbol{\alpha}), \tag{$(w\alpha)_a$}$$

$$\Pi(w, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} \int_\omega w_{,kl} w_{,ij} \, \mathrm{d}\omega - \int_\omega q w \, \mathrm{d}\omega, \quad \ell^\nu_{im} = \ell^\nu_{im}(\alpha_\nu),$$

$$\mathbb{W} = \left\{ w \mid w|_{x=0,a} = 0, \ w|_{y=0,b} = 0, \ w_{,xx}|_{x=0,a} = 0, w_{,yy}|_{y=0,b} = 0 \right\}.$$

[31] Je tato úloha quasikonvexní? (Tj. zdola polopospojitá? Srvn. [Dacorogna, 1982].) Je. Viz [Bendsøe, 1995].

9.3.1 Parametrizace úlohy $(w\alpha)_a$

Oproti formulaci nutné podmínky řešení úlohy $(w\alpha)$ ze strany 153 tentokrát diskretizujme danou úlohu do tvaru plně parametrického a poté hledejme nutné podmínky řešení této parametrické optimalizační úlohy označené jako $(w\alpha)_a^p$.

Hledanou funkci průhybu $w(x, y)$ nahraďme jí příslušnou Fourierovou řadou s bází splňující podmínky dané množinou $\mathbb{W}$, tj. ve tvaru

$$w = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\gamma\pi y}{b}.$$

Označme

$$S^{\kappa\gamma} = \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\gamma\pi y}{b}$$

a vyjádřeme integrál

$$\int_\omega w_{,ij} w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = \int_\omega \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} S^{\kappa\gamma}_{,ij} \cdot \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\xi\eta} S^{\xi\eta}_{,kl}\, \mathrm{d}\omega,$$

$$\int_\omega w_{,ij} w_{,kl}\, \mathrm{d}\omega = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \int_\omega S^{\kappa\gamma}_{,ij} S^{\xi\eta}_{,kl}\, \mathrm{d}\omega.$$

Je

$$\{S^{\kappa\gamma}_{,ij} S^{\xi\eta}_{,kl}\}_{ij\lceil kl} = \left(\begin{matrix}
\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} \\
-\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} \\
-\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} \\
\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} & -\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta}
\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
-\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\
\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\
\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) C^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & -\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right) \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta} \\
-\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right) \left(\frac{\eta\pi}{b}\right) S^{\kappa\gamma} C^{\xi\eta} & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 S^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta}
\end{matrix}\right),$$

kde

$$C^{\kappa\gamma} = \cos\frac{\kappa\pi x}{a}\, \cos\frac{\gamma\pi y}{b}.$$

Pišme

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a \int_0^b \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\gamma\pi y}{b}\, \sin\frac{\xi\pi x}{a}\, \sin\frac{\eta\pi y}{b}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x,$$

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\xi\pi x}{a}\, \mathrm{d}x \cdot \int_0^b \sin\frac{\gamma\pi y}{b}\, \sin\frac{\eta\pi y}{b}\, \mathrm{d}y. \tag{9.26}$$

Uvážíme-li, že platí

$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

pak můžeme pro první integrál předcházející rovnice psát

$$\int_0^a \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\xi\pi x}{a}\, \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\cos\frac{(\kappa-\xi)\pi x}{a} - \cos\frac{(\kappa+\xi)\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^a \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\, \sin\frac{\xi\pi x}{a}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(\kappa-\xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa-\xi)\pi} - \sin\frac{(\kappa+k)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa+k)\pi}\right]_0^a.$$

Pro $\kappa \neq \xi$ (κ, ξ celá) je zjevně poslední integrál roven nule, kdežto pro $\kappa = \xi$ (κ, ξ celá) platí

$$\left[\sin \frac{(\kappa+\xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa+\xi)\pi}\right]_0^a = 0$$

a

$$\lim_{\kappa-\xi\to 0} \frac{1}{2}\left[\sin \frac{(\kappa-\xi)\pi x}{a} \cdot \frac{a}{(\kappa-\xi)\pi}\right]_0^a = \lim_{m-k\to 0} \frac{1}{2}\left(\sin \frac{(m-k)\pi a}{a} \cdot \frac{a}{(m-k)\pi}\right) =$$

$$= \lim_{\kappa-\xi\to 0} \frac{a}{2}\left[\frac{\sin(\kappa-\xi)\pi}{(\kappa-\xi)\pi}\right]\Bigg|_{\text{L'Hospitalovo pravidlo}} =$$

$$= \lim_{\kappa-\xi\to 0} \frac{a}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial(\kappa-\xi)} \sin(\kappa-\xi)\pi}{\frac{\partial}{\partial(\kappa-k)}(\kappa-k)\pi} =$$

$$= \lim_{\kappa-\xi\to 0} \frac{a}{2} \frac{\cos((\kappa-\xi)\pi)\cdot\pi}{\pi} = \frac{a}{2}.$$

Tím dostáváme

$$\int_0^a \sin \frac{\kappa\pi x}{a}\ \sin \frac{\xi\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} = 0, & \text{pro} \quad \kappa \neq \xi,\ (\kappa, \xi \text{ celá}), \\ = \frac{a}{2}, & \text{pro} \quad \kappa = \xi,\ (\kappa, \xi \text{ celá}). \end{cases}$$

Pro druhý integrál platí analogická úprava, čímž po dosazení do výrazu (9.26) máme

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi}\ \delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}. \tag{9.27}$$

V případě členů $C^{\kappa\gamma} S^{\xi\eta}$ uvažovaného tenzoru pišme

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a\!\!\int_0^b \cos\frac{\kappa\pi x}{a}\ \cos\frac{\gamma\pi y}{b}\ \sin\frac{\xi\pi x}{a}\ \sin\frac{\eta\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \int_0^a \cos\frac{\kappa\pi x}{a}\ \sin\frac{\xi\pi x}{a}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^b \cos\frac{\gamma\pi y}{b}\ \sin\frac{\eta\pi y}{b}\,\mathrm{d}y = I_{\kappa\xi} I_{\gamma\eta}. \tag{9.28}$$

S uvážením, že platí

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right),$$

je dále

$$I_{\kappa\xi} = \int_0^a \cos\frac{\kappa\pi x}{a}\ \sin\frac{\xi\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2}\int_0^a \sin\frac{(\xi+\kappa)\pi x}{a}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^a \sin\frac{(\xi-\kappa)\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2}\frac{a}{(\xi+\kappa)\pi}\left(1-\cos(\xi+\kappa)\pi\right) + \frac{1}{2}\frac{a}{(\xi-\kappa)\pi}\left(1-\cos(\xi-\kappa)\pi\right),$$

$$I_{\kappa\xi} = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{\xi+\kappa}\right)\frac{a}{(\xi+\kappa)\pi} + \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{\xi-\kappa}\right)\frac{a}{(\xi-\kappa)\pi}.$$

Je-li $\xi+\kappa$ sudé (tedy také $\xi-\kappa$ sudé), pak je

$$\xi+\kappa = 2k \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow I_{\kappa\xi} = 0.$$

Je-li naopak $\xi+\kappa$ liché (tedy také $\xi-\kappa$ liché), pak je

$$\xi+\kappa = 2k+1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow I_{\kappa\xi} = \frac{a}{(\xi+\kappa)\pi} + \frac{a}{(\xi-\kappa)\pi}$$

a tedy

$$I_{\kappa\xi} = \frac{a}{\pi}\frac{2\xi}{\xi^2 - \kappa^2}.$$

Obecně pro oba případy lze psát

$$I_{\kappa\xi} = \left(1 - (-1)^{\xi+\kappa}\right)\frac{a}{\pi}\frac{\xi}{\xi^2 - \kappa^2}.$$

Zcela obdobně pro druhou část integrálu (9.28)

$$I_{\gamma\eta} = \int_0^b \cos\frac{\gamma\pi y}{b}\ \sin\frac{\eta\pi y}{b}\,\mathrm{d}y$$

mohu psát

$$I_{\gamma\eta} = \left(1 - (-1)^{\eta+\gamma}\right)\frac{b}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2 - \gamma^2}.$$

A tedy

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = I_{\kappa\xi} I_{\gamma\eta} = \left(1 - (-1)^{\xi+\kappa}\right)\cdot\left(1 - (-1)^{\eta+\gamma}\right)\frac{ab}{\pi^2}\frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)}.$$

Označme

$$\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = \left(1 - (-1)^{\xi+\kappa}\right)\cdot\left(1 - (-1)^{\eta+\gamma}\right),$$

tedy

$$\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{je-li} \quad \xi + \kappa \vee \eta + \gamma \quad \text{sudé}, \\ 4 & \text{je-li} \quad \xi + \kappa \wedge \eta + \gamma \quad \text{liché}, \end{cases}$$

s čímž

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)}. \tag{9.29}$$

Dále označme

$$\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \int_\omega S^{\kappa\gamma}_{,ij} S^{\xi\eta}_{,kl}\,\mathrm{d}\omega,$$

pro což, užitím poslední matice a vztahů (9.27) a (9.29), tj.

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

$$(C^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = (S^{\xi\eta}, C^{\kappa\gamma}) = \Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\xi\eta}{(\xi^2 - \kappa^2)(\eta^2 - \gamma^2)},$$

kde

$$\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma} = \left(1 - (-1)^{\xi+\kappa}\right)\cdot\left(1 - (-1)^{\eta+\gamma}\right)$$

a vztahu

$$(C^{\kappa\gamma}, C^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

platí

$$\{\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4} +$$

$$+(-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\xi\eta}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}+$$

$$+(-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \end{pmatrix}\cdot\Theta_{\kappa\xi\gamma\eta}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\kappa\gamma}{(\kappa^2-\xi^2)(\gamma^2-\eta^2)}.$$

Jelikož

$$\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}=\Theta_{\kappa\xi\gamma\eta}$$

a

$$(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)=(\kappa^2-\xi^2)(\gamma^2-\eta^2),$$

máme (po roznásobení matic příslušným číslem $\xi\eta$, resp. $\kappa\gamma$)

$$\{\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\}_{ij\lceil kl}=\begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0\\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0\\ \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}- \tag{9.30}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & 0\\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta & 0 & 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\\ 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}.$$

Upravme dále integrál

$$\int_\omega qw\,\mathrm{d}\omega=\int_\omega q\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\,\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}\omega$$

do tvaru

$$\int_\omega qw\,\mathrm{d}\omega=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}q_{\kappa\gamma},$$

kde

$$q_{\kappa\gamma}=\int_\omega q(x,y)\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\,\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}\omega\quad(\kappa,\gamma=1,2,\ldots).$$

Tím dostává úloha $(w\alpha)_a$ plně parametrický tvar

$$\{\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}=\arg\max_{\boldsymbol{\alpha}\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\min_{\boldsymbol{w}}\Pi_p(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\alpha}), \tag{$(w\alpha)^p_a$}$$

$$\Pi_p(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{\nu=1}^{N}\zeta_\nu\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}E^\nu_{mnop}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}-\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}q_{\kappa\gamma}. \tag{9.31}$$

9.3.2 Stacionární podmínky úlohy $(w\alpha)_a^p$

Ovšem obecný tvar stacionárních podmínek naší úlohy je (vzhledem k periodicitě funkcí sinus a kosinus)

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \alpha_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{9.32}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w^{\varepsilon\varrho}} = 0 \quad (\varepsilon, \varrho = 1, 2, \ldots). \tag{9.33}$$

Podmínku (9.32) lze upravovat v následujících krocích.[32]

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \alpha_\nu} = \zeta_\nu \frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} + \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \frac{\partial \ell^\nu_{jn}}{\partial \alpha_\nu} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} +$$

$$+ \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} + \zeta_\nu \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \ell^\nu_{ko} \frac{\partial \ell^\nu_{lp}}{\partial \alpha_\nu} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}.$$

Jelikož

$$E_{mnop} = E_{nmop} \quad \wedge \quad \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{jikl},$$

lze vzájemně zaměnit dvojice indexů (im) a (jn) a podobně z platnosti

$$E_{mnop} = E_{mnpo} \quad \wedge \quad \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijlk}$$

lze vzájemně zaměnit také dvojice indexů (ko) a (lp). Z toho důvodu je možné hořejší výraz psát ve tvaru

$$\frac{\partial \Pi(w, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} = 2\zeta_\nu \left(\frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} \right),$$

čímž nutná podmínka nabývá tvaru

$$\left(\frac{\partial \ell^\nu_{im}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} + \frac{\partial \ell^\nu_{ko}}{\partial \alpha_\nu} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \right) \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Pro derivaci směrových kosinů pišme opět

$$\left\{ \frac{\partial \ell_{im}}{\partial \alpha_\nu} \right\}_{i\lceil m} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu} \begin{pmatrix} \cos\alpha_\nu & \sin\alpha_\nu \\ -\sin\alpha_\nu & \cos\alpha_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_\nu & \cos\alpha_\nu \\ -\cos\alpha_\nu & -\sin\alpha_\nu \end{pmatrix}.$$

Zavedením Levi-Civitova antisymetrického tenzoru ve dvourozměrném prostoru $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, který má na s. 151 uvedené vlastnosti, pišme výraz pro derivaci směrových kosinů ve formě

$$\frac{\partial \ell_{im}}{\partial \alpha_\nu} = \epsilon_{ir} \ell_{rm}.$$

Nutnou podmínku tak přepišme do tvaru

$$\left(\epsilon_{ir} \ell^\nu_{rm} \ell^\nu_{jn} \ell^\nu_{ko} \ell^\nu_{lp} E^\nu_{mnop} + \epsilon_{kr} \ell^\nu_{ro} \ell^\nu_{lp} \ell^\nu_{im} \ell^\nu_{jn} E^\nu_{mnop} \right) \cdot \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

---

[32]Na tomto místě poznamenejme, že jiným možným postupem je užít následujících obratů přímo k úpravě cílové funkce Π_p a teprve pro takto upravenou cílovou funkci formulovat nutné podmínky.

Přejmenováním indexů (ij) na (kl) a (mn) na (op) a *vice versa* v prvním sčítanci vzniklém roznásobením dostáváme následující tvar nutné podmínky

$$\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{opmn}\cdot\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{klij}+$$

$$+\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\cdot\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,N).$$

Jelikož

$$\int_\omega w_{,ij}w_{,kl}\,\mathrm{d}\omega=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\int_\omega S^{\kappa\gamma}_{,ij}S^{\xi\eta}_{,kl}\,\mathrm{d}\omega=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl},$$

je také

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{klij}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\int_\omega S^{\kappa\gamma}_{,kl}S^{\xi\eta}_{,ij}=$$

$$=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\xi\eta}w^{\kappa\gamma}\int_\omega S^{\kappa\gamma}_{,ij}S^{\xi\eta}_{,kl}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}$$

a tedy konečně nutná podmínka

$$2\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\cdot\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,N),$$

či po vykrácení dvojkou

$$\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{mnop}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=0\qquad(\nu=1,2,\ldots,N),\tag{9.34}$$

což jest v souladu s podmínkou (9.25). Máme tedy podmínku (9.32) ve tvaru (9.34), kterou dále upravujme zavedením označení $c_\nu=\cos\alpha_\nu$ a $s_\nu=\sin\alpha_\nu$ předpisem

$$\ell^\nu_{ik}=\delta_{ik}c_\nu+\epsilon_{ik}s_\nu,$$

kde $\epsilon_{ij}=-\epsilon_{ji}$ je shora citovaný Levi-Civitův antisymetrický tenzor ve dvourozměrném prostoru.

Dosazením do výrazu

$$\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{opmn}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}$$

dostáváme

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{opmn}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}c_\nu+\epsilon_{ro}s_\nu\right)\left(\delta_{lp}c_\nu+\epsilon_{lp}s_\nu\right)\left(\delta_{im}c_\nu+\right.$$

$$\left.+\epsilon_{im}s_\nu\right)\left(\delta_{jn}c_\nu+\epsilon_{jn}s_\nu\right)E^\nu_{opmn}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=$$

$$=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\left(c^4_\nu\epsilon_{kr}\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}+c^3_\nu s_\nu\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\epsilon_{jn}+\delta_{ro}\delta_{lp}\epsilon_{im}\delta_{jn}+\delta_{ro}\epsilon_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}+\epsilon_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}\right)+\right.$$

$$+c^2_\nu s^2_\nu\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}\delta_{lp}\epsilon_{im}\epsilon_{jn}+\delta_{ro}\epsilon_{lp}\delta_{im}\epsilon_{jn}+\delta_{ro}\epsilon_{lp}\epsilon_{im}\delta_{jn}+\epsilon_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\epsilon_{jn}+\epsilon_{ro}\delta_{lp}\epsilon_{im}\delta_{jn}+\epsilon_{ro}\epsilon_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}\right)+$$

$$+c_\nu s_\nu^3\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}\epsilon_{lp}\epsilon_{im}\epsilon_{jn}+\epsilon_{ro}\delta_{lp}\epsilon_{im}\epsilon_{jn}+\epsilon_{ro}\epsilon_{lp}\delta_{im}\epsilon_{jn}+\epsilon_{ro}\epsilon_{lp}\epsilon_{im}\delta_{jn}\right)+s_\nu^4\epsilon_{kr}\epsilon_{ro}\epsilon_{lp}\epsilon_{im}\epsilon_{jn}\Big)\,E^\nu_{opmn}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}.$$

Což zapišme jako

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\epsilon_{kr}\ell^\nu_{ro}\ell^\nu_{lp}\ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}E^\nu_{opmn}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\Big(R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu}c_\nu^4+R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu}c_\nu^3s_\nu+R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3\nu}c_\nu^2s_\nu^2+$$

$$+R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4\nu}c_\nu s_\nu^3+R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{5\nu}s_\nu^4\Big)\,,$$

přičemž koeficienty $R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{\varrho\nu}$ v dalším vyjádříme.

V případě koeficientu $R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu}$ máme

$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu}=\epsilon_{kr}\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}E^\nu_{opmn}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl},$$

$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu}=\epsilon_{kr}E^\nu_{rlij}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl},$$

kde

$$\left\{\epsilon_{kr}E^\nu_{rlij}\right\}_{kl\lceil ij}=\begin{pmatrix}0&G^\nu_{12}&G^\nu_{12}&0\\Q^\nu_{12}&0&0&Q^\nu_{22}\\-Q^\nu_{11}&0&0&-Q^\nu_{12}\\0&-G^\nu_{12}&-G^\nu_{12}&0\end{pmatrix},$$

čili

$$\left\{\epsilon_{kr}E^\nu_{rlij}\right\}_{ij\lceil kl}=\begin{pmatrix}0&Q^\nu_{12}&-Q^\nu_{11}&0\\G^\nu_{12}&0&0&-G^\nu_{12}\\G^\nu_{12}&0&0&-G^\nu_{12}\\0&Q^\nu_{22}&-Q^\nu_{12}&0\end{pmatrix}.$$

Násobením sobě odpovídajících členů v matici (9.30) a v matici poslední a sečtením těchto součinů dostáváme

$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu}=\left(\left(Q^\nu_{11}-Q^\nu_{12}\right)\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\left(Q^\nu_{12}-Q^\nu_{22}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\right.$$

$$\left.+2G^\nu_{12}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta-\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\right)\right)\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}.$$

Pro koeficient u členu $c_\nu^3s_\nu$ máme

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}E^\nu_{opmn}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\epsilon_{jn}+\delta_{ro}\delta_{lp}\epsilon_{im}\delta_{jn}+\right.$$

$$\left.+\delta_{ro}\epsilon_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}+\epsilon_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}\right),$$

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}E^\nu_{opmn}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\left(\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{kj}\delta_{rn}-\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{kn}\delta_{rj}+\right.$$

$$+\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{ki}\delta_{rm}\delta_{jn}-\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{km}\delta_{ri}\delta_{jn}+\delta_{ro}\delta_{kl}\delta_{rp}\delta_{im}\delta_{jn}-$$

$$\left.-\delta_{ro}\delta_{kp}\delta_{rl}\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{kr}\delta_{ro}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{ko}\delta_{rr}\delta_{lp}\delta_{im}\delta_{jn}\right),$$

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu}=\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\Big(E^\nu_{olio}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ikkl}-E^\nu_{jlik}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}+E^\nu_{mlmj}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{kjkl}-$$

$$-E^\nu_{ilkj}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}+E^\nu_{ppij}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk}-E^\nu_{lkij}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}+E^\nu_{klij}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}-2E^\nu_{klij}\mathbb{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\Big).$$

Platí
$$E^{\nu}_{opmn} = E^{\nu}_{mnop} = E^{\nu}_{nmop},$$
$$\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{jikl} = \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijlk}$$
a také (viz shora)
$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\mathcal{S}^{\xi\eta\kappa\gamma}_{klij} = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\xi\eta}w^{\kappa\gamma}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{klij}.$$
Čili můžeme psát
$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu} = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\left(E^{\nu}_{ijpp}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk} + 2E^{\nu}_{iool}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ikkl} - 2E^{\nu}_{ijkl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - 2E^{\nu}_{ikjl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\right)$$
a to dále upravovat. Vyjádřeme
$$\left\{E^{\nu}_{ijpp}\right\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} Q^{\nu}_{11}+Q^{\nu}_{12} & 0 \\ 0 & Q^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22}\end{pmatrix},$$
$$\left\{\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk}\right\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4} -$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\right)\xi\eta \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\right)\xi\eta & 0 \end{pmatrix}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2},$$
$$\left\{E^{\nu}_{iool}\right\}_{i\lceil l} = \begin{pmatrix} Q^{\nu}_{11}+G^{\nu}_{12} & 0 \\ 0 & G^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22}\end{pmatrix},$$
$$\left\{\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ikkl}\right\}_{i\lceil l} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4} -$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & 0 \end{pmatrix}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2},$$
$$\left\{E_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & Q_{12} \\ 0 & G_{12} & G_{12} & 0 \\ 0 & G_{12} & G_{12} & 0 \\ Q_{12} & 0 & 0 & Q_{22}\end{pmatrix}.$$
$$\left\{E_{ikjl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & G_{12} \\ 0 & Q_{12} & G_{12} & 0 \\ 0 & G_{12} & Q_{12} & 0 \\ G_{12} & 0 & 0 & Q_{22}\end{pmatrix}.$$
Odtud úpravou a uvážením přítomnosti členů $\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}$ máme
$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu} = \left((Q^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{11}+2G^{\nu}_{12})\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^4 + (3Q^{\nu}_{11}-6Q^{\nu}_{12}-12G^{\nu}_{12}+3Q^{\nu}_{22})\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + (Q^{\nu}_{12}+2G^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{22})\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^4\right)\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}.$$

Třetí koeficient má tvar (součin a součet přes indexy $\kappa\gamma\xi\eta$ pro stručnost nezapisujeme)

$$R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = E_{opmn}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}\epsilon_{kr}\left(\delta_{ro}\delta_{lp}\left(\delta_{ij}\delta_{mn}-\delta_{in}\delta_{mj}\right)+\delta_{ro}\delta_{im}\left(\delta_{lj}\delta_{pn}-\delta_{ln}\delta_{pj}\right)+\delta_{ro}\delta_{jn}\left(\delta_{li}\delta_{pm}-\delta_{lm}\delta_{ip}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{lp}\delta_{im}\left(\delta_{rj}\delta_{on}-\delta_{rn}\delta_{oj}\right)+\delta_{lp}\delta_{jn}\left(\delta_{ri}\delta_{om}-\delta_{rm}\delta_{oi}\right)+\delta_{im}\delta_{jn}\left(\delta_{rl}\delta_{op}-\delta_{rp}\delta_{ol}\right)\right),$$

$$R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \epsilon_{ko}E_{olmm}^{\nu}\mathbb{S}_{iikl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+\epsilon_{ko}E_{onin}^{\nu}\mathbb{S}_{ilkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{ko}E_{ojil}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+\epsilon_{ko}E_{ommj}^{\nu}\mathbb{S}_{ljkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{ko}E_{oilj}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+$$

$$+\epsilon_{kj}E_{nlin}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{kn}E_{jlin}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{km}E_{ilmj}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+\epsilon_{kl}E_{ppij}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}-\epsilon_{kp}E_{lpij}^{\nu}\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta},$$

$$R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \epsilon_{ko}E_{olmm}^{\nu}\mathbb{S}_{iikl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+2\epsilon_{ko}E_{onin}^{\nu}\mathbb{S}_{ilkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}+\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}\left(\epsilon_{kl}E_{ijpp}^{\nu}-4\epsilon_{km}E_{iljm}^{\nu}+2\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}-2\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\right).$$

Vyjádřeme matici

$$\left\{\epsilon_{kl}E_{ijpp}^{\nu}-4\epsilon_{km}E_{iljm}^{\nu}+2\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}-2\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl}.$$

Jest

$$\{E_{mlmj}^{\nu}\}_{l\lceil j} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{\nu}+G_{12}^{\nu} & 0 \\ 0 & G_{12}^{\nu}+Q_{22}^{\nu} \end{pmatrix},$$

$$\left\{\epsilon_{kl}E_{ijpp}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{11}^{\nu}+Q_{12}^{\nu} & -Q_{11}^{\nu}-Q_{12}^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{12}^{\nu}+Q_{22}^{\nu} & -Q_{12}^{\nu}-Q_{22}^{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\epsilon_{km}E_{iljm}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & G_{12}^{\nu} & -Q_{11}^{\nu} & 0 \\ Q_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu} \\ G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -Q_{12}^{\nu} \\ 0 & Q_{22}^{\nu} & -G_{12}^{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_{11}^{\nu}-G_{12}^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu}-Q_{22}^{\nu} \\ Q_{11}^{\nu}+G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{12}^{\nu}+Q_{22}^{\nu} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\left\{\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^{\nu} & -Q_{11}^{\nu} & 0 \\ G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu} \\ G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu} \\ 0 & Q_{22}^{\nu} & -Q_{12}^{\nu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\left\{\epsilon_{kl}E_{ijpp}^{\nu}-4\epsilon_{km}E_{iljm}^{\nu}+2\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}-2\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & Q_{11}^{\nu}-Q_{12}^{\nu}-4G_{12}^{\nu} & 3Q_{11}^{\nu}-Q_{12}^{\nu}-2G_{12}^{\nu} & 0 \\ -4Q_{12}^{\nu}-2G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & 4G_{12}^{\nu}-2Q_{22}^{\nu} \\ 2Q_{11}^{\nu}-4G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & 4Q_{12}^{\nu}+2G_{12}^{\nu} \\ 0 & 2G_{12}^{\nu}+Q_{12}^{\nu}-3Q_{22}^{\nu} & Q_{12}^{\nu}+4G_{12}^{\nu}-Q_{22}^{\nu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Součin

$$\mathbb{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta}\left(\epsilon_{kl}E_{ijpp}^{\nu}-4\epsilon_{km}E_{iljm}^{\nu}+2\epsilon_{ki}E_{mlmj}^{\nu}-2\epsilon_{ko}E_{olij}^{\nu}\right) =$$

$$= -\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\left(4Q_{11}^{\nu}-6G_{12}^{\nu}-2Q_{12}^{\nu}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\left(2Q_{11}^{\nu}-6G_{12}^{\nu}-4Q_{12}^{\nu}\right)+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\left(6G_{12}^{\nu}-4Q_{22}^{\nu}+2Q_{12}^{\nu}\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\left(6G_{12}^{\nu}-2Q_{22}^{\nu}+4Q_{12}^{\nu}\right)\right).$$

Dále pišme

$$\{\epsilon_{ko}E^{\nu}_{olmm}\}_{k\lceil l} = \begin{pmatrix} 0 & Q^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22} \\ -Q^{\nu}_{11}-Q^{\nu}_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\{\mathcal{S}_{iikl}\}_{k\lceil l} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}-$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & 0 \end{pmatrix}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}.$$

Odtud jest

$$\epsilon_{ko}E^{\nu}_{olmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikl} = -\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\kappa\gamma\,(Q_{22}-Q_{11})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{22}-Q_{11})\right).$$

Konečně

$$\{\epsilon_{ko}E^{\nu}_{onin}\}_{i\lceil k} = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{\nu}_{11}-G^{\nu}_{12} \\ G^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ilkl}\right\}_{i\lceil k} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \end{pmatrix}\cdot\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}-$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta \\ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma & 0 \end{pmatrix}\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2}$$

a tedy

$$2\epsilon_{ko}E^{\nu}_{onin}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ilkl} = -2\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2}\left(\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\right)(-Q^{\nu}_{11}-G^{\nu}_{12})+$$

$$\left.+\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\right)(G^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22})\right).$$

Pro třetí koeficient tak máme

$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3\nu} = -\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q^{\nu}_{11}-8G^{\nu}_{12}-2Q^{\nu}_{12}+Q_{22})+\right.$$

$$+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\,(2Q^{\nu}_{11}-4G^{\nu}_{12}-4Q^{\nu}_{12}+2Q^{\nu}_{22})+$$

$$+\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(8G^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{22}+2Q^{\nu}_{12}-Q_{11})+$$

$$\left.+\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\,(4Q^{\nu}_{12}-2Q^{\nu}_{11}+4G^{\nu}_{12}-2Q^{\nu}_{22})\right).$$

Koeficientem členu $c_\nu s^3_\nu$ jest

$$R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4\nu} = E^{\nu}_{opmn}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl}\left(\delta_{ro}\left(\delta_{kl}\delta_{rp}-\delta_{kp}\delta_{rl}\right)\left(\delta_{ij}\delta_{mn}-\delta_{in}\delta_{mj}\right)+\delta_{lp}\left(\delta_{kr}\delta_{ro}-\delta_{ko}\delta_{rr}\right)\left(\delta_{ij}\delta_{mn}-\delta_{in}\delta_{mj}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta_{im}\left(\delta_{kr}\delta_{ro}-\delta_{ko}\delta_{rr}\right)\left(\delta_{lj}\delta_{pn}-\delta_{ln}\delta_{pj}\right)+\delta_{jn}\left(\delta_{kr}\delta_{ro}-\delta_{ko}\delta_{rr}\right)\left(\delta_{li}\delta_{pm}-\delta_{lm}\delta_{pi}\right)\right).$$

Jelikož prvá závorka každého součinu (vyjma součin prvý) má význam $(-\delta_{ko})$, pišme rovnou

$$R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = E^{\nu}_{ppmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikk} + E^{\nu}_{lkij}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - E^{\nu}_{lkmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikl} - E^{\nu}_{ppij}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk} + E^{\nu}_{klij}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - E^{\nu}_{klmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikl} +$$

$$+ E^{\nu}_{kjil}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - E^{\nu}_{knin}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkj} + E^{\nu}_{kilj}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - E^{\nu}_{kppj}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijki},$$

$$R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = E^{\nu}_{ppmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikk} + 2E^{\nu}_{ijkl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} + 2E^{\nu}_{ikjl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} - 2E^{\nu}_{mmkl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikl} - 2E^{\nu}_{inkn}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkj} - E^{\nu}_{ppij}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk}.$$

Vyjádřeme postupně

$$E^{\nu}_{ppmm}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikk} = (Q^{\nu}_{11} + 2Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22})\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

$$\left\{E^{\nu}_{ijkl} + E^{\nu}_{ikjl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 2Q^{\nu}_{11} & 0 & 0 & G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12} \\ 0 & G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12} & 2G^{\nu}_{12} & 0 \\ 0 & 2G^{\nu}_{12} & G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12} & 0 \\ G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12} & 0 & 0 & 2Q^{\nu}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\left(E^{\nu}_{ijkl} + E^{\nu}_{ikjl}\right)\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 2Q^{\nu}_{11} + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2(G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2(G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{12}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 2Q^{\nu}_{22} + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)(6G^{\nu}_{12} + 2Q^{\nu}_{12})\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

$$\{E^{\nu}_{mmkl}\}_{k\lceil l} = \begin{pmatrix} Q^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{12} & 0 \\ 0 & Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22} \end{pmatrix},$$

$$E^{\nu}_{mmkl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{iikl} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2(Q^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2(Q^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2(Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2(Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22})\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

$$E^{\nu}_{ilkl}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkj} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2(Q^{\nu}_{11} + G^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2(G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)(2G^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{22})\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4},$$

$$E^{\nu}_{ppij}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkk} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2(Q^{\nu}_{11} + Q^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2(Q^{\nu}_{11} + 2Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2(Q^{\nu}_{12} + Q^{\nu}_{22})\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}.$$

Pro koeficient členu $c_\nu s_\nu^3$ tak máme (při uvážení členů $\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}$)

$$R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^4(Q^{\nu}_{22} - Q^{\nu}_{12} - 2G^{\nu}_{12}) + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2(-3Q^{\nu}_{11} + 6Q^{\nu}_{12} + 12G^{\nu}_{12} - 3Q^{\nu}_{22}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^4(Q^{\nu}_{11} - Q^{\nu}_{12} - 2G^{\nu}_{12})\right)\delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}.$$

Pro poslední koeficient konečně

$$R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = E_{opmn}^{\nu} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} \epsilon_{kr}\epsilon_{ro}\epsilon_{lp}\epsilon_{im}\epsilon_{jn},$$

přičemž platí

$$\epsilon_{kr}\epsilon_{ro} = -\delta_{ko}$$

a tudíž

$$R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = E_{opmn}^{\nu} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} (-\delta_{ko})\epsilon_{lp}(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj}),$$

$$R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \epsilon_{lp} E_{kpij}^{\nu} \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} - \epsilon_{lp} E_{kpmm}^{\nu} \mathcal{S}_{iikl}^{\kappa\gamma\xi\eta}.$$

Jest

$$\left\{\epsilon_{lp}E_{kpij}^{\nu}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & -Q_{11}^{\nu} & Q_{12}^{\nu} & 0 \\ G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu} \\ G_{12}^{\nu} & 0 & 0 & -G_{12}^{\nu} \\ 0 & -Q_{12}^{\nu} & Q_{22}^{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{\epsilon_{lp}E_{kpmm}^{\nu}\right\}_{k\lceil l} = \begin{pmatrix} 0 & -Q_{11}^{\nu} - Q_{12}^{\nu} \\ Q_{12}^{\nu} + Q_{22}^{\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = -\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{12}^{\nu} - Q_{22}^{\nu}) + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta\, 2G_{12}^{\nu} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta\,(-2G_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{11}^{\nu} - Q_{12}^{\nu})\right) \frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)} \frac{ab}{\pi^2}.$$

Čímž jsme obdrželi podmínku (9.32) ve tvaru

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \left(R_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} c_\nu^4 + R_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} c_\nu^3 s_\nu + R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} c_\nu^2 s_\nu^2 + R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} c_\nu s_\nu^3 + R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} s_\nu^4\right) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{9.35}$$

kde

$$R_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \left((Q_{11}^{\nu} - Q_{12}^{\nu})\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma + (Q_{12}^{\nu} - Q_{22}^{\nu})\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma + \right.$$

$$\left. + 2G_{12}^{\nu}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta - \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta\right)\right) \frac{ab}{\pi^2} \frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)};$$

$$R_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \left((Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu} + 2G_{12}^{\nu})\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^4 + (3Q_{11}^{\nu} - 6Q_{12}^{\nu} - 12G_{12}^{\nu} + 3Q_{22}^{\nu})\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (Q_{12}^{\nu} + 2G_{12}^{\nu} - Q_{22}^{\nu})\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^4\right) \cdot \delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta} \frac{ab}{4};$$

$$R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = -\frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)} \frac{ab}{\pi^2}\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{11}^{\nu} - 8G_{12}^{\nu} - 2Q_{12}^{\nu} + Q_{22}^{\nu}) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta\,(2Q_{11}^{\nu} - 4G_{12}^{\nu} - 4Q_{12}^{\nu} + 2Q_{22}^{\nu}) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(8G_{12}^{\nu} - Q_{22}^{\nu} + 2Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu}) +$$

$$\left. + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta\,(4Q_{12}^{\nu} - 2Q_{11}^{\nu} + 4G_{12}^{\nu} - 2Q_{22}^{\nu})\right).$$

$$R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = \left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^4 (Q_{22}^\nu - Q_{12}^\nu - 2G_{12}^\nu) + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 (-3Q_{11}^\nu + 6Q_{12}^\nu + 12G_{12}^\nu - 3Q_{22}^\nu) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^4 (Q_{11}^\nu - Q_{12}^\nu - 2G_{12}^\nu) \right) \delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}.$$

$$R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} = -\left(\left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{12}^\nu - Q_{22}^\nu) + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2 \xi\eta\,(2G_{12}^\nu) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\kappa\pi}{a}\right)\left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2 \xi\eta\,(-2G_{12}^\nu) + \left(\frac{\gamma\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\kappa\gamma\,(Q_{11}^\nu - Q_{12}^\nu) \right) \frac{\Theta_{\xi\kappa\eta\gamma}}{(\xi^2-\kappa^2)(\eta^2-\gamma^2)}\frac{ab}{\pi^2}.$$

Podobně upravme podmínku (9.33)

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w^{\varepsilon\varrho}} = 0 \quad (\varepsilon, \varrho = 1, 2, \ldots),$$

$$\Pi_p = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_\nu \ell_{io}^\nu \ell_{jp}^\nu \ell_{km}^\nu \ell_{ln}^\nu E_{opmn}^\nu \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} - \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} w^{\kappa\gamma} q_{\kappa\gamma}.$$

Derivováním dle $w^{\varepsilon\varrho}$ jest okamžitě

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_\nu \ell_{io}^\nu \ell_{jp}^\nu \ell_{km}^\nu \ell_{ln}^\nu E_{opmn}^\nu \mathcal{S}_{ijkl}^{\kappa\gamma\xi\eta} \left(\delta_{\kappa\varepsilon}\delta_{\gamma\varrho} w^{\xi\eta} + w^{\kappa\gamma}\delta_{\xi\varepsilon}\delta_{\eta\varrho}\right) - \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \delta_{\kappa\varepsilon}\delta_{\gamma\varrho} q_{\kappa\gamma} = 0,$$

čili

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_\nu \ell_{io}^\nu \ell_{jp}^\nu \ell_{km}^\nu \ell_{ln}^\nu E_{opmn}^\nu \left(\mathcal{S}_{ijkl}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} + \mathcal{S}_{ijkl}^{\xi\eta\varepsilon\varrho}\right) w^{\xi\eta} - q_{\varepsilon\varrho} = 0 \quad (\varepsilon, \varrho = 1, 2, \ldots). \tag{9.36}$$

Sledujme součet

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = \mathcal{S}_{ijkl}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} + \mathcal{S}_{ijkl}^{\xi\eta\varepsilon\varrho}. \tag{9.37}$$

Jest

$$\{U_{ijkl}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\}_{ij\lceil kl} = 2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 & 0 & 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 \end{pmatrix} \cdot \delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & A & A & 0 \\ A & 0 & 0 & B \\ A & 0 & 0 & B \\ 0 & B & B & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}, \tag{9.38}$$

kde

$$A = \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho + \left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\xi\eta,$$

$$B = \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho + \left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\xi\eta.$$

Ovšem platí

$$U_{ijkl}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = U_{klij}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = U_{lkij}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} \tag{9.39}$$

a také, jak je vidět z porovnání zápisu předešlého a zápisu

$$\{U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{kjil}\}_{ij\lceil kl} = 2\begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 & 0 & 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 \end{pmatrix} \cdot \delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & A & A & 0 \\ A & 0 & 0 & B \\ A & 0 & 0 & B \\ 0 & B & B & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)},$$

rovnost

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{kjil}. \tag{9.40}$$

A jelikož

$$\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)} = \frac{\Theta_{\varepsilon\xi\varrho\eta}}{(\varepsilon^2-\xi^2)(\varrho^2-\eta^2)},$$

je také

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl} = U^{\xi\eta\varepsilon\varrho}_{ijkl}.$$

Podmínku (9.33) pišme prozatím jako

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \zeta_\nu \ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln}E^\nu_{opmn}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}w^{\xi\eta} - q_{\varepsilon\varrho} = 0 \quad (\varepsilon, \varrho = 1, 2, \ldots),$$

kde výraz

$$\ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln}E^\nu_{opmn}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}$$

dále upravujme.

9.3.3 Úprava vztahu $U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}\ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln}$

Upravujme tedy výraz

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}\ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln},$$

k čemuž nám dopomůže zavedení označení $c_\nu = \cos\alpha_\nu$ a $s_\nu = \sin\alpha_\nu$ předpisem

$$\ell^\nu_{ik} = \delta_{ik}c_\nu + \epsilon_{ik}s_\nu,$$

kde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ je Levi-Civitův antisymetrický tenzor ve dvourozměrném prostoru, který má shora na s. 151 řečené vlastnosti. Dosazením do výrazu, jehož úprava je předmětem tohoto paragrafu, dostáváme

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}\ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}(\delta_{io}c_\nu+\epsilon_{io}s_\nu)(\delta_{jp}c_\nu+\epsilon_{jp}s_\nu)(\delta_{km}c_\nu+\epsilon_{km}s_\nu)(\delta_{ln}c_\nu+\epsilon_{ln}s_\nu),$$

z čehož vzájemným roznásobením závorek

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}\ell^\nu_{io}\ell^\nu_{jp}\ell^\nu_{km}\ell^\nu_{ln} =$$

$$= U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^\nu_{opmn}\left(c^4_\nu(\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{ln}) + c^3_\nu s_\nu(\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\delta_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}+\delta_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\delta_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{ln})+\right.$$
$$+c^2_\nu s^2_\nu(\delta_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\delta_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}+\delta_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\delta_{ln})+$$
$$\left.+c_\nu s^3_\nu(\delta_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}) + s^4_\nu(\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln})\right).$$

Označme

$$U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}\ell^{\nu}_{io}\ell^{\nu}_{jp}\ell^{\nu}_{km}\ell^{\nu}_{ln} = P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1\nu}\cdot c^4_\nu + P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu}\cdot c^3_\nu s_\nu + P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu}\cdot c^2_\nu s^2_\nu + P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}\cdot c_\nu s^3_\nu + P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5\nu}\cdot s^4_\nu$$

a upravujme

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{ln},$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opmn}E^{\nu}_{opmn}, \tag{9.41}$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1\nu} = 2\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 Q^\nu_{11} + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2(2Q^\nu_{12}+4G^\nu_{12}) + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 Q^\nu_{22}\right)\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4}.$$

Dále

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln} + \delta_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln} + \delta_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\delta_{ln} + \epsilon_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{ln}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opml}E^{\nu}_{opmn}\epsilon_{ln} + U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opkn}E^{\nu}_{opmn}\epsilon_{km} + U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ojmn}E^{\nu}_{opmn}\epsilon_{jp} + U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipmn}E^{\nu}_{opmn}\epsilon_{io}.$$

Záměnou $n\leftrightarrow o$ a přejmenováním $l\to i$ v prvém, přejmenováním $k\to i$ a záměnou $m\leftrightarrow o$ ve druhém a konečně přejmenováním $j\to i$ a záměnou $p\leftrightarrow o$ ve třetím členu je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu} = \epsilon_{io}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{npmi}E^{\nu}_{npmo} + \epsilon_{io}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{mpin}E^{\nu}_{mpon} + \epsilon_{io}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{pimn}E^{\nu}_{pomn} + \epsilon_{io}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipmn}E^{\nu}_{opmn}.$$

A ježto platí

$$E_{opmn} = E_{mnop} = E_{nmop}$$

a (9.39), (9.40), je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu} = \epsilon_{io}U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipmn}\cdot 4E^{\nu}_{opmn}. \tag{9.42}$$

Jelikož dále

$$\left\{\epsilon_{io}E^\nu_{opmn}\right\}_{ip\lceil mn} = \begin{pmatrix} 0 & G^\nu_{12} & G^\nu_{12} & 0 \\ Q^\nu_{12} & 0 & 0 & Q^\nu_{22} \\ -Q^\nu_{11} & 0 & 0 & -Q^\nu_{12} \\ 0 & -G^\nu_{12} & -G^\nu_{12} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.43}$$

je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2\nu} = -4\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(2G^\nu_{12}+Q^\nu_{12}-Q^\nu_{11})+\right.$$

$$+\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(-2G^\nu_{12}+Q^\nu_{22}-Q^\nu_{12}) + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\,(2G^\nu_{12}+Q^\nu_{12}-Q^\nu_{11})+$$

$$\left.+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\,(-2G^\nu_{12}+Q^\nu_{22}-Q^\nu_{12})\right).$$

Pro další člen jest

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(\delta_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\delta_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}+\delta_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\delta_{ln}).$$

Využitím vztahu

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{kl}\delta_{mn}-\delta_{io}\delta_{jp}\delta_{kn}\delta_{ml}+\delta_{io}\delta_{jk}\delta_{pm}\delta_{ln}-\delta_{io}\delta_{jm}\delta_{pk}\delta_{ln}+\delta_{io}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{pn}-\delta_{io}\delta_{jn}\delta_{km}\delta_{pl}+$$

$$+\delta_{il}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{on} - \delta_{in}\delta_{jp}\delta_{km}\delta_{ol} + \delta_{ik}\delta_{jp}\delta_{om}\delta_{ln} - \delta_{im}\delta_{jp}\delta_{ok}\delta_{ln} + \delta_{ij}\delta_{op}\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{ip}\delta_{oj}\delta_{km}\delta_{ln}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu} = U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opkk}E^{\nu}_{opmm} - U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opnm}E^{\nu}_{opmn} + U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{okkn}E^{\nu}_{ommn} - U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ompn}E^{\nu}_{opmn} + U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{olml}E^{\nu}_{opmp} - U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{onmp}E^{\nu}_{opmn}+$$

$$+U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipmi}E^{\nu}_{opmo}-U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{npmo}E^{\nu}_{opmn}+U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{kpkn}E^{\nu}_{opon}-U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{mpon}E^{\nu}_{opmn}+U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{iimn}E^{\nu}_{ppmn}-U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{pomn}E^{\nu}_{opmn},$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opkk}(E^{\nu}_{opmm}+E^{\nu}_{ommp}+E^{\nu}_{ompm}+E^{\nu}_{mpom}+E^{\nu}_{mpmo}+E^{\nu}_{mmop})+U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opmn}(-6E^{\nu}_{opmn}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opkk}(2E^{\nu}_{opmm}+4E^{\nu}_{ommp})+U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opmn}(-6E^{\nu}_{opmn}). \tag{9.44}$$

Jest

$$\{U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{opkk}\}_{o\lceil p}=2\begin{pmatrix}\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 & 0\\ 0 & \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4\end{pmatrix}\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4}-$$

$$-\begin{pmatrix}0 & A+B\\ A+B & 0\end{pmatrix}\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}, \tag{9.45}$$

$$\{2E^{\nu}_{opmm}+4E^{\nu}_{ommp}\}_{o\lceil p}=\begin{pmatrix}6Q^{\nu}_{11}+2Q^{\nu}_{12}+4G^{\nu}_{12} & 0\\ 0 & 6Q^{\nu}_{22}+2Q^{\nu}_{12}+4G^{\nu}_{12}\end{pmatrix}$$

a tedy

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3\nu}=2\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4}\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4(2Q^{\nu}_{12}+4G^{\nu}_{12})+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2(6Q^{\nu}_{11}-8Q^{\nu}_{12}-16G^{\nu}_{12}+6Q^{\nu}_{22})+\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4(2Q^{\nu}_{12}+4G^{\nu}_{12})\right).$$

Pro další koeficient máme

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(\delta_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\delta_{km}\epsilon_{ln}+\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln});$$

přejmenováním $(io\leftrightarrow jp)$ v prvém členu a $(km\leftrightarrow ln)$ ve členu třetím je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(2\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+2\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\delta_{ln})$$

a další záměnou $(ij\leftrightarrow kl)$ a $(op\leftrightarrow mn)$ v druhém sčítanci máme

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(2\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}+2\epsilon_{km}\epsilon_{ln}\epsilon_{io}\delta_{jp}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(4\epsilon_{io}\delta_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}4\epsilon_{io}\delta_{jp}(\delta_{kl}\delta_{mn}-\delta_{kn}\delta_{ml}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=4\epsilon_{io}\delta_{jp}(U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkk}E^{\nu}_{opmm}-U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijmn}E^{\nu}_{opmn}),$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=4\epsilon_{io}(U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipkk}E^{\nu}_{opmm}-U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ipmn}E^{\nu}_{opmn}). \tag{9.46}$$

Jest

$$\{\epsilon_{io}E^{\nu}_{opmm}\}_{i\lceil p}=\begin{pmatrix}0 & Q^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{22}\\ -Q^{\nu}_{11}-Q^{\nu}_{12} & 0\end{pmatrix}.$$

Vzhledem k (9.45), (9.43) a (9.38) je

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{4\nu}=-4\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(Q^{\nu}_{22}-2G^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{12})+\right.$$

$$+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\,(Q^{\nu}_{22}-2G^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{12})+\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(2G^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{11})+$$

$$\left.+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\,(2G^{\nu}_{12}+Q^{\nu}_{12}-Q^{\nu}_{11})\right).$$

Konečně

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}\epsilon_{io}\epsilon_{jp}\epsilon_{km}\epsilon_{ln},$$

$$P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5\nu}=U^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{ijkl}E^{\nu}_{opmn}(\delta_{ij}\delta_{op}-\delta_{ip}\delta_{oj})(\delta_{kl}\delta_{mn}-\delta_{kn}\delta_{ml}),$$

$$P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = U_{iikk}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{oomm}^{\nu} + U_{ponm}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{opmn}^{\nu} - U_{iinm}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{oomn}^{\nu} - U_{pokk}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{opmm}^{\nu},$$

$$P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = U_{iikk}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{oomm}^{\nu} + U_{opmn}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{opmn}^{\nu} - 2U_{opkk}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} E_{opmm}^{\nu}. \tag{9.47}$$

S využitím hořejšího okamžitě:

$$P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = 2\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 Q_{22}^{\nu} + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 (4G_{12}^{\nu} + 2Q_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 Q_{11}^{\nu}\right)\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4}.$$

Shora provedenými úpravami nabývá podmínka (9.33) tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\xi,\eta=1}^{\infty}\zeta_\nu\left(P_{1\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^4 + P_{2\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^3 s_\nu + P_{3\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^2 s_\nu^2 + P_{4\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu s_\nu^3 + P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot s_\nu^4\right) w^{\xi\eta} =$$

$$= q_{\varepsilon\varrho} \quad (\varepsilon, \varrho = 1, 2, \ldots), \tag{9.48}$$

kde

$$P_{1\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = 2\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 Q_{11}^{\nu} + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 (2Q_{12}^{\nu} + 4G_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 Q_{22}^{\nu}\right)\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4},$$

$$P_{2\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = -4\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(2G_{12}^{\nu} + Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu}) +\right.$$

$$+\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(-2G_{12}^{\nu} + Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\,(2G_{12}^{\nu} + Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu}) +$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\,(-2G_{12}^{\nu} + Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu})\right),$$

$$P_{3\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = 2\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 (2Q_{12}^{\nu} + 4G_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 (6Q_{11}^{\nu} - 8Q_{12}^{\nu} - 16G_{12}^{\nu} + 6Q_{22}^{\nu}) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 (2Q_{12}^{\nu} + 4G_{12}^{\nu})\right)\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4},$$

$$P_{4\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = -4\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}{(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(Q_{22}^{\nu} - 2G_{12}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}) +\right.$$

$$+\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)^2\xi\eta\,(Q_{22}^{\nu} - 2G_{12}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2\left(\frac{\xi\pi}{a}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)\varepsilon\varrho\,(2G_{12}^{\nu} + Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu}) +$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)\left(\frac{\eta\pi}{b}\right)^2\xi\eta\,(2G_{12}^{\nu} + Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu})\right),$$

$$P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta} = 2\left(\left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^4 Q_{22}^{\nu} + \left(\frac{\varepsilon\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^2 (4G_{12}^{\nu} + 2Q_{12}^{\nu}) + \left(\frac{\varrho\pi}{b}\right)^4 Q_{11}^{\nu}\right)\delta_{\varepsilon\xi}\delta_{\varrho\eta}\frac{ab}{4}.$$

9.3.4 Shrnutí získaného vyjádření nutných podmínek

Popsaným postupem jsme dospěli k soustavě nutných podmínek (9.35) a (9.48) pro řešení úlohy o maximální tuhosti laminátu. Citované podmínky zopakujme (nekonečný počet členů jsme omezili číslem K):

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K}\sum_{\xi,\eta=1}^{K} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta}\left(R_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^4 + R_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^3 s_\nu + R_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^2 s_\nu^2 + R_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu s_\nu^3 + R_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}s_\nu^4\right) = 0\ (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{9.49}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\xi,\eta=1}^{K}\zeta_\nu\left(P_{1\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^4+P_{2\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^3 s_\nu+P_{3\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu^2 s_\nu^2+P_{4\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot c_\nu s_\nu^3+P_{5\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}\cdot s_\nu^4\right)w^{\xi\eta}=$$
$$=q_{\varepsilon\varrho}\quad(\varepsilon,\varrho=1,2,\dots,K),\tag{9.50}$$

kde koeficienty $P_{\lambda\nu}^{\varepsilon\varrho\xi\eta}$ a $R_{\lambda\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}$ jsou vyjádřeny na stranách 165 a 170.

Z rovnice (9.49) je patrno, že bez ohledu na velikost ζ_ν (jež charakterizuje tloušťku a polohu jednotlivých vrstev) jsou – v případě použití shodného materiálu pro všechny vrstvy – orientace jednotlivých vrstev řešením téže rovnice (9.49). Nutné podmínky (9.49) pro α_ν však *nejsou* separovatelné. Prostřednictvím vyjádření $w^{\kappa\gamma}$ z podmínky (9.50) vstupují do rovnice ν také proměnné α_μ ($\mu=1,2,\dots,N$).

9.4 Vyjádření koeficientů zatížení $q_{\kappa\gamma}$ pro různé zatěžující módy

9.4.1 Zatížení $q(x,y)=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$

V případě zatížení $q(x,y)=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ jest

$$q_{\kappa\gamma}=q_0\int_0^a\int_0^b\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$q_{11}=q_0\frac{ab}{4}$$

a

$$q_{\kappa\gamma}=0\qquad(\kappa\gamma\neq 11).$$

9.4.2 Zatížení $q(x,y)=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$

V případě zatížení

$$q(x,y)=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$$

jest

$$q_{22}=q_0\frac{ab}{4}$$

a

$$q_{\kappa\gamma}=0\qquad(\kappa\gamma\neq 22).$$

9.4.3 Zatížení $q(x,y)=q_0xy$

Pro zatížení

$$q(x,y)=q_0xy$$

je

$$q_{\kappa\gamma}=q_0\int_0^a\int_0^b xy\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Jest

$$\int x\cos\frac{\kappa\pi x}{a}+ix\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\,\mathrm{d}x=\int xe^{\frac{i\kappa\pi x}{a}}\,\mathrm{d}x;$$

užijeme-li metody *per partes*, pak

$$\int xe^{\frac{i\kappa\pi x}{a}}\,\mathrm{d}x=x\frac{a}{i\kappa\pi}e^{\frac{i\kappa\pi x}{a}}-\int\frac{a}{i\kappa\pi}e^{\frac{i\kappa\pi x}{a}}\,\mathrm{d}x=$$

$$= x\frac{a}{i\kappa\pi}e^{\frac{i\kappa\pi x}{a}} - \frac{a^2}{(i\kappa\pi)^2}e^{\frac{i\kappa\pi x}{a}} = -x\frac{ia}{\kappa\pi}\left(\cos\frac{\kappa\pi x}{a} + i\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\right) + \frac{a^2}{(\kappa\pi)^2}\left(\cos\frac{\kappa\pi x}{a} + i\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\right)$$

a tedy

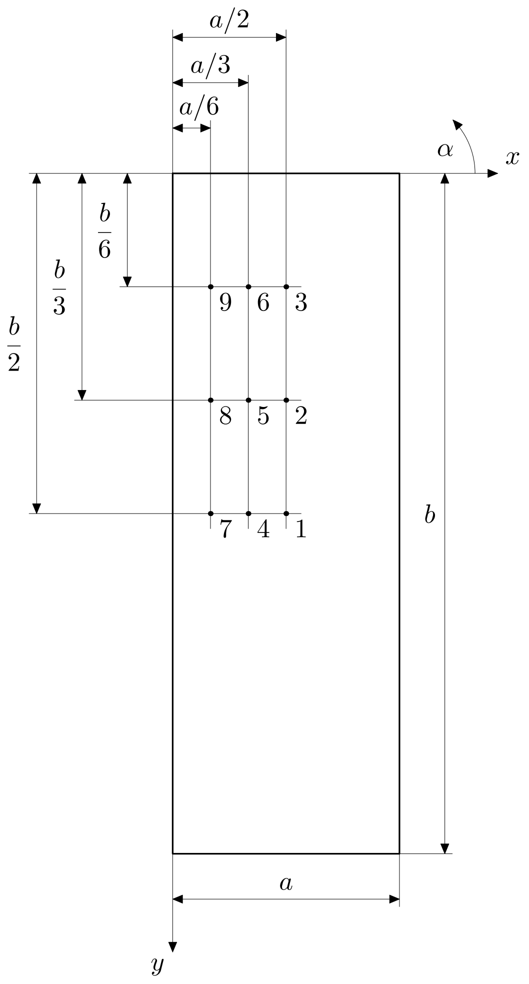
$$\int_0^a x\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{a^2}{(\kappa\pi)^2}\sin\frac{\kappa\pi x}{a} - x\frac{a}{\kappa\pi}\cos\frac{\kappa\pi x}{a}\right)_0^a = -(-1)^\kappa\frac{a^2}{\kappa\pi}.$$

Odtud

$$q_{\kappa\gamma} = (-1)^{\kappa+\gamma}q_0\frac{a^2b^2}{\kappa\gamma\pi^2}.$$

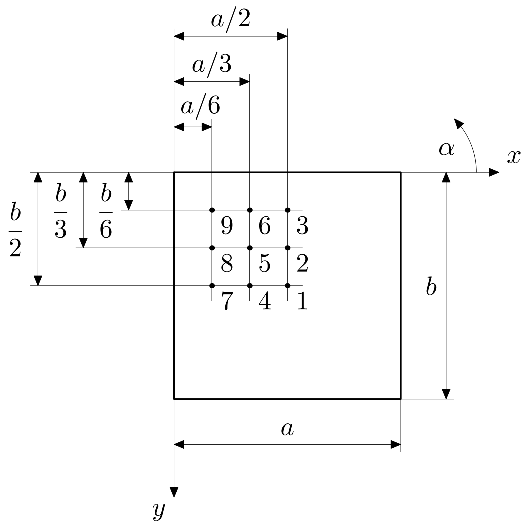
9.4.4 Zatížení izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

Uvažujme dvakrát devět případů zatížení desky izolovanou silou. Desku obdélnou s poměrem stran 1 : 3 a desku čtvercovou; každou zatíženou silou postupně působící v devíti místech označených na obrázku odpovídajícím pořadovým číslem.



Obrázek 9.13: Působiště uvažované izolované síly působící na obdélnou desku s poměrem stran 1 : 3

Vyjádříme nyní koeficienty $q_{\kappa\gamma}$ v případě zatížení izolovanou silou působící v místě $x = c, y = d$: Zatížení $q(x, y)$ vystupující ve vyjádření potenciální energie Π nahraďme v případě izolované síly F Fourierovou řadou. Při tom si mysleme, že izolovaná síla působící v místě $[x, y] = [c, d]$ je spojitým zatížením působícím na čtverec vymezený intervaly $x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle$, $y \in \langle d-\delta, d+\delta\rangle$ při $\delta \to 0$. Již víme, že úplným ortogonálním systémem funkcí na obdelníku $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$ je



Obrázek 9.14: Působiště uvažované izolované síly působící na čtvercovou desku

soustava

$$S^{\kappa\gamma} = \sin\frac{\kappa\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi y}{b} \quad (\kappa, \gamma = 1, 2, \dots, \infty).$$

Tento systém nyní normalizujme. Víme, že

$$(S^{\kappa\gamma}, S^{\xi\eta}) = \delta_{\kappa\xi}\delta_{\gamma\eta}\frac{ab}{4}$$

a odtud máme ortonormální systém bázových funkcí na obdelníku $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$:

$$N^{\kappa\gamma} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi y}{b} \quad (\kappa, \gamma = 1, 2, \dots, \infty).$$

Můžeme tedy psát

$$q = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} c_{\kappa\gamma}N^{\kappa\gamma}, \quad c_{\kappa\gamma} = (f, N^{\kappa\gamma}) = \int_0^a\int_0^b fN^{\kappa\gamma}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

$$f = \begin{cases} \frac{F}{4\delta^2} & \text{je-li } [x, y] \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \times \langle d-\delta, d+\delta\rangle, \\ 0 & \text{je-li } [x, y] \notin \langle c-\delta, c+\delta\rangle \times \langle d-\delta, d+\delta\rangle, \end{cases}$$

kde $\delta \to 0$. Dále jest

$$c_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{c-\delta}^{c+\delta}\int_{d-\delta}^{d+\delta}\frac{F}{4\delta^2}\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x;$$

$$\int_{d-\delta}^{d+\delta}\sin\frac{\gamma\pi y}{b}\,\mathrm{d}y = \frac{2b}{\gamma\pi}\sin\frac{\gamma\pi d}{b}\sin\frac{\gamma\pi\delta}{b},$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta}\sin\frac{\kappa\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\kappa\pi}\sin\frac{\kappa\pi c}{a}\sin\frac{\kappa\pi\delta}{a}$$

a tedy

$$c_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+}\frac{F}{4\delta^2}\frac{2}{\sqrt{ab}}\frac{4ab}{\kappa\gamma\pi^2}\sin\frac{\kappa\pi c}{a}\sin\frac{\gamma\pi d}{b}\sin\frac{\kappa\pi\delta}{a}\sin\frac{\gamma\pi\delta}{b},$$

$$c_{\kappa\gamma} = \frac{2Fab}{\kappa\gamma\pi^2\sqrt{ab}}\sin\frac{\kappa\pi c}{a}\sin\frac{\gamma\pi d}{b}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{\delta^2}\sin\frac{\kappa\pi\delta}{a}\sin\frac{\gamma\pi\delta}{b}.$$

Limitu

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta^2} \sin\frac{\kappa\pi\delta}{a} \sin\frac{\gamma\pi\delta}{b}$$

rozřešme (po rozepsání součinu sinů na rozdíl cosinů) dvojitým použitím l'Hospitalova pravidla:

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{2\delta^2} \left(\cos\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta - \cos\left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta\right),$$

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{4\delta} \left(-\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)\pi\sin\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta + \left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)\pi\sin\left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta\right),$$

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{4} \left(-\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)^2\pi^2\cos\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta + \left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)^2\pi^2\cos\left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)\pi\delta\right),$$

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \frac{1}{4} \left(-\left(\frac{\kappa}{a} - \frac{\gamma}{b}\right)^2\pi^2 + \left(\frac{\kappa}{a} + \frac{\gamma}{b}\right)^2\pi^2\right),$$

$$\mathcal{L}_{\kappa\gamma} = \pi^2\frac{\kappa\gamma}{ab}.$$

Hledané koeficienty Fourierovy řady příslušné našemu zatížení mají potom tvar

$$c_{\kappa\gamma} = \frac{2F}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\kappa\pi c}{a} \sin\frac{\gamma\pi d}{b}$$

a funkce vyjadřující zatížení jest

$$q(x,y) = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \frac{2c_{\kappa\gamma}}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\kappa\pi x}{a} \sin\frac{\gamma\pi y}{b}.$$

V naší úloze vystupující koeficienty $q_{\xi\eta}$ pak vyjádřeme jako

$$q_{\xi\eta} = \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\frac{\xi\pi x}{a} \sin\frac{\eta\pi y}{b}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

$$q_{\xi\eta} = \frac{2c_{\xi\eta}ab}{4\sqrt{ab}}$$

a konečně

$$q_{\xi\eta} = F\sin\frac{\xi\pi c}{a} \sin\frac{\eta\pi d}{b}.$$

9.5 Vyjádření cílové funkce

Cílová funkce má dle vztahu (9.31) tvar

$$\Pi_p = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} \sum_{\xi,\eta=1}^{K} \zeta_\nu \ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}\ell^\nu_{ko}\ell^\nu_{lp}E^\nu_{mnop}\mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} - \sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} w^{\kappa\gamma}q_{\kappa\gamma},$$

což s užitím vztahů (9.36), (9.38) a

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} = \sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \mathcal{S}^{\xi\eta\kappa\gamma}_{ijkl} w^{\xi\eta}w^{\kappa\gamma},$$

tedy

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} \mathcal{S}^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} = \frac{1}{2}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{\infty} \sum_{\xi,\eta=1}^{\infty} U^{\kappa\gamma\xi\eta}_{ijkl} w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta},$$

lze psát jako

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K}\sum_{\xi,\eta=1}^{K}\zeta_\nu\left(P_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^4 + P_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^3 s_\nu + P_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^2 s_\nu^2 + P_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu s_\nu^3 + P_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}s_\nu^4\right)w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} - \\ - \sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} w^{\kappa\gamma}q_{\kappa\gamma}. \tag{9.51}$$

Pro skutečné řešení $\hat{\boldsymbol{w}}$ – tedy řešení podmínky (9.50) – však platí[33]

$$\hat{\Pi}_p = -\frac{1}{2}\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} q_{\kappa\gamma}\hat{w}^{\kappa\gamma}.$$

Hledáme

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\Pi}_p$$

a tedy (při zanedbání vliv nemající jedné poloviny)

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} q_{\kappa\gamma}\hat{w}^{\kappa\gamma}(\boldsymbol{\alpha}).$$

9.5.1 Maticová varianta nutné podmínky úlohy $(w\alpha)_b$

Na základě posledního vyjádření cílové funkce můžeme nutnou podmínku pro $\boldsymbol{\alpha}$ psát následovně:[34]

$$\min \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}^{-1}(\alpha)\boldsymbol{q}, \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}(\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial\alpha}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{q} = 0. \tag{9.52}$$

9.5.2 Přímá varianta nutné podmínky

Na základě přímého vyjádření cílové funkce (9.51) lze, ovšem bez kouzla samostatného odvození, sestavit nutnou podmínku pro úhel α_ν derivováním citovaného tvaru funkce Π_p:

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\alpha_\nu} = \frac{1}{2}\zeta_\nu\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K}\sum_{\xi\eta=1}^{K}\left(-4P_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^3 s_\nu - 3P_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^2 s_\nu^2 + P_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^4 - 2P_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu s_\nu^3 + 2P_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^3 s_\nu - \right. \\ \left. -P_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}s_\nu^4 + 3P_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu^2 s_\nu^2 + 4P_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}c_\nu s_\nu^3\right)w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

což dává (po dělení c_ν^4, z čehož plyne nutnost uvažovat mezi stacionárními body též $\alpha_\nu = \pm\frac{\pi}{2}$) nutnou podmínku pro α_ν ve tvaru

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K}\sum_{\xi,\eta=1}^{K}\left(-P_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}\mathrm{tg}^4\alpha_\nu + (4P_{5\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} - 2P_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta})\mathrm{tg}^3\alpha_\nu + (3P_{4\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} - 3P_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta})\mathrm{tg}^2\alpha_\nu + \right. \\ \left. + (2P_{3\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta} - 4P_{1\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta})\mathrm{tg}\,\alpha_\nu + P_{2\nu}^{\kappa\gamma\xi\eta}\right)w^{\kappa\gamma}w^{\xi\eta} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{9.53}$$

To, zapsáno maticově

$$\boldsymbol{w}^T\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial\alpha_\nu}\boldsymbol{w} = 0,$$

odpovídá zcela přesně vztahu (9.52).

---

[33]Viz (7.3) na s. 114.

[34]Srvn. [Kočin, 1951] s. 327: pro $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$ jest $\frac{\partial\boldsymbol{P}^{-1}}{\partial\alpha} = -\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial\alpha}\boldsymbol{P}^{-1}$.

9.6 Rozřešení nutné podmínky (9.50), (9.49)

Soustava podmínek (9.49), (9.50) je obtížně řešitelná. Existuje však několik možností, jak danou úlohu řešit. Jednou z nich je metoda alternativního splnění nutné podmínky.[35] Tato metoda spočívá ve střídavém řešení podmínek (9.49), (9.50):

1. Vyjdeme ze zvolených hodnot úhlů α_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), pro které pak řešíme $w^{\kappa\gamma}$ z podmínky (9.50).

2. Získané řešení $w^{\kappa\gamma}$ dosadíme do podmínky (9.49), z které pak řešíme úhly α_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$). Dělením rovnice (9.49) výrazem $\cos^4 \alpha_\nu$ (tedy za předpokladu $\alpha \neq \pm 90°$) dostáváme rovnici čtvrtého stupně v proměnné $\operatorname{tg} \alpha_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$)

$$\sum_{\kappa,\gamma=1}^{K} \sum_{\xi,\eta=1}^{K} w^{\kappa\gamma} w^{\xi\eta} \left(R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{5\nu} \operatorname{tg}^4 \alpha_\nu + R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4\nu} \operatorname{tg}^3 \alpha_\nu + R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3\nu} \operatorname{tg}^2 \alpha_\nu + R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2\nu} \operatorname{tg} \alpha_\nu + R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1\nu} \right) = 0,$$

   kterou lze pohodlně řešit. Z řešení této rovnice, doplněné o hodnoty $\alpha_\nu = 90°$ (hodnota $\alpha_\nu = -90°$ nepřináší nic jiného), sestavíme všechny kombinace skladby desky. Pro tyto skladby vyhodnotíme cílovou funkci a porovnáním najdeme skladbu tuto funkci minimalizující.

3. Pro řešení z bodu 2. řešíme úlohu pružnosti (9.50).

4. Jdi na bod 2. etc. až do konvergence.

Řešení získané metodou alternativního splnění nutné podmínky ověříme dvěma přímými způsoby: Pro $N = 1$ vykreslíme cílovou funkci. Pro větší hodnoty N použijeme metodu genetických algoritmů.[36]

9.6.1 Zdrojový kód metody alternativního splnění nutné podmínky v syntaxi programu GNU Octave 2.1.36

Na tomto místě uvádíme přepis použitého zdrojového kódu zpracovávajícího metodou alternativního splnění nutné podmínky v této kapitole řešenou úlohu:

```
1;
%% Deska N-vrstvá
%% řešeno metodou Alternativního splnění nutné podmínky
clear
%global
AReseni=[];
cputime1=cputime;
fff=0;
%% ===============================================================================
%% Vstupní hodnoty:
%% ===============================================================================
%% ----------------------------------------------------------------------------
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% rozměry
a=100 % [mm]
b=200  % [mm]
%% ----------------------------------------------------------------------------
%% Počet vrstev
N=1
%% ----------------------------------------------------------------------------
%% při konstantni tloušťce zadej tloušťku a ja dopočtu $\zeta$
%t=1 %% [mm]
%z=t*(1:N)
%zmene=[0,z(1:N-1)]
%zeta=((z.^3-zmene.^3)/3)'
%% zadej rovnou $\zeta$
zeta=5*ones(N,1) % [mm^3]
%% ----------------------------------------------------------------------------
%% Materiálové charakteristiky Kevlar-Epoxy kompozitu:
E1=76000 %  MPa
E2=5500  %  MPa
G12=2300 %  MPa
nu12=0.34
%% Dopočtené materiálové charakteristiky:
```

[35] Srvn. [Allaire, 2002].

[36] Viz např. [Goldberg, 1989], [Bessaou and Siarry, 2001], [Mareš, 2003b]

```
nu21=nu12*E2/E1;
Q11=E1/(1-nu12*nu21);
Q22=E2/(1-nu12*nu21);
Q12=nu12*E2/(1-nu12*nu21);
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% počet uvažovaných členů Fourierovy řady průhybu $K \times K$
K=5
%% indexy \varepsilon\varrho\lceil\xi\eta (sloupec, řádek)
s=(1:K)';
r=(1:K);
%% ================================================================================
%% Stacionární hodnoty ve stupních:
%% výchozí bod pro vícevrstvé ten vektor nevol moc objemný
VychoziBod=[-14;14;20;-20;-30;30;-75;-45;-15;0;15;45;75]/180*pi;
%VychoziBod=[-15,20]'/180*pi;
%VychoziBod=(-90:60:90)'/180*pi;
alfa=VychoziBod;
%% ================================================================================
%% ZATÍŽENÍ
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0xy$)
%q0=10/a/b*pi^2/4; % [N/mm^2]
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=q0*a^2*b^2/pi^2*(kron(s,s)).^(-1).*((-1).^(kron(s,ones(K,1))+kron(ones(K,1),s)));
% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$)
%q0=10; % [N/mm^2]
%q11=q0*a*b/4;
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=[q11;zeros(K*K-1,1)];
% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$)
%q0=10; % [N/mm^2]
%q22=q0*a*b/4;
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=[zeros(K*K,1)];
%q(1*K+2)=q22;
% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení izolovanou silou F působící v místě o souřadnicích $[x,y]=[c,d]$
F=1000; %% [N]
c=a/3;
d=b/6;
q=F*kron(sin(s*pi*c/a),sin(s*pi*d/b));
%% ================================================================================
%% VÝPOČET
%% ================================================================================
%% Sestavení koeficientů $R$ a $P$ (materiálové vlastnosti všech vrstev jsou shodné)
%% Sestavení členu
%% Theta={\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}
%%        {(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}
citatel=kron(1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r),1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r));
jmen0=kron(-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2,-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2);
jmen=(zeros(size(jmen0))==jmen0)+jmen0;
Theta=a*b/pi^2*citatel./jmen;
%% P
%% sestavuji P1=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p1=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q11+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q22;
P1=a*b/2*diag(p1);
%% sestavuji P2=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P2=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+kron(s,s)*\
kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12+Q22-Q12));
%% sestavuji P3=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p3=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(2*Q12+4*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(6*Q11-8*Q12-\
16*G12+6*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(2*Q12+4*G12);
P3=a*b/2*diag(p3);
%% sestavuji P4=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P4=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(2*G12-Q11+Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12-Q12+Q22)+kron(s,s)*\
kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12-Q11+Q12));
%% sestavuji P5=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p5=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q22+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q11;
P5=a*b/2*diag(p5);
%% R
%% sestavuji R1=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R1=Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-Q12+Q11)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-Q22+Q12)-kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+kron(s,s)*\
kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12));
%% sestavuji R2=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r2=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(Q12-Q11+2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(3*Q11-6*Q12-12*G12+3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q12+2*G12-Q22);
R2=a*b/4*diag(r2);
%% sestavuji R3=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R3=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-8*G12-2*Q12+Q11+Q22)+\
kron(s,s.^3)*kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q22+2*Q12+8*G12-Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*\
pi^4/a^3/b*(2*Q11-4*G12-4*Q12+2*Q22)+kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*\
(-2*Q11+4*G12+4*Q12-2*Q22));
%% sestavuji R4=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r4=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(-Q12+Q22-2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(-3*Q11+6*Q12+12*G12-3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q11-Q12-2*G12);
R4=a*b/4*diag(r4);
%% sestavuji R5=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{5}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R5=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(Q12-Q22)+\
kron(s,s.^3)*kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q12+Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12));
%% ================================================================================
%% Loop metody:
jj=0
JJ=21
```

```
while (jj<JJ)
%% ==============================================================================
%% Sestavení všech vyhodnocovaných bodů (Každý řádek představuje jeden \
%%  stacionární bod 2N vrstvé desky)
alfa=[pi/2;alfa];
Alfa=[alfa];
[ralp,salp]=size(Alfa);
for n=2:N
Alfa=[kron(Alfa,ones(ralp,1)),kron(ones(ralp^(n-1),1),alfa)];
endfor
%% ==============================================================================
%% Hodnoty cílové funkce v příslušných stacionárních bodech
%% ------------------------------------------------------------------------------
Ww=[];
f=[];
[ral,sal]=size(Alfa); %% ral... počet různých stacionárních bodů
for k=1:ral
al=Alfa(k,:);
P=P1*((cos(al).^4)*(zeta))+P2*((cos(al).^3.*sin(al))*(zeta))+P3*((cos(al).^2.*sin(al).^2)*\
(zeta))+P4*((cos(al).*sin(al).^3)*(zeta))+P5*((sin(al).^4)*(zeta));
W=P^(-1)*q;
Ww=[Ww,W]; %% sloupce představují příslušná řešení
%% prvních N sloupců představuje úhel alpha ve stupních od střední \
%% vrstvy ke krajní vrstvě, poslední sloupec hodnotu cílové funkce
f=[f;al*180/pi,q'*W];
endfor
%% ==============================================================================
%% Nastavení hodnot odpovídajících optimálnímu řešení
ff=f(:,N+1);
% srovnej dle velikosti ff (od malého k velkému)
[srovnanyf,indexf]=sort(ff);
cilovaPROalpha=[f(indexf,:)];
al=Alfa(indexf(1),:);
AReseni=[AReseni;jj,ff(indexf(1)),al*180/pi];
%%              matice nejlepšího řešení každé iterace obsahuje
%%              postupně v řádcích: číslo iterace, hodnotu
%%              minimalizované funkce, příslušné hodnoty úhlů od vnitřní vrstvy
if (ff(indexf(1))==fff) jj=JJ
else
jj=jj+1
endif
fff=ff(indexf(1))
%% ==============================================================================
%% Nalezení stacionárního bodu
P=P1*((cos(al).^4)*zeta)+P2*((cos(al).^3.*sin(al))*zeta)+P3*((cos(al).^2.*sin(al).^2)*\
zeta)+P4*((cos(al).*sin(al).^3)*zeta)+P5*((sin(al).^4)*zeta);
W=P^(-1)*q;
Ww=[Ww,W]; %% sloupce představují příslušná řešení
%% nutná podmínka pro alpha
%% vyhodnocujeme rovnici čtvrtého stupně p(x)=C(1)x^N+...+C(N)x+C(N+1)=0.
C(1)=W'*(-P4)*W;  %% koeficient u největší mocniny
C(2)=W'*(4*P5-2*P3)*W;
C(3)=W'*(3*P4-3*P2)*W;
C(4)=W'*(2*P3-4*P1)*W;
C(5)=W'*P2*W;  %% konstantní člen
tgAlpha=roots(C)
tgAlpha=round(tgAlpha*10)/10
%% Najdi řešení (tj. řádky) kde je kořen reálný
realneJsouSjednickou=((sign(abs(imag(tgAlpha)))-ones(size(tgAlpha)))~=zeros(size(tgAlpha)));
radekZtgAlfaCelyRealny=find(realneJsouSjednickou)
%% úhel odpovídající kořenovým tangentám
alphaKomplexni=atan(tgAlpha)
%% úhel odpovídající reálné kořenové tangentě
alfa=alphaKomplexni(radekZtgAlfaCelyRealny,:)
endwhile %%jj
%% ==============================================================================
cputime2=cputime;
cpucas=cputime2-cputime1
%% Uložení zajímavých veličin
APosledniReseni=[ff(indexf),Alfa(indexf,:)*180/pi];
save AAlterReseni58.data cpucas a b N K zeta q VychoziBod AReseni APosledniReseni
```

9.6.2 Vykreslení cílové funkce v případě jedné dvouvrstvy – zdrojový kód v syntaxi programu GNU Octave 2.1.36

Programové zpracování vykreslení cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na úhlu α_1 v případě jedné dvouvrstvy $(N = 1)$:

```
1;
%% tj. Deska obdélná, nutné podmínky ve variantě $(w\alpha)_a$
%% JEDNOVRSTVÁ, vykreslení
clear
%global
reseni=[];
cputime1=cputime;
%% =================================================================================
%% Vstupní hodnoty:
%% ------------------------------------------------------------------------------
%% rozměry
a=100 % [mm]
b=100  % [mm]
%% ------------------------------------------------------------------------------
%% Počet vrstev
N=3
%% ------------------------------------------------------------------------------
zeta=5*ones(N,1) % [mm^3]
%% ------------------------------------------------------------------------------
```

```
%% Materiálové charakteristiky Kevlar-Epoxy kompozitu:
E1=76000 %  MPa
E2=5500  %  MPa
G12=2300 %  MPa
nu12=0.34
%% Dopočtené materiálové charakteristiky:
nu21=nu12*E2/E1;
Q11=E1/(1-nu12*nu21);
Q22=E2/(1-nu12*nu21);
Q12=nu12*E2/(1-nu12*nu21);
%% ---------------------------------------------------------------------------
%% počet uvažovaných členů Fourierovy řady průhybu $K \times K$
K=35
%% indexy \varepsilon\varrho\lceil\xi\eta (sloupec, řádek)
s=(1:K)';
r=(1:K);
%% ---------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0xy$)
%q0=10/a/b*pi^2/4; % [N/mm^2]
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=q0*a^2*b^2/pi^2*(kron(s,s)).^(-1).*((-1).^(kron(s,ones(K,1))+kron(ones(K,1),s)));
% ----------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$)
%q0=10; % [N/mm^2]
%q11=q0*a*b/4;
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=[q11;zeros(K*K-1,1)];
% ----------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$)
%q0=10; % [N/mm^2]
%q22=q0*a*b/4;
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=[zeros(K*K,1)];
%q(1*K+2)=q22;
% ----------------------------------------------------------------------------
%% zatížení izolovanou silou F působící v místě o souřadnicích $[x,y]=[c,d]$
F=1000; %% [N]
c=a/6;
d=b/6;
q=F*kron(sin(s*pi*c/a),sin(s*pi*d/b));

%% ==============================================================================
%% Sestavení koeficientů $R$ a $P$ (materiálové vlastnosti všech vrstev jsou shodné)
%% Sestavení členu
%% Theta={\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}
%%        {(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}
citatel=kron(1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r),1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r));
jmen0=kron(-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2,-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2);
jmen=(zeros(size(jmen0))==jmen0)+jmen0;
Theta=a*b/pi^2*citatel./jmen;
%% P
%% sestavuji P1=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p1=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q11+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q22;
P1=a*b/2*diag(p1);
%% sestavuji P2=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P2=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12+Q22-Q12));
%% sestavuji P3=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p3=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(2*Q12+4*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(6*Q11-8*Q12-16*G12+6*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(2*Q12+4*G12);
P3=a*b/2*diag(p3);
%% sestavuji P4=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P4=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(2*G12-Q11+Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12-Q12+Q22)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12-Q11+Q12));
%% sestavuji P5=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p5=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q22+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q11;
P5=a*b/2*diag(p5);
%% R
%% sestavuji R1=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R1=Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-Q12+Q11)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-Q22+Q12)-kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+kron(s,s)*\
kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12));
%% sestavuji R2=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r2=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(Q12-Q11+2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(3*Q11-6*Q12-12*G12+3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q12+2*G12-Q22);
R2=a*b/4*diag(r2);
%% sestavuji R3=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R3=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-8*G12-2*Q12+Q11+Q22)+kron(s,s.^3)*\
kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q22+2*Q12+8*G12-Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*\
(2*Q11-4*G12-4*Q12+2*Q22)+kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*Q11+4*G12+4*Q12-2*Q22));
%% sestavuji R4=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r4=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(-Q12+Q22-2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(-3*Q11+\
6*Q12+12*G12-3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q11-Q12-2*G12);
R4=a*b/4*diag(r4);
%% sestavuji R5=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{5}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R5=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(Q12-Q22)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-Q12+Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12));
%% ==============================================================================
%% Zobrazení cílové funkce a nutné podmínky pro $\alpha$
%% ---------------------------------------------------------------------------
%% interval úhlu $\alpha$ v radiánech
ald=-pi/2
alh=pi/2
%% počet uvažovaných intervalů mezi body
ba=56
bb=ba+1
```

```
%% úhel alpha v radianech
al=ald*ones(bb,1)+(alh-ald)*(0:1/ba:1)';
%% ---------------------------------------------------------------------------------
%% Rozřešení úlohy pružnosti pro všechny vybrané hodnoty úhlu alpha+
%% + vyhodnocení cílové funkce +
%% + hodnota pravé (nulové) strany nutné podmínky pro úhel $\alpha$
Ww=[];
f=[];
CC=[];
for k=1:bb
P=P1*((cos(al(k)).^4)'*sum(zeta))+P2*((cos(al(k)).^3.*sin(al(k)))'*sum(zeta))+\
P3*((cos(al(k)).^2.*sin(al(k)).^2)'*sum(zeta))+P4*((cos(al(k)).*sin(al(k)).^3)'*\
sum(zeta))+P5*((sin(al(k)).^4)'*sum(zeta));
W=P^(-1)*q;
Ww=[Ww,W]; %% sloupce představují příslušná řešení
%% nutná podmínka pro alpha
%% vyhodnocujeme rovnici čtvrtého stupně p(x)=C(1)x^N+...+C(N)x+C(N+1)=0.
%% Koeficienty jsou
C(1)=W'*R5*W;  %% koeficient u největší mocniny
C(2)=W'*R4*W;
C(3)=W'*R3*W;
C(4)=W'*R2*W;
C(5)=W'*R1*W;  %% konstantní člen
Nut=C'*[sin(al(k))^4;sin(al(k))^3*cos(al(k));sin(al(k))^2*cos(al(k))^2;sin(al(k))*\
cos(al(k))^3;cos(al(k))^4];
%% řádky představují příslušná řešení :
%% (první sloupec alpha ve stupních, druhý sloupec cílová funkce,
%%    třetí sloupec hodnota nutné podmínky)
f=[f;al(k)*180/pi,q'*W,Nut];
CC=[CC,[al(k)*180/pi;C]]; %% KOEFICIENTY NUTNÉ PODMÍNKY pro alpha (po sloupcích)
endfor
%% =================================================================================
%% Nastavení hodnot odpovídajících optimálnímu řešení
ff=f(:,2);
% srovnej dle velikosti ff (od malého k velkému)
[srovnanyf,indexf]=sort(ff);
alopt=al(indexf(1));
W=Ww(:,indexf(1));
Copt=CC(:,indexf(1)); %% koeficienty nutné podmínky pro optimální $\alpha$
FsrovnaneVSalpha=[srovnanyf,al(indexf)*180/pi];
%% =================================================================================
cputime2=cputime;
cpucas=cputime2-cputime1
%% Uložení zajímavých veličin
save xVysledky.data f CC alopt Copt cpucas a b N K FsrovnaneVSalpha q
%% =================================================================================
%% Grafické znázornění
%%
%% výstup na monitor
%gset term X11
%% vystup jako *.mp
gset term mp
nula=[f(:,1),zeros(size(f(:,1)))];
%%  Grafické znázornění cílové funkce vs. alpha
gset output "cF9AlphaVScil.mp"
gset xlabel "$alphaStupen$"
gset ylabel "$Pi$"
gset title "$Pi(alpha)$"
gset yrange [2000:6000] %% 1:1 F
gplot f using 1:2 , nula using 1:2
%pause
%% výstup na monitor
%gset term X11
%% vystup jako *.mp
%gset term mp
%% Grafické znázornění levéstrany nutné podmínky vs. alpha
gset output "cF9AlphaVSnutna.mp"
gset xlabel "$alphaVSnutna$"
gset ylabel "$Lnutna(alpha)$"
gset title "$LnutneProalpha$"
gset yrange [-70:70] %% 1:1 F
gplot f using 1:3 , nula using 1:2
%pause
%% =================================================================================
%% Grafické znázornění výsledné průhybové plochy pro al_optimální
xla=(0:0.05:1); %% x lomeno a a totéž = y lomeno b (argument v němž \
      %%   počítána hodnota průhybu)
%% matice udávající hodnoty cílové funkce nad polem uzlových bodů <0,a>x<0,b>
wplot1=W'*kron(sin(s*pi*xla),sin(s*pi*xla));
%% Z řádku o typu (1xp^2) udělám matici pxp
%% prvních p členů tvoří první řádek, druhých p členů druhý řádek, atd.
pp=sqrt(size(wplot1));
p=pp(2);
wplot=[]
for k=1:p
wplot=[wplot;wplot1((k-1)*p+1:k*p)];
endfor
wplot=-wplot';  %% transpozice a méně je tam pro transformaci souřadného systému
%% výstup na monitor
%gset term X11
% vystup jako *.mp
%gset term mp
gset output "cF9Wxy.mp"
gset xlabel "$yin0,b$"
gset ylabel "$xin0,a$"
gset zlabel "$w(x,y)$"
gset title "$w(x,y)$"
gset yrange [0:21]
%set view 40,180,1
gsplot wplot %vystup using 1:2 , nula using 1:2
%pause
%% =================================================================================
%% Grafické znázornění spojitého zatížení
xla=(0:0.05:1); %% x lomeno a a totéž = y lomeno b (argument v němž \
```

```
      %%   počítána hodnota průhybu)
%% matice udávající hodnoty spojitého zatížení nad polem uzlových bodů <0,a>x<0,b>
q1=q'*kron(sin(s*pi*xla),sin(s*pi*xla));
%% Z řádku o typu (1xp^2) udělám matici pxp
%% prvních p členů tvoří první řádek, druhých p členů druhý řádek, atd.
pp=sqrt(size(q1));
p=pp(2);
qplot=[]
for k=1:p
qplot=[qplot;q1((k-1)*p+1:k*p)];
endfor
qplot=qplot';
%% výstup na monitor
%gset term X11
% vystup jako *.mp
%gset term mp
gset output "cF9Qxy.mp"
gset xlabel "$yin0,b$"
gset ylabel "$xin0,a$"
gset zlabel "$q(x,y)$"
gset title "$q(x,y)$"
gset yrange [0:21]
%set view 40,180,1
gsplot qplot %vystup using 1:2 , nula using 1:2
```

9.6.3 Zdrojový kód metody zvané genetické algoritmy pro návrh skladby desek v syntaxi programu GNU Octave 2.1.36

V případě desek o větším počtu vrstev bylo k provedení ověření výsledků získaných metodou alternativního splnění nutné podmínky použito módních genetických algoritmů. Použitý kód v syntaxi programu GNU Octave 2.1.36 jest přiložen:

```
1;
%% Deska N-vrstvá
%% řešeno Genetickými algoritmy
clear
%global
Historie=[];
cputime1=cputime;
fff=0;
%% ================================================================================
%% Vstupní hodnoty:
%% ================================================================================
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% ------------------------------------------------------------------------------
%% rozměry
a=100 % [mm]
b=200  % [mm]
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% Počet členů jedné generace (velikost populace)
pcp=200 %% !! vol pcp>19 a DĚLITELNÉ ČTYŘMI!
%% Počet vrstev
N=4
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% při konstantni tloušťce zadej tloušťku a ja dopočtu $\zeta$
%t=1 %% [mm]
%z=t*(1:N)
%zmene=[0,z(1:N-1)]
%zeta=((z.^3-zmene.^3)/3)'
%% zadej rovnou $\zeta$
zeta=5*ones(N,1) % [mm^3]
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% Materiálové charakteristiky Kevlar-Epoxy kompozitu:
E1=76000 %  MPa
E2=5500  %  MPa
G12=2300 %  MPa
nu12=0.34
%% Dopočtené materiálové charakteristiky:
nu21=nu12*E2/E1;
Q11=E1/(1-nu12*nu21);
Q22=E2/(1-nu12*nu21);
Q12=nu12*E2/(1-nu12*nu21);
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% počet uvažovaných členů Fourierovy řady průhybu $K \times K$
K=5
%% indexy \varepsilon\varrho\lceil\xi\eta (sloupec, řádek)
s=(1:K)';
r=(1:K);
%% ================================================================================
%% Stacionární hodnoty ve stupních:
%% Výchozí populace (co řádek to jeden příslušník prvé generace \
%%     obsahující úhly příslušné vrstvám od středu desku k okraji)
VychoziBod=round(rand(pcp,N)*180-90);
Alfa=VychoziBod/180*pi;
%% ================================================================================
%% ZATÍŽENÍ
%% -----------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0xy$)
%q0=10/a/b*pi^2/4; % [N/mm^2]
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=q0*a^2*b^2/pi^2*(kron(s,s)).^(-1).*((-1).^(kron(s,ones(K,1))+kron(ones(K,1),s)));
%% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$)
%q0=10; % [N/mm^2]
%q11=q0*a*b/4;
```

```
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
%q=[q11;zeros(K*K-1,1)];
% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení (případ $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$)
q0=10; % [N/mm^2]
q22=q0*a*b/4;
%% sloupcový vektor ${q\varepsilon\varrho}_{q\varepsilon\varrho\lceil}$
%% představující pravou stranu rovnice (\ref{Spp2}):
q=[zeros(K*K,1)];
q(1*K+2)=q22;
%% ------------------------------------------------------------------------------
%% zatížení izolovanou silou F působící v místě o souřadnicích $[x,y]=[c,d]$
%F=1000; %% [N]
%c=a/6;
%d=b/6;
%q=F*kron(sin(s*pi*c/a),sin(s*pi*d/b));
%% ===============================================================================
%% VÝPOČET
%% ===============================================================================
%% Sestavení koeficientů $R$ a $P$ (materiálové vlastnosti všech vrstev jsou shodné)
%% Sestavení členu
%% Theta={\frac{ab}{\pi^2}\frac{\Theta_{\xi\varepsilon\eta\varrho}}
%%        {(\xi^2-\varepsilon^2)(\eta^2-\varrho^2)}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}
citatel=kron(1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r),1-(-1).^(s*ones(1,K)+ones(K,1)*r));
jmen0=kron(-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2,-s.^2*ones(1,K)+ones(K,1)*r.^2);
jmen=(zeros(size(jmen0))==jmen0)+jmen0;
Theta=a*b/pi^2*citatel./jmen;
%% P
%% sestavuji P1=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{1}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p1=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q11+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q22;
P1=a*b/2*diag(p1);
%% sestavuji P2=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{2}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P2=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+kron(s,s.^3)*kron(r,r)*\
pi^4/b^3/a*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12+Q12-Q11)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12+Q22-Q12));
%% sestavuji P3=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{3}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p3=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(2*Q12+4*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(6*Q11-8*Q12-16*G12+6*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(2*Q12+4*G12);
P3=a*b/2*diag(p3);
%% sestavuji P4=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
P4=-4*Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12+Q22-Q12)+kron(s,s.^3)*\
kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(2*G12-Q11+Q12)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(-2*G12-Q12+Q22)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12-Q11+Q12));
%% sestavuji P5=${P^{\varepsilon\varrho\xi\eta}_{5}}_{\varepsilon\varrho\lceil\xi\eta}$
p5=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*Q22+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*(2*Q12+4*G12)+\
kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*Q11;
P5=a*b/2*diag(p5);
%% R
%% sestavuji R1=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{1}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R1=Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-Q12+Q11)+kron(s,s.^3)*\
kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q22+Q12)-kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(2*G12));
%% sestavuji R2=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{2}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r2=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(Q12-Q11+2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(3*Q11-6*Q12-12*G12+3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q12+2*G12-Q22);
R2=a*b/4*diag(r2);
%% sestavuji R3=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{3}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R3=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(-8*G12-2*Q12+Q11+Q22)+\
kron(s,s.^3)*kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q22+2*Q12+8*G12-Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*\
pi^4/a^3/b*(2*Q11-4*G12-4*Q12+2*Q22)+kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*\
(-2*Q11+4*G12+4*Q12-2*Q22));
%% sestavuji R4=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{4}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
r4=kron((s*pi/a).^4,ones(K,1))*(-Q12+Q22-2*G12)+kron((s*pi/a).^2,(s*pi/b).^2)*\
(-3*Q11+6*Q12+12*G12-3*Q22)+kron(ones(K,1),(s*pi/b).^4)*(Q11-Q12-2*G12);
R4=a*b/4*diag(r4);
%% sestavuji R5=${R^{\kappa\gamma\xi\eta}_{5}}_{\kappa\gamma\lceil\xi\eta}$
R5=-Theta.*(kron(s.^3,s)*kron(r,r)*pi^4/a^3/b*(Q12-Q22)+kron(s,s.^3)*\
kron(r,r)*pi^4/b^3/a*(-Q12+Q11)+kron(s,s)*kron(r.^3,r)*pi^4/a^3/b*(2*G12)+\
kron(s,s)*kron(r,r.^3)*pi^4/a/b^3*(-2*G12));
%% ===============================================================================
%% Loop metody (generace za generací):
jj=1
JJ=4000 %% počet generací
while (jj<JJ)
%% ===============================================================================
%% Hodnoty cílové funkce v příslušných stacionárních bodech
%% -----------------------------------------------------------------------------
Ww=[];
f=[];
[ral,sal]=size(Alfa); %% ral... počet různých stacionárních bodů
for k=1:ral
al=Alfa(k,:);
P=P1*((cos(al).^4)*(zeta))+P2*((cos(al).^3.*sin(al))*(zeta))+P3*((cos(al).^2.*\
sin(al).^2)*(zeta))+P4*((cos(al).*sin(al).^3)*(zeta))+P5*((sin(al).^4)*(zeta));
W=P^(-1)*q;
Ww=[Ww,W]; %% sloupce představují příslušná řešení
%% prvních N sloupců představuje úhel alpha ve stupních od střední \
%% vrstvy ke krajní vrstvě, poslední sloupec hodnotu cílové funkce
f=[f;al*180/pi,q'*W];
endfor
%% ===============================================================================
%% Nastavení hodnot odpovídajících optimálnímu řešení
ff=f(:,N+1);
% srovnej dle velikosti ff (od malého k velkému)
[srovnanyf,indexf]=sort(ff);
cilovaPROalpha=[f(indexf,:)];
al=Alfa(indexf(1),:);
Historie=[Historie;jj,ff(indexf(1)),al*180/pi];
%%              matice nejlepšího řešení každé generace obsahuje
%%              postupně v řádcích: číslo iterace, hodnotu
%%              minimalizované funkce, příslušné hodnoty úhlů od vnitřní vrstvy
if (ff(indexf(1))==fff) jj=JJ
```

```
else
if (jj>10)
rjj=jj-8;
else
rjj=jj-round(jj/3);
endif
jj=jj+1
endif
fff=Historie(rjj,2)
zJedneJe=jj/JJ
%% ===============================================================================
%% Nalezení nové populace (členů nové generace)
%% Alfa v řádcích od nejvýkonějšího k nejslabšímu
Alfa1=Alfa(indexf,:);
%% Nová Alfa
bodyZAlfa=round(rand(size(Alfa)));
bodyZAlfa1=abs(bodyZAlfa-ones(size(Alfa)));
%Alfa=(kron(eye(pcp/2),[0,1;1,0])*Alfa).*bodyZAlfa+Alfa1.*bodyZAlfa1;
Alfa=(kron(eye(pcp/2),[0,1;1,0])*Alfa).*bodyZAlfa+\
kron(eye(pcp/4),[1,0,0,0;0,0,0,1;0,0,1,0;0,1,0,0])*Alfa1.*bodyZAlfa1;
%% vyhodím posledních pět členů a nahradím je prvním z Alfa1 (klonování)
%%  a čtyřmi novými (invaze z vesmíru)
Alfa=[Alfa1(1,:);Alfa(2:pcp/2,:);round(rand(pcp/2,N)*180-90)/180*pi];
endwhile %%jj
%% ===============================================================================
cputime2=cputime;
cpucas=cputime2-cputime1
%% Uložení zajímavých veličin
PosledniGenerace=[ff(indexf),Alfa1*180/pi];
save GAdeska57.data cpucas a b N K zeta q VychoziBod Historie PosledniGenerace
%% výstup na monitor
gset term X11
% vystup jako *.mp
%gset term mp
%gset output "historie.mp"
gset xlabel "$generace$"
gset ylabel "$cil$"
gplot Historie using 1:2
```

9.7 Příklady testovaných desek a zátěžových stavů – výsledky programového zpracování

Ve všech následujících příkladech je uvažována deska složená ze stejných grafito-epoxidových laminátových kompozitních vrstev s materiálovými charakteristikami[37] z tabulky 9.1. Jednotlivé vrstvy mají od středu k okraji klesající tloušťku tak, aby příspěvek každé vrstvy k ohybové tuhosti desky byl shodný a to o velikosti charakterizované veličinou $\zeta_\nu = 5\ \mathrm{mm}^3$. Hovoří-li se v dalším o poměru stran $a : b = 1 : 1$ mají se na mysli strany o délkách $a = 100\,\mathrm{mm}$ a $b = 100\,\mathrm{mm}$, v případě $a : b = 1 : 2$ se rozumí strany o délkách $a = 100\,\mathrm{mm}$, $b = 200\,\mathrm{mm}$ a konečně pro $a : b = 1 : 3$ jde o strany s délkami $a = 100\,\mathrm{mm}$ a $b = 300\,\mathrm{mm}$.

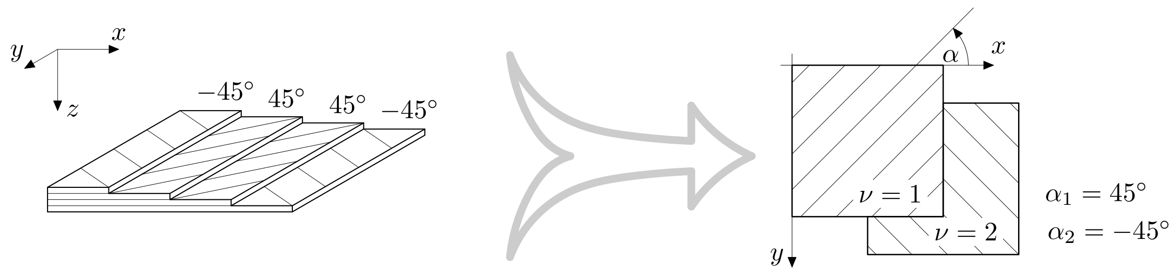
$$\begin{aligned} E_1^\nu &= 76\,\mathrm{GPa} \\ E_2^\nu &= 5{,}5\,\mathrm{GPa} \\ G_{12}^\nu &= 2{,}3\,\mathrm{GPa} \\ \nu_{12}^\nu &= 0{,}34 \end{aligned}$$

Tabulka 9.1: Materiálové charakteristiky grafito-epoxidové laminátové vrstvy

Pokud hovoříme o návrhovém vektoru

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45 \\ -45 \end{pmatrix}^\circ,$$

pak říkáme, že shora řečená míra tuhosti čtyřvrstvé symetrické desky s vrstvami o daných vlastnostech je maximalizována skladbou[38] $[-45/45]_s$ (resp. $[\mp 45]_s$), což graficky naznačíme nákresem zobrazujícím spodní polovinu desky, jak je naznačeno na pravé straně obrázku 9.15.



Obrázek 9.15: Způsob grafického naznačení skladby $[-45/45]_s$ maximalizující tuhost uvažované desky

Všechny výpočty v této práci zmíněné byly provedeny na osobním počítači s procesorem AMD Duron 800 MHz pod operačním systémem Linux (Mandrake 9.0) v programu GNU Octave 2.1.36.

[37] [Gürdal *et al.*, 1999] s. 67.
[38] Srvn. s. 135.

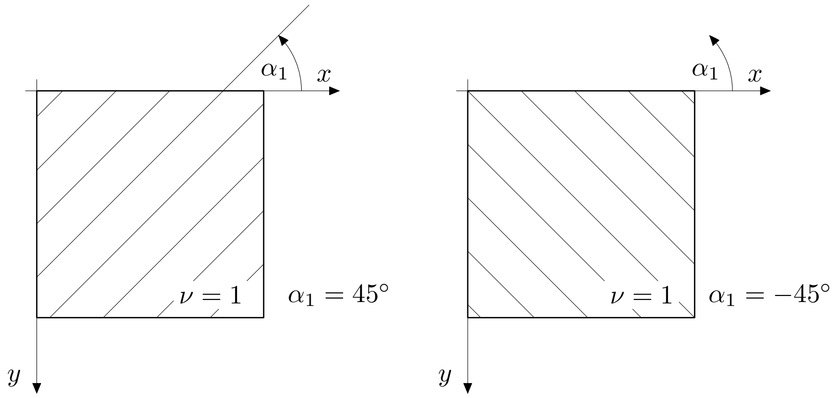
9.7.1 Zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Velikost koeficientu q_0 jest volena o velikosti $q_0 = 10\,\mathrm{N/mm^2}$.

☐ Případ čtvercové desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 1$) zatížené spojitým zatížením $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ při následujícím počtu dvouvrstev:

- $N = 1$ $(a : b = 1 : 1,\ q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky shora citovaný program konvergoval k dvěma rovnocenným řešením $\alpha_1 = \pm 45°$ s hodnotou cílové funkce 210 658,73 mJ. Výpočet trval 0,09 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.16(a) a 9.16(b).

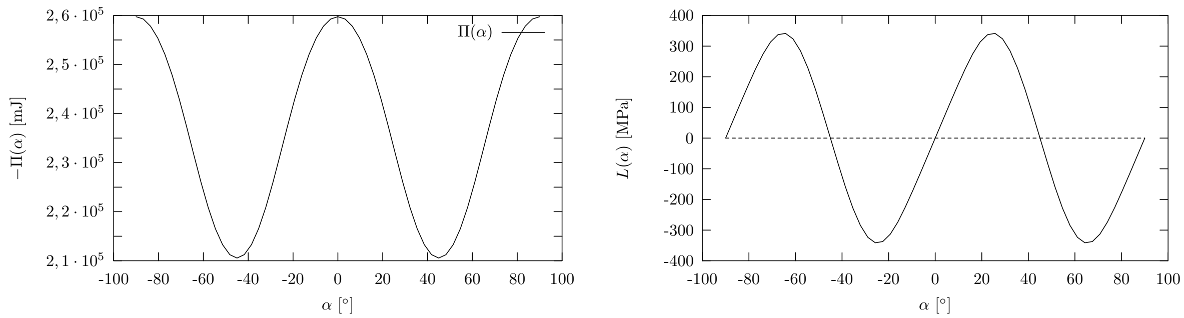


(a) Prvé možné řešení $\alpha_1 = 45°$

(b) Druhé možné řešení $\alpha_1 = -45°$

Obrázek 9.16: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 1$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

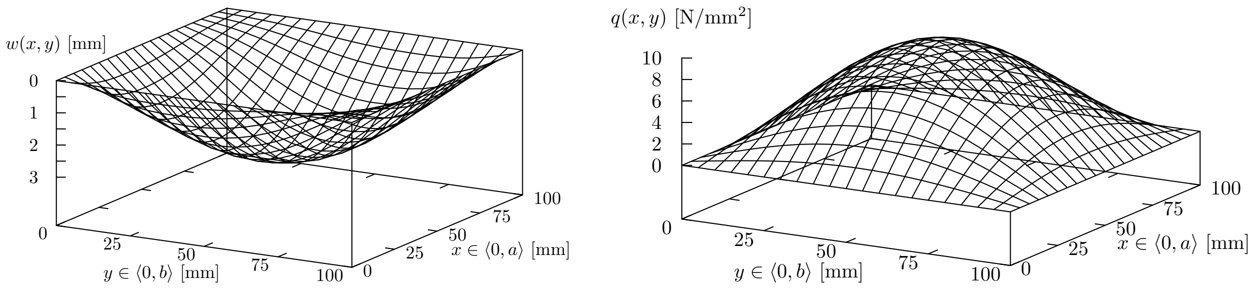
Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu α_1 orientace vrstvy jest provedeno na obrázcích 9.17(a) a 9.17(b). Výpočet příslušných bodů vykreslených grafů představoval 0,15 s. Na obrázcích 9.18(a) a 9.18(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.



(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α

(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

Obrázek 9.17: Deska čtvercová s $N = 1$ zatížená $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$



(a) Průhyb v případě $\alpha = -45°$ (b) Zatížení $q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$

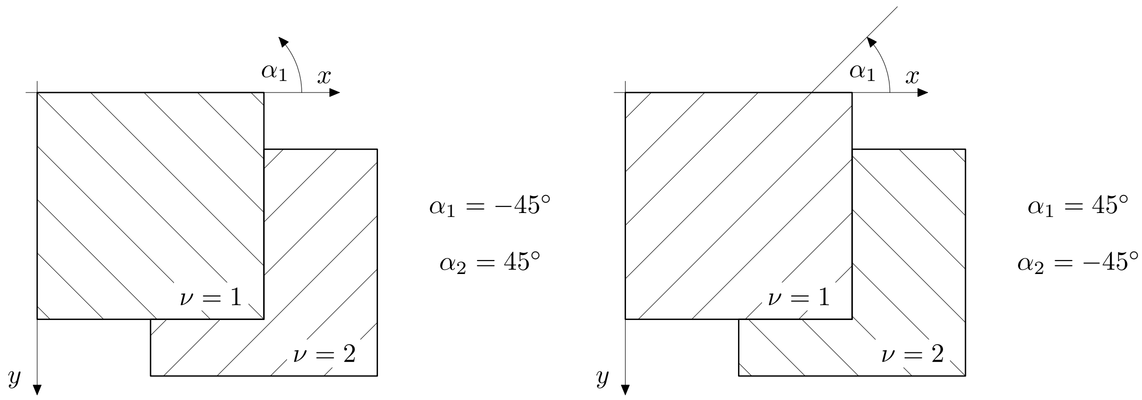
Obrázek 9.18: Průhyb a zatížení desky čtvercové s $N = 1$

- $N\!=2$ $(a\!:\!b = 1\!:\!1,\ q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval shora citovaný program k dvěma rovnocenným řešením:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ 45° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ -45° \end{pmatrix}$$

  s hodnotou cílové funkce 78 068,24 mJ. Výpočet trval 0,31 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.19(a) a 9.19(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo ve třech paralelních bězích shodných výsledků v CPU čase 1 276,61 + 1 270,02 + 1 265,57 s.



(a) Prvé možné řešení (b) Druhé možné řešení

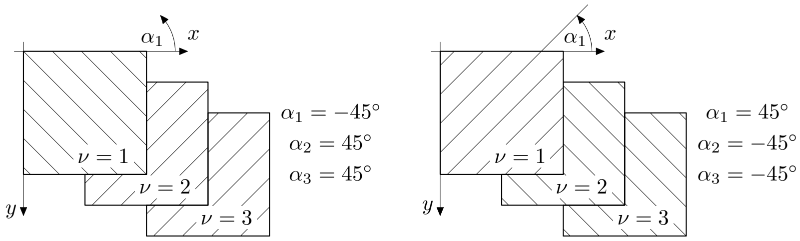
Obrázek 9.19: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 2$ při zatížení $q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$

- $N = 3$ $(a:b = 1:1,\ q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo šesti ekvivalentních řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45^\circ \\ 45^\circ \\ 45^\circ \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45^\circ \\ -45^\circ \\ -45^\circ \end{pmatrix}$$

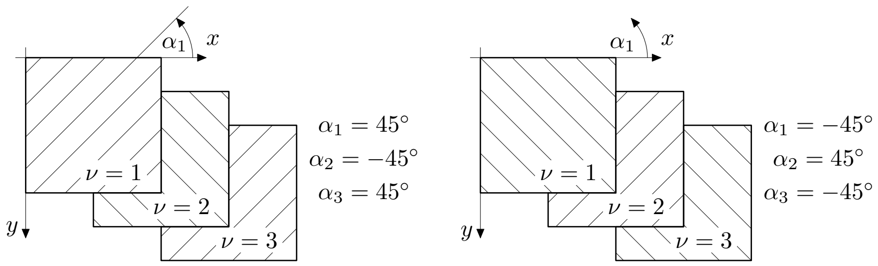
  a další čtyři při permutaci jednotlivých složek těchto vektorů. Hodnota cílové funkce jest 53 250,92 mJ. Výpočet trval 13,43 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.20(a) až 9.22(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 285,95 + 1 277,7 + 1 274,62 s.



(a) Prvé možné řešení

(b) Druhé možné řešení

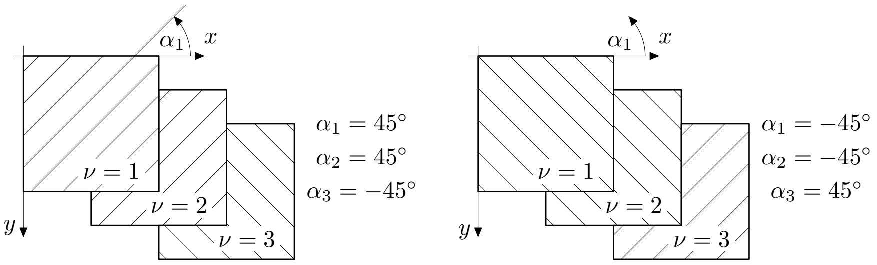
Obrázek 9.20: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$



(a) Třetí možné řešení

(b) Čtvrté možné řešení

Obrázek 9.21: Grafické znázornění orientace (2) vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$



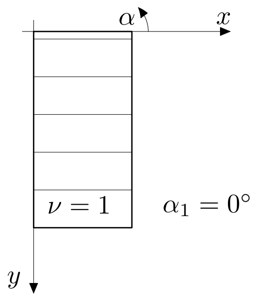
(a) Páté možné řešení (b) Šesté možné řešení

Obrázek 9.22: Grafické znázornění orientace (3) vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Případ obdélné desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 2$) zatížené spojitým zatížením $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ při následujícím počtu dvouvrstev:

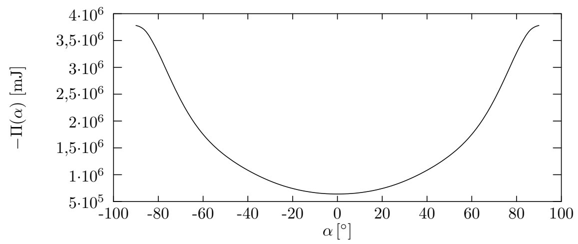
- $N = 1$ $(a : b = 1 : 2,\ q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky shora citovaný program konvergoval k řešení $\alpha_1 = 0°$ s hodnotou cílové funkce 639 778,91 mJ. Výpočet trval 0,06 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.23.

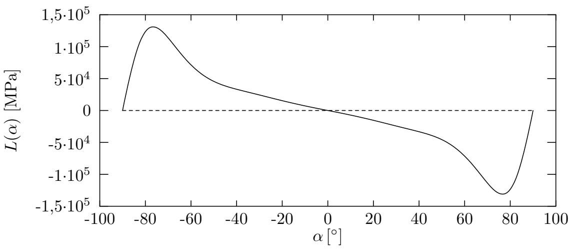


Obrázek 9.23: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 1$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu orientace vrstvy α_1 jest provedeno na obrázcích 9.24(a) a 9.24(b). Výpočet přílušných bodů grafů představovalo 0,17 s. Na obrázcích 9.25(a) a 9.25(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.

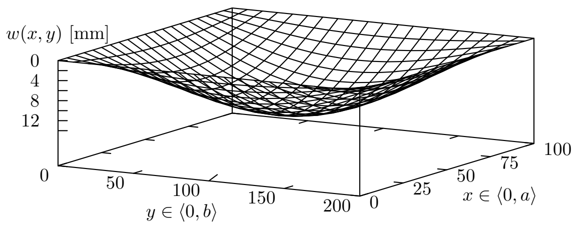


(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α

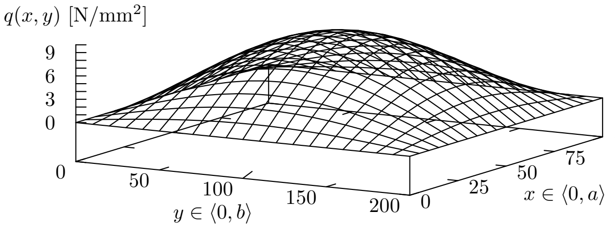


(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

Obrázek 9.24: Deska obdélná s $N = 1$ zatížená $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$



(a) Průhyb v případě $\alpha = 0°$



(b) Zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

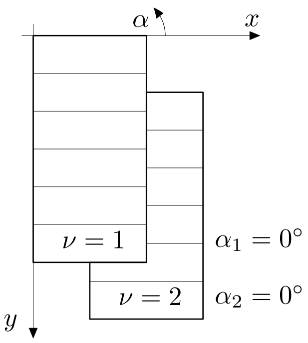
Obrázek 9.25: Průhyb a zatížení desky obdélné s $N = 1$

- $N = 2$ $(a : b = 1 : 2,\ q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergovalo řešení k bodu:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0° \\ 0° \end{pmatrix}$$

  s hodnotou cílové funkce 319 889,45 mJ. Výpočet trval 0,13 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.26. Při použití řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo shodného výsledku v CPU čase 4 127,06 s.



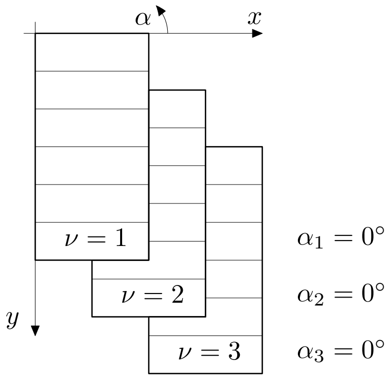
Obrázek 9.26: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 2$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

- $N=3$ $(a:b=1:2,\ q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\end{pmatrix}.$$

  Hodnota cílové funkce jest 213 259,63 mJ. Výpočet trval 13,22 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.27. Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo ve třech paralelních bězích dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 293.16 + 1 292 + 1 295 s.



Obrázek 9.27: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N=3$ při zatížení $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$

9.7.2 Zatížení $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$

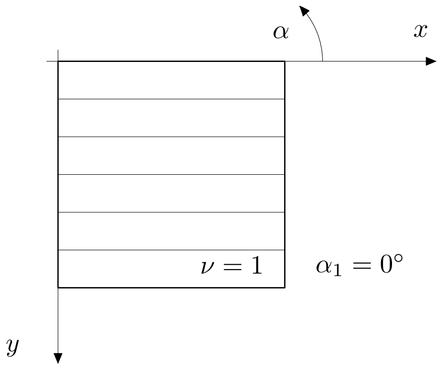
Velikost koeficientu q_0 jest volena $q_0=10\,\mathrm{N/mm^2}$.

☐ Případ čtvercové desky (desky o poměru stran $a:b=1:1$) zatížené spojitým zatížením $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$ při následujícím počtu dvouvrstev:

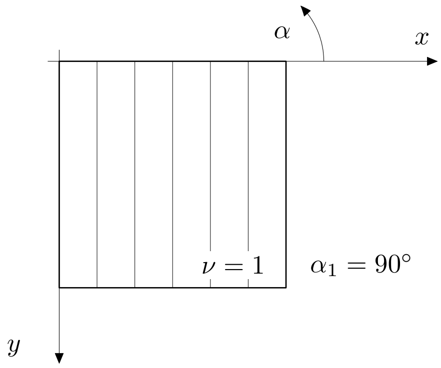
- $N=1$ $(a:b=1:1,\ q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval výpočet k dvěma rovnocenným řešením $\alpha_1=0^\circ$ a $\alpha_1=90^\circ$ s hodnotou cílové funkce 16 856,60 mJ. Výpočet trval 0,12 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.28(a) a 9.28(b).

  Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu orientace vrstvy α_1 jest provedeno na obrázcích 9.29(a) a 9.29(b). Výpočet příslušných bodů grafů představoval 0,17 s. Na obrázcích 9.30(a) a 9.30(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.

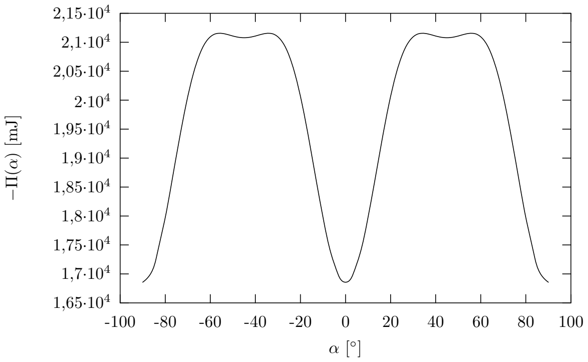


(a) Prvé možné řešení $\alpha_1 = 0°$

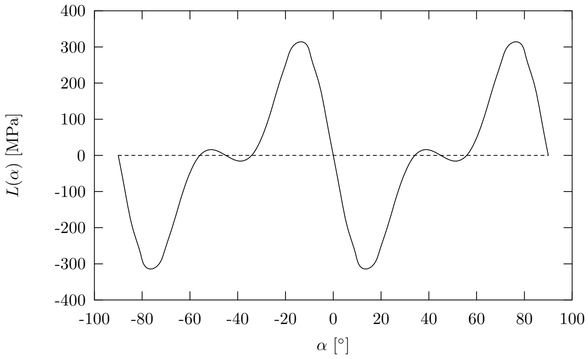


(b) Druhé možné řešení $\alpha_1 = 90°$

Obrázek 9.28: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 1$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

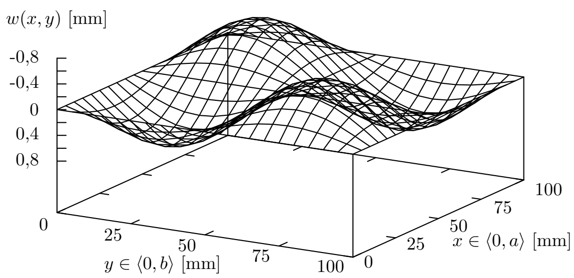


(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α

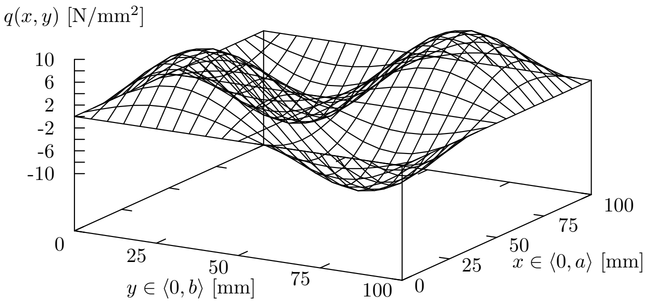


(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

Obrázek 9.29: Deska čtvercová s $N = 1$ zatížená $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$



(a) Průhyb v případě $\alpha = 0°$



(b) Zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

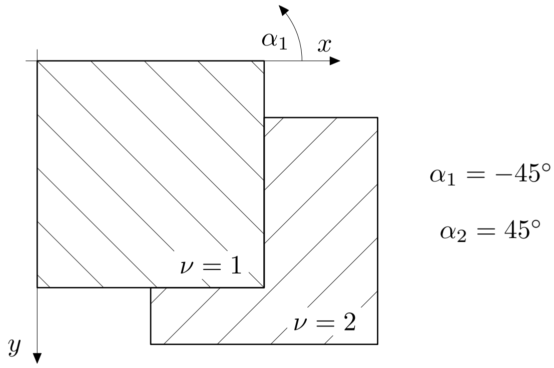
Obrázek 9.30: Průhyb a zatížení desky čtvercové s $N = 1$

- $N=2$ $(a:b=1:1,\ q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b})$

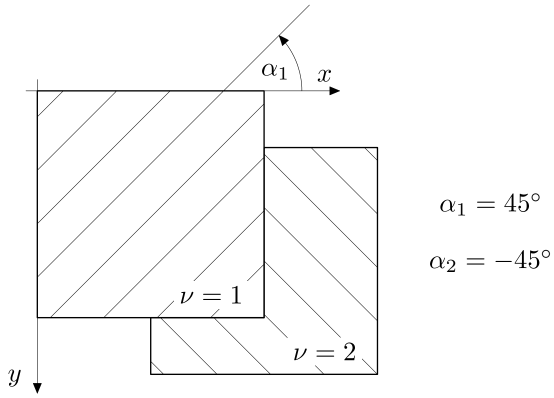
  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval shora citovaný program k dvěma rovnocenným řešením:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}-45^\circ\\45^\circ\end{pmatrix},\qquad\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}45^\circ\\-45^\circ\end{pmatrix}$$

  s hodnotou cílové funkce 4 879,26 mJ. Výpočet trval 0,39 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.31(a) a 9.31(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo ve třech paralelních bězích shodných výsledků v CPU čase 1 289,69 + 1 304,82 + 1 294,18 s.



(a) Prvé možné řešení



(b) Druhé možné řešení

Obrázek 9.31: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N=2$ při zatížení $q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$

- $N=3$ $(a:b=1:1,\ q=q_0\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b})$

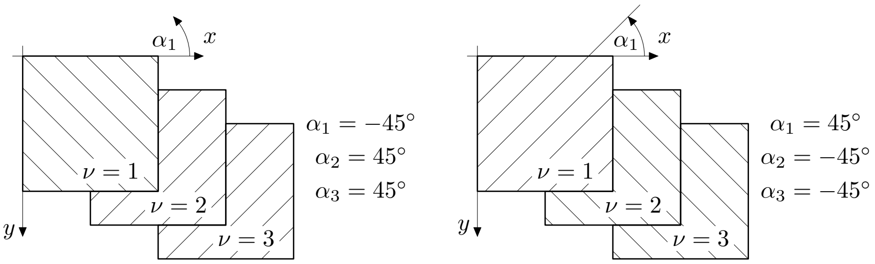
  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo šesti ekvivalentních řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}-45^\circ\\45^\circ\\45^\circ\end{pmatrix},\qquad\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}45^\circ\\-45^\circ\\-45^\circ\end{pmatrix}$$

  a další čtyři při permutaci jednotlivých složek těchto vektorů. Hodnota cílové funkce jest 3 449,35 mJ. Výpočet trval 33,07 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.32(a) až 9.34(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo ve třech bězích dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 283,15 + 1 289,55 + 1 143,68 s.

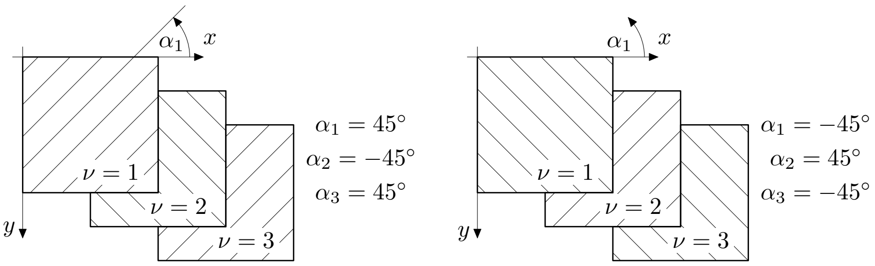
Dále poznamenejme, že v případě vyššího počtu dvouvrstev jsou výsledky obdobné. Pro sudý počet dvouvrstev dostáváme orientace vrstev $\pm 45^\circ$ a to v rovném počtu kladných a záporných, bez vlivu pořadí. Nezávislost na pořadí jest významná: Existuje možnost vyhovět požadavku vyrovnaného[39] uspořádání s eliminací zkrutu desky od ohybu při současném splnění požadavku maximalizace tuhosti desky. Lze tedy vyhovět oběma přirozeným požadavkům zároveň. V případě lichého počtu dvouvrstev je situace komplikovanější. Opět dostáváme orientace vrstev $\pm 45^\circ$, kde počet kladných a záporných orientací se (podobně jako v případě $N=3$) liší o jednu. Analogická poznámka platí také pro čtvercovou desku zatíženou zatížením z hořejšího paragrafu (tj. $q=q_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$).

[39]Srvn. s. 143 této práce.



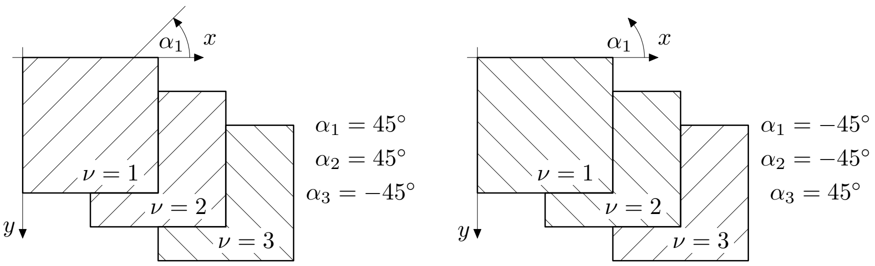
(a) Prvé možné řešení (b) Druhé možné řešení

Obrázek 9.32: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$



(a) Třetí možné řešení (b) Čtvrté možné řešení

Obrázek 9.33: Grafické znázornění orientace (2) vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$



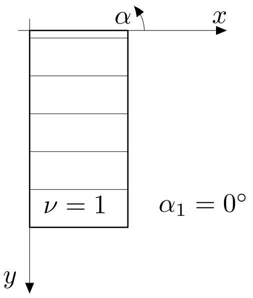
(a) Páté možné řešení (b) Šesté možné řešení

Obrázek 9.34: Grafické znázornění orientace (3) vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

Případ obdélné desky (desky o poměru stran $a:b = 1:2$, jmenovitě $a = 100$ mm a $b = 200$ mm) zatížené spojitým zatížením $q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}$ při následujícím počtu dvouvrstev:

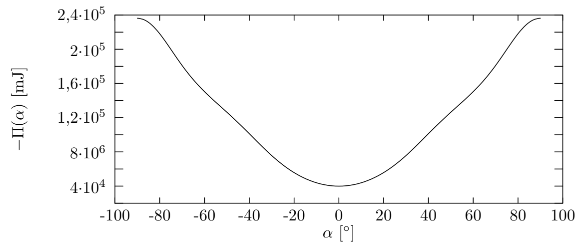
- $N = 1$ $(a:b = 1:2,\ q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergovalo řešení k hodnotě $\alpha_1 = 0°$ s hodnotou cílové funkce 39 986,18 mJ. Výpočet trval 0,07 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.35.

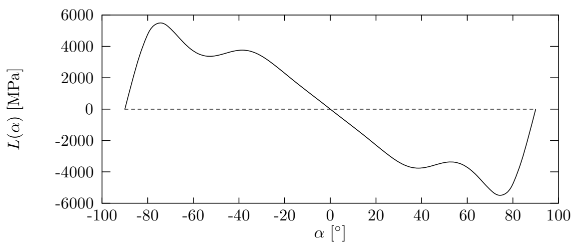


Obrázek 9.35: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 1$ při zatížení $q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}$

Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu orientace vrstvy α_1 jest provedeno na obrázcích 9.36(a) a 9.36(b). Výpočet přílušných bodů grafů představoval 0,18 s. Na obrázcích 9.37(a) a 9.37(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.



(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α



(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

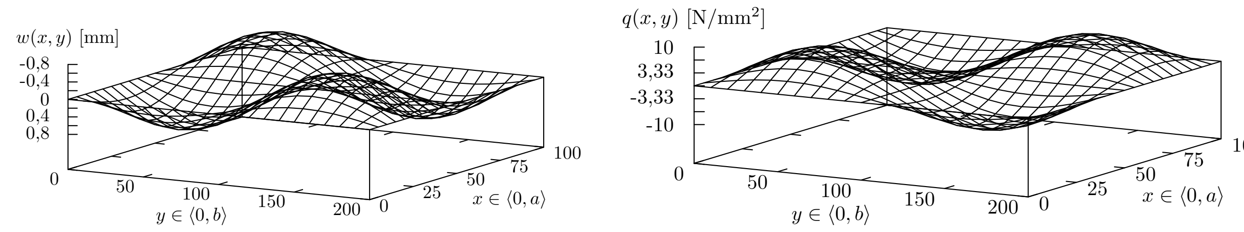
Obrázek 9.36: Deska obdélná s $N = 1$ zatížená $q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}$

- $N = 2$ $(a:b = 1:2,\ q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergovalo řešení k bodu:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0° \\ 0° \end{pmatrix}$$

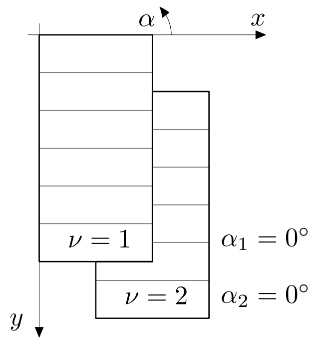
  s hodnotou cílové funkce 19 993,09 mJ. Výpočet trval 0,27 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.38. Při použití genetických algoritmů bylo dosaženo shodného výsledku v CPU čase 1 835,4 s.



(a) Průhyb v případě $\alpha = 0°$

(b) Zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

Obrázek 9.37: Průhyb a zatížení desky obdélné s $N = 1$



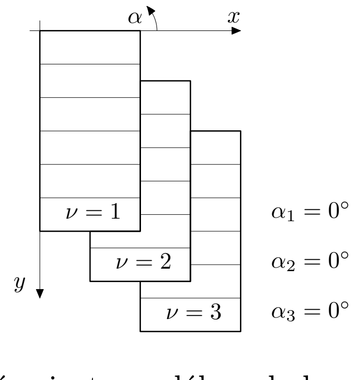
Obrázek 9.38: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 2$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

- $N\!=3$ $(a\!:\!b = 1\!:\!2,\ q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b})$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0° \\ 0° \\ 0° \end{pmatrix}.$$

  Hodnota cílové funkce jest 13 328,72 mJ. Výpočet trval 13,27 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.39. Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 390.36 + 1 325,83 + 1314,73 s.



Obrázek 9.39: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 3$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

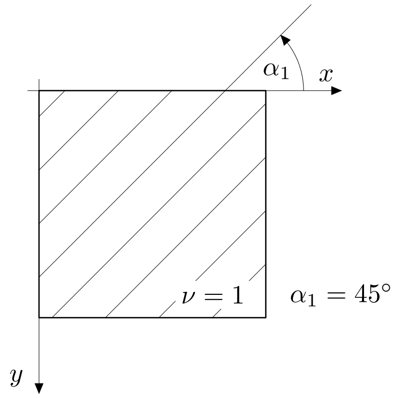
9.7.3 Zatížení $q = q_0xy$

Velikost koeficientu q_0 jest volena $q_0 = 0{,}000\ 1\,\mathrm{N/mm^4}$.

☐ Případ čtvercové desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 1$, $a = 100$ mm, $b = 100$ mm) zatížené spojitým zatížením $q = q_0xy$ při následujícím počtu dvouvrstev:

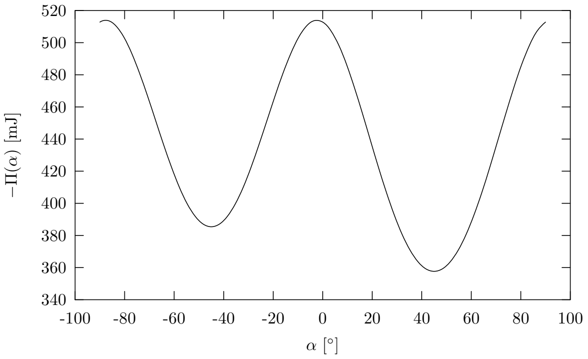
- $N = 1$ ($a : b = 1 : 1$, $q = q_0xy$)

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval výpočet k jedinému řešení $\alpha_1 = 45°$ s hodnotou cílové funkce 357,66 mJ. Výpočet trval 0,11 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.40.

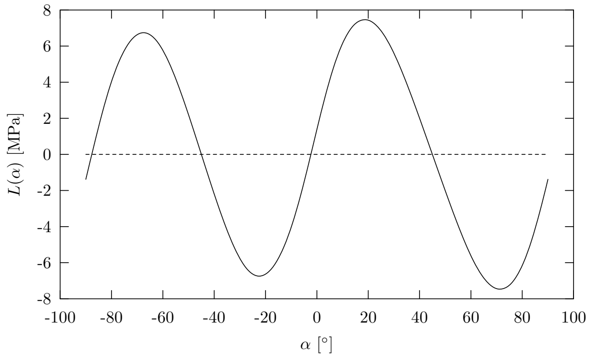


Obrázek 9.40: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 1$ při zatížení $q = q_0xy$

Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu orientace vrstvy α_1 jest provedeno na obrázcích 9.41(a) a 9.41(b). Výpočet příslušných bodů vykreslených grafů představoval 0,17 s. Na obrázcích 9.42(a) a 9.42(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.

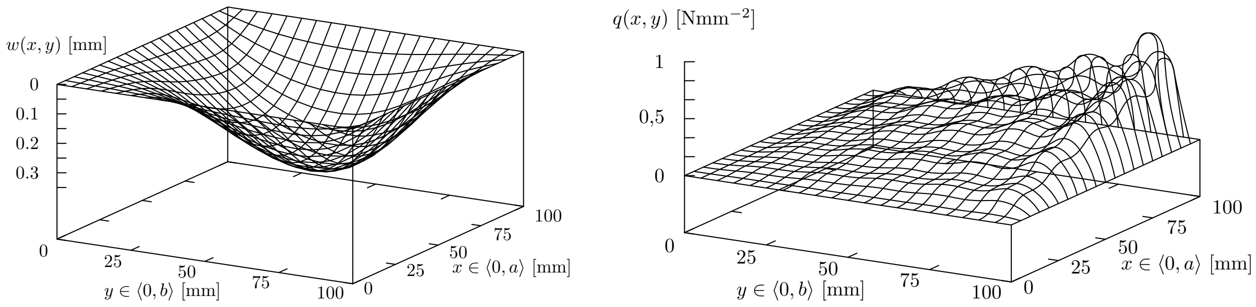


(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α



(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

Obrázek 9.41: Deska čtvercová s $N = 1$ zatížená $q = q_0xy$



(a) Průhyb v případě $\alpha = 45°$

(b) Zatížení $q = q_0xy$ v použité náhradě Fourierovou řadou ($K = 5$)

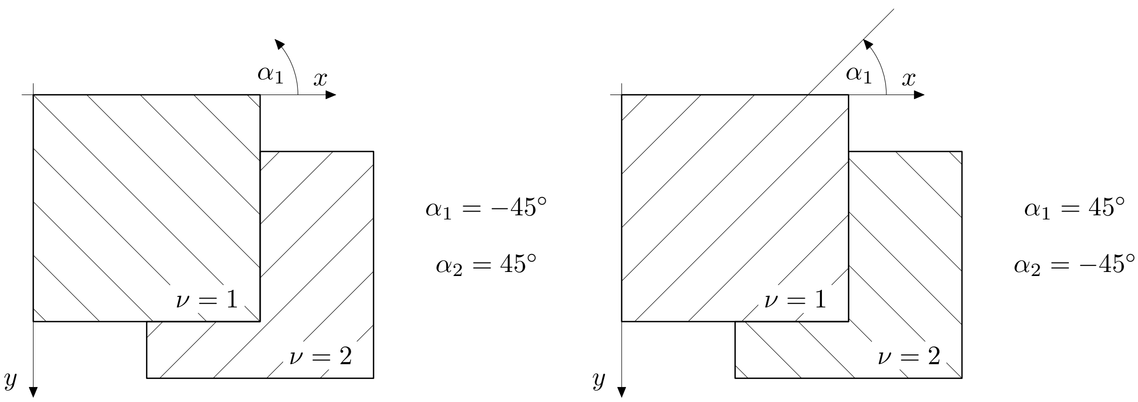
Obrázek 9.42: Průhyb a zatížení desky čtvercové s $N = 1$

- $N = 2$ ($a : b = 1 : 1,\ q = q_0xy$)

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval shora citovaný program k dvěma rovnocenným řešením:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ 45° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ -45° \end{pmatrix}$$

  s hodnotou cílové funkce 143,09 mJ. Výpočet trval 0,31 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.43(a) a 9.43(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo dosaženo ve třech paralelních bězích shodných výsledků v CPU čase 1 301,75 + 1 306,8 + 1 285,95 s.



(a) Prvé možné řešení

(b) Druhé možné řešení

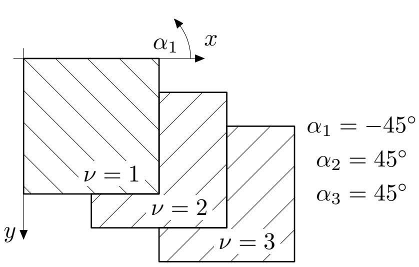
Obrázek 9.43: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 2$ při zatížení $q = q_0xy$

- $N = 3$ ($a : b = 1 : 1,\ q = q_0xy$)

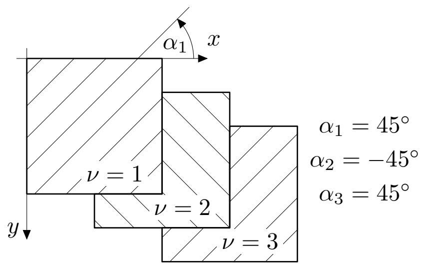
  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo tří ekvivalentních řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ 45° \\ 45° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ -45° \\ 45° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ 45° \\ -45° \end{pmatrix}.$$

Hodnota cílové funkce jest 96,42 mJ. Výpočet trval 13,5 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.44 a 9.45. Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo ve třech bězích dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 349,36 + 1 346,54 + 1 343,59 s.

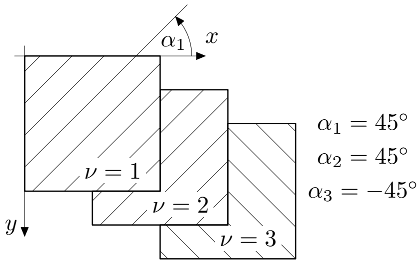


(a) Prvé možné řešení



(b) Druhé možné řešení

Obrázek 9.44: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0xy$



Obrázek 9.45: Grafické znázornění orientace (třetí možné řešení) vláken desky čtvercové s $N = 3$ při zatížení $q = q_0xy$

- $N{=}4$ $(a{:}b = 1{:}1,\ q = q_0xy)$

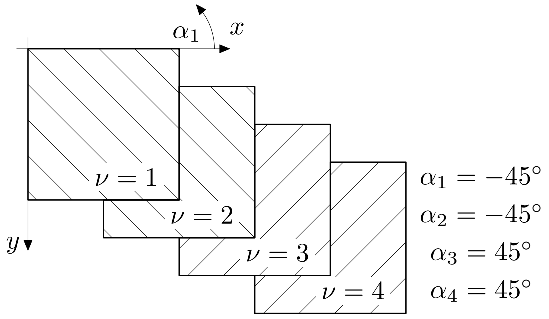
  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky bylo dosaženo šesti ekvivalentních řešení:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ -45° \\ 45° \\ 45° \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ 45° \\ -45° \\ 45° \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -45° \\ 45° \\ 45° \\ -45° \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ -45° \\ -45° \\ 45° \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ -45° \\ 45° \\ -45° \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 45° \\ 45° \\ -45° \\ -45° \end{pmatrix}.$$

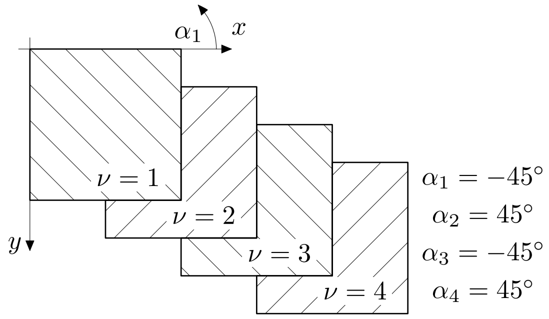
  Hodnota cílové funkce jest 71,54 mJ. Výpočet trval 27,94 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.46(a) až 9.48(b). Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů bylo ve třech bězích dosaženo shodných výsledků v CPU čase 1 366,64 + 1 376,37 + 1 362,32 s.

Dále poznamenejme, že i zde jsou v případě vyššího počtu dvouvrstev výsledky obdobné. Pro sudý počet dvouvrstev dostáváme orientace vrstev ±45° a to v rovném počtu kladných a záporných, bez vlivu pořadí. Nezávislost na pořadí jest, jak již řečeno významná: Existuje možnost vyhovět požadavku vyrovnaného[40] uspořádání s eliminací zkrutu desky od ohybu při současném splnění požadavku maximalizace tuhosti desky. Lze tedy vyhovět oběma přirozeným požadavkům zároveň. V případě lichého počtu dvouvrstev je situace komplikovanější. Opět dostáváme orientace vrstev ±45°, kde počet kladných orientací je o jednu vyšší nežli orientací záporných (podobně jako v případě $N = 3$).

[40]Srvn. s. 143 této práce.

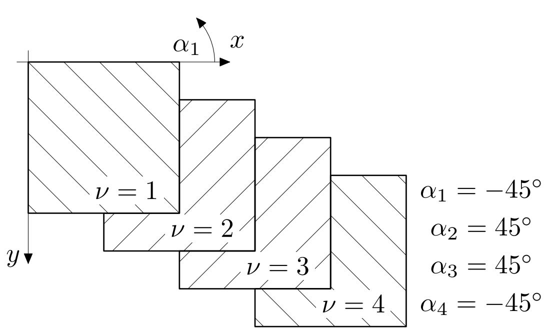


(a) Prvé možné řešení

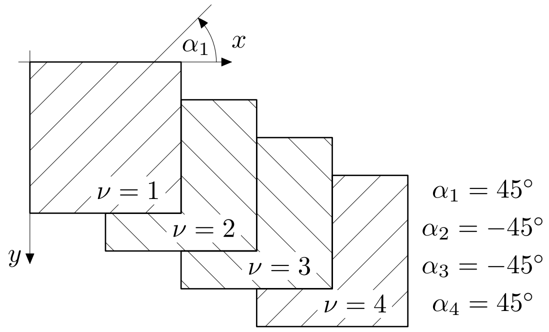


(b) Druhé možné řešení

Obrázek 9.46: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 4$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

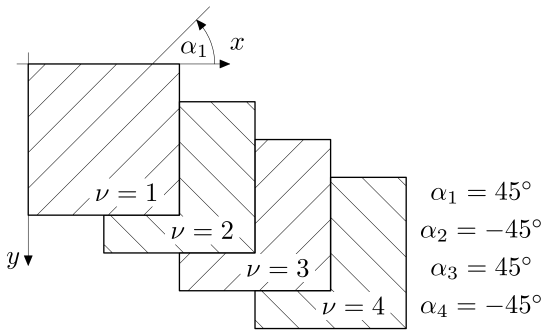


(a) Třetí možné řešení

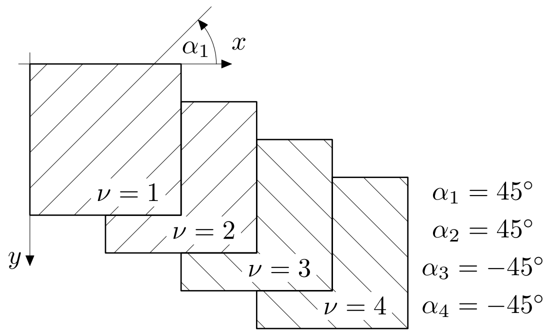


(b) Čtvrté možné řešení

Obrázek 9.47: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 4$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$



(a) Páté možné řešení



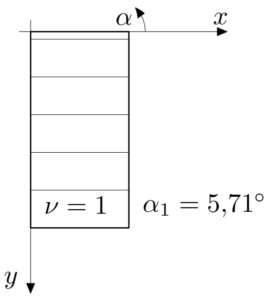
(b) Šesté možné řešení

Obrázek 9.48: Grafické znázornění orientace vláken desky čtvercové s $N = 4$ při zatížení $q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$

Případ obdélné desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 2$, jmenovitě $a = 100$ mm a $b = 200$ mm) zatížené spojitým zatížením $q = q_0xy$ ($q_0 = 0{,}000\ 05$ Nmm^{-4}) při následujícím počtu dvouvrstev:

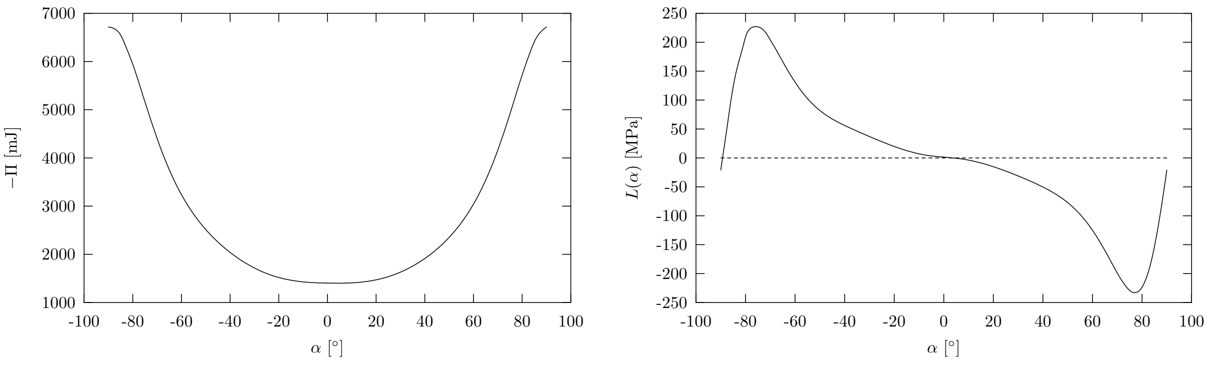
- $N = 1$ ($a : b = 1 : 2,\ q = q_0xy$)

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky konvergoval výpočet k jedinému řešení $\alpha_1 = 5{,}71°$ s hodnotou cílové funkce 1 401,23 mJ. Výpočet trval 0,1 s strojního času. V tomto případě byla konvergence závislá na volbě výchozího bodu! Při výchozím bodě se všemi hodnotami vzdálenými od řešení dostáváme například řešení $\alpha = 0$ s hodnotou cílové funkce 1 402,42 mJ. V jiných případech řešení ani nekonverguje. Bezpečně konverguje při výchozím bodu `VychoziBod=(-90:1:90)'/180*pi`. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázku 9.49.



Obrázek 9.49: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 1$ při zatížení $q = q_0xy$

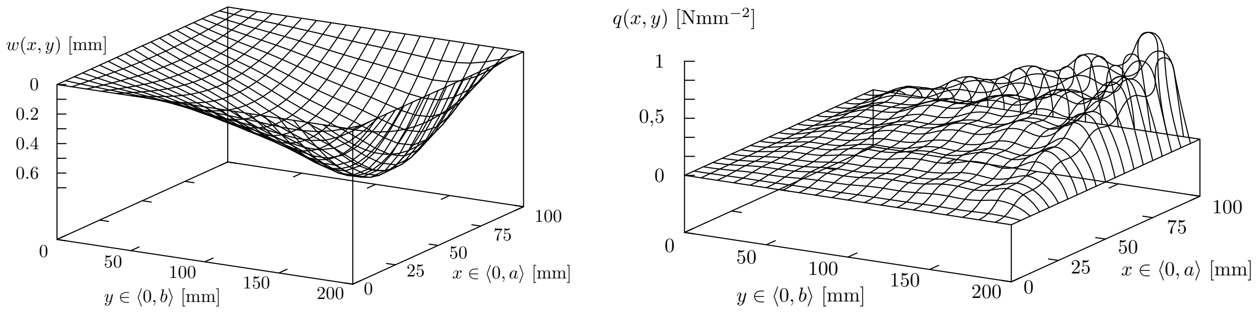
Vykreslení hodnot cílové funkce a levé strany nutné podmínky v závislosti na zvolené velikosti úhlu orientace vrstvy α_1 jest provedeno na obrázcích 9.50(a) a 9.50(b). Výpočet příslušných bodů vykreslených grafů představoval 0,18 s. Na obrázcích 9.51(a) a 9.51(b) je naznačena deformovaná střední plocha desky a uvažované zatížení v daném případě.



(a) Průběh cílové funkce v závislosti na α

(b) Závislost levé strany nutné podmínky na úhlu skladby

Obrázek 9.50: Deska obdélná s $N = 1$ zatížená $q = q_0xy$



(a) Průhyb v případě $\alpha = 5{,}7°$

(b) Zatížení $q = q_0xy$ v použité náhradě Fourierovou řadou ($K = 10$)

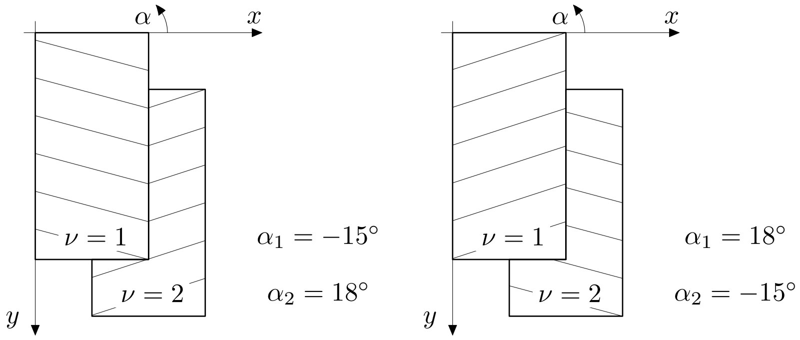
Obrázek 9.51: Průhyb a zatížení desky obdélné s $N = 1$

- $N\!=2$ $(a\!:\!b = 1\!:\!2,\ q = q_0xy)$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky výpočet nekonvergoval. Při použití řešení využívajícího genetických algoritmů při uvažování celočíselných stupňů pro hodnoty úhlů α_ν bylo dosaženo dvou rovnocenných řešení

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -15° \\ 18° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 18° \\ -15° \end{pmatrix}$$

  s hodnotou cílové funkce 686,78 mJ. Výpočet trval 4 146,44 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.52(a) a 9.52(b).



(a) Prvé možné řešení

(b) Druhé možné řešení

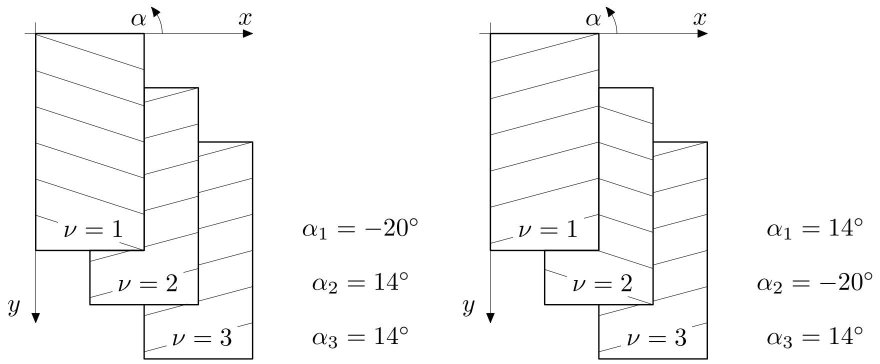
Obrázek 9.52: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 2$ při zatížení $q = q_0xy$

- $N\!=3$ $(a\!:\!b = 1\!:\!2,\ q = q_0xy)$

  V případě použití metody alternativního splnění nutné podmínky výpočet nekonvergoval. Při použití algoritmu řešení využívajícího genetických algoritmů s celočíselnými hodnotami úhlů α_ν bylo nejlepším nalezeným řešením řešení:

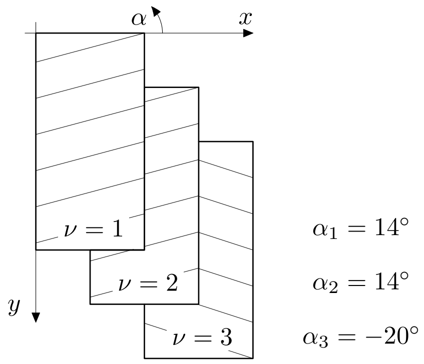
$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -20° \\ 14° \\ 14° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 14° \\ -20° \\ 14° \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 14° \\ 14° \\ -20° \end{pmatrix}$$

s hodnotou cílové funkce 458,23 mJ. Výpočet trval 1 412,15 + 1 353,46 + 1 327,21 s strojního času. Grafické znázornění spodní poloviny desky v případě získaného řešení je na obrázcích 9.53 a 9.54.



(a) Prvé možné řešení (b) Druhé možné řešení

Obrázek 9.53: Grafické znázornění orientace vláken desky obdélné s $N = 3$ při zatížení $q = q_0xy$



Obrázek 9.54: Grafické znázornění orientace (třetí možné řešení) vláken desky obdélné s $N = 3$ při zatížení $q = q_0xy$

9.7.4 Shrnutí řešení předchozích případů

Na tomto místě zapišme shora získaná řešení do stručných tabulek[41] 9.2 a 9.3.

1:1	$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$	$q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}$	$q = q_0xy$
$N = 1$	$\pm 45°$	$0, 90°$	$45°$
$N = 2$	$\pm[\pm 45]_s$	$\pm[\pm 45]_s$	$\pm[\pm 45]_s$
$N = 3$	$\pm[\mp 45, 45]_s + p$	$\pm[\mp 45, 45]_s + p$	$[\mp 45, 45]_s + p$

Tabulka 9.2: Hledaná skladba čtvercové laminátové desky pro zatížení q a počet dvouvrstev N

[41] Znak $+p$ v těchto tabulkách značí slova: *a permutace těchto složek*. Pro použité označení skladby srvn. kap. 9.1 na s. 133 této práce.

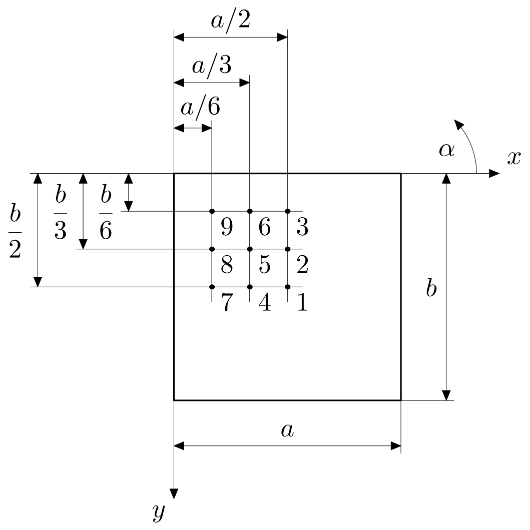
1:2	$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$	$q = q_0 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{b}$	$q = q_0 xy$
$N = 1$	$0°$	$0°$	$5{,}71°$
$N = 2$	$[0_2]_s$	$[0_2]_s$	$[-15, 18]_s + p$
$N = 3$	$[0_3]_s$	$[0_3]_s$	$[-20, 14, 14]_s + p$

Tabulka 9.3: Hledané úhly skladby obdélné laminátové desky pro zatížení q a počet dvouvrstev N

9.7.5 Řešení pro laminátovou desku prostě podepřenou a zatíženou izolovanou silou působící kolmo na rovinu desky

□

Případ čtvercové desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 1$, jmenovitě $a = 100$ mm a $b = 100$ mm) zatížené izolovanou silou ($F = 100$ N) v bodech dle obrázku 9.55.



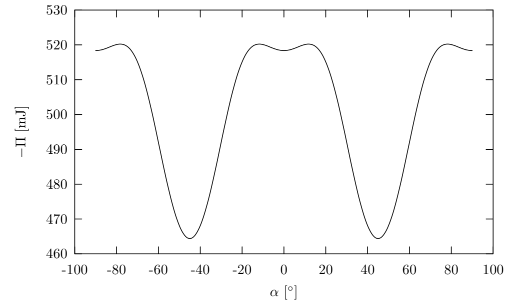
Obrázek 9.55: Působiště uvažované izolované síly působící na čtvercovou desku

Výsledky pro případ jedné a dvou vrstev shrňme v tabulce 9.4, kde pro případ jedné a dvou dvouvrstev uvádíme řešení získané metodou alternativního splnění nutné podmínky (řádek nadepsaný symbolem A) a řešení získané výčtem hodnot (symbol V) či užitím genetických algoritmů (symbol G). Strojní čas se v případě metody alternativního splnění nutné podmínky pohyboval v případě jedné dvouvrstvy v mezích 0,09–0,11 s a v případě dvouvrstev dvou v mezích 0,3–0,4 s. Při provádění výčtu ($N = 1$) šlo o časy v rozsahu 3–4 s a pro genetické algoritmy ($N = 2$) v rozsahu 2 000–4 500 s.

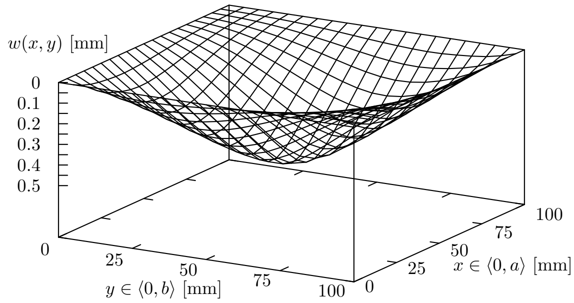
1:1	poloha:	1	2	3	5	6	9
$N = 1$	metoda A	$\pm 45°$	nekonverguje	nekonverguje	$45°$	nekonverguje	$45°$
$N = 1$	metoda V	$\pm 45°$	$\pm 47°$	$\pm 63°$	$45°$	$55°$	$45°$
$N = 2$	metoda A	$\pm[\pm 45]_s$	nekonverguje	nekonverguje	$\pm[\pm 45]_s$	nekonverguje	$[45_2]_s$
$N = 2$	metoda G	$\pm[\pm 45]_s$	$[47, -47]_s$	$\pm[-52, 52]_s$	$\pm[\pm 45]_s$	$[-50, 52]_s, [52, -50]_s$	$[45_2]_s$

Tabulka 9.4: Hledané úhly skladby čtvercové laminátové desky zatížené izolovanou silou

Dále zobrazíme cílovou funkci a deformovanou střední plochu pro každý zatěžující případ a $N = 1$:

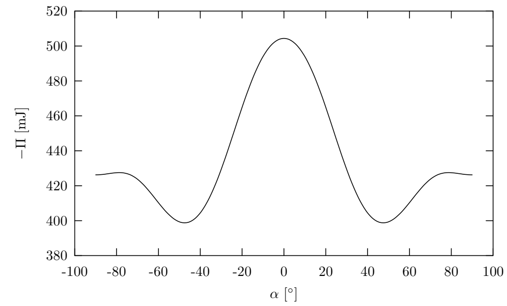


(a) Cílová funkce

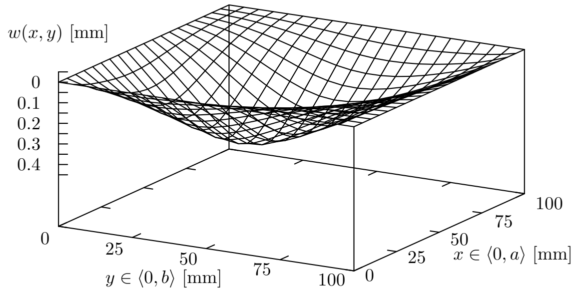


(b) Deformovaná střední plocha pro $\alpha = -45°$

Obrázek 9.56: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = \pm 45°$) zatížená izolovanou silou v místě 1, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$

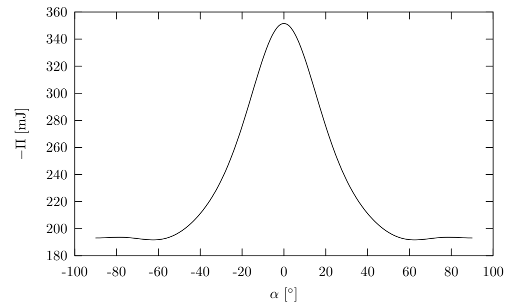


(a) Cílová funkce

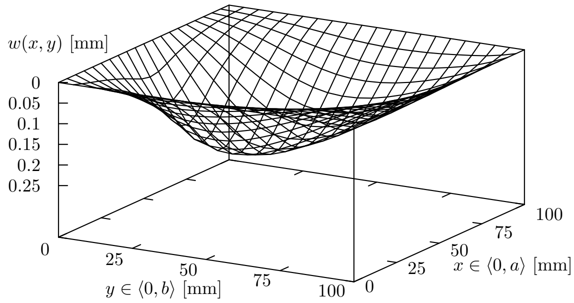


(b) Deformovaná střední plocha pro $\alpha = -47°$

Obrázek 9.57: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = \pm 47°$) zatížená izolovanou silou v místě 2, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$

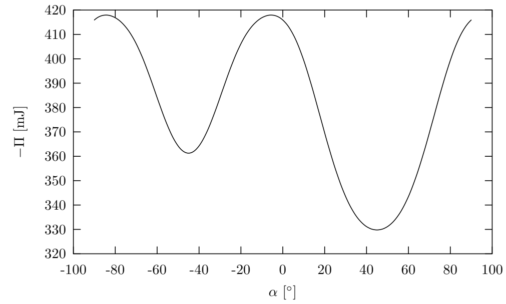


(a) Cílová funkce

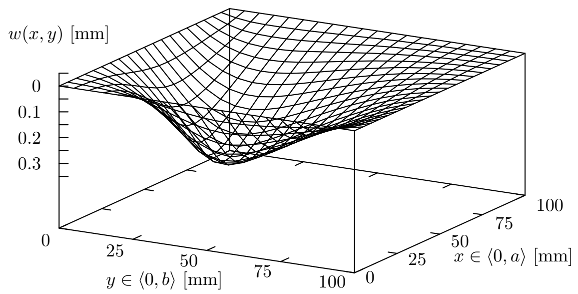


(b) Deformovaná střední plocha pro $\alpha = -63°$

Obrázek 9.58: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = \pm 63°$) zatížená izolovanou silou v místě 3, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{6}$

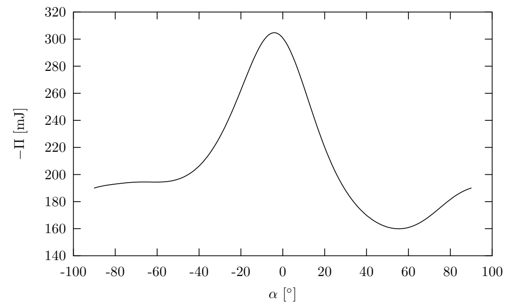


(a) Cílová funkce

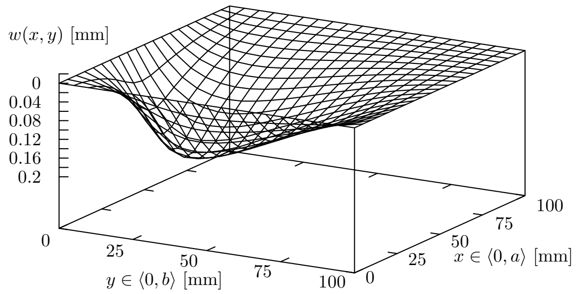


(b) Deformovaná střední plocha pro $\alpha = 45°$

Obrázek 9.59: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = 45°$) zatížená izolovanou silou v místě 5, tj. $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$

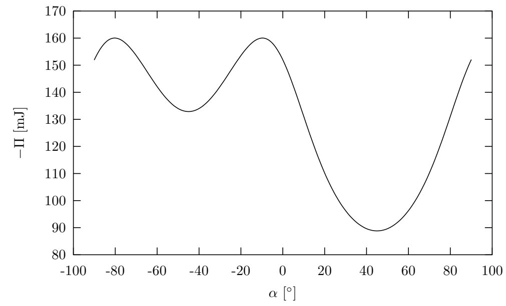


(a) Cílová funkce

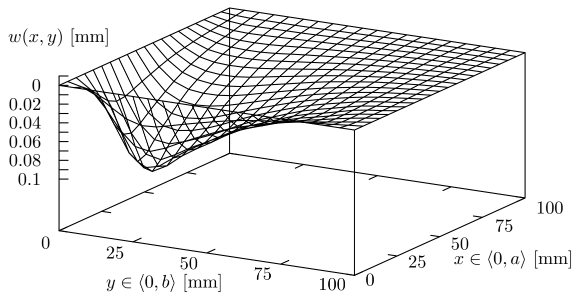


(b) Deformovaná střední plocha pro $\alpha = 55°$

Obrázek 9.60: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = 55°$) zatížená izolovanou silou v místě 6, tj. $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{6}$



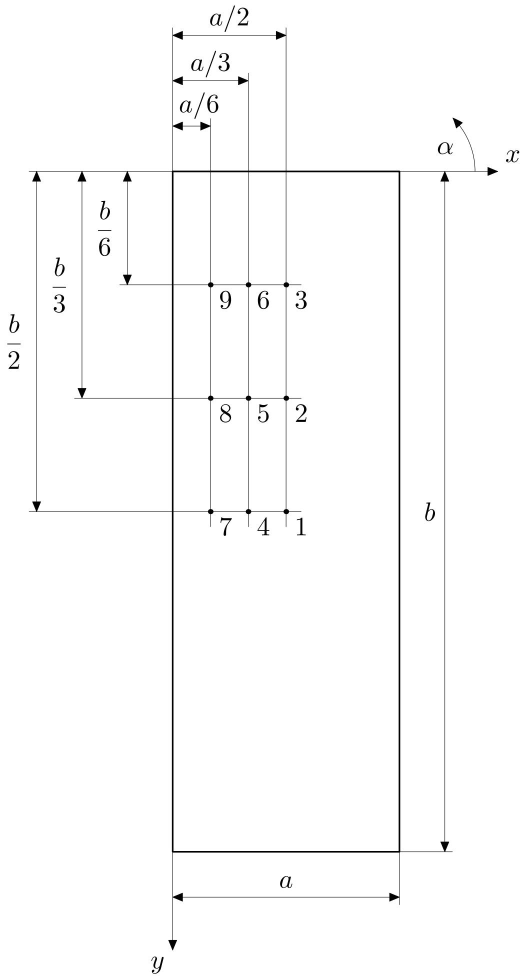
(a) Cílová funkce



(b) Deformovaná střední plocha pro $\hat{\alpha} = 45°$

Obrázek 9.61: Čtvercová deska ($\hat{\alpha} = 45°$) zatížená izolovanou silou v místě 9, tj. $x = \frac{a}{6}, y = \frac{b}{6}$

Případ obdélné desky (desky o poměru stran $a : b = 1 : 3$, jmenovitě $a = 100$ mm a $b = 300$ mm) zatížené izolovanou silou v bodech dle obrázku 9.62.



Obrázek 9.62: Působiště uvažované izolované síly působící na obdélnou desku s poměrem stran 1 : 3

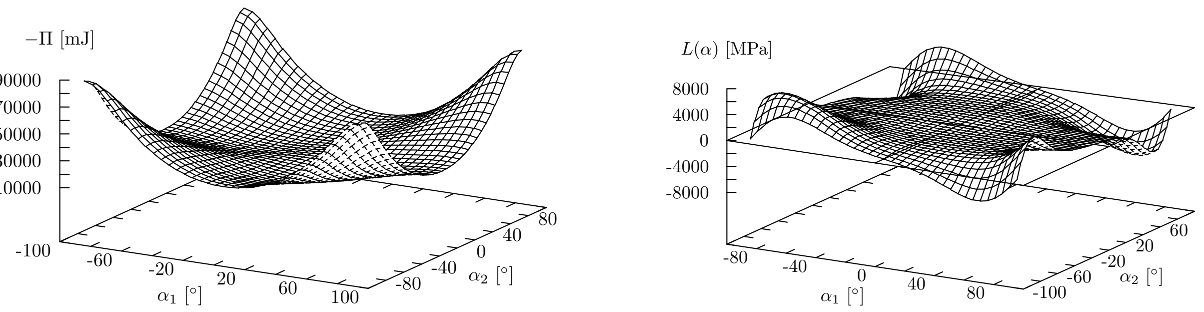
Výsledky pro případ jedné a dvou vrstev shrňme v tabulce 9.5,[42] kde řešení získané metodou alternativního splnění nutné podmínky je uvedeno v řádku nadepsaném symbolem A a řešení získané výčtem hodnot ($N = 1$) v řádku nadepsaném symbolem V, respektive pomocí genetických algoritmů ($N = 2$) symbolem G. Strojní čas se v případě metody alternativního splnění nutné podmínky pohyboval v případě jedné dvouvrstvy v mezích 0,09–0,11 s a v případě dvouvrstev dvou v mezích 0,3–0,4 s. Při provádění výčtu ($N = 1$) šlo o časy v rozsahu 3–4 s, pro genetické algoritmy ($N = 2$) v rozsahu 2 000–4 500 s.

1:3	poloha:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N = 1$	metoda A	0°	0°	nek.	0°	0°	nek.	0°	0°	0°
$N = 1$	metoda V	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
$N = 2$	metoda A	nek.	nek.	nek.	nek.	nek.	nek.	nek.	nek.	nek.
$N = 2$	metoda G	$\pm[\pm 23]_s$	$\pm[\pm 23]_s$	$\pm[\pm 33]_s$	$\pm[\pm 23]_s$	$\pm[\pm 23]_s$	$\pm[\pm 31]_s$	$\pm[\pm 20]_s$	$\pm[\pm 20]_s$	$[-22, 30]_s + p$

Tabulka 9.5: Hledané úhly skladby obdélné laminátové desky zatížené izolovanou silou

[42] Grafémem p v posledním políčku tabulky vyjadřujeme slovo permutace.

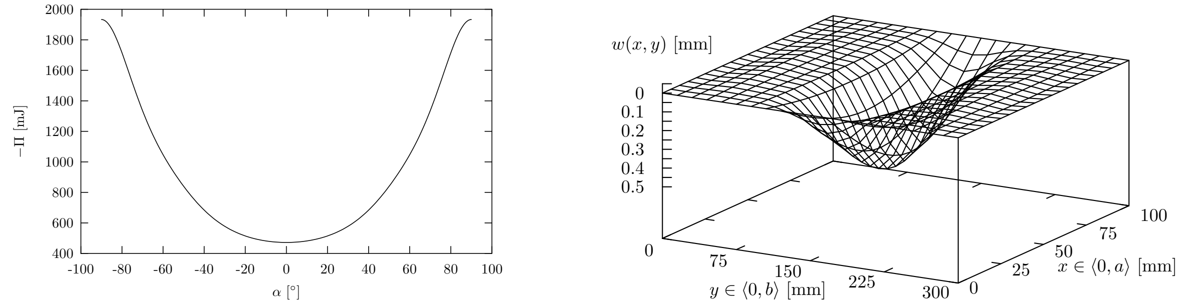
Špatná konvergence metody alternativního splnění nutné podmínky v případě zatížení izolovanou silou jest pochopitelná při pohledu na tvar cílové funkce a nutné podmínky pro úhel $\boldsymbol{\alpha}$ na obr. 9.63 v případě obdélné desky zatížené silou v bodě 2, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$.



(a) Cílová funkce (b) Nutná podmínka

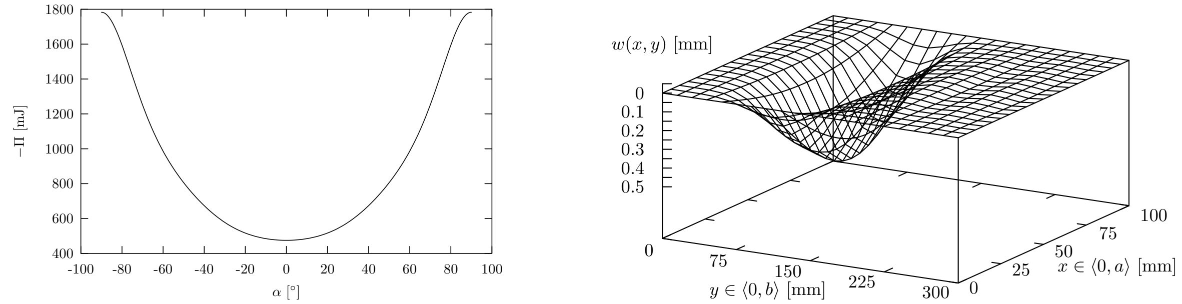
Obrázek 9.63: Obdélná deska ($N = 2$) zatížená izolovanou silou v místě 2, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$

Dále zobrazíme cílovou funkci a deformovanou střední plochu pro každý zatěžující případ a $N = 1$:



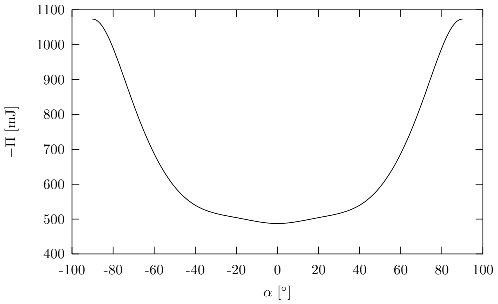
(a) Cílová funkce (b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.64: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 1, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$

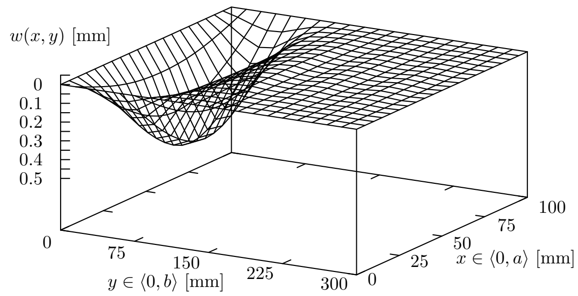


(a) Cílová funkce (b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.65: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 2, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$

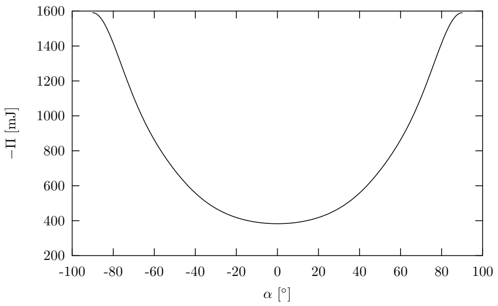


(a) Cílová funkce

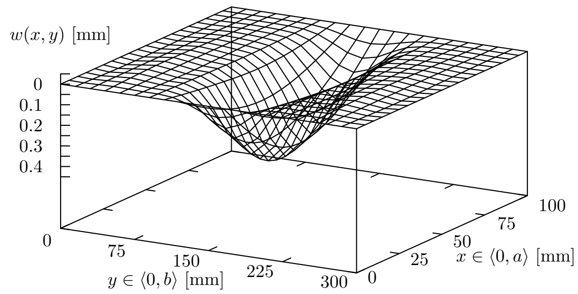


(b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.66: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 3, tj. $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{6}$

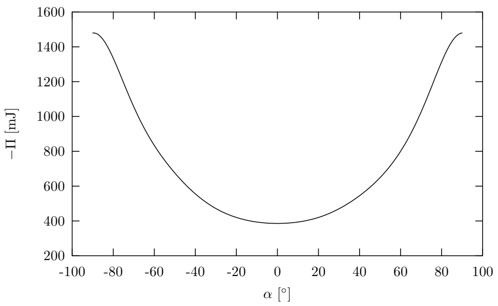


(a) Cílová funkce

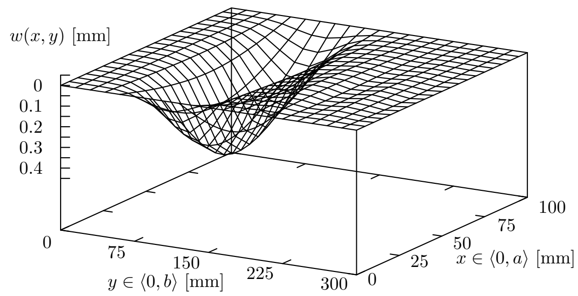


(b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.67: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 4, tj. $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{2}$

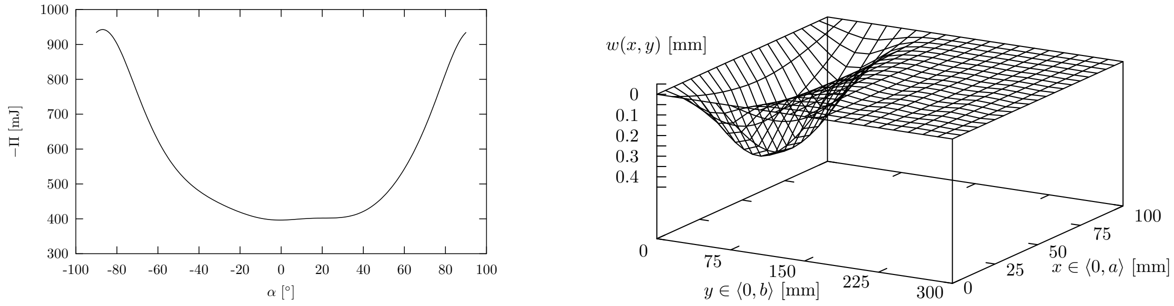


(a) Cílová funkce



(b) Deformovaná střední plocha

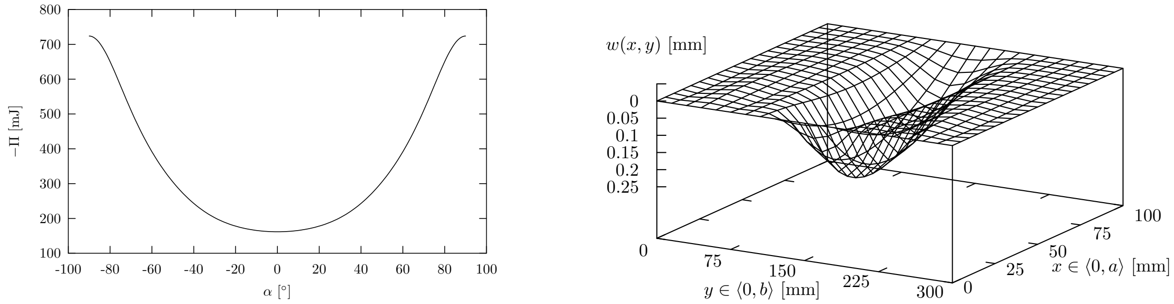
Obrázek 9.68: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 5, tj. $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$



(a) Cílová funkce

(b) Deformovaná střední plocha

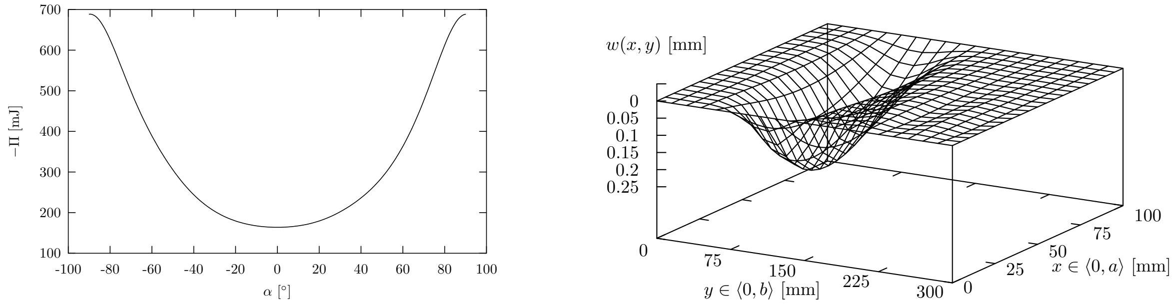
Obrázek 9.69: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 6, tj. $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{6}$



(a) Cílová funkce

(b) Deformovaná střední plocha

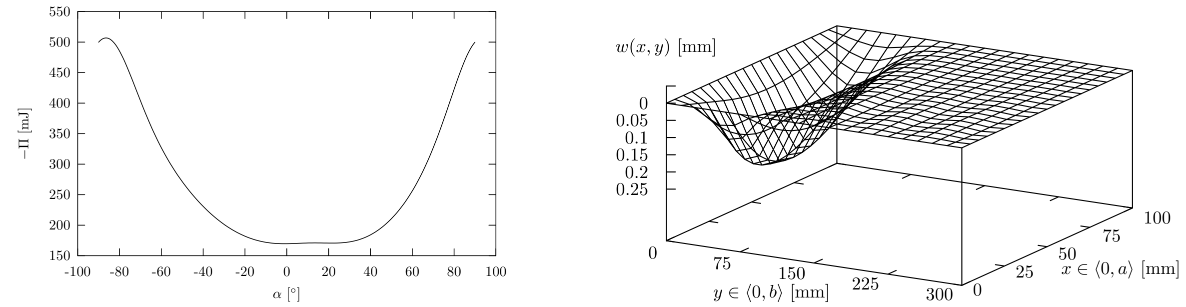
Obrázek 9.70: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 7, tj. $x = \frac{a}{6}, y = \frac{b}{2}$



(a) Cílová funkce

(b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.71: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 8, tj. $x = \frac{a}{6}, y = \frac{b}{3}$



(a) Cílová funkce

(b) Deformovaná střední plocha

Obrázek 9.72: Obdélná deska ($\hat{\alpha} = 0°$) zatížená izolovanou silou v místě 9, tj. $x = \frac{a}{6}, y = \frac{b}{6}$

9.7.6 Komentář

Jest ovšem pochopitelné, že *optimalizuji-li* jisté dílo při uvažování jednoho určitého zatížení, snadno se stane, že při jiném zatížení je toto naopak nejméně příznivé. Srvn. např. případ čtvercové desky při $N = 1$ se zatížením

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

a se zatížením

$$q = q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

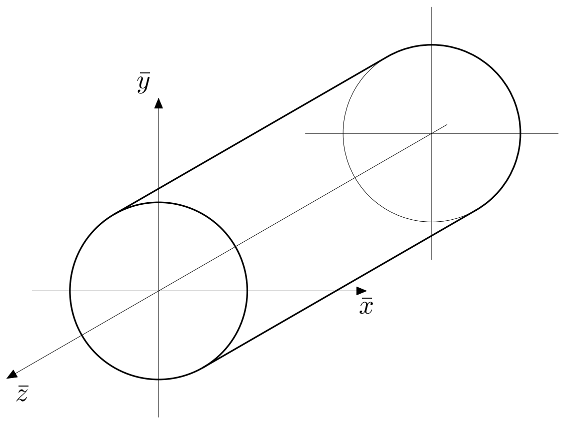
Ne vždy metoda alternativního splnění nutné podmínky konverguje;[43] pokud však konverguje, pak konverguje k řešení globálnímu. V tom případě totiž máme množinu *všech* stacionárních bodů (jde o peridickou funkci) a z nich vybereme bod globálního minima.

[43][Allaire, 2002] tvrdí, že v případě sedlového bodu tato metoda konverguje vždy. To však není náš případ.

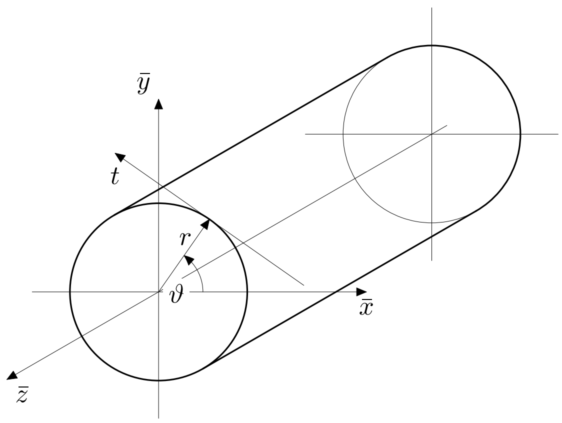
Kapitola 10

Optimalizace úhlu vinutí laminátové trubky

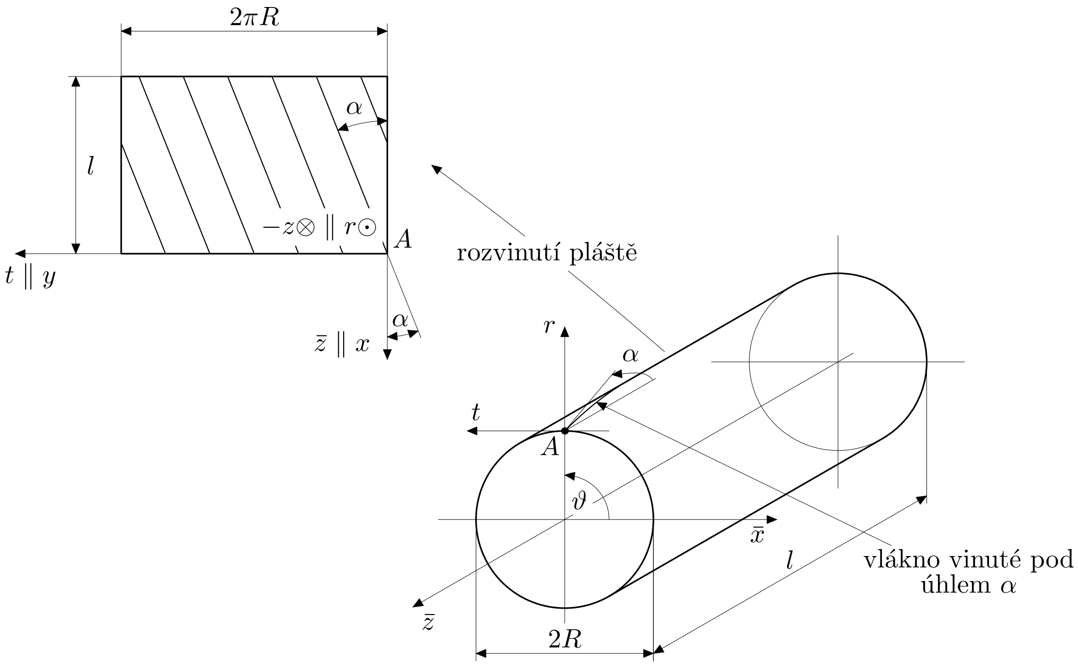
10.1 Zavedení používaných soustav souřadnic



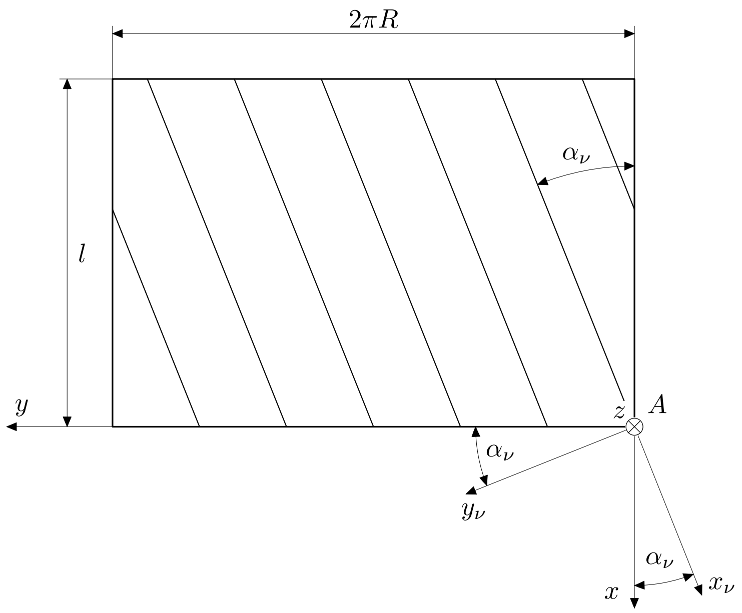
Obrázek 10.1: Kartézská soustava souřadnic $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ svázaná se součástí



Obrázek 10.2: Válcová soustava souřadnic $rt\bar{z}$ svázaná se součástí



Obrázek 10.3: Globální soustava souřadnic xyz plochy rozvitého pláště



Obrázek 10.4: Soustava souřadnic $x_\nu y_\nu z_\nu$ ležící v hlavních směrech ν-té ortotropní vrstvy

10.1.1 Transformace dvourozměrných tenzorů napětí a deformace ze soustavy souřadnic $x_\nu y_\nu$ do soustavy souřadnic xy

Dle hořejšího jest

$$\sigma_{ij} = \ell^\nu_{ik}\ell^\nu_{jl}\sigma^\nu_{kl},$$

kde transformační matice má tvar[1]

$$\{\ell^\nu_{ik}\}_{i\lceil k} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_\nu & \sin\alpha_\nu \\ -\sin\alpha_\nu & \cos\alpha_\nu \end{pmatrix}.$$

Shora též máme

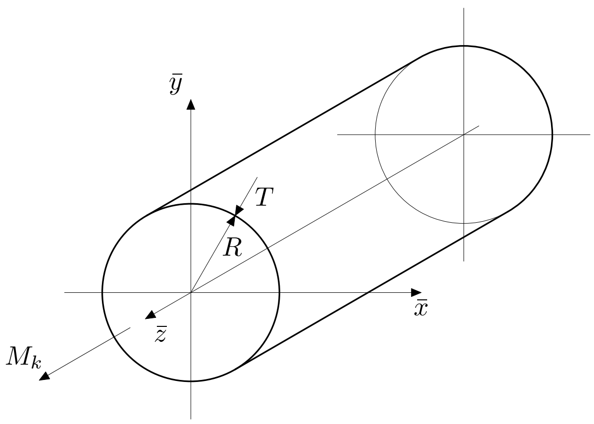
$$\varepsilon^\nu_{mn} = \ell^\nu_{im}\ell^\nu_{jn}\varepsilon_{ij}.$$

10.2 Namáhání tenké trubky (trubky sestávající z jedné vrstvy)

10.2.1 Předpoklady

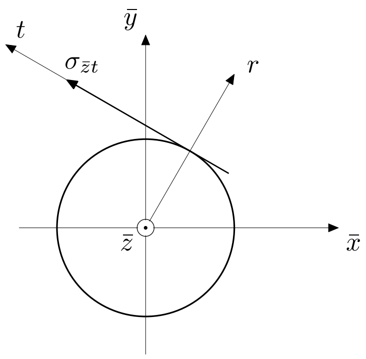
- Trubka z jedné tenké laminátové ortotropní vrstvy ($\nu = 1$).
- Hookeův zákon této vrstvy v $\mathbb{E}_2$ v soustavě souřadnic položené do hlavních směrů ortotropní vrstvy:[2]
$$\sigma^\nu_{ij} = E^\nu_{ijkl}\varepsilon^\nu_{kl}.$$
- Nedochází ke ztrátě stability (hroucení).
- Tloušťka stěny jest mnohem menší nežli poloměr trubky: soustava souřadnic „rádius-tečna“ (rt) splývá v aktuálním bodě s globální soustavou souřadnic vrstvy rozvinutého pláště (xy).

10.2.2 Krut



Obrázek 10.5: Kruhová jednovrstvá laminátová trubka namáhaná krutem

[1] Srvn. [Mareš, 2003e].
[2] Srvn. vztah (9.7) na s. 138.



Obrázek 10.6: Kruhová jednovrstvá laminátová trubka namáhaná krutem – $\sigma_{\bar{z}t}$

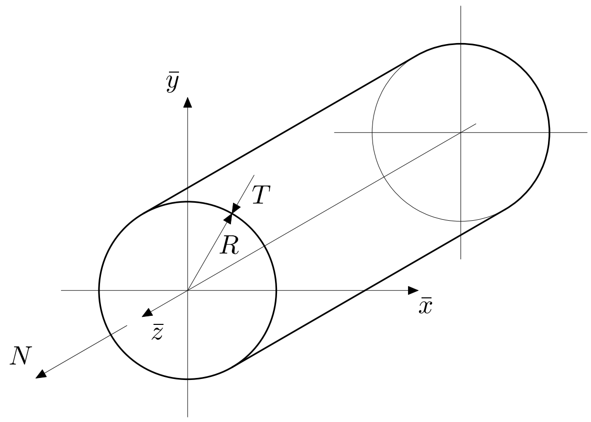
Předně předpokládáme, že nedochází ke ztrátě stability – borcení stěny. Dále, krouticí moment M_k jest přenášen smykovým napětím $\sigma_{\bar{z}t}$ (při vyjádření v ss. $rt\bar{z}$). Toto napětí, vzhledem k značné tenkostěnnosti vrstvy, uvažujme v celém průřezu konstantní, tedy

$$M_k = 2\pi RT\sigma_{\bar{z}t}R.$$

V globální soustavě souřadnic rozvitého válce (soustava xyz) odpovídá napětí $\sigma_{\bar{z}t}$ složce tenzoru napětí σ_{xy}. Ostatní složky jsou nulové. Je tedy

$$\{\sigma_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xy} = \frac{M_k}{2\pi R^2 T}.$$

10.2.3 Tah



Obrázek 10.7: Kruhová jednovrstvá laminátová trubka namáhaná tahem

Uvažujme přirozeně

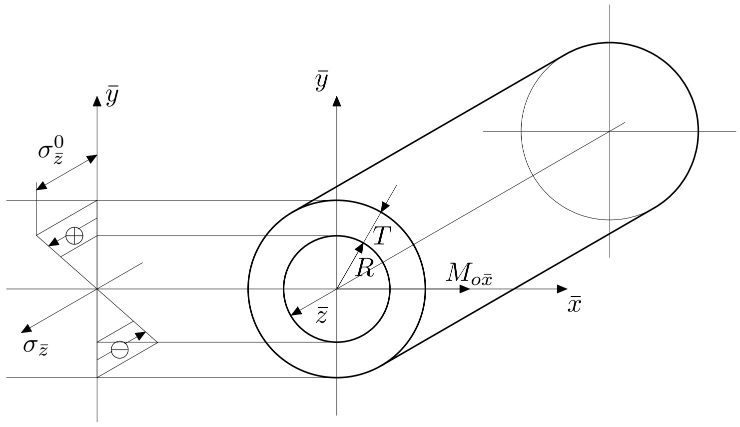
$$N = 2\pi RT\sigma_{\bar{z}\bar{z}},$$

při $\sigma_{\bar{z}\bar{z}}$ v celém průřezu konstantním. Přijmeme-li předpoklad, že v případě tlakového namáhání nedojde k borcení stěn či celého prutu, pak lze tuto rovnost uvažovat také pro záporné hodnoty N.

V globální soustavě souřadnic rozvinutého pláště xyz odpovídá napětí $\sigma_{\bar{z}\bar{z}}$ složce tenzoru napětí σ_{xx}. V řečené globální soustavě souřadnic xyz má tedy tenzor napětí v případě prostého tahu tvar

$$\{\sigma_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.2.4 Ohyb



Obrázek 10.8: Kruhová jednovrstvá laminátová trubka namáhaná ohybem

Při uvažování známého předpokladu o lineárním rozložení napětí při ohybu a předpokladu o nehroucení tenké stěny máme

$$M_{o\bar{x}} = \int_A \sigma^0_{\bar{z}} \cdot \frac{\bar{y}}{R} \cdot \bar{y}\,\mathrm{d}A = \frac{\sigma^0_{\bar{z}}}{R} J_{\bar{x}},$$

z čehož

$$\sigma^0_{\bar{z}} = \frac{M_{o\bar{x}}}{J_{\bar{x}}} R$$

a

$$\sigma_{\bar{z}} = \frac{M_{o\bar{x}}}{J_{\bar{x}}} \bar{y}.$$

Také v tomto případě je $\sigma_{xx} = \sigma_{\bar{z}}$ a v globální soustavě souřadnic vrstvy

$$\{\sigma_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Případ namáhání ohybem nebudeme v této práci rozebírat, jelikož vzhledem k prakticky pochopitelnému požadavku rotační symetrie uvažované trubky se případ namáhání ohybem neliší (v pohledu optimalizace orientace vláken) od případu s prostým tahem.

10.2.5 Vnitřní přetlak

Přijmeme-li předpoklad tenkostěnnosti, pak dle membránové teorie[3]

$$\sigma_{yy} = \sigma_t = \frac{pR}{T}.$$

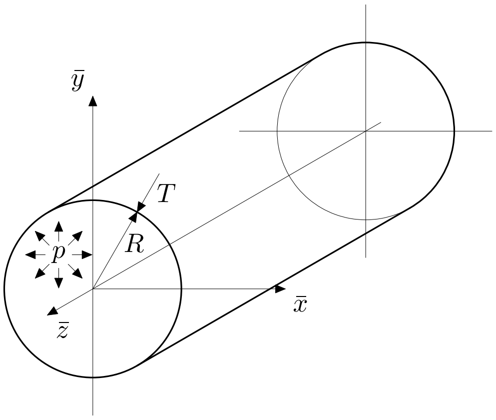
Tenzor napětí vyjádřený v globální soustavě souřadnic má podobu

$$\{\sigma_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{pR}{T} \end{pmatrix}.$$

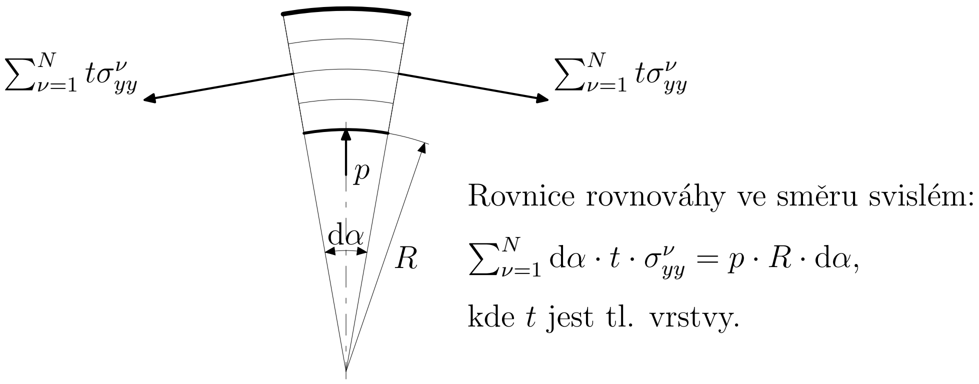
V případě vícevrstvé trubky můžeme dle obr. 10.10 psát

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{yy} = \frac{pR}{t}.$$

[3]Srvn. [Timoshenko, 1940].



Obrázek 10.9: Kruhová jednovrstvá laminátová trubka namáhaná vnitřním přetlakem



Obrázek 10.10: Kruhová vícevrstvá laminátová trubka namáhaná vnitřním přetlakem

10.3 Úloha o nalezení orientace maximalizující tuhost v krutu

Vyjděme ze shora ustavené úlohy

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\Omega, \tag{10.1}$$

kde

$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega, \quad \sigma_{ij} \ell_j = t_i \text{ na } \partial_t \Omega\}$$

a kde $\mathbb{C}$ jest množina fyzikálně přípustných tenzorů poddajnosti.[4]

10.3.1 Tenzor poddajnosti laminátové vrstvy ν

Pro vrstvu ν při vyjádření v soustavě souřadnic položené v hlavních směrech platí

$$\varepsilon_{ij}^{\nu} = C_{ijkl}^{\nu} \sigma_{kl}^{\nu}.$$

Dle hořejšího máme

$$\varepsilon_{21}^{\nu} = \varepsilon_{12}^{\nu} = \frac{\sigma_{12}^{\nu}}{2G_{12}} = \frac{\sigma_{21}^{\nu}}{2G_{12}} \qquad (\sigma_{12}^{\nu} = \sigma_{21}^{\nu}),$$

$$\varepsilon_{21}^{\nu} = \varepsilon_{12}^{\nu} = \frac{1}{4G_{12}} \cdot \sigma_{12}^{\nu} + \frac{1}{4G_{12}} \cdot \sigma_{21}^{\nu}$$

[4] [Mareš, 2003f].

a

$$\sigma_{11}^{\nu} = Q_{11}^{\nu}\varepsilon_{11}^{\nu} + Q_{12}^{\nu}\varepsilon_{22}^{\nu},$$

$$\sigma_{22}^{\nu} = Q_{12}^{\nu}\varepsilon_{11}^{\nu} + Q_{22}^{\nu}\varepsilon_{22}^{\nu},$$

z čehož

$$Q_{22}^{\nu}\sigma_{11}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}\sigma_{22}^{\nu} = \left(Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu}\right)\varepsilon_{11}^{\nu},$$

$$Q_{11}^{\nu}\sigma_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}\sigma_{11}^{\nu} = \left(Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu}\right)\varepsilon_{22}^{\nu}.$$

Souhrnně pak

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{\nu} \\ \varepsilon_{12}^{\nu} \\ \varepsilon_{21}^{\nu} \\ \varepsilon_{22}^{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111}^{\nu} & 0 & 0 & C_{1122}^{\nu} \\ 0 & C_{1212}^{\nu} & C_{1221}^{\nu} & 0 \\ 0 & C_{2112}^{\nu} & C_{2121}^{\nu} & 0 \\ C_{2211}^{\nu} & 0 & 0 & C_{2222}^{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\nu} \\ \sigma_{12}^{\nu} \\ \sigma_{21}^{\nu} \\ \sigma_{22}^{\nu} \end{pmatrix},$$

kde jest

$$C_{1111}^{\nu} = \frac{Q_{22}^{\nu}}{Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu}} = c_1^{\nu},$$

$$C_{1122}^{\nu} = C_{2211}^{\nu} = \frac{Q_{12}^{\nu}}{Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu} - Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu}} = c_{12}^{\nu},$$

$$C_{2222}^{\nu} = \frac{Q_{11}^{\nu}}{Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu}} = c_2^{\nu},$$

$$C_{1212}^{\nu} = C_{1221}^{\nu} = C_{2112}^{\nu} = C_{2121}^{\nu} = \frac{1}{4G_{12}^{\nu}} = g^{\nu}.$$

Na okraj: Je-li

$$Q_{11}^{\nu}Q_{22}^{\nu} - Q_{12}^{\nu}Q_{12}^{\nu} < 0,$$

pak jde o dosti neobvyklý materiál (záporné Poisonovo číslo, zkrácení pod tahem, apod.)[5]

Pro r respektive z spadající do mezí vrstvy ν jest konstitutivní vztah psaný v globální soustavě souřadnic rozvitého pláště postupně tvaru

$$\varepsilon_{ij}(x,y,z) = C_{ijkl}(z)\sigma_{kl}(x,y,z),$$

$$\varepsilon_{ij}(x,y,z) = \ell_{ik}^{\nu(z)}\ell_{jl}^{\nu(z)}\varepsilon_{kl}^{\nu(z)}(x,y,z) = \ell_{ik}^{\nu(z)}\ell_{jl}^{\nu(z)}C_{klmn}^{\nu(z)}\sigma_{mn}^{\nu(z)}(x,y,z),$$

$$\varepsilon_{ij}(x,y,z) = \ell_{ik}^{\nu(z)}\ell_{jl}^{\nu(z)}C_{klmn}^{\nu(z)}\ell_{om}^{\nu(z)}\ell_{pn}^{\nu(z)}\sigma_{op}(x,y,z),$$

či přejmenováním na $\varepsilon_{ij}(x,y,z) = C_{ijkl}(z)\sigma_{kl}(x,y,z)$, tvaru

$$\varepsilon_{ij}(x,y,z) = \ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}C_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}\sigma_{kl}(x,y,z).$$

Z čehož vidíme vyjádření tenzoru poddajnosti v globální soustavě souřadnic rozvinutého pláště

$$C_{ijkl}(z) = \ell_{im}^{\nu(z)}\ell_{jn}^{\nu(z)}C_{mnop}^{\nu(z)}\ell_{ko}^{\nu(z)}\ell_{lp}^{\nu(z)}.$$

[5] Srvn. např. [Friis *et al.*, 1988].

10.3.2 Úhel vinutí jednovrstvé laminátové trubky při zatížení krutem

V případě dle artikulu 10.2.2 Krut jest množina $\mathbb{S}$ (označme ji jako $\mathbb{S}_k$) jednoprvková:

$$\mathbb{S}_k = \left\{ \sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = \frac{M_k}{2\pi R^2 T} \right\}.$$

V případě prostého krutu přichází tedy v úvahu pouze jediný tenzor napětí:

$$\{\sigma_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_{xy}$$

a součin $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ (globální soustava souřadnic rozvitého laminátu) má tvar

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = C_{1212}\sigma_{xy}^2 + C_{1221}\sigma_{xy}^2 + C_{2112}\sigma_{xy}^2 + C_{2121}\sigma_{xy}^2,$$

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \left(C_{1212} + C_{1221} + C_{2112} + C_{2121}\right)\sigma_{xy}^2.$$

Je

$$\begin{aligned} C_{1212} &= \ell_{1m}^{\nu}\ell_{2n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{1o}^{\nu}\ell_{2p}^{\nu}, \\ C_{1221} &= \ell_{1m}^{\nu}\ell_{2n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{2o}^{\nu}\ell_{1p}^{\nu}, \\ C_{2112} &= \ell_{2m}^{\nu}\ell_{1n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{1o}^{\nu}\ell_{2p}^{\nu}, \\ C_{2121} &= \ell_{2m}^{\nu}\ell_{1n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{2o}^{\nu}\ell_{1p}^{\nu}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$C_{mnop}^{\nu} = C_{opmn}^{\nu} = C_{pomn}^{\nu}$$

je také (přejmenováním příslušných opakujících se indexů)

$$\ell_{1m}^{\nu}\ell_{2n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{1o}^{\nu}\ell_{2p}^{\nu} = \ell_{1m}^{\nu}\ell_{2n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{2o}^{\nu}\ell_{1p}^{\nu} = \ell_{2m}^{\nu}\ell_{1n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{1o}^{\nu}\ell_{2p}^{\nu} = \ell_{2m}^{\nu}\ell_{1n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{2o}^{\nu}\ell_{1p}^{\nu},$$

tj.

$$C_{1212} = C_{1221} = C_{2112} = C_{2121},$$

a proto

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\sigma_{xy}^2\ell_{1m}^{\nu}\ell_{2n}^{\nu}C_{mnop}^{\nu}\ell_{1o}^{\nu}\ell_{2p}^{\nu}. \tag{10.2}$$

Výraz (10.2) dále upravujme zavedením proměnných

$$c_\nu = \cos\alpha_\nu, \quad s_\nu = \sin\alpha_\nu$$

vzájemně svázaných podmínkou

$$c_\nu^2 + s_\nu^2 = 1$$

a výrazu

$$\ell_{ik}^{\nu} = \delta_{ik}c_\nu + \epsilon_{ik}s_\nu,$$

kde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ je Levi-Civitův antisymetrický tenzor ve dvourozměrném prostoru, který má známé vlastnosti:

$$\{\epsilon_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\epsilon_{ij}\epsilon_{lm}\}_{il\lceil jm} = \{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\}_{il\lceil jm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{lj} = \delta_{il},$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2.$$

Dosazením do (10.2) máme

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\sigma_{xy}^2 \left(\delta_{1m}c_\nu + \epsilon_{1m}s_\nu\right)\left(\delta_{2n}c_\nu + \epsilon_{2n}s_\nu\right) C^\nu_{mnop} \left(\delta_{1o}c_\nu + \epsilon_{1o}s_\nu\right)\left(\delta_{2p}c_\nu + \epsilon_{2p}s_\nu\right),$$

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\sigma_{xy}^2 C^\nu_{mnop} \Big(c_\nu^4\delta_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\delta_{2n}+$$
$$+c_\nu^3 s_\nu \left(\epsilon_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\epsilon_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\delta_{2n}\epsilon_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\epsilon_{2p}\right)+$$
$$+c_\nu^2 s_\nu^2 \left(\epsilon_{1m}\epsilon_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p} + \epsilon_{1m}\delta_{2n}\epsilon_{1o}\delta_{2p} + \epsilon_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\epsilon_{2p} + \delta_{1m}\epsilon_{2n}\epsilon_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\epsilon_{2n}\delta_{1o}\epsilon_{2p} + \delta_{1m}\delta_{2n}\epsilon_{1o}\epsilon_{2p}\right)+$$
$$+c_\nu s_\nu^3 \left(\delta_{1m}\epsilon_{2n}\epsilon_{1o}\epsilon_{2p} + \epsilon_{1m}\delta_{2n}\epsilon_{1o}\epsilon_{2p} + \epsilon_{1m}\epsilon_{2n}\delta_{1o}\epsilon_{2p} + \epsilon_{1m}\epsilon_{2n}\epsilon_{1o}\delta_{2p}\right) + s_\nu^4\epsilon_{1m}\epsilon_{2n}\epsilon_{1o}\epsilon_{2p}\Big).$$

Označme

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\sigma_{xy}^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_2^\nu c_\nu^3 s_\nu + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_4^\nu c_\nu s_\nu^3 + K_5^\nu s_\nu^4\right),$$

kde

$$K_1^\nu = C^\nu_{mnop}\delta_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p},$$
$$K_1^\nu = C^\nu_{1212}. \tag{10.3}$$
$$K_2^\nu = C^\nu_{mnop}\left(\epsilon_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\epsilon_{2n}\delta_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\delta_{2n}\epsilon_{1o}\delta_{2p} + \delta_{1m}\delta_{2n}\delta_{1o}\epsilon_{2p}\right),$$
$$K_2^\nu = C^\nu_{m212}\epsilon_{1m} + C^\nu_{1n12}\epsilon_{2n} + C^\nu_{12o2}\epsilon_{1o} + C^\nu_{121p}\epsilon_{2p},$$
$$K_2^\nu = 2C^\nu_{m212}\epsilon_{1m} + 2C^\nu_{121p}\epsilon_{2p}.$$

Ježto

$$\{\epsilon_{ij}\}_{i\lceil j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

je také

$$K_2^\nu = 2C^\nu_{2212} - 2C^\nu_{2212}$$

a tedy

$$K_2^\nu = 0. \tag{10.4}$$

Pro třetí koeficient jest okamžitě

$$K_3^\nu = -C^\nu_{2112} + C^\nu_{2222} - C^\nu_{2211} - C^\nu_{1122} + C^\nu_{1111} - C^\nu_{1221}$$

a tedy

$$K_3^\nu = C^\nu_{1111} + C^\nu_{2222} - 2C^\nu_{1122} - 2C^\nu_{1221}. \tag{10.5}$$

Podobně

$$K_4^\nu = C^\nu_{1121} - C^\nu_{2221} + C^\nu_{2111} - C^\nu_{2122},$$

čili

$$K_4^\nu = 0. \tag{10.6}$$

Konečně

$$K_5^\nu = C^\nu_{2121} = K_1^\nu. \tag{10.7}$$

Dosazením výrazu

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4\sigma_{xy}^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_5^\nu s_\nu^4\right)$$

do úlohy (10.1) nabývá tato úloha v případě krutu jednovrstvé trubky tvaru (bod extrému nezávisí na násobku cílové funkce kladnou konstantou)

$$\min_{c_\nu, s_\nu \in \mathbb{C}_\nu} \sigma_{xy}^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_5^\nu s_\nu^4\right), \tag{10.8}$$

$$\mathbb{C}_\nu = \left\{c_\nu, s_\nu \mid c_\nu^2 + s_\nu^2 = 1\right\},$$

kde

$$\sigma_{xy} = \frac{M_k}{2\pi R^2 T}$$

je dané číslo.

Zavedením substituce

$$a_\nu = c_\nu^2 \quad (a_\nu \in \langle 0, 1\rangle),$$

užitím podmínky z množiny $\mathbb{C}_\nu$ ve tvaru

$$s_\nu^2 = 1 - a_\nu$$

a dle již zmíněné nezávislosti na násobné kladné konstantě dostává úloha (10.8) podobu

$$\min_{a_\nu \in \langle 0,1\rangle} \left(K_1^\nu a_\nu^2 + K_3^\nu (1 - a_\nu) a_\nu + K_1^\nu (1 - a_\nu)^2\right)$$

a dále

$$\min_{a_\nu \in \langle 0,1\rangle} \left(K_1^\nu + \left(K_3^\nu - 2K_1^\nu\right) a_\nu + \left(2K_1^\nu - K_3^\nu\right) a_\nu^2\right).$$

Jelikož při hledání extrému nezáleží ani na aditivní konstantě K_1^ν, máme následnou formalizaci naší extremální úlohy:

$$\min_{a_\nu \in \langle 0,1\rangle} \left(a_\nu A^\nu - a_\nu^2 A^\nu\right),$$

kde

$$A^\nu = -2K_1^\nu + K_3^\nu = C_{1111}^\nu + C_{2222}^\nu - 2C_{1122}^\nu - 4C_{1221}^\nu,$$

přičemž jest

$$C_{1111}^\nu + C_{2222}^\nu - 2C_{1122}^\nu = \frac{Q_{22}^\nu + Q_{11}^\nu + 2Q_{12}^\nu}{Q_{11}^\nu Q_{22}^\nu - Q_{12}^\nu Q_{12}^\nu} = \frac{\frac{E_1^\nu + E_2^\nu + 2\nu_{12}^\nu E_2^\nu}{(1-\nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu)^2}}{\frac{E_1^\nu E_2^\nu}{(1-\nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu)^2} - \frac{\nu_{12}^\nu E_2^\nu \nu_{21}^\nu E_1^\nu}{(1-\nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu)^2}}.$$

Pro konstantu A^ν tak dostáváme

$$A^\nu = \frac{E_1^\nu + E_2^\nu + 2\nu_{12}^\nu E_2^\nu}{E_1^\nu E_2^\nu (1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu)} - \frac{1}{G_{12}^\nu}.$$

Například pro grafito-epoxidovou laminátovou kompozitní vrstvu s materiálovými charakteristikami[6] z tabulky 10.1 je po dosazení $A^\nu = -0{,}03329\,\mathrm{GPa}^{-1}$.

$$\begin{aligned} E_1^\nu &= 76\,\mathrm{GPa} \\ E_2^\nu &= 5{,}5\,\mathrm{GPa} \\ G_{12}^\nu &= 2{,}3\,\mathrm{GPa} \\ \nu_{12}^\nu &= 0{,}34 \end{aligned}$$

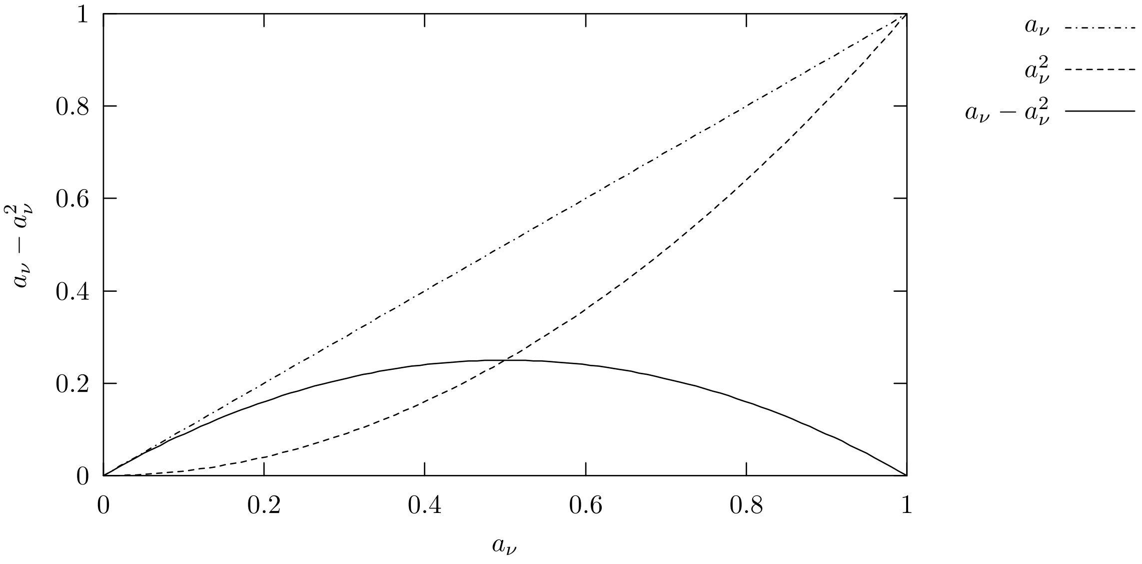
Tabulka 10.1: Materiálové charakteristiky grafito-epoxidové laminátové vrstvy

Je-li $A^\nu > 0$ (což není případ ani obvyklý ani příkladný), pak má uvažovaná úloha tvar

$$\min_{a_\nu \in \langle 0,1\rangle} \left(a_\nu - a_\nu^2\right)$$

a jejím řešením (srvn. obr. 10.11) je $a_\nu = 0$, či $a_\nu = 1$.

[6][Gürdal *et al.*, 1999] s. 67.



Obrázek 10.11: Cílová funkce $a_\nu - a_\nu^2$ (případ s $A^\nu > 0$)

Těmto hodnotám parametru a_ν odpovídají následné úhly orientace vrstvy:

$$a_\nu = 0 \Rightarrow c_\nu^2 = 0, s_\nu^2 = 1 \Rightarrow \alpha_\nu = \pm 90°,$$

$$a_\nu = 1 \Rightarrow c_\nu^2 = 1, s_\nu^2 = 0 \Rightarrow \alpha_\nu = 0, 180°$$

Je-li však $A^\nu < 0$ (což případ pravděpodobný a námi citovaným charakteristikám odpovídající), potom jest uvažovati úlohu (násobení záporným číslem má vliv na směr extremalizace)

$$\min_{a_\nu \in \langle 0,1 \rangle} \left(a_\nu^2 - a_\nu \right).$$

Stacionární bod splňuje podmínku

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} \left(a_\nu^2 - a_\nu \right) = 0,$$

tedy

$$a_\nu = \frac{1}{2}.$$

Extrém ovšem může nastati též na hranici vyšetřované oblasti, tedy pro $a_\nu = 0$, či pro $a_\nu = 1$. Hodnota cílové funkce v těchto bodech jest

v bodě a_ν	hodnota cílové funkce $(a_\nu^2 - a_\nu)$
0	0
1/2	$-1/4$
1	0

a tedy minima vyšetřované funkce dosaženo v bodě

$$a_\nu = \frac{1}{2}.$$

Uvážením použité substituce

$$c_\nu^2 = a_\nu = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha_\nu = c_\nu = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$s_\nu^2 = (1 - a_\nu) = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha_\nu = s_\nu = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

zřejmě vidíme, že úhly orientace vláken odpovídající hodnotě $a_\nu = 1/2$ jsou

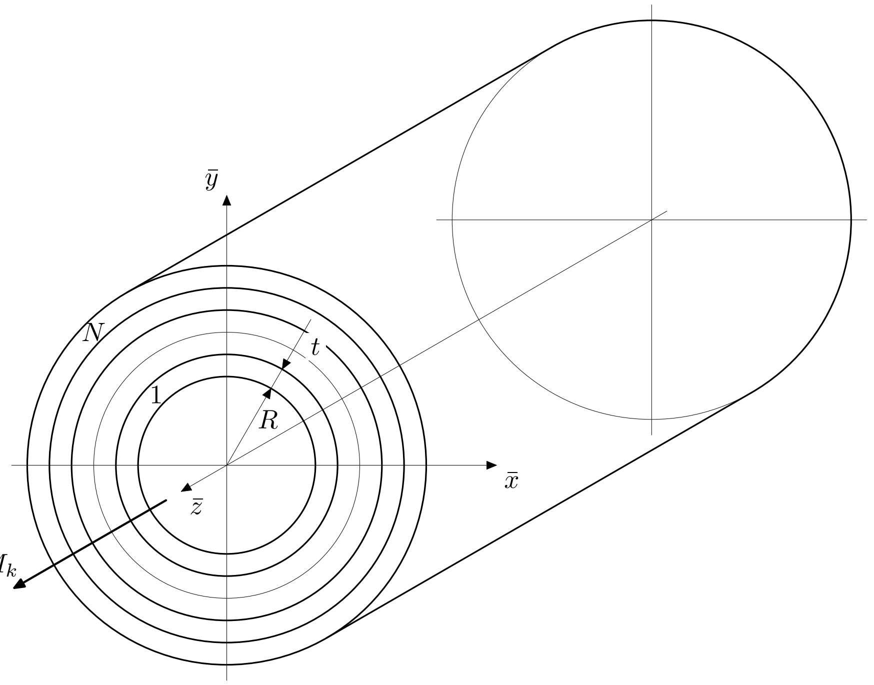
$$\alpha_\nu = 45^\circ \qquad \text{či} \qquad \alpha_\nu = -45^\circ$$

a také, což je stejné,

$$\alpha_\nu = 225^\circ \qquad \text{či} \qquad \alpha_\nu = 135^\circ.$$

Hořejším postupem jsme získali optimální (v námi uvažovaném hledisku) úhel vinutí laminátové jednovrstvé trubky při namáhání kroutícím momentem libovolné velikosti. Tímto úhlem je $\alpha_\nu = \pm 45^\circ$.

10.4 Laminátová trubka vícevrstvá namáhaná krutem



Obrázek 10.12: Kruhová vícevrstvá laminátová trubka namáhaná krutem (ač se to z obrázku nezdá, jest $t \ll R$)

Za předpokladů shora uvedených uvažujme laminátovou trubku složenou z N vrstev. Také zde řešme úlohu[7]

$$\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}} \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega,$$

kde množina staticky přípustných napjatostí

$$\mathbb{S} = \left\{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega, \sigma_{ij}\ell_j = t_i \text{ na } \partial_t\Omega\right\}.$$

Přičemž zde

$$p_j = 0, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0$$

[7] Viz [Mareš, 2003g].

a pro napětí $\sigma_{xy}|_{\partial_t\Omega}$ platí

$$M_k = \int_R^{R+h} \sigma_{rt}(\varrho)\varrho 2\pi\varrho \,\mathrm{d}\varrho,$$

kde t je tloušťka vrstvy, $h = Nt$ tloušťka trubky a R vnitřní poloměr trubky. Rovnice rovnováhy $\sigma_{ij,i} = 0$ rozepíšeme v globální soustavě souřadnic rozvité vrstvy xyz:

$$\sigma_{xy,x} = 0, \quad \sigma_{yx,y} = 0.$$

Odtud vyvodíme

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}(z) \equiv \sigma_{rt}(\varrho),$$

což ovšem bylo zřejmé již z rotační symetrie.

Vzhledem ke značné tenkostěnnosti jednotlivých laminátových vrstev předpokládejme, že napětí $\sigma_{xy}(z) \equiv \sigma_{rt}(\varrho)$ jest po tloušťce jedné vrstvy ν konstantní o velikosti σ_{xy}^ν. Tedy

$$M_k = \sum_{\nu=1}^{N} 2\pi\sigma_{xy}^\nu \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} \varrho^2 \mathrm{d}\varrho = \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{xy}^\nu \frac{2\pi}{3} \left((R+\nu t)\right)^3 - (R+(\nu-1)t)^3 = \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{xy}^\nu S^\nu,$$

kde

$$S^\nu = \frac{2\pi}{3}\left((R+\nu t)^3 - (R+(\nu-1)t)^3\right).$$

Tímto předpokladem dostává množina $\mathbb{S}$ tvar

$$\mathbb{S}^{kN} = \left\{ \sigma_{xy}^\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \mid M_k = \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{xy}^\nu S^\nu \right\}.$$

Dle případu s jednou vrstvou víme, že pro $\varrho \in \langle R+(\nu-1)t, R+\nu t\rangle$ má výraz $C_{ijkl}(\varrho)\sigma_{ij}(\varrho)\sigma_{kl}(\varrho)$ tvar

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4(\sigma_{xy}^\nu)^2 \ell_{1m}^\nu \ell_{2n}^\nu C_{mnop}^\nu \ell_{1o}^\nu \ell_{2p}^\nu$$

a dále opět dle hořejšího

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 4(\sigma_{xy}^\nu)^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_1^\nu s_\nu^4\right).$$

Cílový funkcionál pak převedeme na cílovou funkci

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int_R^{R+h} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \cdot 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot l,$$

$$\mathfrak{c} = \frac{2\pi l}{2} \sum_{\nu=1}^{N} \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\varrho\,\mathrm{d}\varrho,$$

$$\mathfrak{c} = \pi l \sum_{\nu=1}^{N} 4(\sigma_{xy}^\nu)^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_1^\nu s_\nu^4\right) \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} \varrho\,\mathrm{d}\varrho$$

a konečně

$$\mathfrak{c} = 4\pi l \sum_{\nu=1}^{N} (\sigma_{xy}^\nu)^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_1^\nu s_\nu^4\right) B^\nu,$$

kde

$$B^\nu = \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} \varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{2}\left((R+\nu t)^2 - (R+(\nu-1)t)^2\right) = \frac{1}{2}\left(2Rt + 2\nu t^2 - t^2\right). \tag{10.9}$$

Hořejšími úpravami nabývá naše úloha formy

$$\min_{c_\nu, s_\nu \in \mathbb{C}_s} \min_{\sigma^\nu_{xy} \in \mathbb{S}^{kN}} \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{c} = 4\pi l \sum_{\nu=1}^{N} (\sigma^\nu_{xy})^2 \left(K^\nu_1 c^4_\nu + K^\nu_3 c^2_\nu s^2_\nu + K^\nu_1 s^4_\nu \right) B^\nu, \tag{10.10}$$

$$\mathbb{S}^{kN} = \left\{ \sigma^\nu_{xy} \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \mid M_k = \sum_{\nu=1}^{N} \sigma^\nu_{xy} S^\nu \right\},$$

$$\mathbb{C}_s = \left\{ c_\nu, s_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \mid c^2_\nu + s^2_\nu = 1 \right\}.$$

K řešení této úlohy použijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech pro úlohy s rovnostmi a nerovnostmi:[8]

Nechť $\tilde{\boldsymbol{x}}$ realizuje lokální minimum úlohy

$$f_0(\boldsymbol{x}) \to \min, \qquad f_i(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{10.11}$$

kde symbol $f_i(\boldsymbol{x}) \lesseqgtr 0$ znamená, že i-té omezení má tvar buď $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ nebo $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ či $f_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$. Nechť dále $\mathbb{X}$ je Banachův prostor, $\mathbb{U}$ otevřená množina v $\mathbb{X}$, $f_i : \mathbb{U} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ jsou diferencovatelné v bodě $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Pak existují takové Lagrangeovy multiplikátory $\tilde{\boldsymbol{\ell}} = (\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2, \ldots, \tilde{\ell}_m) \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\ell}_0 \in \mathbb{R}$ (ne všechny zároveň rovny nule), že platí

a) podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\ell}, \ell_0) = \sum_{i=0}^{m} \ell_i f_i(\boldsymbol{x})$$

vzhledem k $\boldsymbol{x}$:

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{x}}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{\ell}}, \tilde{\ell}_0) = \mathbf{0}$$

b) podmínka inverzní korespondence znamének: $\tilde{\ell}_0 \geq 0$ (jedná se o úlohu na minimum) a $\tilde{\ell}_i \gtreqless 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

c) podmínka komplementarity

$$\tilde{\ell}_i f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Označení $\tilde{\ell}_i \gtreqless 0$ znamená, že je-li ve vztahu (10.11) $f_i(\boldsymbol{x}) \geq 0$, pak $\tilde{\ell}_i \leq 0$, je-li $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ pak $\tilde{\ell}_i \geq 0$ a konečně je-li $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ pak $\tilde{\ell}_i$ může nabývat libovolného znaménka.$\diamondsuit$

Pro úlohu (10.10) máme (násobný faktor $4\pi l$ neuvažujeme)

$$\mathcal{L} = \sum_{\nu=1}^{N} (\sigma^\nu_{xy})^2 \left(K^\nu_1 c^4_\nu + K^\nu_3 c^2_\nu s^2_\nu + K^\nu_1 s^4_\nu \right) B^\nu + \lambda \left(\sum_{\nu=1}^{N} \sigma^\nu_{xy} S^\nu - M_k \right) + \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu \left(c^2_\nu + s^2_\nu - 1 \right).$$

Body b) a c) v úloze pouze s rovnostmi odpadají a podmínkou a) jest následná soustava rovnic.

$$\mathcal{L}_{,\sigma^\mu_{xy}} = 2\sigma^\mu_{xy} \left(K^\mu_1 c^4_\mu + K^\mu_3 c^2_\mu s^2_\mu + K^\mu_1 s^4_\mu \right) B^\mu + \lambda S^\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N), \tag{10.12}$$

$$\mathcal{L}_{,c_\mu} = (\sigma^\mu_{xy})^2 \left(4K^\mu_1 c^3_\mu + 2K^\mu_3 c_\mu s^2_\mu \right) B^\mu + \lambda_\mu 2 c_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N), \tag{10.13}$$

[8] [Alexejev *et al.*, 1991].

$$\mathcal{L}_{,s_\mu} = (\sigma_{xy}^\mu)^2 \left(2K_3^\mu c_\mu^2 s_\mu + 4K_1^\mu s_\mu^3\right) B^\mu + \lambda_\mu 2 s_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N) \tag{10.14}$$

a ovšem je také nutné požadovat splnění vedlejších podmínek

$$M_k = \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{xy}^\nu S^\nu, \tag{10.15}$$

$$c_\nu^2 + s_\nu^2 = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{10.16}$$

Předpokládejme předně $c_\mu \neq 0$, $s_\mu \neq 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$. Pak od $1/c_\mu$-násobku rovnice (10.13) odečteme $1/s_\mu$-násobek rovnice (10.14). Tím dostáváme

$$(\sigma_{xy}^\mu)^2 \left(4K_1^\mu c_\mu^2 + 2K_3^\mu s_\mu^2 - 4K_1^\mu s_\mu^2 - 2K_3^\mu c_\mu^2\right) B^\mu = 0$$

a jelikož $B^\mu > 0$, je také

$$(\sigma_{xy}^\mu)^2 \left(c_\mu^2 \left(4K_1^\mu - 2K_3^\mu\right) - s_\mu^2 \left(4K_1^\mu - 2K_3^\mu\right)\right) = 0.$$

Předpokládáme-li dále $\sigma_{xy}^\mu \neq 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ a $(4K_1^\mu - 2K_3^\mu) \neq 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ dostává poslední podmínka tvar

$$c_\mu^2 - s_\mu^2 = 0. \tag{10.17}$$

Užitím posledního vztahu a podmínky (10.16) máme

$$c_\mu^2 = s_\mu^2 = \frac{1}{2}.$$

Z čehož podobně jako v případě jedné vrstvy dostáváme

$$s_\mu = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ c_\mu = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N)$$

a tedy $\alpha_\mu = \pm 45^\circ$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ či, což je to samé, $\alpha_\mu = \pm 135^\circ$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$.

Celkem tedy máme pro každé μ z $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ tři různá možná řešní:

1. $\alpha_\mu = \pm 45^\circ$ $(\alpha_\mu = \pm 135^\circ)$,
2. $\cos\alpha_\mu = 0$ $(\alpha_\mu = \pm 90^\circ)$,
3. $\sin\alpha_\mu = 0$ $(\alpha_\mu = 0, 180^\circ)$.

Řešením naší úlohy je to, v němž nabývá cílová funkce nejmenší hodnoty. Cílová funkce

$$\mathfrak{c} = 4\pi l \sum_{\nu=1}^{N} (\sigma_{xy}^\nu)^2 \left(K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_1^\nu s_\nu^4\right) B^\nu$$

je složena ze součtů členů, které jsou disjunktní ve své závislosti na proměnných α_ν, tj. každý člen tvaru

$$\mathcal{A}_\nu = K_1^\nu c_\nu^4 + K_3^\nu c_\nu^2 s_\nu^2 + K_1^\nu s_\nu^4 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

závisí na jiné proměnné α_ν. To nám umožňuje snadné rozhodnutí o příslušnosti optimální hodnoty $\hat{\alpha}_\nu$ do jedné ze skupin 1, 2 či 3. Jest pro shora citované materiálové konstanty

1. $\alpha_\nu = \pm 45^\circ$:

$$\mathcal{A}_\nu^1 = \frac{1}{4}K_1^\nu + \frac{1}{4}K_3^\nu + \frac{1}{4}K_1^\nu = \frac{1}{2}C_{1212}^\nu + \frac{1}{4}C_{1111}^\nu + \frac{1}{4}C_{2222}^\nu - \frac{1}{2}C_{1122}^\nu - \frac{1}{2}C_{1212}^\nu = 0,0264\,\mathrm{GPa}^{-1}$$

2. $\alpha_\nu = \pm 90^\circ$ ($c_\nu = 0$, $s_\nu = \pm 1$):

$$\mathcal{A}^2_\nu = K^\nu_1 = C^\nu_{1212} = 0{,}1395\,\mathrm{GPa}^{-1}$$

3. $\alpha_\nu = 0$ ($c_\nu = 1$, $s_\nu = 0$):

$$\mathcal{A}^3_\nu = K^\nu_1 = C^\nu_{1212} = 0{,}1395\,\mathrm{GPa}^{-1}$$

a tedy

$$\mathcal{A}^1_\nu < \mathcal{A}^2_\nu = \mathcal{A}^3_\nu,$$

přičemž tato veličina odpovídá – ve svém vzájemném poměru – minimalizované míře poddajnosti. Míra tuhosti dosahuje tedy svého maxima v případě orientace vláken pod úhlem $\alpha_\nu = \pm 45^\circ$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$) vůči směru osy válce.

Nezávislost řešení na mechanických charakteristikách je pouze zdánlivá. Ortotropie dané vrstvy se promítla do úpravy vztahu $C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$.

Dosazením získaného řešení do (10.12) a užitím (10.15) dostáváme řešení napjatosti a Lagrangeovu konstantu λ. Vztah (10.12) nabývá tvaru

$$2\sigma^\mu_{xy}\left(\frac{1}{2}K^\mu_1 + \frac{1}{2}K^\mu_3 + \frac{1}{2}K^\mu_1\right)B^\mu + \lambda S^\mu = 0,$$

z čehož již přímo

$$\sigma^\mu_{xy} = -\frac{\lambda S^\mu}{B^\mu\left(2K^\mu_1 + K^\mu_3\right)}.$$

Lagrangeovu konstantu λ určíme z podmínky (10.15)

$$M_k = \sum_{\mu=1}^{N} S^\mu\left(\frac{-\lambda S^\mu}{B^\mu\left(2K^\mu_1 + K^\mu_3\right)}\right)$$

a tedy

$$-\lambda = \frac{M_k}{\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(S^\nu)^2}{B^\nu\left(2K^\nu_1+K^\nu_3\right)}}.$$

Napjatost v jednotlivých vrstvách konečně:

$$\sigma^\mu_{xy} = \frac{S^\mu}{B^\mu\left(2K^\mu_1 + K^\mu_3\right)}\cdot\frac{M_k}{\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(S^\nu)^2}{B^\nu\left(2K^\nu_1+K^\nu_3\right)}}. \tag{10.18}$$

10.5 Laminátová trubka jednovrstvá namáhaná kombinací tahu, krutu a vnitřního přetlaku

V tomto případě řešíme úlohu[9]

$$\left\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\right\} = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}}\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}}\frac{1}{2}\int_\Omega C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega, \tag{10.19}$$

kde $\mathbb{C}$ je množina dostupných tenzorů poddajnosti a

$$\mathbb{S} = \left\{\sigma_{xx} = \frac{N}{2\pi Rt},\ \sigma_{yy} = \frac{pR}{t},\ \sigma_{xy} = \frac{M_k}{2\pi R^2 t}\right\}.$$

[9][Mareš, 2003h].

Pro tenzor poddajnosti C_{ijkl} vyjádřený v globální soustavě souřadnic platí pro $r \in \langle R + (\nu - 1)t, R + \nu t\rangle$ (tj. v místě obsazeném vrstvou ν)

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}\ell^{\nu}_{ko}\ell^{\nu}_{lp}C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

kam dosadíme

$$\ell^{\nu}_{im} = \delta_{im}c_{\nu} + \epsilon_{im}s_{\nu},$$

kde

$$c_{\nu} = \cos\alpha_{\nu}, \quad s_{\nu} = \sin\alpha_{\nu}.$$

Tím

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \left(c^4_{\nu}\delta^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + c^3_{\nu}s_{\nu}\left(\epsilon^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp}\right) + \right.$$

$$+ c^2_{\nu}s^2_{\nu}\left(\epsilon^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \epsilon^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \epsilon^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp} + \delta^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp}\right) +$$

$$\left. + c_{\nu}s^3_{\nu}\left(\delta^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp} + \epsilon^{\nu}_{im}\delta^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp} + \epsilon^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\delta^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp} + \epsilon^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\delta^{\nu}_{lp}\right) + s^4_{\nu}\epsilon^{\nu}_{im}\epsilon^{\nu}_{jn}\epsilon^{\nu}_{ko}\epsilon^{\nu}_{lp}\right) C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

což zapišme jako

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \mathfrak{R}^{1\nu}c^4_{\nu} + \mathfrak{R}^{2\nu}c^3_{\nu}s_{\nu} + \mathfrak{R}^{3\nu}c^2_{\nu}s^2_{\nu} + \mathfrak{R}^{4\nu}c^1_{\nu}s^3_{\nu} + \mathfrak{R}^{5\nu}s^4_{\nu}, \tag{10.20}$$

kde koeficienty $\mathfrak{R}^{\varrho\nu}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, 5)$ postupně vyjádřeme:

$$\mathfrak{R}^{1\nu} = C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

$$\mathfrak{R}^{2\nu} = \left(\epsilon_{im}C^{\nu}_{mjkl} + \epsilon_{jn}C^{\nu}_{inkl} + \epsilon_{ko}C^{\nu}_{ijol} + \epsilon_{lp}C^{\nu}_{ijkp}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

což, jelikož $C^{\nu}_{mnop} = C^{\nu}_{opmn} = C^{\nu}_{pomn}$ a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, dále upravme jako

$$\mathfrak{R}^{2\nu} = 4\epsilon_{im}C^{\nu}_{mjkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

Koeficient u členu $c^2_{\nu}s^2_{\nu}$ podobně

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\left(\left(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right)\delta_{ko}\delta_{lp} + \left(\delta_{ik}\delta_{mo} - \delta_{io}\delta_{mk}\right)\delta_{jn}\delta_{lp} + \left(\delta_{il}\delta_{mp} - \delta_{ip}\delta_{ml}\right)\delta_{jn}\delta_{ko} + \right.$$

$$\left. + \left(\delta_{jk}\delta_{no} - \delta_{jo}\delta_{nk}\right)\delta_{im}\delta_{lp} + \left(\delta_{jn}\delta_{np} - \delta_{jp}\delta_{nl}\right)\delta_{im}\delta_{ko} + \left(\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol}\right)\delta_{im}\delta_{jn}\right),$$

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = C^{\nu}_{mmkl}\sigma_{ii}\sigma_{kl} - C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + C^{\nu}_{mjml}\sigma_{kj}\sigma_{kl} - C^{\nu}_{kjil}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + C^{\nu}_{mjkm}\sigma_{ij}\sigma_{ki} - C^{\nu}_{ljki}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + C^{\nu}_{innl}\sigma_{ik}\sigma_{kl} -$$

$$- C^{\nu}_{ikjl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + C^{\nu}_{ipkp}\sigma_{ij}\sigma_{kj} - C^{\nu}_{ilkj}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + C^{\nu}_{ijpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - C^{\nu}_{ijlk}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = 2C^{\nu}_{mmkl}\sigma_{ii}\sigma_{kl} - 2C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + 4C^{\nu}_{mjml}\sigma_{kj}\sigma_{kl} - 4C^{\nu}_{kjil}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

což lze také zapsat ve tvaru

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = \left(2C^{\nu}_{mmkl}\delta_{ij} - 2C^{\nu}_{ijkl} + 4C^{\nu}_{mjml}\delta_{ik} - 4C^{\nu}_{kjil}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

Předposlední součinitel pišme

$$\mathfrak{R}^{4\nu} = C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\left(\left(\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol}\right)\delta_{im}\epsilon_{jn} + \left(\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol}\right)\epsilon_{im}\delta_{jn} + \right.$$

$$\left. + \left(\delta_{jl}\delta_{np} - \delta_{jp}\delta_{nl}\right)\epsilon_{im}\delta_{ko} + \left(\delta_{jk}\delta_{no} - \delta_{jo}\delta_{nk}\right)\epsilon_{im}\delta_{lp}\right),$$

$$\mathfrak{R}^{4\nu} = \epsilon_{jn}C^{\nu}_{inpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \epsilon_{jn}C^{\nu}_{inkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \epsilon_{im}C^{\nu}_{mjpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - \epsilon_{im}C^{\nu}_{mjkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \epsilon_{im}C^{\nu}_{mpkp}\sigma_{il}\sigma_{kl} -$$

$$- \epsilon_{im}C^{\nu}_{mlkj}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \epsilon_{im}C^{\nu}_{mool}\sigma_{ik}\sigma_{kl} - \epsilon_{im}C^{\nu}_{mkjl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{4\nu} = \epsilon_{im}\left(2C^{\nu}_{jmpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} + 2C^{\nu}_{mppk}\sigma_{il}\sigma_{kl} - 2C^{\nu}_{jmkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2C^{\nu}_{mlkj}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right),$$

čili

$$\mathfrak{R}^{4\nu} = \epsilon_{im}\left(2C^{\nu}_{jmpp}\delta_{kl} + 2C^{\nu}_{mppk}\delta_{jl} - 2C^{\nu}_{jmkl} - 2C^{\nu}_{mlkj}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

Konečně

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \epsilon_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp}C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \left(\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj}\right)\left(\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol}\right)C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = C^{\nu}_{mmpp}\sigma_{ii}\sigma_{kk} + C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - C^{\nu}_{ijpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - C^{\nu}_{mmkl}\sigma_{ii}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = C^{\nu}_{mmpp}\sigma_{ii}\sigma_{kk} + C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \left(C^{\nu}_{mmpp}\delta_{ij}\delta_{kl} + C^{\nu}_{ijkl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\delta_{kl}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

V případě jednovrstvé trubky je množina $\mathbb{S}$ jednobodová a tedy řešení $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ známo. Tudíž jsou koeficienty $\mathfrak{R}^{\varrho\nu}$ daná čísla. Tím dostává úloha (10.19) podobu (po integraci konstanty)

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\min_{\alpha_\nu\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\frac{V}{2}\left(\mathfrak{R}^{1\nu}c_\nu^4 + \mathfrak{R}^{2\nu}c_\nu^3 s_\nu + \mathfrak{R}^{3\nu}c_\nu^2 s_\nu^2 + \mathfrak{R}^{4\nu}c_\nu s_\nu^3 + \mathfrak{R}^{5\nu}s_\nu^4\right),$$

kde V jest objem uvažované jednovrstevné trubky. Jak známo násobnou konstantu $V/2$ není při hledání minima vůbec třeba uvažovat.

Nutná podmínka minima

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\alpha_\nu} = 0$$

má podobu

$$\mathfrak{R}^{2\nu}c_\nu^4 + \left(2\mathfrak{R}^{3\nu} - 4\mathfrak{R}^{1\nu}\right)c_\nu^3 s_\nu + \left(3\mathfrak{R}^{4\nu} - 3\mathfrak{R}^{2\nu}\right)c_\nu^2 s_\nu^2 + \left(4\mathfrak{R}^{5\nu} - 2\mathfrak{R}^{3\nu}\right)c_\nu s_\nu^3 - \mathfrak{R}^{4\nu}s_\nu^4 = 0. \quad (10.21)$$

Opět je-li $s_\nu = 0$ je $c_\nu = \pm 1$ a $\mathfrak{R}^{2\nu} = 0$. To však neplatí univerzálně. Tedy není $s_\nu = 0$. Je-li $c_\nu = 0$ je $s_\nu = \pm 1$ a $\mathfrak{R}^{4\nu} = 0$. Také to není vždy pravdivé. Tedy není ani $c_\nu = 0$. Jelikož je $c_\nu s_\nu \neq 0$, dělíme rovnici (10.21) součinitelem c_ν^4, z čehož[10]

$$\mathfrak{S}^{1\nu}\mathrm{tg}^4\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{2\nu}\mathrm{tg}^3\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{3\nu}\mathrm{tg}^2\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{4\nu}\mathrm{tg}\,\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{5\nu} = 0, \quad (10.22)$$

kde

$$\mathfrak{S}^{1\nu} = -\mathfrak{R}^{4\nu} = -\mathcal{R}^{4\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

přičemž

$$\mathcal{R}^{4\nu}_{ijkl} = 2\epsilon_{im}\left(C^{\nu}_{jmpp}\delta_{kl} + C^{\nu}_{mppk}\delta_{jl} - C^{\nu}_{jmkl} - C^{\nu}_{mlkj}\right),$$

$$\left\{C^{\nu}_{mjkl}\right\}_{mj\lceil kl} \;\begin{array}{c} {\scriptstyle mj\lceil kl} \\ {\scriptstyle 11} \\ {\scriptstyle 12} \\ {\scriptstyle 21} \\ {\scriptstyle 22}\end{array} \overset{}{=} \begin{array}{cccc} {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 21} & {\scriptstyle 22} \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} c_1^\nu & 0 & 0 & c_{12}^\nu \\ 0 & g^\nu & g^\nu & 0 \\ 0 & g^\nu & g^\nu & 0 \\ c_{12}^\nu & 0 & 0 & c_2^\nu \end{array}\right),$$

$$\left\{C^{\nu}_{mlkj}\right\}_{mj\lceil kl} \;\begin{array}{c} {\scriptstyle mj\lceil kl} \\ {\scriptstyle 11} \\ {\scriptstyle 12} \\ {\scriptstyle 21} \\ {\scriptstyle 22}\end{array} = \begin{array}{cccc} {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 21} & {\scriptstyle 22} \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} c_1^\nu & 0 & 0 & g^\nu \\ 0 & g^\nu & c_{12}^\nu & 0 \\ 0 & c_{12}^\nu & g^\nu & 0 \\ g^\nu & 0 & 0 & c_2^\nu \end{array}\right),$$

[10] Případ $c_\nu = 0$, který jsme touto úpravou vyloučili, budeme uvažovat spolu se stacionárními body při výběru bodu minima.

$$\left\{C^{\nu}_{mjpp}\right\}_{mj\lceil} = \begin{array}{cc} & mj\lceil \\ \begin{matrix}11\\12\\21\\22\end{matrix} & \begin{pmatrix} c^{\nu}_{1}+c^{\nu}_{12} \\ 0 \\ 0 \\ c^{\nu}_{12}+c^{\nu}_{2} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\left\{C^{\nu}_{mppk}\right\}_{m\lceil k} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_{1}+g^{\nu} & 0 \\ 0 & g^{\nu}+c^{\nu}_{2} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\left\{C^{\nu}_{jmpp}\delta_{kl} + C^{\nu}_{mppk}\delta_{jl} - C^{\nu}_{jmkl} - C^{\nu}_{mlkj}\right\}_{mj\lceil kl} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_{12}+g^{\nu} & 0 & 0 & c^{\nu}_{1}-g^{\nu} \\ 0 & c^{\nu}_{1}-g^{\nu} & -c^{\nu}_{12}-g^{\nu} & 0 \\ 0 & -c^{\nu}_{12}-g^{\nu} & c^{\nu}_{2}-g^{\nu} & 0 \\ c^{\nu}_{2}-g^{\nu} & 0 & 0 & c^{\nu}_{12}+g^{\nu} \end{pmatrix},$$

$$\left\{\mathcal{R}^{4\nu}_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & -2c^{\nu}_{12}-2g^{\nu} & 2c^{\nu}_{2}-2g^{\nu} & 0 \\ 2c^{\nu}_{2}-2g^{\nu} & 0 & 0 & 2c^{\nu}_{12}+2g^{\nu} \\ -2c^{\nu}_{12}-2g^{\nu} & 0 & 0 & -2c^{\nu}_{1}+2g^{\nu} \\ 0 & -2c^{\nu}_{1}+2g^{\nu} & 2c^{\nu}_{12}+2g^{\nu} & 0 \end{pmatrix}.$$

A jelikož

$$\left\{\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} \sigma^{2}_{xx} & \sigma_{xx}\sigma_{xy} & \sigma_{xx}\sigma_{xy} & \sigma_{xx}\sigma_{yy} \\ \sigma_{xx}\sigma_{xy} & \sigma^{2}_{xy} & \sigma^{2}_{xy} & \sigma_{xy}\sigma_{yy} \\ \sigma_{xx}\sigma_{xy} & \sigma^{2}_{xy} & \sigma^{2}_{xy} & \sigma_{xy}\sigma_{yy} \\ \sigma_{yy}\sigma_{xx} & \sigma_{yy}\sigma_{xy} & \sigma_{yy}\sigma_{xy} & \sigma^{2}_{yy} \end{pmatrix},$$

je konečně po provedení součinu a součtu

$$\mathfrak{S}^{1\nu} = 2\sigma_{xx}\sigma_{xy}\left(4g^{\nu}+2c^{\nu}_{12}-2c^{\nu}_{2}\right) + 2\sigma_{yy}\sigma_{xy}\left(-4g^{\nu}-2c^{\nu}_{12}+2c^{\nu}_{1}\right).$$

Dále máme

$$\mathfrak{S}^{2\nu} = 4\mathfrak{R}^{5\nu} - 2\mathfrak{R}^{3\nu}, \tag{10.23}$$

kde

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl} = \left(C^{\nu}_{mmpp}\delta_{ij}\delta_{kl} + C^{\nu}_{ijkl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\delta_{kl}\right),$$

přičemž

$$C^{\nu}_{mmpp} = c^{\nu}_{1} + 2c^{\nu}_{12} + c^{\nu}_{2},$$

$$\left\{C^{\nu}_{ijpp}\right\}_{ij\lceil} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_{1}+c^{\nu}_{12} \\ 0 \\ 0 \\ c^{\nu}_{12}+c^{\nu}_{2} \end{pmatrix},$$

a odtud

$$\left\{\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_{2} & 0 & 0 & -c^{\nu}_{1}+c^{\nu}_{12}+c^{\nu}_{2} \\ 0 & g^{\nu} & g^{\nu} & 0 \\ 0 & g^{\nu} & g^{\nu} & 0 \\ c^{\nu}_{1}+c^{\nu}_{12}-c^{\nu}_{2} & 0 & 0 & c^{\nu}_{1} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = c^{\nu}_{2}\sigma^{2}_{xx} + 4g^{\nu}\sigma^{2}_{xy} + c^{\nu}_{1}\sigma^{2}_{yy} + 2c^{\nu}_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy}.$$

Pro koeficient $\mathfrak{R}^{3\nu}$ jest

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = \mathcal{R}^{3\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

kde

$$\mathcal{R}^{3\nu}_{ijkl} = 2C^{\nu}_{mmkl}\delta_{ij} + 4C^{\nu}_{mjml}\delta_{ik} - 2C^{\nu}_{ijkl} - 4C^{\nu}_{kjil},$$

což má dle hořejšího tvar

$$\left\{\mathcal{R}^{3\nu}_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu} & 0 & 0 & 2c^{\nu}_{2} - 4g^{\nu} \\ 0 & 4c^{\nu}_{2} - 2g^{\nu} & -4c^{\nu}_{12} - 2g^{\nu} & 0 \\ 0 & -4c^{\nu}_{12} - 2g^{\nu} & 4c^{\nu}_{1} - 2g^{\nu} & 0 \\ 2c^{\nu}_{1} - 4g^{\nu} & 0 & 0 & 2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = \sigma^2_{xx}\left(2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu}\right) + \sigma^2_{xy}\left(4c^{\nu}_{2} - 8g^{\nu} - 8c^{\nu}_{12} + 4c^{\nu}_{1}\right) + \sigma^2_{yy}\left(2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu}\right) + \sigma_{xx}\sigma_{yy}\left(2c^{\nu}_{2} - 8g^{\nu} + 2c^{\nu}_{1}\right).$$

Konečně vyjádřeme z (10.23) a hořejšího

$$\mathfrak{S}_{2\nu} = \sigma^2_{xx}\left(4c^{\nu}_{2} - 4c^{\nu}_{12} - 8g^{\nu}\right) + \sigma^2_{xy}\left(32g^{\nu} - 8c^{\nu}_{2} + 16c^{\nu}_{12} - 8c^{\nu}_{1}\right) +$$

$$+\sigma^2_{yy}\left(4c^{\nu}_{1} - 4c^{\nu}_{12} - 8g^{\nu}\right) + \sigma_{xx}\sigma_{yy}\left(16g^{\nu} - 4c^{\nu}_{2} + 8c^{\nu}_{12} - 4c^{\nu}_{1}\right).$$

V případě součinitele $\mathfrak{S}^{3\nu}$ máme

$$\mathfrak{S}^{3\nu} = 3\mathfrak{R}^{4\nu} - 3\mathfrak{R}^{2\nu}.$$

Dle hořejšího jest

$$\mathfrak{R}^{4\nu} = 4\sigma_{xx}\sigma_{xy}\left(c^{\nu}_{2} - c^{\nu}_{12} - 2g^{\nu}\right) + 4\sigma_{yy}\sigma_{xy}\left(-c^{\nu}_{1} + c^{\nu}_{12} + 2g^{\nu}\right)$$

a

$$\mathfrak{R}^{2\nu} = \mathcal{R}^{2\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathcal{R}^{2\nu}_{ijkl} = 4\epsilon_{im}C^{\nu}_{mjkl},$$

což opět dle hořejšího

$$\left\{\mathcal{R}^{2\nu}_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} 0 & 4g^{\nu} & 4g^{\nu} & 0 \\ 4c^{\nu}_{12} & 0 & 0 & 4c^{\nu}_{2} \\ -4c^{\nu}_{1} & 0 & 0 & -4c^{\nu}_{12} \\ 0 & -4g^{\nu} & -4g^{\nu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále

$$\mathfrak{R}^{2\nu} = \sigma_{xx}\sigma_{xy}\left(8g^{\nu} + 4c^{\nu}_{12} - 4c^{\nu}_{1}\right) + \sigma_{yy}\sigma_{xy}\left(-8g^{\nu} - 4c^{\nu}_{12} + 4c^{\nu}_{2}\right)$$

a tedy

$$\mathfrak{S}^{3\nu} = 12\sigma_{xx}\sigma_{xy}\left(c^{\nu}_{2} - 2c^{\nu}_{12} - 4g^{\nu} + c^{\nu}_{1}\right) + 12\sigma_{yy}\sigma_{xy}\left(-c^{\nu}_{2} + 2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu} - c^{\nu}_{1}\right).$$

V případě čtvrtého koeficientu podmínky (10.22) jest

$$\mathfrak{S}^{4\nu} = \left(2\mathfrak{R}^{3\nu} - 4\mathfrak{R}^{1\nu}\right),$$

kde

$$\mathfrak{R}^{3\nu} = \sigma^2_{xx}\left(2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu}\right) + \sigma^2_{xy}\left(4c^{\nu}_{2} - 8g^{\nu} - 8c^{\nu}_{12} + 4c^{\nu}_{1}\right) + \sigma^2_{yy}\left(2c^{\nu}_{12} + 4g^{\nu}\right) + \sigma_{xx}\sigma_{yy}\left(2c^{\nu}_{1} - 8g^{\nu} + 2c^{\nu}_{2}\right)$$

a

$$\mathfrak{R}^{1\nu} = C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{kl}\sigma_{ij},$$

což dle hořejšího je

$$\mathfrak{R}^{1\nu} = c^{\nu}_{1}\sigma^2_{xx} + 4g^{\nu}\sigma^2_{xy} + c^{\nu}_{2}\sigma^2_{yy} + 2c^{\nu}_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy}.$$

Čili

$$\mathfrak{S}^{4\nu} = 4\sigma_{xx}^2 \left(c_{12}^\nu + 2g^\nu - c_1^\nu\right) + 8\sigma_{xy}^2 \left(c_2^\nu - 4g^\nu - 2c_{12}^\nu + c_1^\nu\right) + 4\sigma_{yy}^2 \left(c_{12}^\nu + 2g^\nu - c_2^\nu\right) +$$
$$+4\sigma_{xx}\sigma_{yy} \left(c_2^\nu - 4g^\nu - 2c_{12}^\nu + c_1^\nu\right).$$

Konečně

$$\mathfrak{S}^{5\nu} = \mathfrak{R}^{2\nu},$$

což, viz shora, jest

$$\mathfrak{S}^{5\nu} = \sigma_{xx}\sigma_{xy} \left(8g^\nu + 4c_{12}^\nu - 4c_1^\nu\right) + \sigma_{yy}\sigma_{xy} \left(-8g^\nu - 4c_{12}^\nu + 4c_2^\nu\right).$$

10.5.1 Shrnutí nutné podmínky

Shrneme-li předcházející, má nutná podmínka tvar

$$\mathfrak{S}^{1\nu}\mathrm{tg}^4\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{2\nu}\mathrm{tg}^3\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{3\nu}\mathrm{tg}^2\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{4\nu}\mathrm{tg}\,\alpha_\nu + \mathfrak{S}^{5\nu} = 0, \tag{10.24}$$

kde

$$\mathfrak{S}^{1\nu} = 4\sigma_{xx}\sigma_{xy} \left(2g^\nu + c_{12}^\nu - c_2^\nu\right) + 4\sigma_{yy}\sigma_{xy} \left(-2g^\nu - c_{12}^\nu + c_1^\nu\right),$$
$$\mathfrak{S}_{2\nu} = \sigma_{xx}^2 \left(4c_2^\nu - 4c_{12}^\nu - 8g^\nu\right) + \sigma_{xy}^2 \left(32g^\nu - 8c_2^\nu + 16c_{12}^\nu - 8c_1^\nu\right) +$$
$$+\sigma_{yy}^2 \left(4c_1^\nu - 4c_{12}^\nu - 8g^\nu\right) + \sigma_{xx}\sigma_{yy} \left(16g^\nu - 4c_2^\nu + 8c_{12}^\nu - 4c_1^\nu\right),$$
$$\mathfrak{S}^{3\nu} = 12\sigma_{xx}\sigma_{xy} \left(c_2^\nu - 2c_{12}^\nu - 4g^\nu + c_1^\nu\right) + 12\sigma_{yy}\sigma_{xy} \left(-c_2^\nu + 2c_{12}^\nu + 4g^\nu - c_1^\nu\right),$$
$$\mathfrak{S}^{4\nu} = 4\sigma_{xx}^2 \left(c_{12}^\nu + 2g^\nu - c_1^\nu\right) + 8\sigma_{xy}^2 \left(c_2^\nu - 4g^\nu - 2c_{12}^\nu + c_1^\nu\right) + 4\sigma_{yy}^2 \left(c_{12}^\nu + 2g^\nu - c_2^\nu\right) +$$
$$+4\sigma_{xx}\sigma_{yy} \left(c_2^\nu - 4g^\nu - 2c_{12}^\nu + c_1^\nu\right),$$
$$\mathfrak{S}^{5\nu} = \sigma_{xx}\sigma_{xy} \left(8g^\nu + 4c_{12}^\nu - 4c_1^\nu\right) + \sigma_{yy}\sigma_{xy} \left(-8g^\nu - 4c_{12}^\nu + 4c_2^\nu\right).$$

10.5.2 Rozřešení nutné podmínky (10.24)

Pro citovaný materiál (grafito-epoxidový z tabulky 10.1 na s. 220) byla nutná podmínka (10.24) rozřešena v případě řady zátěžových stavů daných velikostí napětí σ_{xx}, σ_{yy} and σ_{xy}. Z množiny stacionárních bodů doplněných o hodnotu 90° byl vždy vybrán bod minimalizující cílovou funkci (maximalizující vybranou míru tuhosti). Následující tabulky obsahují řešení získaná popsaným způsobem.

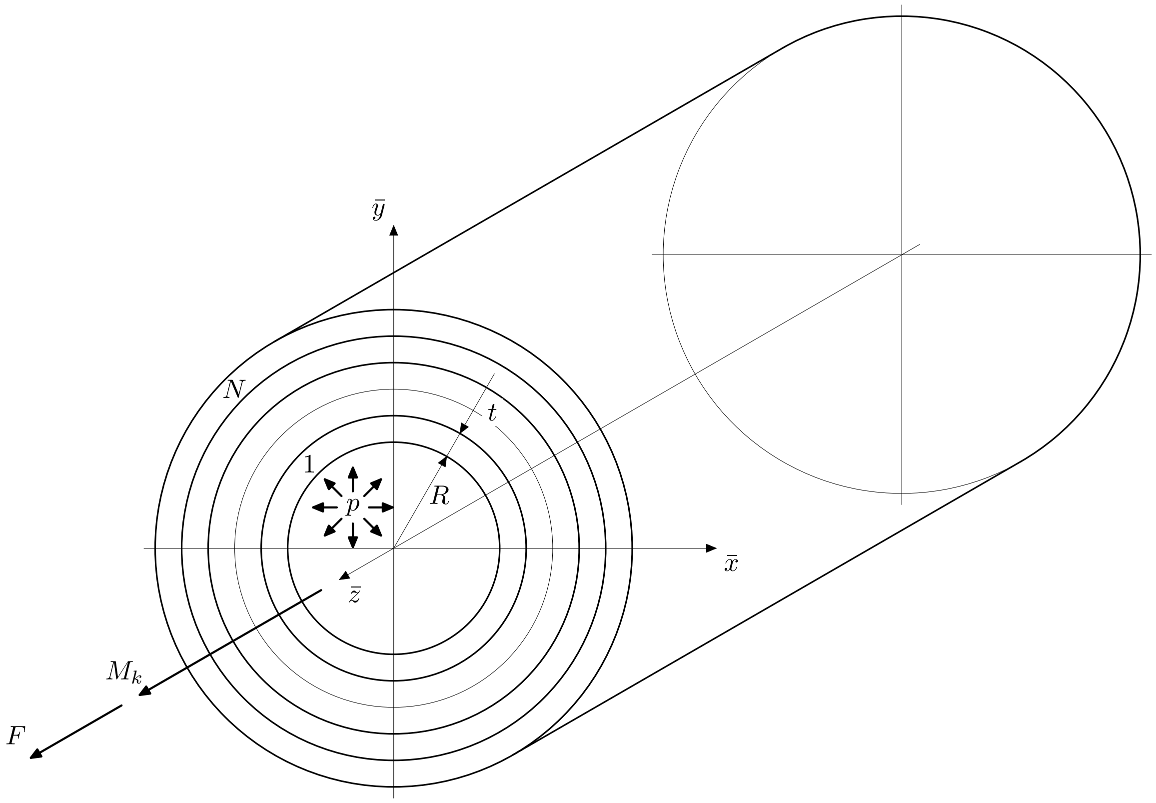
$\sigma_{yy} \lceil \sigma_{xy}$	0	10 MPa	20	30 MPa	40	50 MPa	60	70 MPa	80	90 MPa	100
0 MPa	0	±5.65	±10.90	±15.48	±19.33	±22.50	±25.01	±27.23	±29.00	±30.47	±31.72
10 MPa	0	±6.26	±11.98	±16.85	±20.82	±24.01	±26.57	±28.63	±30.32	±31.72	±32.89
20 MPa	0	±7.02	±13.28	±18.43	±22.50	±25.67	±28.15	±30.13	±31.72	±33.02	±34.10
30 MPa	0	±7.97	±14.87	±20.30	±24.41	±27.50	±29.87	±31.72	±33.19	±34.37	±35.35
40 MPa	0	±9.22	±16.85	±22.50	±26.57	±29.52	±31.72	±33.40	±34.72	±35.78	±36.65
50 MPa	0	±10.90	±19.33	±25.10	±29.00	±31.72	±33.70	±35.17	±36.32	±37.24	±37.98
60 MPa	0	±13.28	±22.50	±28.15	±31.72	±34.10	±35.78	±37.03	±37.98	±38.74	±39.35
70 MPa	0	±16.85	±26.57	±31.72	±34.72	±36.65	±37.98	±38.95	±39.69	±40.27	±40.73
80 MPa	0	±22.50	±31.72	±35.78	±37.98	±39.35	±40.27	±40.93	±41.44	±41.83	±42.14
90 MPa	0	±31.72	±37.98	±40.27	±41.44	±42.14	±42.62	±42.96	±43.21	±43.41	±43.57
100 MPa	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45

Tabulka 10.2: Tuhost maximalizující úhel $\hat{\alpha}$ [°] versus zatěžující napětí $\sigma_{xx} = 100$ MPa a σ_{xy} [MPa], σ_{yy} [MPa] dle tabulky

$\sigma_{yy} \lceil \sigma_{xy}$	0	10 MPa	20 MPa	30 MPa	40 MPa	50 MPa	60 MPa	70 MPa	80 MPa	90 MPa	100
0	0	±10.90	±19.33	±25.10	±29.00	±31.72	±33.69	±35.17	±36.32	±37.24	±37.98
10 MPa	0	±13.28	±22.50	±28.15	±31.72	±34.10	±35.78	±37.03	±37.98	±38.74	±39.35
20 MPa	0	±16.85	±26.57	±31.72	±34.72	±36.65	±37.98	±38.95	±39.69	±40.27	±40.73
30 MPa	0	±22.50	±31.72	±35.78	±37.98	±39.35	±40.27	±40.93	±41.44	±41.83	±42.14
40 MPa	0	±31.72	±37.98	±40.27	±41.44	±42.14	±42.62	±42.96	±43.21	±43.41	±43.57
50 MPa	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45	±45
60 MPa	±90	±58.28	±52.02	±49.73	±48.56	±47.86	±47.38	±47.04	±46.79	±46.59	±46.43
70 MPa	±90	±67.50	±58.28	±54.22	±52.02	±50.65	±49.73	±49.07	±48.56	±48.17	±47.855
80 MPa	±90	±73.15	±63.43	±58.28	±55.28	±53.35	±52.02	±51.05	±50.31	±49.73	±49.27
90 MPa	±90	±76.72	±67.50	±61.85	±58.28	±55.90	±54.22	±52.97	±52.02	±51.26	±50.65
100 MPa	±90	±79.10	±70.67	±64.90	±61.00	±58.28	±56.31	±54.83	±53.68	±52.76	±52.02

Tabulka 10.3: Tuhost maximalizující úhel $\hat{\alpha}$ [°] versus zatěžující napětí $\sigma_{xx} = 50$ MPa a σ_{xy} [MPa], σ_{yy} [MPa] dle tabulky

10.6 Laminátová trubka vícevrstvá namáhaná kombinací tahu, krutu a vnitřního přetlaku



Obrázek 10.13: Kruhová vícevrstvá laminátová trubka namáhaná krutem, tahem a vnitřním přetlakem

Přijmeme-li opět hořejší předpoklady o tenkostěnnosti a *konstantnosti napětí* po tloušťce vrstvy a neuvažujeme-li zároveň možnost hroucení, má stále uvažovaná úloha tvar[11]

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^N} \int_\Omega C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\Omega,$$

kde $\mathbb{C}$ jest množina dostupných tenzorů poddajnosti a

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \sigma^\nu_{xx}, \sigma^\nu_{yy}, \sigma^\nu_{xy} \ (\nu = 1, 2, \ldots, N) \mid F = \sum_{\nu=1}^N A^\nu \sigma^\nu_{xx}, \ \frac{pR}{t} = \sum_{\nu=1}^N \sigma^\nu_{yy}, \ M_k = \sum_{\nu=1}^N S^\nu \sigma^\nu_{xy} \right\}$$

přičemž N je počet vrstev, t jest tloušťka jednotlivých vrstev (tloušťka stěny trubky je tN), R je vnitřní poloměr trubky, A^ν jest plocha na osu kolmého průřezu vrstvy ν:

$$A^\nu = \pi \left((R + \nu t)^2 - (R + (\nu - 1)t)^2 \right) \tag{10.25}$$

a S^ν je statický moment téže plochy:

$$S^\nu = \frac{2\pi}{3} \left((R + \nu t)^3 - (R + (\nu - 1)t)^3 \right).$$

Cílový funkcionál

$$\mathfrak{c} = \int_\Omega C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \, \mathrm{d}\Omega$$

[11] Srvn. paragrafy 10.4 a 10.5. Viz také [Mareš, 2003i].

upravíme následným způsobem.

$$\mathfrak{c} = l \int_R^{R+tN} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} 2\pi\varrho \,\mathrm{d}\varrho = 2\pi l \sum_{\nu=1}^{N} \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\varrho \,\mathrm{d}\varrho.$$

Použitím výsledků z paragrafu 10.5 *Laminátová trubka jednovrstvá namáhaná kombinací tahu, krutu a vnitřního přetlaku* máme pro $\varrho \in \langle R + (\nu-1)t, R + \nu t\rangle$ na s. 227 vztahem (10.20)

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \left(\mathcal{R}^{1\nu}_{ijkl}c^4_\nu + \mathcal{R}^{2\nu}_{ijkl}c^3_\nu s_\nu + \mathcal{R}^{3\nu}_{ijkl}c^2_\nu s^2_\nu + \mathcal{R}^{4\nu}_{ijkl}c_\nu s^3_\nu + \mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}s^4_\nu\right)\sigma^\nu_{ij}\sigma^\nu_{kl}$$

a tedy

$$\mathfrak{c} = l\sum_{\nu=1}^{N} A^\nu \left(\mathcal{R}^{1\nu}_{ijkl}c^4_\nu + \mathcal{R}^{2\nu}_{ijkl}c^3_\nu s_\nu + \mathcal{R}^{3\nu}_{ijkl}c^2_\nu s^2_\nu + \mathcal{R}^{4\nu}_{ijkl}c_\nu s^3_\nu + \mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}s^4_\nu\right)\sigma^\nu_{ij}\sigma^\nu_{kl},$$

kde[12]

$$A^\nu = \pi\left((R+\nu t)^2 - (R+(\nu-1)t)^2\right)$$

a konstanty $\mathcal{R}^{\varrho\nu}_{ijkl}$ jsou vyjádřeny shora.

Z důvodu pohodlného zohlednění skutečnosti $\sigma^\nu_{xy} = \sigma^\nu_{yx}$ v průběhu hledání stacionárního bodu vyjádřeme cílovou funkci ve tvaru (násobení konstantou je pro naše účely nepodstatné)

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} A^\nu \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma}^\nu,$$

kde

$$\boldsymbol{\sigma}^\nu = \begin{pmatrix} \sigma^\nu_{xx} \\ \sigma^\nu_{yy} \\ \sigma^\nu_{xy} \end{pmatrix}$$

a

$$\boldsymbol{P}^\nu = \boldsymbol{R}^{1\nu}c^4_\nu + \boldsymbol{R}^{2\nu}c^3_\nu s_\nu + \boldsymbol{R}^{3\nu}c^2_\nu s^2_\nu + \boldsymbol{R}^{4\nu}c_\nu s^3_\nu + \boldsymbol{R}^{5\nu}s^4_\nu, \tag{10.26}$$

$$\boldsymbol{R}^{1\nu} = \begin{pmatrix} c^\nu_1 & c^\nu_{12} & 0 \\ c^\nu_{12} & c^\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4g^\nu \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{2\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2c^\nu_1 + 2c^\nu_{12} + 4g^\nu \\ 0 & 0 & 2c^\nu_2 - 2c^\nu_{12} - 4g^\nu \\ -2c^\nu_1 + 2c^\nu_{12} + 4g^\nu & 2c^\nu_2 - 2c^\nu_{12} - 4g^\nu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{3\nu} = \begin{pmatrix} 2c^\nu_{12} + 4g^\nu & c^\nu_1 + c^\nu_2 - 4g^\nu & 0 \\ c^\nu_1 + c^\nu_2 - 4g^\nu & 2c^\nu_{12} + 4g^\nu & 0 \\ 0 & 0 & 4c^\nu_1 + 4c^\nu_2 - 8c^\nu_{12} - 8g^\nu \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{4\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2c^\nu_2 - 2c^\nu_{12} - 4g^\nu \\ 0 & 0 & -2c^\nu_1 + 2c^\nu_{12} + 4g^\nu \\ 2c^\nu_2 - 2c^\nu_{12} - 4g^\nu & -2c^\nu_1 + 2c^\nu_{12} + 4g^\nu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^{5\nu} = \begin{pmatrix} c^\nu_2 & c^\nu_{12} & 0 \\ c^\nu_{12} & c^\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4g^\nu \end{pmatrix}.$$

Dosaženou formu naší úlohy

$$\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}} \min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}^N} \mathfrak{c},$$

[12] Srvn. vztah (10.25) na s. 233.

$$\mathbb{S}^N = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \boldsymbol{\sigma}^\nu = \boldsymbol{F} \right\},$$

kde

$$\boldsymbol{S}^\nu = \begin{pmatrix} A^\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S^\nu \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F \\ \frac{pR}{t} \\ M_k \end{pmatrix},$$

řešme užitím shora citované věty o Lagrangeových multiplikátorech. Jednotlivé body této věty nabývají podobu

a)

$$\mathcal{L}_N = \lambda_0 \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} A^\nu \boldsymbol{\sigma}^{\nu T} \boldsymbol{P}^\nu \boldsymbol{\sigma}^\nu + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \boldsymbol{\sigma}^\nu - \boldsymbol{F} \right),$$

kde

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\mu} = \lambda_0 A^\mu \boldsymbol{P}^\mu \boldsymbol{\sigma}^\mu + \boldsymbol{S}^\mu \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N), \tag{10.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial \alpha_\mu} = \frac{\lambda_0}{2} A^\mu \boldsymbol{\sigma}^{\mu T} \frac{\partial \boldsymbol{P}^\mu}{\partial \alpha_\mu} \boldsymbol{\sigma}^\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N), \tag{10.28}$$

kde

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}^\mu}{\partial \alpha^\mu} = -4\boldsymbol{R}^{1\mu} c_\mu^3 s_\mu + \boldsymbol{R}^{2\mu} \left(-3c_\mu^2 s_\mu^2 + c_\mu^4\right) + \boldsymbol{R}^{3\mu} \left(-2c_\mu s_\mu^3 + 2c_\mu^3 s_\mu\right) + \boldsymbol{R}^{4\mu} \left(-s_\mu^4 + 3c_\mu^2 s_\mu^2\right) + 4\boldsymbol{R}^{5\mu} s_\mu^3 c_\mu.$$

b) $\lambda_0 \geq 0$. Vzhledem k podmínce (10.28) jest na místě předpokládat $\lambda_0 \neq 0$, řekněme $\lambda_0 = 1$.

c) Podmínka komplementarity jest splněna požadavkem dodržení vedlejší podmínky

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \boldsymbol{\sigma}^\nu = \boldsymbol{F}. \tag{10.29}$$

K rozřešení soustavy nutných podmínek (11.3), (10.28), (11.4) použijeme metodu alternujícího splnění nutné podmínky:[13]

1. Nejprve zvolíme α_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$, např. $\alpha_\mu = 0\ \forall \mu$.

2. Pro toto nastavení úhlů vinutí jednotlivých vrstev rozřešme úlohu pružnosti formulovanou soustavou lineárních rovnic (11.3) a (11.4) v proměnných σ_{xx}^μ, σ_{yy}^μ, σ_{xy}^μ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$, $\boldsymbol{\lambda}$.

3. Pro takto získané napětí $\boldsymbol{\sigma}^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ řešme soustavu (10.28) pro proměnné α_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$. Toto řešení opět použijme v bodu 2. atd. až do konvergence.

[13] Srvn. [Allaire 2002].

10.6.1 Rozřešení úlohy z bodu 2

Rěšíme soustavu rovnic (11.3), (11.4), kde $\lambda_0 = 1$ a α_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, N)$ jest dáno. Máme

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = -\left(A^\mu \boldsymbol{P}^\mu\right)^{-1} \boldsymbol{S}^\mu \boldsymbol{\lambda} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N),$$

kde z (11.4) máme

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \left(A^\nu \boldsymbol{P}^\nu\right)^{-1} \boldsymbol{S}^\nu \boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{F},$$

tedy

$$\boldsymbol{\lambda} = -\left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \left(A^\nu \boldsymbol{P}^\nu\right)^{-1} \boldsymbol{S}^\nu\right)^{-1} \boldsymbol{F},$$

a proto konečně

$$\boldsymbol{\sigma}^\mu = \left(A^\mu \boldsymbol{P}^\mu\right)^{-1} \boldsymbol{S}^\mu \left(\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{S}^\nu \left(A^\nu \boldsymbol{P}^\nu\right)^{-1} \boldsymbol{S}^\nu\right)^{-1} \boldsymbol{F} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N).$$

10.6.2 Rozřešení úlohy z bodu 3

Řešíme soustavu nezávislých rovnic[14]

$$H^{1\nu}\mathrm{tg}^4\alpha_\nu + H^{2\nu}\mathrm{tg}^3\alpha_\nu + H^{3\nu}\mathrm{tg}^2\alpha_\nu + H^{4\nu}\mathrm{tg}\,\alpha_\nu + H^{5\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{10.30}$$

kde

$$H^{1\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\left(-\boldsymbol{R}^{4\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}^\nu,$$

$$H^{2\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\left(4\boldsymbol{R}^{5\nu} - 2\boldsymbol{R}^{3\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}^\nu,$$

$$H^{3\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\left(3\boldsymbol{R}^{4\nu} - 3\boldsymbol{R}^{2\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}^\nu,$$

$$H^{4\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\left(2\boldsymbol{R}^{3\nu} - 4\boldsymbol{R}^{1\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}^\nu,$$

$$H^{5\nu} = \boldsymbol{\sigma}^{\nu T}\boldsymbol{R}^{2\nu}\boldsymbol{\sigma}^\nu.$$

Již z předešlého víme, že soustava rovnic (10.30) má více řešení, ale tato řešení, doplněná o hodnotu $\alpha_\nu = 90°$, reprezentují všechny extremální body z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ (rovnice čtvrtého stupně, periodicita funkce $\mathrm{tg}\,\alpha$), a proto to řešení nutné podmínky, které je reálné a vykazuje nejmenší hodnotu cílové funkce

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} A^\nu \boldsymbol{\sigma}^{\nu T} \boldsymbol{P}^\nu \boldsymbol{\sigma}^\nu, \tag{10.31}$$

jest bodem minima globálního.

10.6.3 Přetisk zdrojového kódu výpočtu pro program GNU Octave 2.1.36

Přikládáme zdrojový kód pro program GNU Octave 2.1.36 zpracovávající hořejší úlohu právě popsaným způsobem.

[14] Srvn. paragraf 10.5.

```
%\footnote{\texttt{<OctaveTrubkaTahOhybPretlak/AlternativniProTrubku.m>}.}
1;
% Rozřešení nutné podmínky úlohy pro napjatost a úhel vinutí vícevrstvé trubky namáhané
% kombinací krutu, tahu a přetlaku při nejistém zatížení.
% Pro zvolený materiál (Kevlar-Epoxy)
% Nalezení odezvového modelu $\sigma^{nebezpecne}=s(\alpha)$
clear
%global
cputime1=cputime
fff=0;
% =============================================================================================
% Vstupní hodnoty:
%% ROZMĚRY
%% vnitřní poloměr
R=50 %% [mm]
%% tloušťka jedné vrstvy
t=1 %% [mm]
%% ZATÍŽENÍ
F=10000 %% [N]
p=100 %% [MPa]
Mk=1 %% [Nmm]
% Materiálové charakteristiky Kevlar-Epoxy kompozitu:
E1=76000 %  MPa
E2=5500  %  MPa
G12=2300 %  MPa
nu12=0.34
nu21=nu12*E2/E1
%% ========================================================================================
% Dopočtené materiálové charakteristiky:
Q11=E1/(1-nu12*nu21);
Q22=E2/(1-nu12*nu21);
Q12=nu12*E2/(1-nu12*nu21);
g=1/(4*G12)
jmenovatel=Q11*Q22-Q12^2;
c1=Q22/jmenovatel
c2=Q11/jmenovatel
c12=-Q12/jmenovatel
%% Zadej opčet vrstev
N=1
nu=(1:N)';
%% Zadej první volbu úhlu $\alpha$ [rad]
VychoziBod=(0/180*pi)*ones(N,1);
al=VychoziBod;
%% koeficienty matice R
R1=[c1,c12,0;c12,c2,0;0,0,4*g];
R2=[0,0,-2*c1+2*c12+4*g;0,0,2*c2-2*c12-4*g;-2*c1+2*c12+4*g,2*c2-2*c12-4*g,0];
R3=[2*c12+4*g,c1+c2-4*g,0;c1+c2-4*g,2*c12+4*g,0;0,0,4*c1+4*c2-8*c12-8*g];
R4=[0,0,2*c2-2*c12-4*g;0,0,-2*c1+2*c12+4*g;2*c2-2*c12-4*g,-2*c1+2*c12+4*g,0];
R5=[c2,c12,0;c12,c1,0;0,0,4*g];
AReseni=[];
%% Řešení 2. bodu algoritmu
%% ========================================================================================
%% výpočet multiplikátorů $\pmb{\lambda}$ (Sigmus=[])
%% průřezové charakteristiky $A^\nu$ a $S^\nu$ jako vektor s prvky odpovídajícími
%% úhlu orientace jednotlivých vrstev (od vnitřní k vnější)
A=pi*((R*ones(N,1)+nu*t).^2-(R*ones(N,1)+(nu-ones(N,1))*t).^2);
mS=2*pi/3*((R*ones(N,1)+nu*t).^3-(R*ones(N,1)+(nu-ones(N,1))*t).^3);
S=kron(A,[1,0,0;0,0,0;0,0,0])+kron(ones(N,1),[0,0,0;0,1,0;0,0,0])+kron(mS,[0,0,0;0,0,0;0,0,1]);
Pp=kron(diag(A.*(cos(al)).^4),R1)+kron(diag(A.*(cos(al)).^3.*sin(al)),R2)+\
   kron(diag(A.*(cos(al).^2).*(sin(al).^2)),R3)+kron(diag(A.*cos(al).*(sin(al)).^3),R4)+\
   kron(diag(A.*(sin(al)).^4),R5);
Sigmus=S'*(Pp^(-1))*S;
lambda=-Sigmus^(-1)*[F;p*R/t;Mk];
%% ========================================================================================
%% výpočet napětí $\pmb{\sigma}^\nu$: Dávám to do sloupce po trojicích
%% jde o napjatost (po trojicích) od vnitřního poloměru.
sigma=-Pp^(-1)*S*lambda;
%% Řešení 3. bodu algoritmu
%% ========================================================================================
%% určení "optimálního" úhlu vinutí pro shora určenou napjatost
%% ========================================================================================
jj=0;
JJ=21;
while (jj<JJ)
%for jj=1:20
tgAlpha=[];
for i=1:N
%% Zadej zatížení
%% $\sigma_{xx}$
Sig(1)=sigma(3*i-2); %% [MPa]
%% $\sigma_{yy}$
Sig(2)=sigma(3*i-1); %% [MPa]
%% $\sigma_{xy}$
Sig(3)=sigma(3*i); %% [MPa]
% =============================================================================================
% Vlastní výpočet
% koeficienty rovnice čtvrtého stupně
H(1)=-Sig'*R4*Sig;
H(2)=Sig'*(4*R5-2*R3)*Sig;
H(3)=Sig'*(3*R4-3*R2)*Sig;
H(4)=Sig'*(2*R3-4*R1)*Sig;
H(5)=Sig'*R2*Sig;
%% kořeny rovnice čtvrtého řádu -- sloupce = řešení jedné vrstvy
%% (první sloupec = první-vnitřní vrstva atd.)
tgAlpha=[tgAlpha,roots(H)];
endfor
%% Najdi řešení (tj. řádek) kde jsou všechny kořeny reálné
realneJsouSjednickou=((sign(abs(imag(tgAlpha)))-ones(size(tgAlpha)))~=zeros(size(tgAlpha)));
radekZtgAlfaCelyRealny=find(realneJsouSjednickou*ones(N,1));
%% úhel odpovídající kořenovým tangentám
alphaKomplexni=atan(tgAlpha);
%% úhel odpovídající reálné kořenové tangentě
alpha=alphaKomplexni(radekZtgAlfaCelyRealny,:);
alpha=[pi/2;alpha];
```

```
%% ================================================================================
%% Sestavení všech vyhodnocovaných bodů (Každý řádek představuje jeden \
%%                            stacionární bod N vrstvé trubky)
Alfa=[];
Alfa=alpha(:,1);
[ralp,salp]=size(alpha);
for n=2:N
Alfa=[kron(Alfa,ones(size(alpha(:,n)))),kron(ones(ralp^(n-1),1),alpha(:,n))];
endfor
Ww=[];
f=[];
[ral,sal]=size(Alfa); %% ral... počet různých stacionárních bodů
for k=1:ral
al=Alfa(k,:)';
%% Řešení 2. bodu algoritmu
%% ================================================================================
%% výpočet multiplikátorů $\pmb{\lambda}$ (Sigmus=[])
%% průřezové charakteristiky $A^\nu$ a $S^\nu$ jako vektor s prvky odpovídajícími
%% úhlu orientace jednotlivých vrstev (od vnitřní k vnější)
A=pi*((R*ones(N,1)+nu*t).^2-(R*ones(N,1)+(nu-ones(N,1))*t).^2);
mS=2*pi/3*((R*ones(N,1)+nu*t).^3-(R*ones(N,1)+(nu-ones(N,1))*t).^3);
S=kron(A,[1,0,0;0,0,0;0,0,0])+kron(ones(N,1),[0,0,0;0,1,0;0,0,0])+kron(mS,[0,0,0;0,0,0;0,0,1]);
Pp=kron(diag(A.*(cos(al)).^4),R1)+kron(diag(A.*(cos(al)).^3.*sin(al)),R2)+\
   kron(diag(A.*(cos(al).^2).*(sin(al).^2)),R3)+kron(diag(A.*cos(al).*(sin(al)).^3),R4)+\
   kron(diag(A.*(sin(al)).^4),R5);
Sigmus=S'*(Pp^(-1))*S;
lambda=-Sigmus^(-1)*[F;p*R/t;Mk];
%% ================================================================================
%% výpočet napětí $\pmb{\sigma}^\nu$: Dávám to do sloupce po trojicích
%% jde o napjatost (po trojicích) od vnitřního poloměru.
sigma=-Pp^(-1)*S*lambda;
%% ================================================================================
%% Vyhodnocení cílové funkce
%% ================================================================================
Ww=[Ww;sigma']; %% sloupce představují napětí (po trojicích) od \
%%                vnitřního poloměru příslušná uhlům alpha v \
%%                odpovídajícím řádku matice Alfa
f=[f;sigma'*Pp*sigma];
endfor
% srovnej dle velikosti f (od malého k velkému)
[srovnanyf,indexf]=sort(f);
sigmat=Ww(indexf(1),:);
al=Alfa(indexf(1),:);
AReseni=[AReseni;jj,f(indexf(1)),al*180/pi,sigmat];
%%              matice nejlepšího řešení každé iterace obsahuje
%%              postupně v řádcích: číslo iterace, hodnotu
%%              minimalizované funkce, příslušné hodnoty úhlů od vnitřní vrstvy a
%%              napjatost po trojicích přislušnou jednotlivým vrstvám od středu
sigma=sigmat';
if (f(indexf(1))==fff) jj=JJ;
else
jj=jj+1;
endif
fff=f(indexf(1));
endwhile %%jj
%endfor
cputime2=cputime;
cpucas=cputime2-cputime1
APosledniReseni=[f(indexf),Alfa(indexf,:)*180/pi];
save AResenixxx.data cpucas F p Mk N VychoziBod AReseni APosledniReseni
```

10.6.4 Příklady

Pro materiál z tabulky 10.1 a rozměry trubky $R = 10\,\mathrm{mm}$ a $t = 1\,\mathrm{mm}$ dostáváme pro uvedený počet vrstev a zatížení v tabulkách 10.4 až 10.6 zaznamenané výsledky.

F [N]	p [MPa]	M_k [Nmm]	α [°]	σ_{xx} [MPa]	σ_{yy} [MPa]	σ_{xy} [MPa]	cpu [s]
628	0	0	0	9,52	0	0	0,07
0	1	0	$\pm 90°$	0	10	0	0,09
0	0	5 500	$\pm 45°$	0	0	7,93	0,1
628	1	0	$\pm 90°$	9,52	10	0	0,08
800	1	0	0°	12,13	10	0	0,12
628	0	5 500	$-29,52°$	9,52	0	7,93	0,42
0	1	5 500	$-61,11°$	0	10	7,93	0,08
628	1	5 500	$-45,87°$	9,52	10	7,93	0,1
628	1	-5 500	$45,87°$	9,52	10	-7,93	0,1

Tabulka 10.4: Jednovrstvá trubka kombinovaně namáhaná ($N = 1$)

F [N]	p [MPa]	M_k [Nmm]	α_1 [°]	α_2 [°]	σ^1_{xx} [MPa]	σ^1_{yy}	σ^1_{xy}	σ^2_{xx}	σ^2_{yy}	σ^2_{xy}	cpu [s]
628	0	0	0	0	4,54	0	0	4,54	0	0	0,12
0	1	0	$\pm 90°$	$\pm 90°$	0	5,23	0	0	4,77	0	0,12
0	0	5 500	$-44{,}4°$	$45{,}6°$	3,42	3,27	3,63	-3,13	-3,27	3,59	2,88
0	0	-5 500	$-44{,}4°$	$45{,}6°$	-3,42	-3,27	-3,63	3,13	3,27	-3,59	1,81
628	1	0	$\pm 90°$	0	0,78	9,21	0	7,98	0,79	0	0,13
628	0	5 500	$61,93°$	$-29,34°$	-0,28	-2,80	1,87	8,95	2,80	5,05	0,99
0	1	5 500	$24,90°$	$-62,65°$	-2,90	0,033	1,74	2,65	9,97	5,17	1,02
628	1	5 500	$-59,07°$	$-34,57°$	2,92	6,75	3,57	6,02	3,25	3,63	4,27
628	1	-5 500	$59,07°$	$34,57°$	2,92	6,75	-3,57	6,02	3,25	-3,63	3,88

Tabulka 10.5: Dvouvrstvá trubka kombinovaně namáhaná ($N = 2$)

F [N]	p [MPa]	M_k [Nmm]	α_1 [°]	α_2 [°]	α_3 [°]	cpu [s]
628	0	0	0	0	0	0,28
0	1	0	$\pm 90°$	$\pm 90°$	$\pm 90°$	0,36
0	0	5 500	$-43{,}79°$	$-44{,}15°$	$45{,}54°$	1,72
0	0	-5 500	$-43{,}79°$	$-44{,}15°$	$45{,}54°$	1,70
628	1	0	$\pm 90°$	$\pm 90°$	0	0,29
628	0	5 500	$63{,}2°$	$-28{,}38°$	$-29{,}69°$	4,23
628	0	-5 500	$-63{,}2°$	$28{,}38°$	$29{,}69°$	4,28
0	1	5 500	$-65{,}87°$	$26{,}37°$	$-61{,}69°$	2,55
628	1	5 500	$-66{,}81°$	$-48{,}43°$	$-28{,}11°$	24,48
628	1	-5 500	$66{,}81°$	$48{,}43°$	$28{,}11°$	24,37
-628	1	-5 500	$74{,}13°$	$72{,}48°$	$-19{,}05°$	0,65

Tabulka 10.6: Třívrstvá trubka kombinovaně namáhaná ($N = 3$)

10.6.5 Zajímavost

Bederní meziobratlová ploténka člověka jest přibližně[15] kompozitovou trubkou shora popsaného typu s materiálovými charakteristikami uvedenými[16] v tabulce 10.7.

$$
\begin{aligned}
E_1^\nu &= 600\,\mathrm{MPa}\\
E_2^\nu &= 300\,\mathrm{MPa}\\
G_{12}^\nu &= 300\,\mathrm{MPa}\\
\nu_{12}^\nu &= 0{,}34
\end{aligned}
$$

Tabulka 10.7: Materiálové charakteristiky vrstvy tvořící lidskou bederní meziobratlovou ploténku

Průměrně jest lidská bederní meziobratlová ploténka zatížena[17] osovou silou $F = 10\ 000$ N, vnitřním přetlakem $p = 100$ MPa a malým kroutícím momentem $M_k = 1$ Nmm. Ortotropních vrstev v tabulce 10.7 popsaných vlastností tvořících bederní ploténku je značné množství a jsou kladeny střídavě pod úhly[18] $\pm 65°$.

Postupem v tomto paragrafu popsaným dostáváme, za podmínek platných pro bederní plo-

[15] Dle názoru biomechanika dr. Mateje Daniela. V této souvislosti musím doporučit jeho zajímavé práce: [Daniel *et al.*, 2005], [Daniel *et al.*, 2003], [Daniel *et al.*, 2001], [Iglič *et al.*, 2000], [Mavčič *et al.*, 2002], [Pompe *et al.*, 2003], [Vengust *et al.*, 2001], [Vengust *et al.*, 2000], [Iglič *et al.*, 2002]. Srvn. též knihu [Adams *et al.*, 2002].

[16] Údaje poskytl dr. Daniel.

[17] Dle téhož zdroje.

[18] Srvn. [Adams *et al.*, 2002] s. 15.

ténku, při uvažování pěti vrstev jakožto tuhost maximalizující skladbu vektor orientací vrstev

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} -64.93 \\ 64.71 \\ -64.49 \\ 64.28 \\ -64.07 \end{pmatrix}^{\circ} .$$

10.7 Laminátová trubka jednovrstvá při nejistém zatížení

10.7.1 Obecná formulace

Uvažujme úlohu o nalezení úhlu vinutí laminátové trubky, který by zabezpečil dosažení nejvyšší tuhosti této trubky v případě, kdy je namáhána nejvíce nebezpečnou konfigurací z množiny uvažovaných zatížení.

Obecně máme tedy úlohu nalézt takový tenzor poddajnosti $\hat{\boldsymbol{C}} \in \mathbb{C}$, který minimalizuje míru poddajnosti $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ a to v případě, kdy $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\tilde{\boldsymbol{t}})$ jest stav napětí vyvolaný nejméně příznivou konfigurací uvažovaných zatížení $\boldsymbol{t} \in \mathbb{T}$ z množiny uvažovaných zatěžovacích stavů $\mathbb{T}$:

$$\hat{\boldsymbol{C}} = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \max_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{T}} \mathfrak{l}(\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{t}))), \tag{10.32}$$

což (srovnáním se vztahy na s. 118) jest

$$\{\hat{\boldsymbol{C}}, \hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}} \max_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{T}} \min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}} \int_{\Omega} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega,$$

kde $\mathbb{C}$ jest množina v daném případě přijatelných tenzorů poddajnosti, $\mathbb{T}$ množina uvažovaných zatěžovacích stavů a $\mathbb{S}$ množina přípustných napěťových stavů

$$\mathbb{S} = \{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij,i} + p_j = 0 \text{ na } \Omega \ \wedge\ \sigma_{ij}\ell_j = t_i \text{ na } \partial_t\Omega\}.$$

10.7.2 Formalizace uvažované úlohy

V případě námi uvažované jednovrstvé trubky namáhané tahem, krutem a vnitřním přetlakem[19] jest množina $\mathbb{S}$ jednobodová:

$$\mathbb{S} = \left\{\sigma_{xx} = \frac{N}{2\pi R t},\ \sigma_{yy} = \frac{pR}{t},\ \sigma_{xy} = \frac{M_k}{2\pi R^2 t}\right\}.$$

Tím máme vnitřní minimalizaci rozřešenu. Množinu $\mathbb{T}$ volme tak, aby součet druhých mocnin měl pevnou hodnotu S:

$$\mathbb{T} = \left\{N, M_k, p \mid \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2 = S\right\}.$$

Odtud se při použití úprav z předchozího paragrafu dostáváme k úloze

$$\left\{\hat{\alpha}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^t\right\} = \arg\min_{\alpha_\nu} \max_{\sigma_{ij}\in\mathbb{T}^\sigma} \mathfrak{c}, \tag{10.33}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{P}^\nu\boldsymbol{\sigma},$$

kde

$$\mathbb{T}^\sigma = \left\{\boldsymbol{\sigma} \mid \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma} = S\right\}$$

a $\boldsymbol{P}^\nu$ jest vyjádřeno vztahem (10.26) na s. 234. Napětí $\boldsymbol{\sigma}$ odpovídá shora značenému napětí $\boldsymbol{\sigma}^\nu$ ($\nu = 1$).

Úlohu (10.33) řešme postupným rozřešením vnitřní a vnější úlohy:

[19] [Mareš, 2003j].

1. Vnitřní maximalizační úloha
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\alpha_\nu) = \arg\max_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{T}^\sigma} \mathfrak{c}(\alpha_\nu, \boldsymbol{\sigma}). \tag{10.34}$$
2. V bodu jedna nalezené nebezpečné napětí závisející na úhlu vinutí, tedy vyjádření $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\alpha_\nu)$, dosadíme do formalizace (10.33) naší úlohy, čímž přicházíme k úloze
$$\hat{\alpha} = \arg\min_{\alpha_\nu} \mathfrak{c}(\alpha_\nu, \boldsymbol{\sigma}(\alpha_\nu)).$$

Úlohy z jednotlivých bodů řešme užitím věty o Lagrangeových multiplikátorech[20] uvedené na s. 224.

10.7.3 Rozřešení úlohy z prvého bodu (napětí)

V prvém bodu řešíme úlohu
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \arg\max_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{T}^\sigma} \mathfrak{c}(\alpha_\nu, \boldsymbol{\sigma}).$$

Dle citované věty sestavme nutnou podmínku:

a) Podmínka stacionárnosti Lagrangeovy funkce
$$\mathcal{L}_c = \frac{\lambda_0}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{P}^\nu \boldsymbol{\sigma} + \lambda(\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma} - S)$$
má tvar
$$\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0},$$
to jest
$$\lambda_0 \boldsymbol{P}^\nu \boldsymbol{\sigma} + 2\lambda\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \tag{10.35}$$
Připomeňme, že bod $\boldsymbol{\sigma}$ musí být bodem přípustným, tedy splňovat vedlejší podmínku
$$\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\sigma} = S.$$

b) Podmínka inverzní korespondence znamémek se redukuje na podmínku
$$\lambda_0 \leq 0,$$
což plyne ze záměny maximalizace funkce $\mathcal{P}_c$ za minimalizaci funkce $-\mathcal{P}_c$.

c) Podmínka komplementarity jest, vzhledem k nepřítomnosti vedlejších podmínek ve tvaru nerovnosti, splněna *á priori*.

Je-li $\lambda_0 \neq 0$, lze tuto konstantu, při zachování platnosti podmínky b), volit.[21] Předpokládejme, že $\lambda_0 \neq 0$ a volme $\lambda_0 = -1$. Hodnota součinitele λ jest pak určena splněním vedlejší podmínky.

Podmínka stacionárnosti (10.35) tak nabývá tvaru
$$\boldsymbol{P}^\nu\boldsymbol{\sigma} - \ell\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0},$$
kde jsme psali $\ell = 2\lambda$.

V této podmínce jde o soustavu lineárních rovnic proměnných σ_{ij}, kterou symbolicky pišme ve tvaru
$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \tag{10.36}$$

[20] Srvn. [Alexejev *et al.*, 1991].
[21] Srvn. [Lavrenťjev and Lusternik, 1952] a [Alexejev *et al.*, 1991].

kde

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}^{\nu} - \ell \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tato úloha má netriviální řešení jen tehdy, je-li ℓ vlastním číslem matice $\boldsymbol{P}^{\nu}$. Při řešení nutné podmínky nejprve nalezneme vlastní čísla ℓ^i a vlastní vectory $\boldsymbol{s}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ matice $\boldsymbol{P}^{\nu}$. Přitom nás zajímají pouze reálná řešení. Řešení nutné podmínky pak hledáme ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = t^i \boldsymbol{s}^i,$$

kde $t^i \in \mathbb{R}$ určíme z podmínky splnění vedlejší podmínky

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2 = S.$$

Z ní

$$t^i = \pm \sqrt{\frac{S}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}.$$

Z takto získaných řešení rozhodneme z velikosti cílové funkce (10.33) o bodu maxima.

Máme-li specifikovánu číselnou hodnotu úhlu vinutí, pak je řešení této úlohy poměrně snadné. Avšak obecné řešení a analytické vyjádření závislosti $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\alpha_{\nu})$ hodnoty nebezpečné napjatosti na uvažovaném úhlu vinutí je velmi obtížné. Proto k nalezení této závislosti (alespoň přibližné) použijeme metodu *odezvové plochy*:[22]

i) Pro hodnoty $\alpha^k = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{K} \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, K)$ nalezneme podle hořejších vztahů příslušnou hodnotu nebezpečného napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

ii) Metodou nejmenších čtverců pak hledáme koeficienty jistým způsobem zvoleného výrazu vyjadřujícího tuto napjatost. Tento zvolený výraz musí splňovat dvě podmínky: Předně umožnění dostatečné přesnosti a dále vhodnost a použitelnost k řešení úlohy z bodu 2.

Sledujme vhodnost modelu

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a}_p \cos^p \alpha^k + \boldsymbol{a}_{p-1} \cos^{p-1} \alpha^k \sin \alpha^k + \ldots + \boldsymbol{a}_1 \cos \alpha^k \sin^{p-1} \alpha^k + \boldsymbol{a}_0 \sin^p \alpha^k \quad (\boldsymbol{a}_p \in \mathbb{R}^3, p \in \mathbb{N})$$

z hlediska přesnosti (vhodnost z hlediska použitelnosti vedla k jeho zvolení).

10.7.4 Sestavení vztahu pro nalezení koeficientů $\boldsymbol{a}_i$ – metoda nejmenších čtverců

Pro zvolené p obsahuje naše úloha $3 \times p$ neznámých: $\boldsymbol{a}_p \in \mathbb{R}^3$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Pro jedno řešení numerického experimentu (při uvažování zvoleného úhlu vinutí α^k) pak máme soustavu rovnic

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times 3} \cos^p \alpha^k, & \boldsymbol{I}_{3\times 3} \cos^{p-1} \alpha^k \sin \alpha^k, & \ldots, & \boldsymbol{I}_{3\times 3} \cos \alpha^k \sin^{p-1} \alpha^k, & \boldsymbol{I}_{3\times 3} \sin^p \alpha^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_p \\ \boldsymbol{a}_{p-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_0 \end{pmatrix}.$$

Pro K řešení numerického experimentu jest pak

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a},$$

[22]Srvn. např. [Venter *et al.*, 1996], [Venter and Haftka, 1997].

kde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^0 \\ \boldsymbol{\sigma}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}^K \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^0 \\ \boldsymbol{A}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}^K \end{pmatrix}.$$

Ve smyslu metody nejmenších čtverců je pak

$$\boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\Sigma}.$$

10.7.5 Nutná podmínka řešení úlohy z druhého bodu algoritmu (úhel vinutí)

Nutná podmínka pro řešení úlohy z druhého bodu algoritmu

$$\frac{\partial\mathfrak{c}(\alpha,\boldsymbol{\sigma}(\alpha))}{\partial\alpha} = 0$$

jest dána vyjádřením cílové funkce

$$\mathfrak{c}(\alpha,\boldsymbol{\sigma}(\alpha)) = \sum_{i=0}^{p}\boldsymbol{a}_i^T\cos^i\alpha\sin^{p-i}\alpha\,\big(\boldsymbol{R}^{1\nu}\cos^4\alpha + \boldsymbol{R}^{2\nu}\cos^3\alpha\sin\alpha + \boldsymbol{R}^{3\nu}\cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$$+\boldsymbol{R}^{4\nu}\cos\alpha\sin^3\alpha + \boldsymbol{R}^{5\nu}\sin^4\alpha\big)\sum_{j=0}^{p}\boldsymbol{a}_j^T\cos^j\alpha\sin^{p-j}\alpha,$$

či lépe

$$\mathfrak{c} = \sum_{i,j=0}^{p}\sum_{\varrho=1}^{5}\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{R}^{\varrho\nu}\boldsymbol{a}_j\cos^{i+5-\varrho+j}\alpha\sin^{2p-i-j+\varrho-1}\alpha.$$

Nutná podmínka má tedy tvar

$$\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial\alpha} = \sum_{i,j=0}^{p}\sum_{\varrho=1}^{5}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{R}^{\varrho\nu}\boldsymbol{a}_j\,\big(-(i+5-\varrho+j)\cos^{i+4-\varrho+j}\alpha\sin^{2p-i-j+\varrho}\alpha +$$

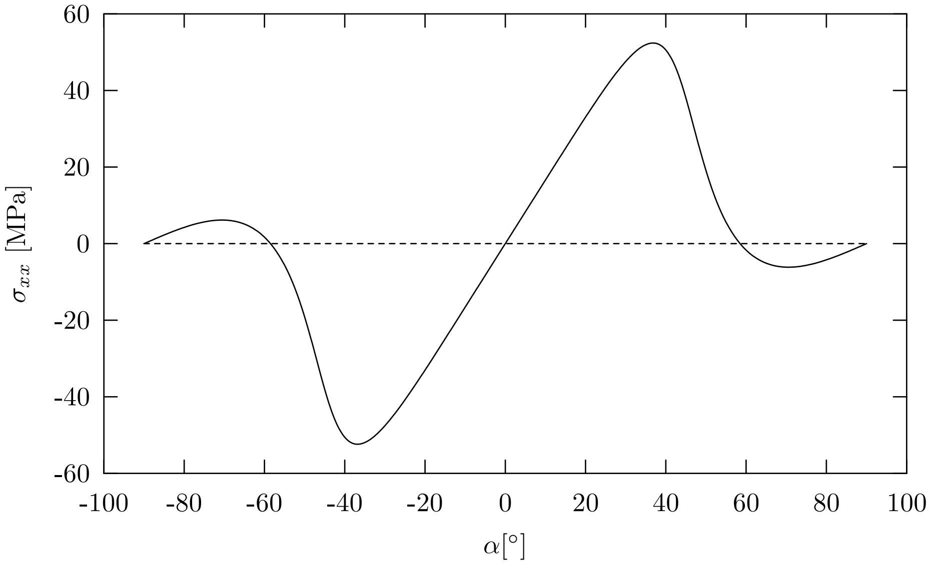
$$+(2p-i-j+\varrho-1)\cos^{i+6-\varrho+j}\alpha\sin^{2p-i-j+\varrho-2}\alpha\big) = 0.$$

10.7.6 Příklad

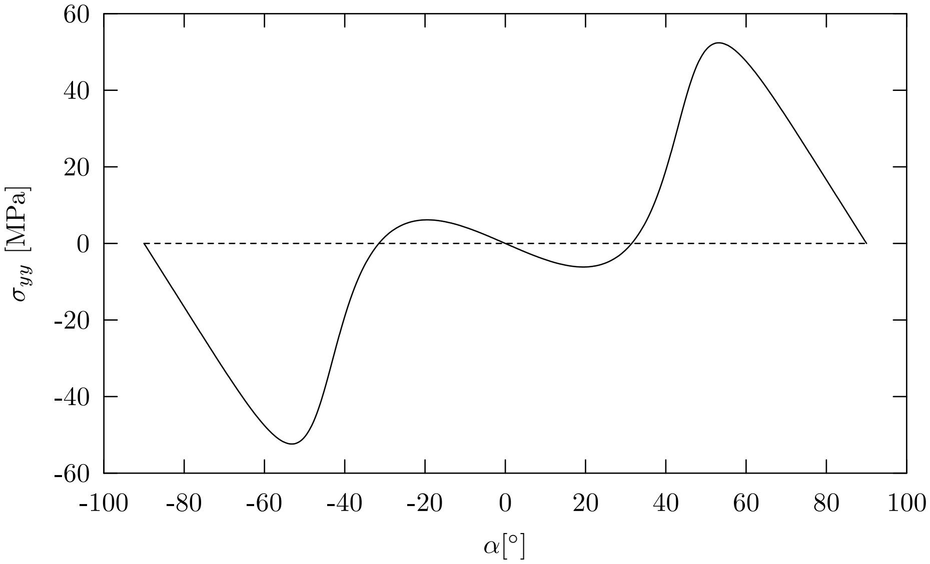
Pro materiálové charakteristiky z tabulky 10.1 na s. 220 a zvolenou konstantu $S = 10\ 000$ MPa^2 následuje řešení provedené shora popsaným postupem. Závěry jednotlivých kroků jsou popsány v následujících grafech. Na obr. 10.14–10.18 je znázorněna nebezpečná napjatost v závislosti na hodnotě úhlu α. Podotkněme, že každému nebezpečnému stavu $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ odpovídá zrovna tak nebezpečný stav napětí $-\sigma_{xx}, -\sigma_{yy}, -\sigma_{xy}$. Na obrázcích 10.19–10.21 je porovnán průběh získané odezvové plochy s přímo vypočtenými daty.

Ze závislosti hodnoty cílové funkce v případě uvažování nebezpečné napjatosti pro jistý úhel vinutí na obrázku 10.17 jest patrné, že nejmenší hodnota cílové funkce je při úhlu vinutí $\pm 45°$.

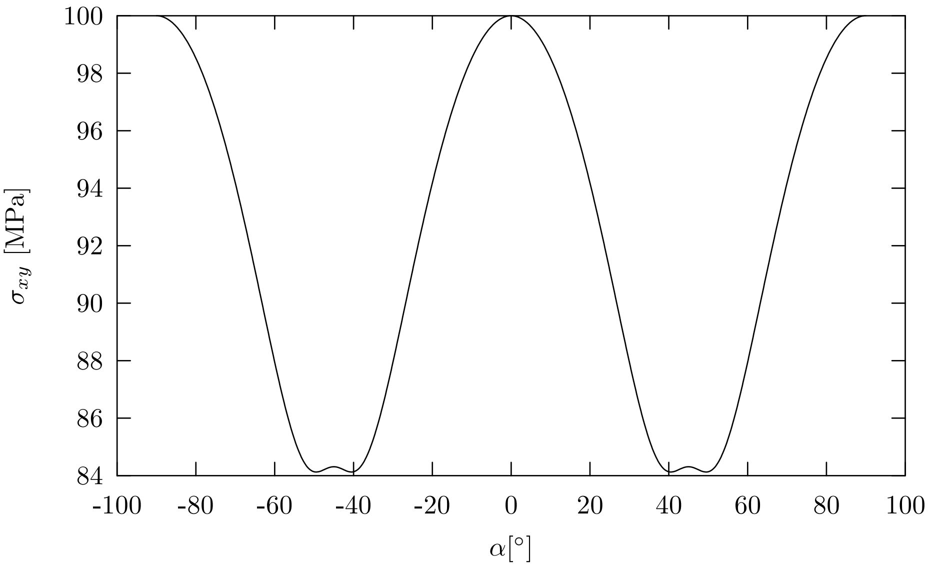
Závěr: V průběhu tohoto paragrafu byla matematickou cestou (při přijetí jistých předpokladů) ověřena intuitivní a z empirie běžně známá skutečnost: Není-li znám způsob zatěžování laminátové trubky, pak jest vhodné zvolit úhel jejího vinutí o velikosti $\pm 45°$.



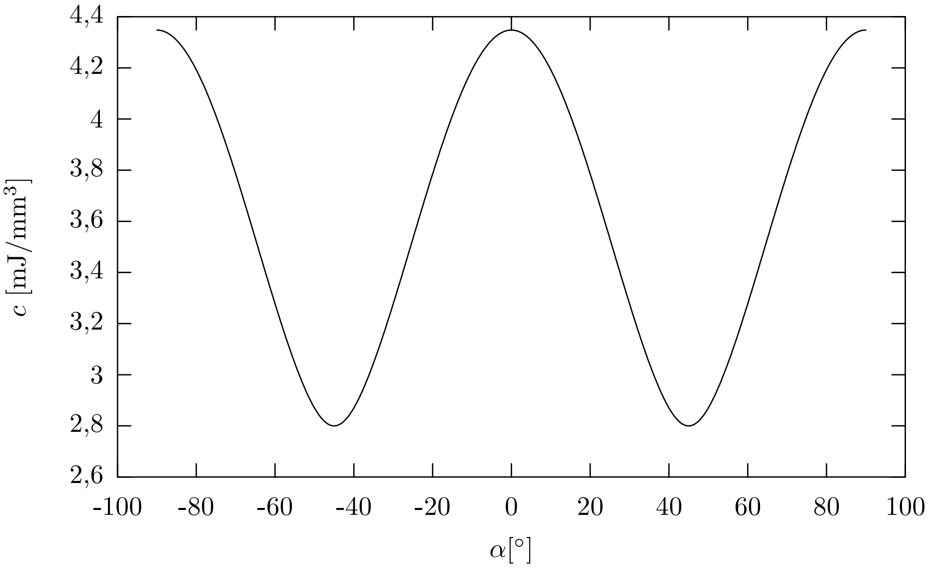
Obrázek 10.14: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{xx}$



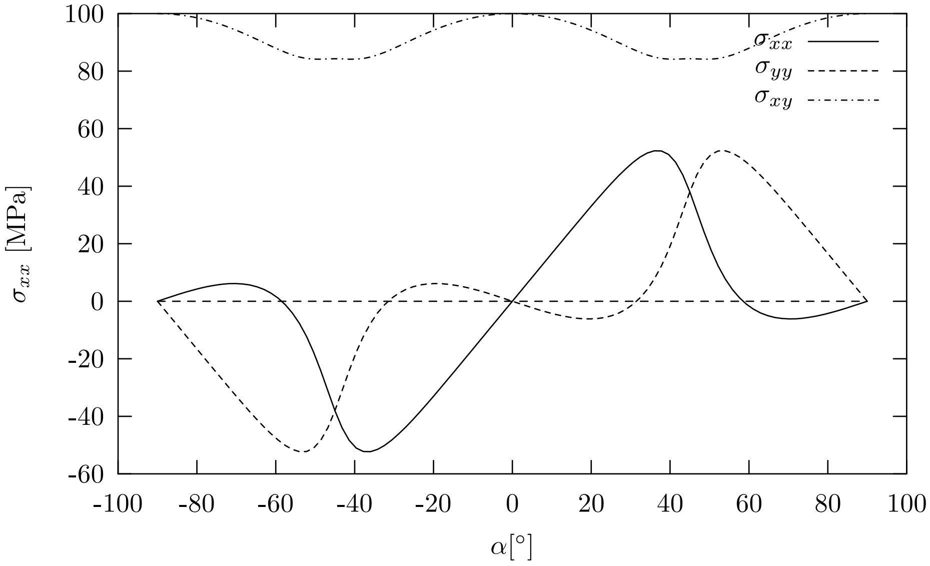
Obrázek 10.15: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{yy}$



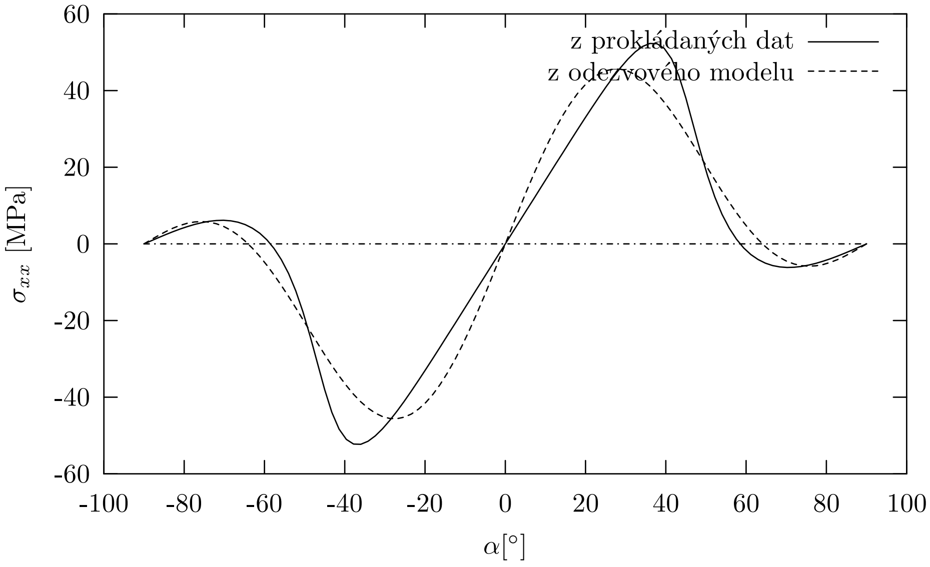
Obrázek 10.16: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{xy}$



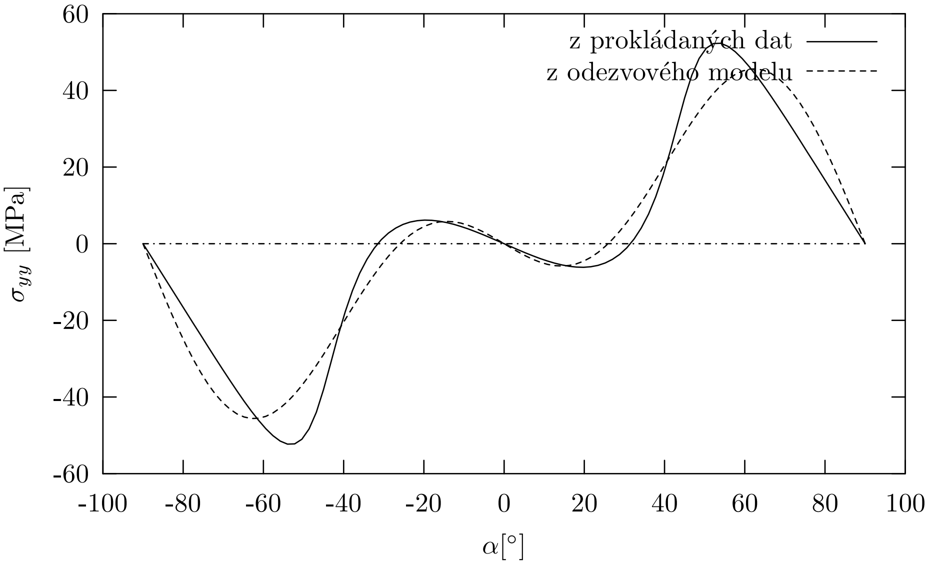
Obrázek 10.17: Závislost hodnoty cílové funkce při nebezpečné napjatosti: $\alpha - \mathfrak{c}$



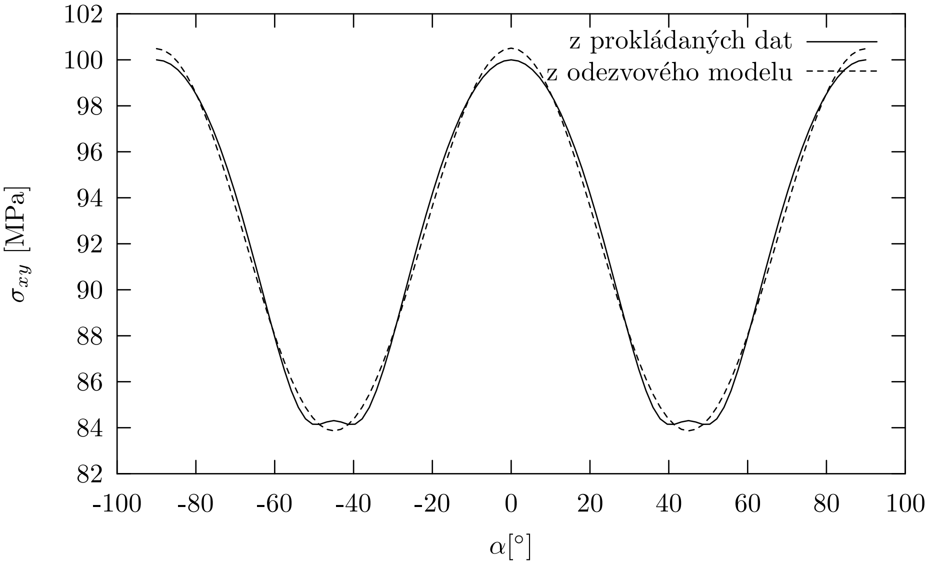
Obrázek 10.18: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \boldsymbol{\sigma}$



Obrázek 10.19: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{xx}$



Obrázek 10.20: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{yy}$



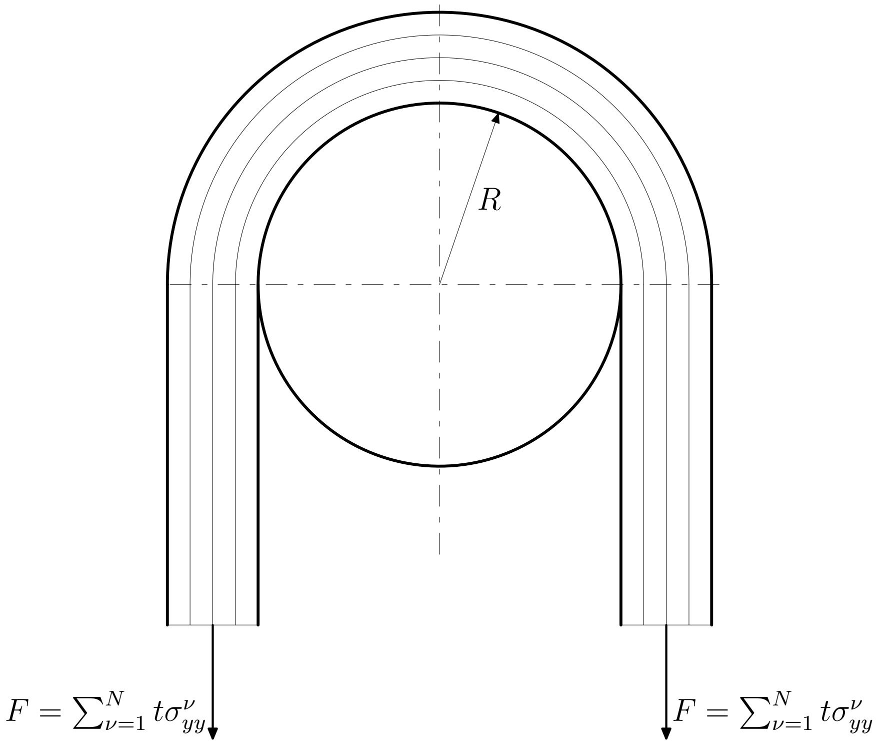
Obrázek 10.21: Závislost nebezpečné napjatosti: $\alpha - \sigma_{xy}$

Kapitola 11

Závěsné oko konstantního napětí

11.1 Namáhání laminátového závěsného oka

Uvažujme laminátové závěsné oko dle obr. 11.1, složené z N vrstev s vlákny orientovanými ve směru závěsného provazce. Pro další vyjadřování se přidržíme v předchozí kapitole zavedených soustav souřadnic.



Obrázek 11.1: Laminátové závěsné oko

11.2 Namáhání elementu závěsného oka

Předpoklady:

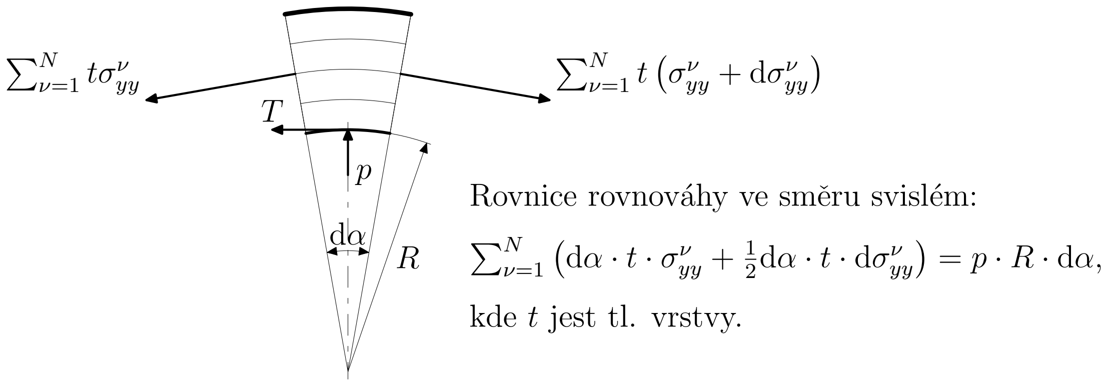
- Oko je složeno z N tenkých laminátových ortotropních vrstev označených indexem ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$).

- Hookeův zákon této vrstvy v $\mathbb{E}_2$ v soustavě souřadnic položené do hlavních směrů ortotropní vrstvy:[1]

$$\sigma_{ij}^{\nu} = E_{ijkl}^{\nu} \varepsilon_{kl}^{\nu}.$$

- Vzhledem k zatížení tahem nedochází ke ztrátě stability (hroucení).

- Tloušťka vrstvy je mnohem menší nežli poloměr — soustava souřadnic „rádius-tečna" (rt) splývá v aktuálním bodě s globální soustavou souřadnic vrstvy rozvinutého pláště (xy).



Obrázek 11.2: Element závěsného oka

Podle obr. 11.2 můžeme, po zanedbání malých veličin druhého řádu, psát

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{yy} = \frac{pR}{t}.$$

Naposled uvedené, spolu s obr. 11.2 vyvolává představu elementu silnostěnné N-vrstvé laminátové nádoby s úhlem vinuti 90°.[2] K takové nádobě obraťme svou pozornost.

11.3 Silnostěnné N-vrstvé laminátové nádoby s úhlem vinutí 90° namáhané vnitřním přetlakem

Napjatost jednotlivých vrstev N-vrstvé laminátové nádoby s úhlem vinutí 90° namáhané vnitřním přetlakem vyjádřeme užitím principu minima doplňkové energie ve tvaru[3]

$$\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\$} \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \,\mathrm{d}\Omega, \tag{11.1}$$

kde

$$\$ = \left\{ \sigma_{xx}^{\nu} = 0,\ \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{yy}^{\nu} = \frac{pR}{t},\ \sigma_{xy}^{\nu} = 0 \right\}.$$

Zde upozorněme, že *zanedbáváme* radiální složku napětí.

[1] Srvn. vztah (9.7) na s. 138.
[2] Srvn. předchozí kapitolu a [Mareš, 2005b], [Mareš, 2005d] a [Mareš, 2005a].
[3] Viz odkazy předchozí poznámky a [Mareš, 2005c].

Pro tenzor poddajnosti C_{ijkl} vyjádřený v globální soustavě souřadnic platí pro $r \in \langle R+(\nu-1)t, R+\nu t\rangle$ (tj. v místě obsazeném vrstvou ν)

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \ell^{\nu}_{im}\ell^{\nu}_{jn}\ell^{\nu}_{ko}\ell^{\nu}_{lp}C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

kam dosadíme

$$\ell^{\nu}_{im} = \delta_{im}\cos 90^\circ + \epsilon_{im}\sin 90^\circ = \epsilon_{im},$$

Tím

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \mathfrak{R}^{5\nu}, \tag{11.2}$$

kde

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \epsilon_{im}\epsilon_{jn}\epsilon_{ko}\epsilon_{lp}C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

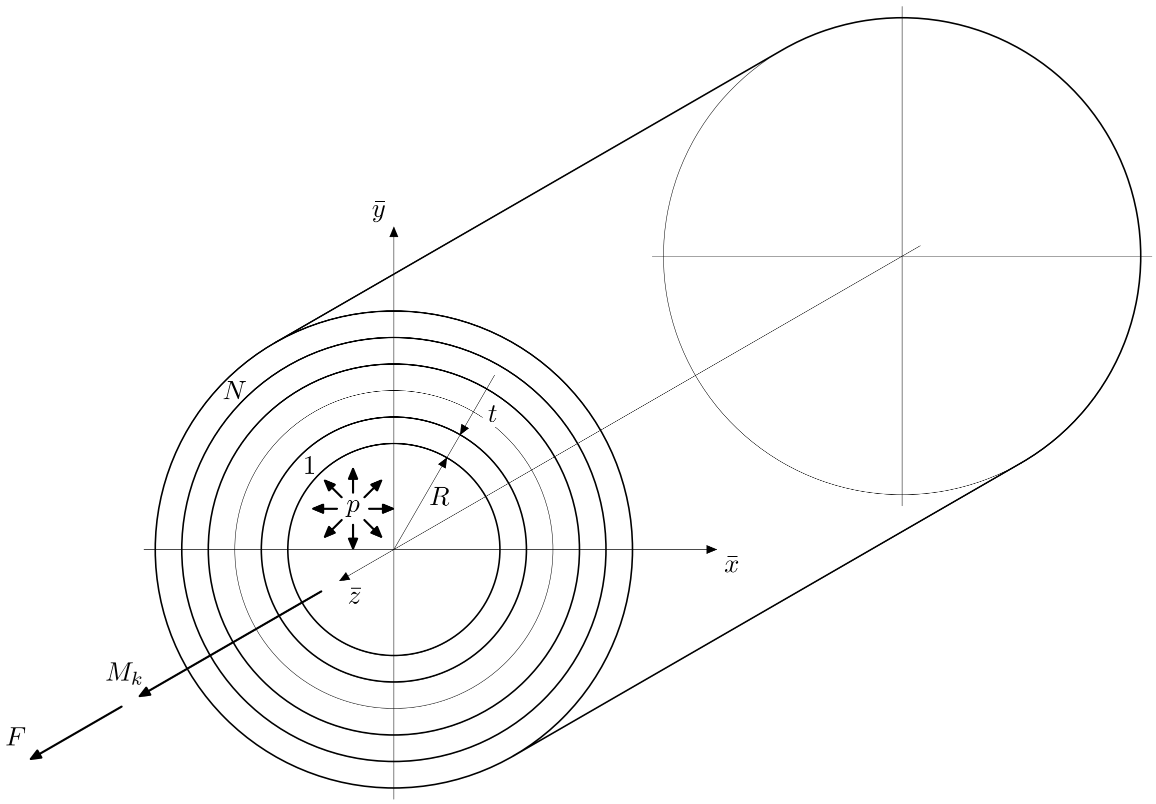
$$\mathfrak{R}^{5\nu} = (\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{mj})(\delta_{kl}\delta_{op} - \delta_{kp}\delta_{ol})\, C^{\nu}_{mnop}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = C^{\nu}_{mmpp}\sigma_{ii}\sigma_{kk} + C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - C^{\nu}_{ijpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk} - C^{\nu}_{mmkl}\sigma_{ii}\sigma_{kl},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = C^{\nu}_{mmpp}\sigma_{ii}\sigma_{kk} + C^{\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\sigma_{ij}\sigma_{kk},$$

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \left(C^{\nu}_{mmpp}\delta_{ij}\delta_{kl} + C^{\nu}_{ijkl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\delta_{kl}\right)\sigma_{ij}\sigma_{kl}.$$

V případě jednovrstvé trubky je množina $\mathbb{S}$ jednobodová a tedy řešení $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ známo.



Obrázek 11.3: Kruhová vícevrstvá laminátová trubka namáhaná krutem, tahem a vnitřním přetlakem

Při uvažování laminátové trubky vícevrstvé můžeme cílový funkcionál (násobení konstantou je nepodstatné)

$$\mathfrak{c} = \int_{\Omega} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}\Omega$$

upravit na

$$\mathfrak{c} = l \int_R^{R+tN} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} 2\pi\varrho \, \mathrm{d}\varrho = 2\pi l \sum_{\nu=1}^{N} \int_{R+(\nu-1)t}^{R+\nu t} C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\varrho \, \mathrm{d}\varrho.$$

Pro $\varrho \in \langle R+(\nu-1)t, R+\nu t\rangle$ máme vztahem (11.2)

$$C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\sigma^{\nu}_{ij}\sigma^{\nu}_{kl},$$

kde pro $\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}$ platí:[4]

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = \mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},$$

$$\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl} = \left(C^{\nu}_{mmpp}\delta_{ij}\delta_{kl} + C^{\nu}_{ijkl} - 2C^{\nu}_{ijpp}\delta_{kl}\right),$$

přičemž

$$C^{\nu}_{mmpp} = c^{\nu}_1 + 2c^{\nu}_{12} + c^{\nu}_2,$$

$$\left\{C^{\nu}_{ijpp}\right\}_{ij\lceil} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_1 + c^{\nu}_{12} \\ 0 \\ 0 \\ c^{\nu}_{12} + c^{\nu}_2 \end{pmatrix},$$

a odtud

$$\left\{\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\right\}_{ij\lceil kl} = \begin{pmatrix} c^{\nu}_2 & 0 & 0 & -c^{\nu}_1 + c^{\nu}_{12} + c^{\nu}_2 \\ 0 & g^{\nu} & g^{\nu} & 0 \\ 0 & g^{\nu} & g^{\nu} & 0 \\ c^{\nu}_1 + c^{\nu}_{12} - c^{\nu}_2 & 0 & 0 & c^{\nu}_1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathfrak{R}^{5\nu} = c^{\nu}_2\sigma^2_{xx} + 4g^{\nu}\sigma^2_{xy} + c^{\nu}_1\sigma^2_{yy} + 2c^{\nu}_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy}.$$

Tedy, při zanedbání násobení konstantou,

$$\mathfrak{c} = \sum_{\nu=1}^{N} A^{\nu}\mathcal{R}^{5\nu}_{ijkl}\sigma^{\nu}_{ij}\sigma^{\nu}_{kl},$$

kde

$$A^{\nu} = \pi\left((R+\nu t)^2 - (R+(\nu-1)t)^2\right).$$

Po uplatnění $\sigma_{xx} = 0$ a $\sigma_{xy} = 0$ máme

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} A^{\nu}c^{\nu}_1\sigma^{\nu}_{yy}\sigma^{\nu}_{yy}.$$

Naší úlohu

$$\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\} = \arg\min_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathbb{S}} \mathfrak{c},$$

řešme užitím věty o Lagrangeových multiplikátorech.[5] Jednotlivé body této věty nabývají podobu:

a)

$$\mathcal{L}_N = \lambda_0\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} A^{\nu}c^{\nu}_1\left(\sigma^{\nu}_{yy}\right)^2 + \lambda\left(\sum_{\nu=1}^{N}\sigma^{\nu}_{yy} - \frac{pR}{t}\right),$$

tedy

$$\frac{\partial\mathcal{L}_N}{\partial\sigma^{\mu}} = \lambda_0 A^{\mu}c^{\mu}_1\sigma^{\mu}_{yy} + \lambda = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, N). \tag{11.3}$$

[4]Podrobně sleduj podobné úpravy předchozí kapitoly.

[5]Srvn. např. [Mareš, 2004].

b) $\lambda_0 \geq 0$.

c) Podmínka komplementarity jest splněna požadavkem dodržení vedlejší podmínky

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sigma_{yy}^{\nu} = \frac{pR}{t}. \tag{11.4}$$

Je-li $\lambda_0 = 0$, je také — dle bodu a) — $\lambda = 0$, což odporuje citované větě. Předpokládejme tedy $\lambda_0 > 0$, potom z (11.3)

$$\sigma_{yy}^{\nu} = -\frac{\lambda}{\lambda_0 c_1^{\nu} A_{\nu}}$$

a dosazením do (11.4) máme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = -\frac{pR}{t} \frac{1}{\sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{c_1^{\mu} A_{\mu}}}.$$

Užitím posledního v předcházejícím dostáváme

$$\sigma_{yy}^{\nu} = \frac{pR}{t} \cdot \frac{1}{c_1^{\nu} A_{\nu} \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{c_1^{\mu} A_{\mu}}}, \tag{11.5}$$

kde tlak p závisí na velikosti zatížení oka $(2F)$ a zákonu o rozložení tlaku.

11.4 Závěsné oko konstantního napětí

Pokusme se vyhovět požadavku stálé napjatosti napříč závěsným okem, tedy

$$\sigma_{yy}^{\nu} = \sigma_{\text{požadované}} \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Dle (11.5)

$$\sigma_{\text{požadované}} = \frac{pR}{t} \cdot \frac{1}{c_1^{\nu} A_{\nu} \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{c_1^{\mu} A_{\mu}}}$$

a tedy

$$c_1^{\nu} A_{\nu} \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{c_1^{\mu} A_{\mu}} = \mathfrak{S} \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{11.6}$$

kde

$$\mathfrak{S} = \frac{pR}{t \sigma_{\text{požadované}}}$$

je konstanta.

Podělením obou stran rovnosti (11.6) součinem $c_1^{\nu} A_{\nu}$ a sečtením levých a pravých stran přes všechna ν dostáváme

$$N \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{c_1^{\mu} A_{\mu}} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\mathfrak{S}}{c_1^{\nu} A_{\nu}}$$

a tedy, což je však zřejmé ze shora uvedeného, že $\mathfrak{S} = N$.

Zavedením označení

$$k_{\nu} = \frac{1}{c_1^{\nu} A_{\nu}} \quad (\nu = 1, \ldots, N)$$

můžeme (11.6) psát

$$\sum_{\mu=1}^{N} k_{\mu} = N k_{\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

či maticově jako

$$\mathbf{1}_{N\times N}\boldsymbol{k} = N\boldsymbol{k},$$

kde

$$\boldsymbol{k}^T = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_N \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{1}_{N\times N}$ je matice typu $N \times N$ plná *jedniček*, kterážto rovnost má buď nulové řešení, což našim účelům nevyhovuje, anebo je N vlastním číslem. Ověřme tedy, jaké má úloha

$$\mathbf{1}_{N\times N}\boldsymbol{k} - \lambda\boldsymbol{k} = \mathbf{0}_{N\times 1}$$

vlastní čísla. Podmínku právě splněnou vlastními čísly:

$$\mathrm{D}(N) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

jest možno upravit[6] užitím pravidla o sčítání determinantů

$$\mathrm{D}(N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

a odečtením prvého řádku prvého determinantu od řádků ostatních a rozvinutím druhého determinantu dle prvého sloupce

$$\mathrm{D}(N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}_{N\times N} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)},$$

tj.

$$\mathrm{D}(N) = (-\lambda)^{N-1} - \lambda\mathrm{D}(N-1).$$

Tedy

$$\mathrm{D}(1) = 1-\lambda,$$
$$\mathrm{D}(2) = -2\lambda + \lambda^2,$$
$$\mathrm{D}(3) = 3\lambda^2 - \lambda^3,$$
$$\mathrm{D}(4) = -4\lambda^3 + \lambda^4$$

atd., obecně

$$\mathrm{D}(N) = (-1)^N \left(\lambda^N - N\lambda^{N-1}\right).$$

Naše podmínka

$$\mathrm{D}(N) = 0$$

má tedy podobu

$$\lambda^{N-1}(\lambda - N) = 0$$

a řešení

$$\lambda = N \quad \text{a} \quad \lambda_{2,3,\dots,N} = 0.$$

[6] Srvn. [Rektorys, 1995] na s. 30 či např. [Svätokrížný, 1984].

Existuje tedy nekonečně mnoho řešení $\boldsymbol{k}$ našeho problému. Pokusme se je najít.

Řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1-N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

najdeme úpravou matice soustavy dvěma ekvivalentními úpravami — odečtením posledního řádku od všech předchozích a přičtením $\frac{1}{N}$ násobku prvních $N-1$ řádků k řádku poslednímu, tj.

$$\begin{pmatrix} 1-N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-N \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -N & 0 & \dots & N \\ 0 & -N & \dots & N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -N & N \\ 1 & 1 & \dots & 1-N \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -N & 0 & \dots & N \\ 0 & -N & \dots & N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -N & N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ve tvaru

$$k_\nu = k_N \quad (\nu = 1, 2, \dots, N-1).$$

Označením $k_N = k$ máme $k_\nu = k$ $(\nu = 1, 2, \dots, N)$ a

$$c_1^\nu A_\nu = \frac{1}{k} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N),$$

a jelikož

$$c_1^\nu = \frac{Q_{22}^\nu}{Q_{11}^\nu Q_{22}^\nu - Q_{12}^\nu Q_{12}^\nu} = \frac{E_2^\nu \left(1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu\right)^2}{\left(1 - \nu_{12}^\nu \nu_{21}^\nu\right)\left(E_1^\nu E_2^\nu - \nu_{12}^\nu E_2^\nu \nu_{21}^\nu E_1^\nu\right)} = \frac{1}{E_1^\nu},$$

tak můžeme psát

$$E_1^\nu = k A_\nu,$$

kde na velikosti k nezáleží, jak vidět z pevnostní podmínky vyjádřené pomocí vztahu (11.5):

$$\sigma_{yy}^\nu = \frac{pR}{t} \cdot \frac{k}{Nk} \leq \sigma_{\text{mez}}.$$

Konstanta k zde tedy vystupuje pouze jako míra úměrnosti a vyjadřuje podmínku

$$\frac{E_1^\nu}{A_\nu} = \text{konstanta} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Kapitola 12

Metody a přístupy k optimalizaci topologie

12.1 Úvod do historie a názvosloví optimalizace topologie

Optimalizace topologie je poměrně mladou a rychle se vyvíjející oblastí výpočtové mechaniky, která usiluje o násobně větší ušetření materiálu, než lze dosáhnout optimalizací pouhého rozměru (průřezu) či tvaru.

Optimalizaci topologie konstrukcí lze rozdělit na dvě základní části.[1] Za první takovou část lze považovat *optimalizaci dispozice* (Layout Optimization – LO), která se soustředí na prutové a rámové konstrukce, tedy konstrukce s velmi malým objemem ve srovnání s návrhovou oblastí. (Takovým konstrukcím říkáme konstrukce s malým objemovým zlomkem.) Prvním a vysoce důležitým příspěvkem k tomuto odvětví je práce legendárního Australana A. G. M. Michella.[2] Postupy a závěry této práce byly od počátku sedmdesátých let dvacátého století dále rozšířeny na roštové konstrukce (grillage), tj. konstrukce složené z nosníkových prvků (beam system) panem G. I. N. Rozvany.[3] Na základě těchto aplikačních prací byly později sestaveny obecné principy optimalizace dispozice.[4]

Druhou větví optimalizace topologie je tzv. *zobecněná optimalizace tvaru* (Generalized Shape Optimization – GSO), jež se věnuje konstrukcím, které mají veliký objemový zlomek. U těchto konstrukcí dochází k současnému návrhu topologie a tvaru.[5] Tyto problémy mohou být řešeny analyticky nebo numericky s užitím diskretizace, nejčastěji pak s užitím metody konečných prvků (MKP).[6]

V této souvislosti zmiňme pionýrskou práci pánů Chenga a Olhoffa,[7] kde jest pozorováno, že optimalizovaná pevná deska obsahuje žebra připomínající optimální roštové konstrukce. V této souvislosti byla značná pozornost věnována návrhu děrované (perforované) desky (disku) při rovinné napjatosti.[8]

---

[1] Vznik této práce a její obsah jest hluboce ovlivněn pracemi [Rozvany, 2001a], [Haslinger *et al.*, 2002]; srvn. též [Gaspar *et al.*, 2002].

[2] [Michell, 1904].

[3] Srvn. [Rozvany, 1972a], [Rozvany, 1972b].

[4] Srvn. [Prager and Rozvany, 1977b], [Rozvany, 1992], [Rozvany and Birker, 1994].

[5] Pro zavedení této terminologie srvn. [Rozvany and Zhou, 1991]. Někdy jsou tyto úlohy zvány *Variable Topology Shape Optimization*; viz [Haber *et al.*, 1996].

[6] Za průkopnické práce spojující analýzu provedenou metodou konečných prvků s optimalizací topologie konstrukcí s větším objemovým zlomkem lze považovat následující: [Bendsóe and Kikuchi, 1988], [Bendsóe, 1989], [Bendsóe *et al.*, 1993a], [Rozvany and Zhou, 1991], [Rozvany *et al.*, 1992].

[7] [Cheng and Olhoff, 1981].

[8] Srvn. např. [Lurie *et al.*, 1982], [Lurie *et al.*, 1984], [Kohn and Strang, 1986], [Vigdergauz, 1986]. Exaktní analytické řešení tohoto problému bylo získáno v pracích [Rozvany *et al.*, 1987] a [Ong *et al.*, 1988].

12.2 Metody zobecněné optimalizace tvaru užívající MKP

Klasifikace zobecněné optimalizace tvaru řešené užitím metody konečných prvků jest provedena dle používaných elementů. Rozeznáváme metody využívající:

- *izotropní pevný či prázdný* element (Isotropic Solid or Empty elemet – ISE),
- *anizotropní pevný či prázdný* element (Anisotropic Solid or Empty elemet – ASE)
- *izotropní pevný, prázdný či pórovitý* element (Isotropic Solid, Empty or Porous elemet – ISEP),

Touto terminologii se rozumí následující:

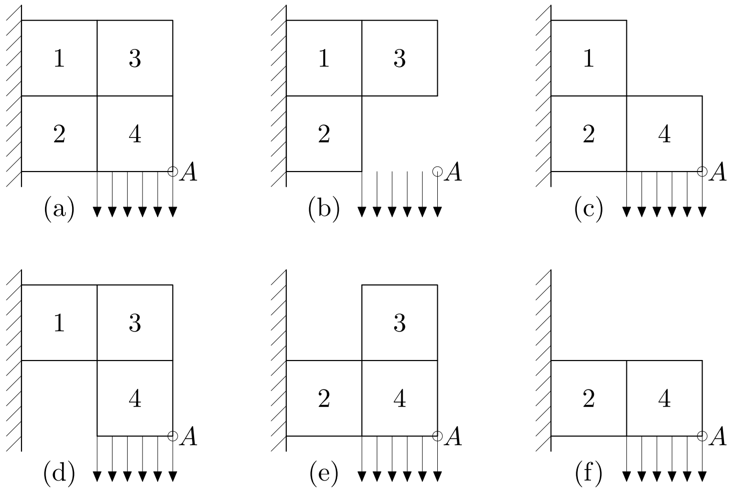
- Pevným (Solid – S) slove element zcela vyplněný výhradně jedním materiálem.
- Prázdný (Empty – E) je element neobsahující žádný materiál.
- Pórovitý (Porous – P) element je tvořen jedním materiálem a prázdným prostorem (void, cavities).
- Kompozitní (Composite – C) element je složen z více různých materiálů, neobsahuje však prázdný prostor.
- Kompozitní-pórovitý (Composite-Porous – CP) element je složen z více různých materiálů a prázdného prostoru.

V případě nejdůležitější třídy topologií, to jest třídy, která vznikne užitím izotropních pevných či prázdných elementů (tzv. ISE-topologie), rozeznáváme tři základní výpočetní strategie: *metoda pevné izotropní mikrostruktury s penalizací* (Solid Isotropic Microstructure with Penalization – SIMP), *metoda optimální mikrostruktury s penalizací* (Optimal Microstructure with Penalization – OMP) a *metoda neoptimálních mikrostruktur* (NonOptimal Microstructures – NOM)

12.2.1 Topologie tvořené izotropními pevnými či prázdnými elementy – ISE-topologie

Zde jako i dále lze uvažovat dva základní přístupy: s pevně danou-zvolenou sítí elementů či s volnou (v průběhu optimalizace se tvořící) sítí elementů. Pro naše účely uvažujme pevně danou síť tvořenou elementy prázdnými či tvořenými jedním z více daných izotropních materiálů o známých vlastnostech. V takovém případě hovoříme o ISE-topologii, tj. topologii tvořenou ISE-elementy. Chceme-li zdůraznit, že v úvahu přicházejí vedle prázdného prostoru čtyři různé materiály, pak hovoříme o 4ISE-topologii. Pokud se omezíme na případ bez prázdných elementů, pak hovoříme o tzv. IS-topologiích.

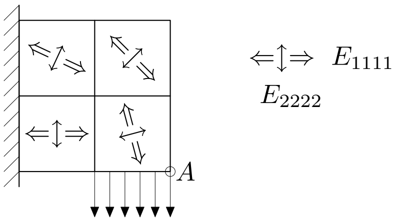
Ukažme si elementární příklad tohoto problému pro 1ISE-topologii (black and white topology). Uvažujme návrhový prostor dle obrázku 12.1 pokrytý sítí sestávající ze čtyř elementů. Dva elementy (1 a 2) jsou pevně vetknuty podél své levé hrany a element čtvrtý (4) jest spojitě obtížen na své dolní hraně. Požadujeme, aby svislá deformace pravého dolního rohu čtvrtého elementu (bodu A) byla minimální, při použití buď pevných nebo prázdných elementů; objemový zlomek by neměl přesáhnout hodnotu 75%.



Obrázek 12.1: Úloha představující 1ISE-topologii: (a) návrhová oblast pokrytá MKP sítí, (b) nepřípustné řešení, (c) optimální řešení, (d–f) přípustná avšak neoptimální řešení

12.2.2 Topologie tvořené anizotropními pevnými či prázdnými elementy – ASE-topologie

Tyto topologie jsou tvořené anizotropními pevnými či prázdnými elementy. Každému elementu jsou přisouzeny jisté mechanické vlasnosti (specifikované tenzorem tuhosti $\boldsymbol{E} = E_{ijkl}$), které jsou v rámci celého elementu konstantní, mezi elementy však obecně vzájemně odlišné.[9] Ilustrace takovéto topologie jest uvedena obrázkem 12.2.



Obrázek 12.2: Příklad ASE-topologie

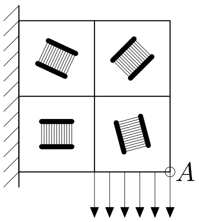
12.2.3 Topologie tvořené izotropními pevnými, prázdnými či pórovitými elementy – ISEP-, ISEC, ISECP-topologie

V těchto topologiích jsou obsaženy elementy tvořené prázdným prostorem a jedním nebo více izotropními materiály. Každý element tedy představuje obecně kompozitní (porézní) strukturu, kterou je možné samostatně optimalizovat. Tato optimalizace se většinou provádí pomocí tzv. homogenizace (matematická homogenizace) heterogenního materiálu.[10]

[9]Obecná formulace této úlohy byla podána v práci [Rodrigues *et al.*, 1999]. Viz také [Guedes and Taylor, 1996], [Taylor, 1998].

[10]Matematické homogenizaci, která jest ve své podstatě relaxací (kvazikonvexifikací) špatně podmíněné úlohy, se věnuje celá řada aplikovaných matematiků. Na tomto místě zmiňme alespoň některé: B. Dacoronga [Dacorogna, 1982], [Dacorogna, 1989], G. Allaire [Allaire, 2002], [Allaire *et al.*, 1997], P. Pedregal [Pedregal, 1999], [Pedregal, 2000], [Pedregal, 2001], A. Cherkaev [Cherkaev, 2000], T. Roubíček [Roubíček, 1997], V. Šverák [Šverák, 1992], M. Bousselsal, B. Brighi [Bousselsal and Brighi, 1997], J. M. Ball [Ball *et al.*, 1999], J. C. Bellido [Bellido and Pedregal, 2002], M. P. Bendsoe [Bendsøe, 1995],

Těmto topologiím se před provedením homogenizace (svým způsobem zprůměrování vlastností přes objem elementu) říká ISEP-topologie (Isotropic base material; Solid, Empty, Porous elements). Příklad takové topologie s elementy složenými z mikrostruktury druhého řádu je na obrázku 12.3. Homogenizací přechází ISEP-topologie na topologii ASE, což je často z výpočtového hlediska výhodné.



Obrázek 12.3: Příklad ISEP-topologie s elementy tvořenými mikrolamináty druhého řádu

ISEC-topologie jsou topologie podobné ISEP-topologiím, kde pórovité elementy jsou nahrazeny elementy kompozitními. ISECP-topologie připouštějí navíc elementy zároveň kompozitové i porézní.

12.3 Metody řešení zobecněné optimalizace tvaru v případě ISE-topologií

12.3.1 Metoda SIMP

Jednou z metod řešení zobecněné optimalizace tvaru v případě ISE-toplogií je tzv. metoda SIMP. V této metodě se uvažuje pevná izotropní mikrostruktura a k řešení se využívá penalizace (Solid Isotropic Microstructures with Penalization – SIMP).[11]

Uvažujeme-li děrovanou desku, která je tvořena z jistého počtu elementů – řekněme 40 000 –, jejichž tloušťka je buď nulová či rovna dané hodnotě t_0, potom dostáváme $2^{40\,000}$ návrhových možností, což je množství nepředstavitelné. Možným východiskem (které ustavuje tuto metodu) je uvažovat spojitě se měnící tloušťku desky $t \in \langle 0, t_0 \rangle$.[12] Vzhledem k tomu, že mechanické vlastnosti desky závisí na tloušťce desky lineárně, lze úlohu o minimalizaci hmotnosti nebo o maximalizaci tuhosti takovéto desky řešit buď užitím metody *kritéria optimality*[13] (Optimality Criterium – OC) či matematického programování (Mathematical Programming – MP).

Obtíž tohoto přístupu k řešení naší úlohy jest ten, že v ISE-topologiích přichází v úvahu pouze tloušťka dané velikosti t_0 nebo tloušťka nulová. Přítomnost mezilehlých hodnot ($0 < t < t_0$) v návrhu se vyskytujících lze omezit na minimum penalizací těchto hodnot. (Odtud písmeno P v názvu popisované metody.) Mezilehlé hodnoty lze penalizovat[14] zavedením specifické tloušťky (hustoty) ϱ, pomocí níž vyjádřená tloušťka (normalizovaná tuhost desky) t je dána vztaham

$$t = \varrho^p, \tag{12.1}$$

kde $p > 1$.

Tato penalizace sice úspěšně potlačí mezilehlé hodnoty tloušťky, ale činí naši úlohu nelineární a nekonvexní. Proto je obvyklé začínat výpočet s hodnotou $p = 1$ a postupně tuto hodnotu zvyšovat až na doporučovaných $p = 5$.[15]

[Bendsóe and Kikuchi, 1988], [Bendsóe, 1989], R. Lipton [Lipton, 1994], O. Sigmund [Sigmund, 1996], J. Dvořák [Dvořák and Haslinger, 1998], D. Cioranescu, J. S. J. Paulin [Cioranescu and Paulin, 1999].

[11] Srvn. [Rozvany, 2001a], [Rozvany *et al.*, 1992], [Rozvany *et al.*, 1995], [Bendsóe and Sigmund, 1999].

[12] Srvn. [Rossow and Taylor, 1973].

[13] Viz např. [Saxena and Ananthasuresh, 2000].

[14] [Bendsóe, 1989]

[15] Srvn. [Bendsøe, 1995].

Ospravedlnit tento přístup není jednoduché: Je nutné pro každé p najít třídu mikrostruktur, které generují odpovídající hodnoty proměnných t a ϱ. To se však již podařilo pánům M. Bendsøe a O. Sigmunt.[16] Těm se podařilo určit limitní hodnoty exponentu p, pro něž lze zkonstruovat mikromechanický model.

12.3.2 Metoda OMP

Tato metoda (Optimal Microstructures with Penalization – OMP) je založena na optimální mikrostruktuře při penalizování mezilehlých hustot.[17] Jde o to, že řešení celé úlohy je hledáno při použití konečných prvků majících *optimální* mikrostrukturu. Tato optimální mikrostuktura jest nalezena analyticky. V současné době je toto řešení známo pro úlohy extremalizující (minimum či maximum) tuhost, či úlohy, kde tuhost vystupuje ve vedlejších podmínkách.[18]

Pro tyto úlohy v dvourozměrném případě má optimální mikrostruktura (laminát druhého řádu) tři (případně čtyři) volné parametry – dvě (tři) hustoty a jednu orientaci.[19] V třírozměrném případě pak volných parametrů pět – tři hustoty a dvě orientace.

12.3.3 Metoda NOM

Metoda neoptimální mikrostruktury (NonOptimal Microstructures – NOM) používá zvolené mikrostruktury, která nemusí být optimální (například elementy s čtvercovým otvorem) a s kterou se pracuje bez penalizace. Počet neznámých parametrů bývá menší nežli v OMP metodách.[20]

12.3.4 Metoda DDP

Metoda DDP (Dual Discrete Programming), přestože užívá pevnou izotropní mikrostrukturu, tak nepoužívá penalizaci. K cíli se tato metoda přibližuje posloupným řešením konvexních aproximací původního problému.[21]

12.3.5 Další – nouzové – metody řešení úloh zobecněné optimalizace tvaru

Dalšími často používanými metodami k řešení úloh zobecněné optimalizace tvaru jsou metody inspirující se Darwinovou teorií evolučního vývoje:[22] Jde zejména o metody řešení špatně podmíněných úloh funkční extremalizace zvané evoluční algoritmy[23] a o postupy řešení konstrukční optimalizace postupným odstraňováním ne plně využívaných elementů MKP sítě pokrývající návrhový prostor. Tyto metody slovou *evoluční konstrukční optimalizace* (Evolutionary Structural Optimization – ESO), někdy též *adaptivní biologický růst* (Adaptive Biological Growth – ABG) či *postupné zavržení a přijetí elementů* (Sequential Element Rejections and Admissions method – SERA).[24]

---

[16] Viz [Bendsóe and Sigmund, 1999].

[17] Srvn. [Allaire, 1997].

[18] Viz [Rozvany, 2001a], [Allaire, 2002].

[19] Viz [Cherkaev, 2000] a [Haslinger *et al.*, 2002] s. 133.

[20] Srvn. [Bendsóe and Kikuchi, 1988] či [Bendsøe, 1995].

[21] Viz [Beckers, 1999] a [Beckers and Fleury, 1997].

[22] Charles Darwin (1809–1882). Srvn. [Darwin, 1859].

[23] Evolučních algoritmů je celá řada. Zejména genetické algoritmy; o nich speciálně viz [Holland, 1992] (prvně publikováno roku 1975 [Holland, 1975]) a D. E. Goldberg [Goldberg, 1989]. Dále například: simulovaný biologický růst – C. Mattheck a S. Burkhardt [Mattheck and Burkhardt, 1990], simulované žíhání – N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller [Metropolis *et al.*, 1953] a další. Hlavní nevýhodou těchto přístupů je vedle značné náročnosti na výpočtový čas zejména nejasnost o kvalitě dosaženého řešení.

[24] Viz např. [Chen *et al.*, 2002], [Kita and Toyoda, 2000], [Belblidia and Bulman, 2001], [Rozvany, 2001b].

12.3.6 Obecně

Metody SIMP, OMP či NOM lze použít ve spojení s využitím jak metody kritéria optimality[25] (Optimality Criterium – OC), tak matematického programování.

Penalizace mezilehlých hodnot indikační funkce t jest standardním nástrojem matematického programování.

12.4 Blíže k metodám řešení optimalizace ISE-topologií, jejich výhody a nevýhody

12.4.1 Metoda SIMP

Výhody metody SIMP jsou následující:

- Výpočetní efektivnost – na jeden element připadá pouze jedna návrhová proměnná.
- Masivnost – metoda SIMP může být snadno použita pro libovolnou kombinaci vedlejších podmínek.
- Penalizaci lze implementovat nezávisle na charakteru vlastní úlohy, lze tedy použít její výpočetně výhodnou formu.
- Teoretická jednoduchost. Algoritmus nevyžaduje odvozování zahrnující vyšší matematiku.
- Začíná-li výpočet s hodnotou $p = 1$, potom je tato úloha konvexní a lokální minimum minimem globálním. V dalších krocích, s rostoucí hodnotou parametru p, většina autorů nepředpokládá tak radikální změny, aby došlo ke zbloudění do bodu minima lokálního.[26]
- Metoda SIMP nevyžaduje homogenizaci mikrostruktury.

Nevýhodou metody SIMP je závislost řešení na stupni penalizace, tedy na velikosti exponentu p a nejistota ohledně konvergence ke skutečnému bodu optima.[27] Tímto nedostatkem však trpí také ostatní metody hledání optimální ISE-topologie.[28]

12.4.2 Ztráta fyzikální interpretace v metodě SIMP

V počátcích vývoje metody SIMP se předpokládalo, že fyzikální interpretace návrhu s mezilehlou hodnotou návrhového parametru $t \in (0, 1)$ neexistuje.[29] Roku 1999 však autoři M. P. Bendsøe a O. Sigmund[30] zkonstruovali kompozitní strukturu, která realizuje závislost vyjádřenou vztahem (12.1).

12.4.3 Závislost výsledků metody SIMP na síti MKP

Za velkou nevýhodu metody SIMP se v počátcích považovala závislost na jemnosti MKP sítě.[31] Postupem času bylo objeveno několik přístupů, jak tento problém omezit na minimum. Jedním

[25] Jde o kritérium, kterým charakterizujeme optimální stav, např. požadavek rovnoměrného zatížení konstrukce na dovolené mezi napětí.
[26] [Rozvany, 2001a].
[27] [Stolpe and Svanberg, 2001].
[28] Alespoň dle tvrzení v [Rozvany, 2001a].
[29] Srvn. [Bendsóe, 1989].
[30] Viz [Bendsóe and Sigmund, 1999].
[31] [Bendsóe, 1989].

z nich je uvalení vedlejší podmínky na délku vnitřních hranic či na velikost průměru vnitřních dunit.[32] Pro každou (zvolenou) hodnotu minimálního povoleného průměru existuje kritická hustota sítě. Pro všechny sítě, jejichž hustota přesahuje tuto kritickou hodnotu, zůstává optimální ISE-topologie neměnná.[33]

12.4.4 Neexistence řešení – špatná podmíněnost úlohy

Metoda SIMP jest diskrétním inženýrským přístupem, který nemá přímý vztah ke špatné podmíněnosti původní spojité úlohy. Předně je třeba zdůraznit, že diskutovaná diskrétní úloha o nalezení optimální ISE-topologie (IS-topologie) je dobře podmíněná, tj. nejméně jedno řešení jistě existuje. Bylo přece již řečeno, že např. pro 1ISE úlohu máme 2^N binárních (ano/ne) řešení (N jest zvolený počet konečných prvků). Alespoň jedno z nich, ne-li více, musí minimalizovat cílovou funkci.

Ovšem, pro přesné matematické řešení musí být existence a dobrá podmíněnost původní spojité úlohy prokázána, to však nesouvisí s platností a účiností metod pro optimalizaci diskrétních ISE-topolgií.[34]

12.4.5 Metoda OMP

Nevýhody metody OMP pro hledání optimální ISE-topologie jsou tyto:

- Více návrhových parametrů a z toho plynoucí nižší výpočtová efektivita.
- Optimální mikrostruktura obecné úlohy není známa. V současné době je mi známa pouze pro úlohy extremalizace tuhosti.
- Určení optimální struktury pro nové podmínky návrhu vyžaduje vyspělé matematiky.
- Metoda OMP ústí v nekonvexní úlohu.
- Vyžaduje homogenizaci mikrostruktury.
- Závisí na stupni penalizace.
- Nejistá konvergence.

Výhodou metody OMP jest současné získání řešení pro topologie ISE i ISEP.

12.4.6 SIMP vs. OMP

Mezi zastánce SIMP patří zpravidla fyzici, mechanici a technici, mezi zastánce OMP pak většinou matematici. Zmiňme například argument zastánců metody OMP: Metoda OMP je náročnější, ale toto úsilí je odměněno větší korektností řešení.[35] Naproti tomu zastánci metody SIMP říkají: Je-li v metodě SIMP použita vhodná penalizace, je tato metoda stejně korektní a často i korektnější.[36]

[32] [Haber *et al.*, 1996].
[33] Pro další možné přístupy srvn. [Sigmund, 1994] či [Sigmund and Petersson, 1998].
[34] Viz [Rozvany, 2001a].
[35] Viz [Allaire, 1997], [Bendsóe and Mota Soares, 1992].
[36] [Rozvany, 2001a] s. 101.

12.4.7 Metoda NOM

Metoda NOM se vykazuje nižším počtem návrhových proměnných nežli metoda OMP, což lze považovat za výhodu. Za nevýhody lze naopak považovat následující:

- Metoda NOM zahrnuje, přestože méně nežli metoda OMP, stále více návrhových parametrů příslušných jednomu elementu než metoda SIMP.
- Penalizace obvykle nedokáže potlačit „šedé“ zóny (zóny s $t \in (0, 1)$) v návrhové oblasti. Ve výsledku tedy nelze hovořit o ISE(IS)-topologiích
- Metoda NOM představuje nekonvexní formalizaci uvažované úlohy. Vyžaduje homogenizaci.

12.5 Historie metod optimalizujících ISE-topologie

12.5.1 Počátky optimalizace topologie – optimalizace dispozice

O zrození optimalizace topologie založené na metodě konečných prvků se v osmdesátých letech dvacátého století asi největší měrou zasloužil dánský vědec Martin Philip Bendsøe působící v ústavu matematiky dánské technické university.[37]

Počátek optimalizace topologie konstrukcí s nízkým hmotnostním zlomkem jest nutno hledat u výše zmíněného Michella již v roce 1904. Rovněž v Melbourne bylo provedeno mnohonásobné rozšíření této teorie v oblasti roštových (grillage) a skořepinových mřížových (shell grid) konstrukcí pány G. I. N. Rozvany a W. Prager.[38]

Optimalizace dispozice (Layout optimization) byla v pozdějších letech značně zobecněna a rozšířena na struktury mnohonásobně zatížené a omezené mnoha vedlejšími podmínkami.[39]

Existují přesná analytická řešení optimalizace dispozice. Tato řešení většinou degenerují v systém nekonečného počtu členů majících nekonečně malý objem.[40] Numerická řešení optimalizace ISE-topologií v případě konstrukcí s malým objemovým zlomkem nalezená metodou SIMP často v případě použití jemných MKP sítí konvergují k řešení velmi podobnému.[41]

12.5.2 Počátky zobecněné optimalizace tvaru

Za první krok ve směru zobecněné optimalizace tvaru (topologie – rozložení většího objemového zlomku materiálu po návrhové oblasti) lze považovat práci pánů Rossowa a Taylora[42] z první poloviny sedmdesátých let dvacátého století.

[37] Department of Mathematics, Technical University of Denmark. Srvn. např. [Bendsóe, 1981], [Bendsóe, 1982], [Bendsóe, 1983], [Bendsóe *et al.*, 1983], [Bendsóe, 1984], [Bendsóe and Olhoff, 1985], [Bendsóe *et al.*, 1985], [Bendsóe, 1986], [Bendsóe *et al.*, 1987], [Bendsóe, 1987], [Bendsóe and Sokołowski, 1987], [Bendsóe and Sokołowski, 1988], [Bendsóe and Kikuchi, 1988], [Bendsóe, 1988], [Bendsóe, 1989], [Bendsóe and Rodrigues, 1990], [Bendsóe and Rodrigues, 1991], [Bendsóe and Mota Soares, 1992], [Bendsóe *et al.*, 1993a], [Bendsóe *et al.*, 1993b], [Bendsóe and Ben-Tal, 1993], [Bendsóe *et al.*, 1994b], [Bendsóe and Guedes, 1994], [Bendsóe *et al.*, 1995b], [Bendsóe *et al.*, 1995a], [Bendsøe, 1995], [Bendsóe and Sokołowski, 1995a], [Bendsóe and Sokołowski, 1995b], [Bendsóe *et al.*, 1996b], [Bendsóe *et al.*, 1996c], [Bendsóe *et al.*, 1996a], [Bendsóe and Lipton, 1997], [Bendsóe and Sigmund, 1999], [Bendsóe and Sigmund, 2003].

[38] Srvn. [Rozvany, 1972a], [Rozvany, 1972b], [Prager and Rozvany, 1977b], [Prager and Rozvany, 1977a], [Rozvany and Prager, 1976], [Rozvany and Prager, 1979].

[39] Srvn. např. [Rozvany, 1992] či [Rozvany and Birker, 1994].

[40] Takovéto konstrukce W. Prager [Prager, 1974] nazývá roštům podobná kontinua (grillage-like continua, truss-like continua).

[41] Viz [Rozvany and Prager, 1976] a [Lewinski *et al.*, 1994].

[42] [Rossow and Taylor, 1973].

Rozvoj zobecněné optimalizace tvaru byl významně podpořen prací pánů Cheng a Olhoff,[43] kde se pojednává o optimalizaci pevné desky s použitím metody konečných prvků. Výsledkem byla deska vyztužená systémem žeber, které připomínaly optimální mřížové a prutové konstrukce vznikající v průběhu optimalizace dispozice. S větší pozorností se přirozené vhodnosti vyztužení desek žebry zabývali panové G. I. N. Rozvany, N. Olhoff, Keng Tung Cheng a J. E. Taylor[44] v případě plastického návrhu.

Podobně pánové Kohn a Strang[45] nalezli plné, prázdné a porézní oblasti v průřezu dle teorie plasticity navrhovaného průřezu kroucené tyče.

Dalším impulsem k rozvoji popisované problematiky byly studie zabývající se optimální mikrostrukturou perforovaných desek.[46]

12.5.3 Zrození metody SIMP

Metoda SIMP byla poprvé (pod jménem *the direct approach* a *artificial density method*) popsána Martinem Philipem Bendsøe v roce 1989.[47] Sám v této práci poznamenal, že při $p = 1$ se tato metoda redukuje k úloze o optimalizaci plošných archů proměnné tloušťky, tedy k úloze řešené pány Rossov a Taylor roku 1973.[48] V této práci se však M. P. Bendsøe vyslovil ve prospěch mikrostruktury tvořenou elementy se čtvercovými otvory; v naší terminologii pro metodu NOM.

O rok později, tedy roku 1990, na setkání v Karlsruhe představili pánové Rozvany a Zhou[49] metodu, o které tehdy ještě netušili, že je výpočetně totožná s metodou pana Bendsøe. V této práci pánů Rozvany a Zhou byly zdůrazněny výhody metody SIMP nad metodami OMP a NOM. Tato metoda byla dále rozšířena týmiž autory o rok později.[50]

12.5.4 Spojení metody SIMP a metody DCOC

Z počátku (okolo roku 1991) byla společně s metodou SIMP používána k optimalizaci topologie metoda *spojitého kritéria optimality* (Continuum-type Optimality Criteria method – COC).[51] O rok později byla metoda kritéria optimality uzpůsobena pro efektivnější použití provedením její formalizace do maticové podoby použitím konečně prvkového přístupu.[52] Této modifikované metodě se dnes říká *diskretizovaná* COC metoda (Discretized COC – DCOC). Tato metoda našla posléze široké použití k řešení úloh obsahujících nejrůznější vedlejší podmínky (násobné zatěžující podmínky, kombinovanou napjatost, posuvy, stabilita, vlastní frekvence, elastické uložení, teplotní deformace, předepětí, etc.) a cíle.[53]

12.5.5 Období omezené popularity metody SIMP a její následné probuzení

Přes tyto úspěchy zůstávalo použití metody SIMP omezené. V průběhu devadesátých let byla pozornost věnována spíše metodě OMP s homogenizací. Teprve práce dánských vědců M. P. Bendsøe

[43] [Cheng and Olhoff, 1981].
[44] [Rozvany *et al.*, 1982].
[45] [Kohn and Strang, 1983].
[46] Srvn. [Lurie *et al.*, 1982], [Lurie *et al.*, 1984], [Kohn and Strang, 1986], [Avellaneda, 1987], [Rozvany *et al.*, 1987].
[47] Viz [Bendsóe, 1989].
[48] [Rossow and Taylor, 1973].
[49] [Rozvany and Zhou, 1991].
[50] [Rozvany *et al.*, 1992].
[51] Srvn. [Rozvany and Zhou, 1991], [Zhou and Rozvany, 1991].
[52] Viz [Zhou, 1992], [Zhou and Rozvany, 1992].
[53] Srvn. [Rozvany and Zhou, 1992], [Zhou and Haftka, 1994], [Zhou, 1995], [Zhou and Rozvany, 1996].

a O. Sigmund[54] přinesla zásadní zlom a široké použití.[55]

12.6 Optimalizace topologie, tvaru a materiálu v pohledu matematika

V konstrukční optimalizaci existují dvě základní kategorie úloh:[56]

- optimalizace rozměru a tvaru (sizing and shape optimization): optimalizace typických rozměrů konstrukce – tloušťka nosníku, desky, etc.
- optimalizace materiálu a topologie (material and topology optimization): optimalizace mechanických, tepelných, etc. vlastností materiálu konstrukce.

Obě tyto úlohy mají stejnou formu, metody jejich analýzy a numerické realizace jsou však odlišné. Obecně jde o úlohy o nalezení extrému funkcionálu

$$J : A \times V \to \mathbb{R}, \tag{12.2}$$

kde A je prostor řízení a V prostor stavový.

Při řešení jest nutné tuto úlohu nahradit úlohou diskretizovanou a tuto diskretizovanou (algebraickou) úlohu řešit a její řešení podrobit analýze konvergence. Obecně existují dvě základní aproximační (diskretizační) strategie:

- Dvouúrovňový přístup (two-level approach): V tomto přístupu jsou nejdříve diskretizovány koeficienty stavové úlohy (diskretizace prostoru A_{ad}, $A_{ad} \subset A$ je množina přípustného řízení) a teprve potom stavová úloha s těmito diskretizovanými koeficienty aproximována na konečně rozměrném podprostoru prostoru V.
- Jednoúrovňový přístup (one-level approach) realizuje obě tyto diskretizace současně.

Říkáme, že úloha (12.2) je dobře podmíněná (well-posed), když graf $\mathcal{G}$ zobrazení řízení na stav je kompaktní v přijatelné topologii a je-li funkcionál J spojitý. Ve své původní podobě je úloha (12.2) špatně podmíněná. Důvodem je nekompaktnost grafu $\mathcal{G}$. Je tedy třeba tento graf zkompaktnit. V zásadě existují dva přístupy, jak tuto kompaktifikaci provést: Původní množinu A_{ad} je možné omezit nebo rozšířit.

- Omezující přístup (restriction approach) je typický v optimalizaci rozměrů: Na řídící proměnné se uvalí nějaká další podmínka. Např. omezení derivací tloušťkové funkce nějakou horní hodnotou. Tím jest definována nová množina $\tilde{A}_{ad} \subset A_{ad}$, která je již ve vhodné topologii kompaktní. Aproximace tohoto typu obvykle užívá jednoúrovňový přístup.
- Rozšiřující přístup (extension approach) rozšiřuje původní množinu A_{ad} na množinu $\bar{A}_{ad}$ přidáním všech hromadných bodů H-konvergujících posloupností z A_{ad}. Jinými slovy množina $\bar{A}_{ad}$ obsahuje všechny možné kompozity vytvořené z původních složek. Tuto množinu je možné zúžit (a tím celou úlohu zjednodušit) ukázáním, že pouze jisté, přesně specifikovatelné, mikrostruktury jsou v dané optimalizační úloze aktivní.[57] Úplný popis množiny $\bar{A}_{ad}$ jest znám pouze v některých zvláštních případech.[58]

[54] [Bendsóe and Sigmund, 1999].

[55] E.g. při vedlejších podmínkách uvalených na napětí: [Duysinx, 1999], optimalita kostní struktury: [Sigmund, 1999], zatížení tlakem: [Hammer and Olhoff, 2000], nová kategorie kompozitů: [Sigmund, 2000], [Gibiansky and Sigmund, 2000], geometrické nelinearity: [Buhl *et al.*, 2000], [Pedersen *et al.*, 2001].

[56] Zde srvn. [Haslinger *et al.*, 2002].

[57] [Bendsóe *et al.*, 1994a].

[58] Srvn. [Haslinger *et al.*, 2002].

Příloha A

Přehled základních matematických pojmů

A.1 Základní pojmy funkcionální analýzy

Věta A.1 (O hromadném bodu) *Bod P je* hromadným bodem *množiny $\mathbb{M}$, jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů patřících do $\mathbb{M}$.*

Věta A.2 (O uzávěru množiny) *Množina $\mathbb{N}$, která je sjednocením množiny $\mathbb{M}$ a všech jejích hromadných bodů se nazývá* uzávěr *množiny $\mathbb{M}$. Značíme $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{M}}$.*

Věta A.3 (O lineární množině) *Množina $\mathbb{M}$ prvků u, v, z slove* lineární množina *(resp.* lineární prostor*,* vektorový prostor*,* lineál*), má-li následující vlastnosti:*

a) pro libovolné prvky u, v z množiny $\mathbb{M}$ a pro libovolné číslo a (reálné či komplexní) je definován součet $u + v$ a součin au, přičemž součet $u + v$ a součin au jsou rovněž prvky množiny $\mathbb{M}$;

b) tyto operace splňují běžná pravidla, známá z lineární algebry; tedy pro $u, v, z \in \mathbb{M}$ a $a, b \in \mathbb{R}$, resp. $a, b \in \mathbb{C}$, platí

$$u + v = v + u \quad \ldots \quad \text{zákon komutativní},$$

$$u + (v + z) = (u + v) + z \quad \ldots \quad \text{zákon asociativní},$$
$$a(u + v) = au + av \quad \ldots \quad \text{zákon distributivní},$$
$$(a + b)u = au + bu \quad \ldots \quad \text{zákon distributivní},$$
$$a(bu) = (ab)u \quad \ldots \quad \text{zákon asociativní},$$
$$u + v = u + z \Rightarrow v = z,$$
$$\exists 0 \in \mathbb{M} : x + 0 = x \quad \ldots \quad \text{existence nulového prvku},$$
$$x + (-x) = 0 \Leftrightarrow x - x = 0 \quad \ldots \quad \text{existence záporného prvku},$$
$$1 \cdot u = u.$$

Věta A.4 (O fundamentální posloupnosti) *Posloupnost $\{u_n\}$ prvků metrického prostoru $\mathbb{X}$ se nazývá* fundamentální*, resp.* cauchyovská*, v tomto prostoru, jestliže* [1]

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad n_0(\epsilon) : m > n_0 \wedge n > n_0 \;\Rightarrow\; \rho(u_m, u_n) < \epsilon.$$

[1] Následný symbolický zápis čtěme „jestliže ke každému epsilon většímu nežli nula lze najít takové číslo n_0, obecně závislé na volbě čísla epsilon, že pro libovolné m větší nežli n_0 a pro libovolné n větší než n_0 platí, že vzdálenost prvků u_m a u_n je menší nežli epsilon“.

Věta A.5 (O úplném prostoru) Úplný prostor *je takový metrický prostor v němž každá fundamentální posloupnost konverguje.*[2]

Věta A.6 (O množině spojitých funkcí) *Symbolem $C^k(\Omega)$ označme množinu všech funkcí spojitých i se svými (parciálními) derivacemi do řádu k včetně v Ω. Místo $C^0(\Omega)$, kdy se předpokládá jen spojitost samotných funkcí v Ω, píšeme stručně $C(\Omega)$.*

Věta A.7 (O unitárním prostoru) *Množina $\mathbb{P}$ se nazývá* unitární metrický prostor*, resp.* prehilbertovský metrický prostor *(stručně unitární metrický prostor resp. prehilbertovský prostor), jestliže*

a) *$\mathbb{P}$ je lineární,*

b) *každé dvojici prvků u, v z $\mathbb{P}$ je jednoznačně přiřazeno číslo (u,v) – obecně komplexní – nazývané skalárním součinem prvků u, v, takže*

$$(u,v) = \overline{(u,v)},$$

$$(u_1+u_2,v) = (u_1,v)+(u_2,v),$$
$$(au,v) = a(u,v),$$
$$(u,u) \geq 0, \quad \text{kde } (u,u)=0 \Leftrightarrow u=0,$$

c) *norma prvku u je definována vztahem*

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)},$$

d) *vzdálenost dvou prvků (metrika) je definována vztahem*

$$\rho(u,v) = \|v-u\|.$$

Máme-li dva unitární prostory $\mathbb{P}_1$ a $\mathbb{P}_2$ s různě definovanými skalárními součiny, používáme pro ně označení $(u,v)_{\mathbb{P}_1}$ a $(u,v)_{\mathbb{P}_2}$.

Věta A.8 (O Hilbertově prostoru) *Hilbertovým prostorem nazýváme* úplný *unitární prostor a značíme ho znakem $\mathbb{H}$.*

Příkladem reálného Hilbertova prostoru je reálný prostor $\mathbb{L}_2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(u,v) = (u,v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta A.9 (O zúplnění metrického prostoru) *Zúplnění (úplný obal) metrického prostoru, který není úplný, lze provést přidáním tzv. ideálních elementů.*

[2] Rozumí se tím, že posloupnost prvků patřících do příslušného prostoru konverguje k prvku příslušného prostoru.

Věta A.10 (O zobecněné derivaci) *Funkce* $v_i \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *je* i*-tou zobecněnou derivací (řádu* $|i|$*) funkce* $u \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *platí-li pro všechny funkce* $\varphi \in \mathbb{C}_0^{(\infty)}(\Omega)$*, že*

$$\int_\Omega u(x) D^i \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|i|} \int_\Omega v_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde pro tzv. multiindex $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *platí* $|i| = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ *a*

$$\mathrm{D}^i u(x) = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}.$$

Sobolevův prostor je případem Hilbertova prostoru. Na množině $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ zaveďme skalární součin $(u,v)_{H^k(\Omega)}$, nehrozí-li nedorozumění psáno také $(u,v)_k$ dvou funkcí $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $v(x) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ předpisem

$$(u,v)_k = (u,v)_{H^k(\Omega)} = (u,v)_{L_2(\Omega)} + \sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\nu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\nu_\kappa=1}^{n} \left(u^{(\kappa)}_{\nu_1\ldots\nu_\kappa}, v^{(\kappa)}_{\nu_1\ldots\nu_\kappa}\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{A.1}$$

kde

$$u^{(k)}_{\nu_1\ldots\nu_k} = \frac{\partial^k u}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_k}}.$$

Definujme normu

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{H^k(\Omega)}} \tag{A.2}$$

a metriku

$$\rho(u,v)_{H^k(\Omega)} = \|u - v\|_{H^k(\Omega)}. \tag{A.3}$$

Tím se stává množina $C^k(\overline{\Omega})$ metrickým a unitárním prostorem. Označme jej $\mathbb{S}_2^k(\overline{\Omega})$. Pro $k \geq 1$ však tento prostor není úplný. Zúplnění prostoru $\mathbb{S}_2^k(\overline{\Omega})$ lze provést tak, že k prvkům tohoto prostoru připojíme všechny ty funkce z prostoru $\mathbb{L}_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace do k-tého řádu včetně, a na tyto funkce rozšíříme skalární součin (A.1), normu (A.2) a metriku (A.3). Takto zkonstruovaný úplný – a tedy Hilbertův – prostor nazýváme Sobolevovým prostorem $\mathbb{H}^k(\Omega)$, resp. $\mathbb{H}^k$.

A.2 Základní pojmy teorie matic

Definice A.11 (Vektorový prostor) *Nechť* n *je pevně zvolené přirozené číslo. Pak* n*-členným komplexním vektorem*

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

rozumíme uspořádanou n*-tici komplexních čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*. Všechny tyto* n*-členné vektory tvoří tzv.* n*-rozměrný vektorový prostor* V_n*.*[3]

Definice A.12 (Lineární závislost a nezávislost vektorů) *Říkáme, že vektory* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *z* V_n *jsou lineárně závislé, existují-li taková komplexní čísla* $c_1, c_2, \ldots, c_k$*, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, že*

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + c_k\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}.$$

Nejsou-li vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé.*

[3] Srvn. [Rektorys, 1995] s. 23.

Definice A.13 (Hodnost soustavy vektorů) *Říkáme, že soustava $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ vektorů z V_n má hodnost h, jestliže mezi vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale každých $h+1$ vektorů z $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ jsou již vektory lineárně závislé. Toto h je tedy maximální počet lineárně nezávislých vektorů dané soustavy.*

Definice A.14 (Matice) *Maticí $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) nazýváme schéma mn reálných, resp. komplexních čísel*

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$$

sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $m = n$, pak se $\boldsymbol{A}$ nazývá čtvercová matice n-tého řádu (n-tého stupně). Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ matice $\boldsymbol{A}$ tvoří její hlavní diagonálu, prvky $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots$ matice $\boldsymbol{A}$ tvoří její vedlejší diagonálu,. Nulovou maticí nazýváme matici, jejíž všechny prvky se rovnají nule.

Definice A.15 (Hodnost matice) *Hodností matice nazýváme hodnost soustavy vektorů tvořených řádky této matice.*

Věta A.16 (Horní mez hodnosti matice) *Pro hodnost matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) platí*

$$h \leq \min\{m, n\}.$$

Definice A.17 (Transponovaná matice) *Matice*

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

která vznikne překlopení matice $\boldsymbol{A}$ kolem hlavní diagonály (tedy záměnou řádků za sloupce), se nazývá transponovaná matice k matici $\boldsymbol{A}$.

Věta A.18 (Hodnost matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^T$) *Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}^T$ jsou si rovny.*

Věta A.19 (Hodnost matice) *Hodnost matice se nezmění,*

1. *zaměníme-li pořadí řádků v matici;*
2. *násobíme-li jeden řádek nenulovým číslem;*
3. *přičteme-li k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků;*
4. *vynecháme-li v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků matice.*

A.2.1 Determinanty

Definice A.20 (Determinant) *Determinantem n-tého stupně čtvercové matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme číslo

$$A = \sum (-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel $(1, 2, \dots, n)$ a kde r udává počet inverzí[4] *v permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Značíme*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definice A.21 (Inverze permutace) *Nechť $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ je nějaká permutace čísel $(1, 2, \dots, n)$. Říkáme, že čísla k_j, k_i, kde $1 \leq j < i \leq n$, tvoří v této permutaci inverzi, je-li $k_j > k_i$. Má-li permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ lichý počet inverzí jmenuje se lichá. Má-li sudý počet inverzí jmenuje se sudá.*

Věta A.22 (Determinant se nezmění) *Determinant se nezmění, když:*

1. *v něm zaměníme řádky za sloupce;*
2. *přičteme k jednomu řádku lineární kombinaci řádků ostatních.*

Věta A.23 (Rovnost determinantu nule) *Determinant se rovná nule, je-li jeden z jeho řádků lineární kombinací ostatních.*

Věta A.24 (Změna znaménka determinantu) *Determinant změní znaménko, vyměníme-li mezi sebou dva řádky.*

A.2.2 Matice

Definice A.25 (Součin matice $\boldsymbol{A}$ s číslem α) *Součinem matice $\boldsymbol{A}$ s číslem α nazýváme matici $\alpha\boldsymbol{A}$, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ tak, že všechny prvky matice $\boldsymbol{A}$ vynásobíme číslem α:*

$$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

[4] Viz následující definici A.21.

Definice A.26 (Součet matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$) *Součtem $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejného typu (m,n) nazýváme matici typu (m,n), jejíž prvky jsou rovny součtům sobě odpovídajících prvků matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$:*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & \alpha a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & \alpha a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & \alpha a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Věta A.27 (Sčítání matic) *Pro sčítání matic stejného typu platí:*

1. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$;
2. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;
3. $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$;
4. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$.

Definice A.28 (Součin matic) *Součinem $\boldsymbol{AB}$ matice $\boldsymbol{A}$ typu (m,n) s maticí $\boldsymbol{B}$ typu (n,p) nazýváme matici $\boldsymbol{C}$ typu (m,p), jejíž prvky c_{ij} $(i=1,2,\dots,m)$, $(j=1,2,\dots,p)$ jsou skalárním součinem i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a j-tého sloupce matice $\boldsymbol{B}$.*

Věta A.29 (Nasobení matic) *Pro násobení matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ platí*

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$,
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,
3. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

jsou-li v těchto rovnostech definovány součty a součiny příslušných matic, tj. mají-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ příslušný typ.

Definice A.30 (Regulární a singulární matice) *Čtvercová matice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i\lceil j}$ n-tého řádu slove regulární, je-li její determinant $|a_{ij}|$ různý od nuly – tj. má-li matice $\boldsymbol{A}$ hodnost n. Matice která není regulární, se zove singulární.*

Věta A.31 (Determinant maticového součinu) *Determinant matice $\boldsymbol{AB}$, která je součinem čtvercových matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož řádu, je roven součinu determinantů matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.*

Věta A.32 (Součin regulárních matic) *Součin regulárních matic téhož řádu je opět regulární matice*

Definice A.33 (Inverzní matice) *Inverzní maticí ke čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ n-tého řádu nazýváme čtvercovou matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ n-tého řádu, pro niž platí*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice.

Věta A.34 (Inverze maticového součinu) *Inverzní matice k součinu $\boldsymbol{AB}$ regulárních matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ je rovna součinu inverzních matic k maticím $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ vzatých v opačným pořadí:*

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Věta A.35 (Transpozice maticového součinu) *Transponovaná matice k součinu $\boldsymbol{AB}$ matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je rovna součinu transponovaných matic k maticím $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ vzatých v opačném pořadí:*

$$(\boldsymbol{AB})^{T} = \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}.$$

Věta A.36 (Transpozice maticového součtu) *Transponovaná matice k součtu $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ je rovna součtu transponovaných matic k maticím $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$:*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{T} = \boldsymbol{A}^{T} + \boldsymbol{B}^{T}.$$

Definice A.37 (Symetrická matice) *Matice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i\lceil j}$ se nazývá symetrická, platí-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{T}$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Definice A.38 (Antisymetrická matice) *Matice $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i\lceil j}$ se nazývá antisymetrická, platí-li $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{T}$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Antisymetrická matice má tedy na hlavní diagonále samé nuly.*

Definice A.39 (Ortogonální matice) *Ortogonální maticí rozumíme matici $\boldsymbol{A}$, pro níž platí*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T} = \boldsymbol{I}, \ \text{tj. } \boldsymbol{A}^{T} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Věta A.40 (Determinant ortogonální matice) *Determinant ortogonální matice je $+1$ nebo -1.*

Věta A.41 (Součin ortogonálních matic) *Součin ortogonálních matic je ortogonální maticí.*

Věta A.42 (Inverze ortogonální matice) *Matice inverzní k ortogonální matici je maticí ortogonální.*

Definice A.43 (Konjungovaná – komplexně sdružená – matice) *Konjungovanou (komplexně sdruženou) maticí $\overline{\boldsymbol{A}}$ k matici $\boldsymbol{A}$ (jejíž prvky jsou komplexní čísla) nazýváme matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$, zaměníme-li v matici $\boldsymbol{A}$ každý prvek a_{ij} komplexně sdruženým číslem $\overline{a_{ij}}$.*

Věta A.44 (Úprava konjungovaných matic) *Platí*

$$\overline{\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}} = \overline{\alpha}\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\beta}\overline{\boldsymbol{B}},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\;\overline{\boldsymbol{B}},$$

$$\overline{\boldsymbol{A}^T} = \left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{A}^{-1}} = \left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}.$$

Definice A.45 (Hermitovsky symetrická matice) *Hermitovsky symetrickou maticí nazýváme matici $\boldsymbol{A}$, pro níž platí*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H,$$

kde značíme, jak je obvyklé,

$$\boldsymbol{A}^H = \overline{\boldsymbol{A}^T}.$$

Definice A.46 (Hermitovsky antisymetrická matice) *Hermitovsky antisymetrickou maticí nazýváme matici $\boldsymbol{A}$, pro níž platí*

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^H.$$

Definice A.47 (Unitární matice) *Unitární maticí nazýváme takovou matici $\boldsymbol{A}$, pro níž*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{I},\ \text{tj. } \boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Věta A.48 (Determinant unitární matice) *Absolutní hodnota determinantu unitární matice je rovna* 1.

Věta A.49 (Součin unitárních matic) *Součin unitárních matic je unitární maticí.*

Věta A.50 (Inverze unitární matice) *Matice inverzní k unitární matici je maticí unitární.*

Definice A.51 (Stopa čtvercové matice) *Stopou čtvercové matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme součet $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ diagonálních prvků matice $\boldsymbol{A}$.

Definice A.52 (Kvadratická forma) *Kvadratická forma*[5]

$$Q(\boldsymbol{x}) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{j,k=1}^{r} a_{jk} x_j x_k, \tag{A.4}$$

kde předpokládáme[6] $a_{kj} = a_{jk}$, *má v bodě* $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^r$ *hodnotu* 0. *Je-li* $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ *pro všechna* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, *nazývá se forma* Q *positivně definitní; je-li* $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ $\forall \boldsymbol{x}$ *a existuje-li* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ *tak, že* $Q(\boldsymbol{x}) = 0$ *slove forma* Q *positivně semidefinitní. Existuje-li* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *tak, že* $Q(\boldsymbol{x}) > 0$, $Q(\boldsymbol{y}) < 0$, *názývá se forma* Q *indefinitní.*

Definice A.53 (Matice kvadratické formy) *Symetrickou matici* r*-tého řádu*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

z kvadratické formy (A.4) nazýváme maticí kvadratické formy (A.4), její hodnost hodností kvadratické formy (A.4).

Definice A.54 (Pozitivně definitní matice) *Matice pozitivně (kladně) definitní kvadratické formy se nazývá pozitivně (kladně) definitní matice.*

Definice A.55 (Pozitivně semidefinitní matice) *Matice pozitivně (kladně) semidefinitní kvadratické formy se nazývá pozitivně (kladně) semidefinitní matice.*

Věta A.56 (Pozitivní definitnost či semidefinitnost matice) *Matici* $\boldsymbol{A}$ *nazveme pozitivně definitní (respektive pozitivně semidefinitní), jestliže jsou všechny její hlavní subdeterminanty kladné (respektive nezáporné). Hlavní subdeterminant dostaneme, jestliže v matici* $\boldsymbol{A}$ *vyškrtáme všechny řádky a sloupce kromě řádků a sloupců* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *a z nevyškrtaných prvků sestavíme determinant, aniž přitom měníme vzájemné postavení prvků, kde za* p *beru postupně čísla od 1 do* m.

Co se formy Q týká, jsou tři možnosti:

A) Jest $a_{jk} = 0$ $(\forall j, k = 1, 2, \ldots, r)$.

B) Existuje j, l tak, že $a_{jj} = a_{ll} = 0$, $a_{jl} \neq 0$ $(j < l)$.

C) Nenastává případ A) ani B); jistě tedy existuje nějaké $a_{jj} \neq 0$, řekněme $a_{11} \neq 0$.

---

[5] Srvn. [Jarník, 1984b] s. 506.

[6] Tento předpoklad je významný. Přesněji bychom měli psát

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{r} a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq r} a_{jk} x_j x_k.$$

V případě platnosti bodu C) lze psát

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r)^2 + Q_1(x_2, x_3, \ldots, x_r).$$

Jestliže forma Q_1 (v proměnných $x_2, x_3, \ldots, x_r$) patří k typu C) mohu pokračovat obdobně dále a dospěji tak (po případném vhodném přečíslování proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_r$) buďto k vyjádření

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_r) = A_1(c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1r}x_r)^2+A_2(c_{22}x_2+c_{23}x_3+\ldots+c_{2r}x_r)^2+\ldots+A_r(c_{rr}x_r)^2 \tag{A.5}$$

nebo k vyjádření

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_r) = A_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r)^2 + \ldots + A_k(c_{kk}x_k + c_{k(k+1)}x_{k+1} + \ldots + c_{kr}x_r)^2 + \tag{A.6}$$
$$+Q_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_r) \quad (k < r),$$

kde forma Q_k je typu A) nebo B) a čísla c_{jj}, A_j v (A.5) a (A.6) jsou různá od nuly.

Věta A.57 (Typy kvadratické formy) • *Mají-li dvě z čísel A_j v (A.5) či v (A.6) opačná znamení, je Q indefinitní. Forma Q je indefinitní rovněž, je-li forma Q_k v (A.6) typu B).*

- *Mají-li všechna A_j v (A.6) totéž znamení a je-li Q_k typu A), je Q semidefinitní.*
- *Mají-li všechna A_j v (A.5) totéž znamení, je Q definitní.*

A.2.3 Singulární rozklad

Věta A.58 (Singulární rozklad) *Buď $\boldsymbol{A}$ reálná matice typu (m, n), $m \leq n$. Pak existuje matice $\boldsymbol{U} = \{u_{ij}\}$ typu (m, n), diagonální matice $\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}\{w_i\}$ řádu n s nezápornými diagonálními prvky w_i a čtvercová matice $\boldsymbol{V} = \{v_{ij}\}$ řádu n, tak že*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^T, \tag{A.7}$$

přičemž sloupce matice $\boldsymbol{U}$ jsou navzájem ortonormální vektory, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ik}u_{il} = \delta_{kl}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),\ (l = 1, 2, \ldots, n),$$

kde Kroneckerova[7] *delta*

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad l = k \\ 0 & \text{pro} \quad l \neq k \end{cases}$$

a kde matice $\boldsymbol{V}$ je ortonormální.

Definice A.59 (Singulární číslo) *Diagonální prvky w_i matice $\boldsymbol{W}$ se nazývají singulární čísla matice $\boldsymbol{A}$.*

Věta A.60 (Hodnost matice typu (m, n)) *Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n), $m \leq n$, je rovna počtu jejích nenulových singulárních čísel.*

Věta A.61 (Hodnost matice transponované) *Matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{A}^T$.*

[7]Leopold Kronecker (*7. XII. 1823 Liegnitz, Germany – †29. XII. 1891).

Je-li numericky spočtené singulární číslo zanedbatelně malé vzhledem k největšímu singulárnímu číslu (např. je-li jejich poměr menší než 10^{-6}), je vhodné toto malé singulární číslo považovat za nulové.

Věta A.62 (Inverzní matice k regulární čtvercové matici) *Buď $\boldsymbol{A}$ regulární čtvercová matice řádu n. Pak je matice $\boldsymbol{U}$ v singulárním rozkladu (A.7) matice $\boldsymbol{A}$ čtvercová ortogonální matice řádu n a*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{U}^T,$$

kde

$$\boldsymbol{W}^{-1} = \operatorname{diag}\{\frac{1}{w_i}\}$$

je inverzní matice k matici $\boldsymbol{W}$.

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ singulární, mohou nastat při řešení soustavy

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{A.8}$$

dva případy:

1. Hodnost h matice $\boldsymbol{A}$ je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy (A.8). Pak má soustava (A.8) nekonečně mnoho řešení a všechna její řešení se dají napsat jako součet jednoho řešení soustavy (A.8) a libovolné lineární kombinace všech nezávislých řešení homogenní soustavy

   $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{A.9}$$

   která má $n - h$ lineárně nezávislých řešení.

2. Hodnost h matice $\boldsymbol{A}$ je menší hodnosti rozšířené matice soustavy (A.8). Pak soustava (A.8) nemá řešení.

Je-li matice $\boldsymbol{A}$ singulární, je alespoň jedno její singulární číslo rovno nule, matice $\boldsymbol{W}$ je tedy singulární a matice $\boldsymbol{W}^{-1}$ neexistuje. Proto je nutno přistoupit, pro tento případ, k zobecnění pojmu inverzní matice.

Definice A.63 (Mooreova-Penroseova zobecněná inverze) *Buď $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice se singulárním rozkladem (A.7). Označme*

$$\boldsymbol{W}^I = \operatorname{diag}\{\mathfrak{w}_i\}, \quad \text{kde} \begin{cases} \mathfrak{w}_i = \frac{1}{w_i} & \text{pro} \quad w_i \neq 0, \\ \mathfrak{w}_i = 0 & \text{pro} \quad w_i = 0. \end{cases}$$

Řekněme, že matice

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^I\boldsymbol{U}^T$$

je maticí pseudoinverzní – Mooreova-Penroseova zobecněná inverzní matice – k matici $\boldsymbol{A}$.

Při numerické konstrukci matice $\boldsymbol{W}^I$ je nutno nulovost singulárního čísla w_i posuzovat ve smyslu hořejší poznámky, tedy položit $\mathfrak{w}_i = 0$ například pro $w_i/w_{\max} < 10^{-6}$.

Řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

pak můžeme pro singulární matici $\boldsymbol{A}$ psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^I\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{b}. \tag{A.10}$$

Praktické použití vztahu (A.10) ukazují následující věty.

Věta A.64 (Řešení s minimální normou) *Je-li hodnost matice $\boldsymbol{A}$ rovna hodnosti rozšířené matice soustavy (A.8), má řešení $\boldsymbol{x}$ vypočtené dle vztahu (A.10) tu vlastnost, že pro libovolné řešení $\boldsymbol{y}$ soustavy (A.8) platí*

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y}\|.$$

Každé řešení homogenní soustavy (A.9) je rovno lineární kombinaci těch sloupců matice $\boldsymbol{V}$ ze singulárního rozkladu matice $\boldsymbol{A}$, jež odpovídají nulovým singulárním číslům matice $\boldsymbol{A}$. Všechna řešení soustavy (A.8) tedy dostame jako součet řešení $\boldsymbol{x}$ dle vztahu (A.10) a lineární kombinace těch sloupců matice $\boldsymbol{V}$, jež odpovídají nulovým singulárním číslům ležícím na diagonále matice $\boldsymbol{W}$.

Věta A.65 (Řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců) *Je-li hodnost matice $\boldsymbol{A}$ menší nežli hodnost rozšířené matice soustavy (A.8), má vektor $\boldsymbol{x}$ vypočtený dle vzorce (A.10) tu vlastnost, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{y}$ platí*

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|.$$

Situace je podobná při řešení soustav s obdélníkovými maticemi a to jak v případě $m < n$ (nedostatečně určená soustava[8]) tak v případě $m > n$ (přeurčená soustava).[9] V případě $m < n$ doplníme před výpočtem singulárního rozkladu matici $\boldsymbol{A}$ $n-m$ nulovými řádky. Pro oba případy použijeme vzorec (A.10) a dostaneme řešení s vlastnostmi uvedenými ve dvou posledních větách.

V programu `matlab` či `GNU Octave` lze singulární rozklad získat pomocí funkce

```
[U,W,V]=svd(A)
```

a psáno notací programu `matlab` platí

```
U*U'=I
V*V'=I
A=U*W*V'.
```

Řešení lze tedy vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{x}_{n\times 1} = \boldsymbol{u}_{n\times 1} + \boldsymbol{V}_{v|m\times s} \cdot \boldsymbol{r}_{s\times 1},$$

kde $\boldsymbol{r} \in \mathbb{E}^s$ je vektor libovolných čísel, vector $\boldsymbol{u}$ je sestaven shora popsaným způsobem, $\boldsymbol{V}_v$ je matice obsahující nulovým singulárním číslům odpovídající sloupce z matice V a číslo s udává počet lineárně nezávislých řešení příslušné homogenní soustavy. V případě nedourčené soustavy je $s > 0$. Jde-li o soustavu určenou či přeurčenou, pak $s = 0$ a platí, že $\boldsymbol{u}$ je takový vektor, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe vyhovuje dané soustavě.

A.3 Variační počet, definice variace a sestavení Eulerových diferenciálních rovnic

Funkcionál jest operátor, který přiřazuje každé funkci jisté třídy nějaké číslo. Jednou z nejjednodušších forem funkcionálu je funkcionál

$$I[u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u')\,\mathrm{d}x, \tag{A.11}$$

kde u je funkcí proměnné x a u' je derivací funkce u.

[8]Slangově řečeno „soustava typu postel“.
[9]Řečená „soustava typu skříň“.

Základní úlohou variačního počtu[10] je najít takové funkce $\hat{u}$ z jisté přípustné množiny, pro které daný funkcionál nabývá extrémní (maximální či minimální) hodnoty. Například můžeme řešení hledat mezi všemi funkcemi, které splňují jisté specifikované okrajové podmínky

$$u(x_1) = u_1,\ u(x_2) = u_2,$$

kde u_1 a u_2 jsou daná čísla.

Nutnou podmínku pro přípustnou funkci extremalizující daný funkcionál odvodíme zavedením takzvané variace funkce δu, což je taková funkce, že pro každé dostatečně malé $\varepsilon > 0$ je funkce $\hat{u} + \varepsilon\delta u$ funkcí přípustnou. Pro každou takovou funkci δu platí

$$\min_{\varepsilon} \mathcal{I}(\varepsilon) = I(\hat{u}) = \min_{u} I(u),$$

kde funkce $\mathcal{I}(\varepsilon)$ má tvar

$$\mathcal{I}(\varepsilon) = I(\hat{u} + \varepsilon\delta u).$$

Z diferenciálního počtu[11] víme, že v bodě minima funkce $\mathcal{I}(\varepsilon)$ musí být splněna podmínka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\mathcal{I}(\varepsilon) = 0,$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}I(\hat{u} + \varepsilon\delta u) = 0,$$

z definice funkce $\mathcal{I}(\varepsilon)$ navíc víme, že extrému je dosaženo pro $\varepsilon = 0$. Z toho plyne následující definice prvé variace funkcionálu a vyslovení nutné podmínky jeho extrému.

Definice A.66 (Variace funkcionálu) *Variací funkcionálu nazýváme funkcionál*

$$\delta I(u, \delta u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}I(u + \varepsilon\delta u)\right|_{\varepsilon=0},$$

který závisí jak na funkci u, tak na funkci δu.

Věta A.67 (Nutná podmínka extrému funkcionálu) *Pokud funkcionál I nabývá pro funkci $\hat{u}$ svého extrému, potom je pro všechny variace δu splněna podmínka*

$$\delta I(\hat{u}, \delta u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}I(\hat{u} + \varepsilon\delta u)\right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

V případě námi uvažovaného funkcionálu (A.11) máme[12]

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta u \frac{\partial f(x, u, u')}{\partial u} + \delta u' \frac{\partial f(x, u, u')}{\partial u'} \right) \mathrm{d}x$$

a pro extremalizující funkci $\hat{u}$ platí

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\delta u \frac{\partial f}{\partial u}(x, \hat{u}, \hat{u}') + \delta u' \frac{\partial f}{\partial u'}(x, \hat{u}, \hat{u}') \right) \mathrm{d}x = 0$$

[10] O variačním počtu viz např. [ALEXEJEV *et al.*, 1991], [DACOROGNA, 1982], [DACOROGNA, 1989], [LAVRENŤJEV and LUSTERNIK, 1952], [VAJNBERG, 1972], [ELSGOLC, 1965], a [FLÜGGE, 1962] s. 16.1.

[11] Srvn. například [JARNÍK, 1984a] a [JARNÍK, 1984b].

[12] $(u + \varepsilon\delta u)' = (u' + \varepsilon\delta u')$.

pro všechny přípustné funkce δu, tedy, dle shora řečeného a pro námi vymezenou přípustnou množinu, pro všechny funkce δu pro které

$$\delta u(x_1) = 0,\ \delta u(x_2) = 0. \tag{A.12}$$

Integrováním posledního integrálu *per partes*, tedy užitím zápisu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\delta u \frac{\partial f}{\partial u'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta u)\frac{\partial f}{\partial u'} + \delta u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right),$$

využitím formule

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x)\,\mathrm{d}x = G(x_2) - G(x_1)$$

a okrajových podmínek (A.12) dostáváme konečný tvar

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta u \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right)\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Jelikož poslední rovnost má platit pro každou funkci δu splňující okrajové podmínky, musí být identicky

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\right).$$

Této rovnici se říká **rovnice Eulerova**.

A.4 Taylorova věta

Věta A.68 (Taylorova věta) *Nechť $f(x)$ má v $\langle a, a+h\rangle$ spojité derivace do n-tého řádu včetně a v $(a, a+h)$ spojitou derivaci $(n+1)$-ho řádu. Pak*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1},$$

kde výraz pro zbytek R_{n+1} lze vyjádřit ve tvaru[13]

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Věta A.69 (Taylorova věta pro funkci dvou proměnných) *Nechť funkce $z = f(x,y)$ má v každém bodě uzavřené úsečky u, spojující body $[x_0, y_0]$, $[x_0+h, y_0+k]$, totální diferenciály do $(n+1)$-ního řádu včetně. Pak*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)}{1!} + \ldots + \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)}{n!} + R_{n+1},$$

kde pro zbytek R_{n+1} platí

$$R_{n+1} = \frac{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(c,d)}{(n+1)!}.$$

Bod $[c,d]$ je (blíže nikterak určený) vnitřní bod uvedené úsečky u.

[13] Srvn. [Rektorys, 1995] I. díl, ss. 384, 402. Zde jsou další možné tvary tohoto zbytku.

Věta A.70 (Taylorova věta pro funkce n proměnných) *Nechť funkce $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v každém bodě úsečky spojující body $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a $[x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n]$, totální diferenciály do $(n+1)$-ního řádu včetně. Pak*

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n})f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{1!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n})^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{m!} + R_{m+1},$$

kde pro zbytek R_{m+1} platí

$$R_{m+1} = \frac{(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n})^{m+1} f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{m!},$$

s

$$c_k = x_k + \vartheta h_k \quad (0 < \vartheta < 1).$$

A.5 Binomická věta

Věta A.71 (Binomická věta) *Pro všechna reálná n je*[14]

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tato řada je konvergentní pro $x \in (-1, 1)$.

A.6 Leibnitzova formule

Leibnitzova formule pro derivaci integrálu s mezemi jako funkce nezávislé proměnné:[15]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} g(x,\xi) = \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x}\mathrm{d}\xi + g(x, u(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - g(x, v(x))\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

[14] Srvn. [Rektorys, 1995] I. díl. s. 19, 624. Srvn. též [Jarník, 1984b].

[15] [Šejnoha *et al.*, 1998] na s. 132, [Rektorys, 1995]

Literatura

[ADAMS *et al.*, 2002] ADAMS, M. A., BOGDUK, N., BURTON, K., and DOLAN, P. (2002): *The biomechanics of back pain.* Churchill Livingstone, Edinburgh.

[ALEXEJEV *et al.*, 1991] ALEXEJEV, V. M., TICHOMIROV, V. M., and FOMIN, S. V. (1991): *Matematická teorie optimálních procesů.* Academia, Praha.

[ALLAIRE, 1997] ALLAIRE, G. (1997): The homogenization method for topology and shape optimization. In ROZVANY, G. I. N., editor, *Topology optimization in structural mechanics (Proc. CISM Course)*, pages 101–133, Udine. CISM.

[ALLAIRE, 2002] ALLAIRE, G. (2002): *Shape Optimization by the Homogenization Method.* Springer-Verlag, New York.

[ALLAIRE *et al.*, 1997] ALLAIRE, G., BONNETIER, E., FRANCFORT, G. A., and JOUVE, F. (1997): Shape optimization by the homogenization method. *Numerische Mathematik* **76**, 27–68.

[AVELLANEDA, 1987] AVELLANEDA, M. (1987): Optimal bounds and microgeometries for elastic, two-phase composites. *SIAM Journal on Applied Mathematics* **47**, 1216–1228.

[BALL *et al.*, 1999] BALL, J. M., KIRCHHEIM, B., and KRISTENSEN, J. (1999): *Regularity of quasiconvex envelopes.* Preprint, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften), Leipzig.

[BAREŠ, 1989] BAREŠ, R. A. (1989): *Tabulky pro výpočet desek a stěn.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[BECKERS, 1999] BECKERS, M. (1999): Toplogy optimization using a dual method with discrete variables. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **17**, 14–24.

[BECKERS and FLEURY, 1997] BECKERS, M. and FLEURY, C. (1997): Topology optimization involving discrete variables. In GUTKOWSKI, W. and MROZ, Z., editors, *Proc. Conf. WCSMO-2, 2nd World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Warsaw. Inst. Fund. Tech. Research. Held in Zakopane, 1996.

[BELBLIDIA and BULMAN, 2001] BELBLIDIA, F. and BULMAN, S. (2001): Constrained adaptive topology optimization for vibrating shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **22**, 167–176.

[BELLIDO and PEDREGAL, 2002] BELLIDO, J. C. and PEDREGAL, P. (2002): Explicit quasiconvexification for some cost functionals depending on derivatives of the state in optimal designing. *Discrete and continuous dynamical systems* **8**, 967–982.

[BENDSØE, 1995] BENDSØE, M. P. (1995): *Optimatization of Structural Topology, Shape and Material.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo.

[Bendsøe, 1981] Bendsøe, M. P. (1981): On the existence of observable single-output systems, of a simple type. *SIAM Journal on Control and Optimization* **19**, 555–559.

[Bendsøe, 1982] Bendsøe, M. P. (1982): Some Smear-out Models for Integrally Stiffened, Plates. In Atrek, E., Gallagher, R. H., Ragsdell, K. M., and O., C. Z., editors, *New Directions in optimal structural design*, pages (13–29)–(13–34), Swansea. Pineridge Press Ltd.

[Bendsøe, 1983] Bendsøe, M. P. (1983): G-closure and homogenization problems arising in, plate optimization. In *Optimization methods in structural design (Siegen, 1982)*, pages 270–275. Bibliographisches Inst., Mannheim.

[Bendsøe, 1984] Bendsøe, M. P. (1984): Existence proofs for a class of plate optimization, problems. In *System modelling and optimization (Copenhagen, 1983)*, pages 773–779. Springer-Verlag, Berlin.

[Bendsøe, 1986] Bendsøe, M. P. (1986): Generalized Plate Models and Optimal Design. In *Homogenization and Effective Moduli of Materials and, Media (Minneapolis, Minn., 1984/1985)*, pages 1–26, Berlin; New York. Springer-Verlag.

[Bendsøe, 1987] Bendsøe, M. P. (1987): Design of structure and controllers for optimal, performance. In *Computer aided optimal design: structural and, mechanical systems (Tróia, 1986)*, pages 181–193. Springer-Verlag, Berlin.

[Bendsøe, 1988] Bendsøe, M. P. (1988): On optimal design of actively controlled distributed, parameter structures. In *Boundary control and boundary variations (Nice, 1986)*, pages 55–71. Springer-Verlag, Berlin.

[Bendsøe, 1989] Bendsøe, M. P. (1989): Optimal shape design as a material distribution, problem. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **1**, 193–202.

[Bendsøe and Ben-Tal, 1993] Bendsøe, M. P. and Ben-Tal, A. (1993): Truss topology optimization by a displacements based, optimality criterion approach. In *Optimization of large structural systems, Vol. I, II (Berchtesgaden, 1991)*, pages 139–155. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[Bendsøe *et al.*, 1994a] Bendsøe, M. P., Ben-Tal, A., and Zowe, J. (1994a): Optimization methods for truss geometry and topology desing. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **7**, 141–159.

[Bendsøe *et al.*, 1993a] Bendsøe, M. P., Díaz, A. R., and Kikuchi, N. (1993a): Topology and generalized layout optimization of, elastic structures. In *Topology design of structures (Sesimbra, Portugal 1992)*, pages 159–205. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[Bendsøe *et al.*, 1993b] Bendsøe, M. P., Díaz, A. R., and Kikuchi, N. (1993b): Topology Optimization and Generalized Layout, Optimization of Elastic Structures. In Bendsøe, M. P. and Mota Soares, C. A., editors, *Topology Design of Structures, Sesimbra, Portugal*, pages 159–205, Dordrecht. Boston. London. NATO ASI, Kluwer Academic Publishers Group.

[Bendsøe *et al.*, 1995a] Bendsøe, M. P., Díaz, A. R., Lipton, R., and Taylor, J. E. (1995a): Optimal design of material properties and material, distribution for multiple loading conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 1149–1170.

[Bendsøe *et al.*, 1996a] Bendsøe, M. P., Díaz, A. R., Lipton, R., and Taylor, J. E. (1996a): Parametrization in Laminate Design for Optimal, Compliance. *International Journal of Solids and Structures* **34**, 415–434.

[Bendsóe and Guedes, 1994] Bendsóe, M. P. and Guedes, J. M. (1994): Some computational aspects of using extremal material, properties in the optimal design of shape, topology and material. *Control and Cybernetics* **23**, 327–349. Shape design and optimization.

[Bendsóe *et al.*, 1994b] Bendsóe, M. P., Guedes, J. M., Haber, R. B., Pedersen, P., and Taylor, J. E. (1994b): An analytical model to predict optimal material, properties in the context of optimal structural, design. *Journal of Applied Mechanics* **61**, 930–937.

[Bendsóe *et al.*, 1996b] Bendsóe, M. P., Guedes, J. M., Plaxton, S., and Taylor, J. E. (1996b): Optimization of structure and material properties for, solids composed of softening material. *International Journal of Solids and Structures* **33**, 1799–1813.

[Bendsóe *et al.*, 1996c] Bendsóe, M. P., Guedes, J. M., Plaxton, S., and Taylor, J. E. (1996c): Optimization of structure & material properties for, solids composed of softening material. In *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems, (Stuttgart, 1995)*, pages 17–24. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[Bendsóe *et al.*, 1995b] Bendsóe, M. P., Hammer, V. B., Lipton, R., and Pedersen, P. (1995b): Minimum compliance design of laminated plates. In *Homogenization and applications to material sciences, (Nice, 1995)*, pages 45–56. Gakkōtosho, Tokyo. see also [Bendsóe *et al.*, 1996a].

[Bendsóe and Kikuchi, 1988] Bendsóe, M. P. and Kikuchi, N. (1988): Generating optimal topologies in structural design, using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **71**, 197–224.

[Bendsóe and Lipton, 1997] Bendsóe, M. P. and Lipton, R. (1997): Extremal overall elastic response of polycrystalline, materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **45**, 1765–1780.

[Bendsóe and Mota Soares, 1992] Bendsóe, M. P. and Mota Soares, C. A., editors (1992): *Topology Design of Structures*, volume 227 of *NATO ASI series. Series E, Applied sciences*, Dordrecht, Boston, London. Kluwer Academic Publishers Group. Proc. NATO ARW, held in Sesimra, Portugal, 1992.

[Bendsóe and Olhoff, 1985] Bendsóe, M. P. and Olhoff, N. (1985): A method of design against vibration resonance of, beams and shafts. *Optimal Control Applications and Methods* **6**, 191–200.

[Bendsóe *et al.*, 1985] Bendsóe, M. P., Olhoff, N., and Sokołowski, J. (1985): Sensitivity analysis of problems of elasticity with, unilateral constraints. *Journal of Structural Mechanics* **13**, 201–222.

[Bendsóe *et al.*, 1983] Bendsóe, M. P., Olhoff, N., and Taylor, J. E. (1983): A Variational Formulation for Multicriteria Structural, Optimization. *Journal of Structural Mechanics* **11**, 523–544.

[Bendsóe *et al.*, 1987] Bendsóe, M. P., Olhoff, N., and Taylor, J. E. (1987): On the design of structure and controls for optimal, performance of actively controlled flexible, structures. *Mechanics of Structures and Machines* **15**, 265–295.

[Bendsóe and Rodrigues, 1990] Bendsóe, M. P. and Rodrigues, H. C. (1990): On topology and boundary variations in shape, optimization. *Control and Cybernetics* **19**, 9–26. Optimal design and control of structures (Jabłonna, 1990).

[Bendsóe and Rodrigues, 1991] Bendsóe, M. P. and Rodrigues, H. C. (1991): Integrated topology and boundary shape optimization of, 2D solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **87**, 15–34.

[Bendsóe and Sigmund, 1999] Bendsóe, M. P. and Sigmund, O. (1999): Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.* **69**, 635–654.

[Bendsóe and Sigmund, 2003] Bendsóe, M. P. and Sigmund, O. (2003): *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo.

[Bendsóe and Sokołowski, 1987] Bendsóe, M. P. and Sokołowski, J. (1987): Sensitivity analysis and optimal design of elastic, plates with unilateral point supports. *Mechanics of Structures and Machines* **15**, 383–393.

[Bendsóe and Sokołowski, 1988] Bendsóe, M. P. and Sokołowski, J. (1988): Design sensitivity analysis of elastic-plastic, analysis problems. *Mechanics of Structures and Machines* **16**, 81–102.

[Bendsóe and Sokołowski, 1995a] Bendsóe, M. P. and Sokołowski, J. (1995a): Shape sensitivity analysis of optimal compliance, functionals. *Mechanics of Structures and Machines* **23**, 35–58.

[Bendsóe and Sokołowski, 1995b] Bendsóe, M. P. and Sokołowski, J. (1995b): Shape sensitivity analysis of nonsmooth shape, functionals. In *Recent developments in optimization (Dijon, 1994)*, pages 36–45. Springer-Verlag, Berlin.

[Berthelot, 1999] Berthelot, J.-M. (1999): *Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis.* Spiringer-Verlag, New York.

[Bessaou and Siarry, 2001] Bessaou, M. and Siarry, P. (2001): A genetic algorithm with real-value coding to optimize multimodal continuous functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **23**, 63–74.

[Bousselsal and Brighi, 1997] Bousselsal, M. and Brighi, B. (1997): Rank-one-convex and Quasiconvex Envelopes for Functions Depending on Quadratic Forms. *Journal of Convex Analysis* **4**, 305–319.

[Brebbia *et al.*, 1988] Brebbia, W. R., Blain, W. R., and Wilde, W. P., editors (1988): *Computer Aided Design in Composite Material Technology, Proceedings of the International Conference*, Southampton.

[Buhl *et al.*, 2000] Buhl, T., Pedersen, C. B. W., and Sigmund, O. (2000): Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **19**, 93–104.

[Chen *et al.*, 2002] Chen, Y. M., Bhaskar, A., and Keane, A. (2002): A parallel nodal-based evolutionary structural optimization algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **23**, 241–251.

[Cheng and Olhoff, 1981] Cheng, G. and Olhoff, N. (1981): An investigation concerning optimal design of solid, Elastic Plates. *International Journal of Solids and Structures* **17**, 305–323.

[Cherkaev, 2000] Cherkaev, A. (2000): *Variational methods for structural optimization.* Springer, New York.

[Cioranescu and Paulin, 1999] Cioranescu, D. and Paulin, J. S. J. (1999): *Homogenization of Reticulated Structures.* Spiringer-Verlag, New York.

[Dacorogna, 1982] Dacorogna, B. (1982): *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo.

[Dacorogna, 1989] Dacorogna, B. (1989): *Direct Methods in the Calculus of Variations*, volume 78 of *Applied Math. Sciences*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo.

[Daniel *et al.*, 2001] Daniel, M., Antolič, V., Iglič, A., and Kralj-Iglič, V. (2001): Determination of contact hip stress from nomograms based on mathematical model. *Medical Engineering & Physics* **23**, 347–357.

[Daniel *et al.*, 2005] Daniel, M., Iglič, A., and Kralj-Iglič, V. (2005): The shape of acetabular cartilage optimizes hip contact stress distribution. *Journal of Anatomy* , 85–91.

[Daniel *et al.*, 2003] Daniel, M., Kralj-Iglič, V., Iglič, A., and Sochor, M. (2003): Hypothesis of the regulation of the cartilage activity by mechanical loading. *Medical Hypotheses* **60**, 936–937.

[Darwin, 1859] Darwin, C. R. (1859): *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life (The Origin of Species).* Down, Bromley, Kent, England.

[Доннелл, 1982] Доннелл, Л. (1982): *Бальки пластинки и оболочки.* Наука, Москва. Перевод на руский язык.

[Donnell, 1976] Donnell, L. H. (1976): *Beams, Plates and Shells.* McGraw-Hill, New York.

[Duysinx, 1999] Duysinx, P. (1999): Topology optimization with different stress limit in tension and compression. In *Proc. WCSMO-3, 3rd World Cong. on Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 626–628, Buffalo. Held in Buffalo, NY.

[Dvořák and Haslinger, 1998] Dvořák, J. and Haslinger, J. (1998): *Aspects of the Mathematical Modelling and Optimal Design of Composite Materials.* PhD thesis, MFF UK.

[Elsgolc, 1965] Elsgolc, L. E. (1965): *Variační počet.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha. Přeložil z ruského jazyka Tomáš Gál.

[Flügge, 1962] Flügge, W. (1962): *Handbook of Engineering mechanics.* McGraw-Hill Book Company, Inc., London, New York, Toronto.

[Friis *et al.*, 1988] Friis, E. A., Lakes, R. S., and Park, J. B. (1988): Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *Journal of Materials Science* **23**, 4406–4414.

[Gallagher and Zienkiewicz, 1973] Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. (1973): *Optimum Structural Desing.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Gaspar *et al.*, 2002] Gaspar, Z., Logo, J., and Rozvany, G. I. N. (2002): Addenda and corrigenda to: (1) Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics and (2) On design-dependent constraints and singular topologies (Vol. 21, No. 2, 2001, pp. 90–108; 164–172). *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **24**, 338–342.

[Gibiansky and Sigmund, 2000] Gibiansky, L. V. and Sigmund, O. (2000): Multiphase elastic composites with extremal bulk modulus. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48 (3)**, 461–498.

[Goldberg, 1989] Goldberg, D. E. (1989): *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.* Addison-Wesley Publ. Co., New York.

[Guedes and Taylor, 1996] Guedes, J. M. and Taylor, J. E. (1996): On the prediction of material properties and topology, for optimal continuum structures. *Structural Optimization* **14**, 193–199.

[Gürdal *et al.*, 1999] Gürdal, Z., Haftka, R. T., and Hajela, P. (1999): *Design and Optimization of Laminated Composite Materials.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Haber *et al.*, 1996] Haber, R. B., Jog, C. S., and Bendsóe, M. P. (1996): A new approach to variable-topology shape design using, a constraint on perimeter. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **11**, 1–12.

[Haftka and Gürdal, 1992] Haftka, R. T. and Gürdal, Z. (1992): *Elements of Structural Optimization Desing.* Kluver Academic Publishers, Boston.

[Hájek *et al.*, 1988] Hájek, E., Reif, P., and Valenta, F. (1988): *Pružnost a pevnost.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[Hammer and Olhoff, 2000] Hammer, V. B. and Olhoff, N. (2000): Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **19**, 85–92.

[Haslinger *et al.*, 2002] Haslinger, J., Hillebrand, A., Kärkkäinen, T., and Miettinen, M. (2002): Optimization of conducting structures by using the homogenization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **24**, 125–140.

[Havrda, 1972] Havrda, J. (1972): *Matematické programování.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[Holland, 1975] Holland, J. H. (1975): *Adaptation in Natural and Artificial Systems.* The University of Michigan Press, Ann Arbor, first edition.

[Holland, 1992] Holland, J. H. (1992): *Adaptation in Natural and Artificial Systems.* MIT Press, Cambridge, second edition.

[Iglič *et al.*, 2000] Iglič, A., Daniel, M., Kralj-Iglič, V., Antolič, V., and Jaklič, A. (2000): Peak joint contact stress in male and female population. *Journal of Musculoskeletal Research* **5**, 17–21.

[Iglič *et al.*, 2002] Iglič, A., Kralj-Iglič, V., Daniel, M., and Maček-Lebar, A. (2002): Computer determination of contact stress distribution and the size of the weight-bearing area in the human hip joint. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **5**, 185–192.

[Jamróz and Mareš, 2003] Jamróz, T. and Mareš, T. (2003): Optimalizace rámových konstrukcí pomocí mezního návrhu (Frame Stucture Optimization by Limit Design Method). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 162–170, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Jamróz and Mareš, 2003] Jamróz, T. and Mareš, T. (2003): Hledání optimální topologie rámové konstrukce pomocí metody mezního návrhu (Searching of Optimal Topology of Frame Structure by Limit Design Method). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 171–179, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Jarník, 1984a] Jarník, V. (1984a): *Diferenciální počet I.* Academia, Praha.

[Jarník, 1984b] Jarník, V. (1984b): *Diferenciální počet II.* Academia, Praha.

[Jarník, 1984c] Jarník, V. (1984c): *Integrální počet II.* Academia, Praha.

[Kita and Toyoda, 2000] Kita, E. and Toyoda, T. (2000): Structural design using cellular automata. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **19**, 64–73.

[Кочин, 1951] Кочин, Н. Е. (1951): *Векторное исчисление и начала тензорново исчисления.* Издателстбо академии наук СССР, Москва.

[Kohn and Strang, 1983] Kohn, R. V. and Strang, G. (1983): Optimal design for torsional rigidity. In Atluri, S. N., Galagher, R. H., and Zienkiewicz, O. C., editors, *Hybrid and mixed finite element methods*, pages 281–288, London, New York. John Wiley & Sons.

[Kohn and Strang, 1986] Kohn, R. V. and Strang, G. (1986): Optimal design and relaxation of variational, problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics (New York)* **39**, 1–25 (part I), 139–182 (part II) and 353–357 (part III).

[Lavrenťjev and Lusternik, 1952] Lavrenťjev, M. A. and Lusternik, L. A. (1952): *Kurz variačního počtu.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha.

[Lewinski *et al.*, 1994] Lewinski, T., Zhou, M., and Rozvany, G. I. N. (1994): Extended exact solutions for least-weight truss layouts. Part I: Cantilever with a horizontal axis of symmetry. Part II: Unsymmetric cantilevers. *Int. J. Mech. Sci.* **36**, 375–398, 399–419.

[Lipton, 1994] Lipton, R. (1994): A saddle-point theorem with application to structural optimization. *J. Opt. Th. Appl.* **81, 3**, 549–567.

[Lurie *et al.*, 1982] Lurie, K. A., Cherkaev, A. V., and Fedorov, A. V. (1982): Regularization of optimal design problems for bars and, plates. I, II. *Journal of Optimization Theory and Applications* **37**, 499–522, 523–543. The first and the second parts were separately, published as [Lurie *et al.*, 1980a] and, [Lurie *et al.*, 1980b].

[Lurie *et al.*, 1984] Lurie, K. A., Cherkaev, A. V., and Fedorov, A. V. (1984): On the existence of solutions to some problems of, optimal design for bars and plates. *Journal of Optimization Theory and Applications* **42**, 247–281.

[Lurie *et al.*, 1980a] Lurie, K. A., Fedorov, A. V., and Cherkaev, A. V. (1980a): *Relaxation of optimal design problems for bars and, plates and eliminating of contradictions in the, necessary conditions of optimality.* Report 667, Ioffe Physico-technical Institute, Acad of Sc, USSR, Leningrad, USSR. In Russian. English translation in, [Lurie *et al.*, 1982], part I.

[Lurie *et al.*, 1980b] Lurie, K. A., Fedorov, A. V., and Cherkaev, A. V. (1980b): *On the existence of solutions of certain optimal, design problems for bars and plates.* Report 668, Ioffe Physico-technical Institute, Acad of Sc, USSR, Leningrad, USSR. In Russian. English translation in, [Lurie *et al.*, 1982], part II.

[Manevitch *et al.*, 2002] Manevitch, L. I., Andrianov, I. V., and Oshmyan, V. G. (2002): *Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo.

[Mareš, 1999] Mareš, T. (1999): *Aplikace lineárního programování pro optimalizaci konstrukce.* Master's thesis, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, Technická 4, 166 07 Prague.

[Mareš, 2000] Mareš, T. (2000): Aplikace variačního počtu v konstrukční optimalizaci. In *AM 2000*, pages 273–276, Liberec.

[Mareš, 2002a] Mareš, T. (2002a): Geometrická nerovnost a nekonvexní optimalizační úlohy. (Geometric Inequality and Nonconvex Optimization Problems). In Frydrýšek, K., editor, *AM 2002, Ostrava 8–11.IV.2002*, pages 247–252, Ostrava. VŠB – Technická univerzita.

[Mareš, 2002b] Mareš, T. (2002b): Metodologický postup konstrukční optimalizace. In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2002*, pages 157–170, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2002c] Mareš, T. (2002c): Maximization of Laminate Plate Stiffness. In Sablik, J., editor, *CO-MAT-TECH 24–25.X.2002*, volume 2, pages 329–332, Bratislava. MF STU, Bratislava.

[Mareš, 2002d] Mareš, T. (2002d): *Metodologie a matematické metody konstrukční optimalizace: (Methodology and mathematical methods of structural optimization).* Technical Report 2051/02/31, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Mareš, 2002e] Mareš, T. (2002e): *Zobecnění metody zvané geometrické programování (Generalization of the Geometric Programming Method).* Technical Report 2051/02/34, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Mareš, 2003a] Mareš, T. (2003a): Optimizing of Laminate Plate Elastic Behavior. In Říha, B., editor, *Proceedings of the Workshop 2003 of CTU in Prague, January 2003*, pages 648–649, Prague. Czech Technical University in Prague.

[Mareš, 2003b] Mareš, T. (2003b): Nonconvex Mathematical Programming in Evaluation of Experimental Data. In Říha, B., editor, *Proceedings of the Workshop 2003 of CTU in Prague, January 2003*, pages 712–713, Prague. Czech Technical University in Prague.

[Mareš, 2003c] Mareš, T. (2003c): Controlling of laminate plate elastic behavior. In *Proceedings of the 3rd International Conference AED 2003, 1–4. June 2003, Prague, Czech Republic*, page 127, Prague. Czech Technical University in Prague.

[Mareš, 2003d] Mareš, T. (2003d): Úloha o maximalizaci tuhosti (Stiffness maximization problem). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 196–205, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003e] Mareš, T. (2003e): Soustava souřadnic při návrhu vinutí laminátové trubky (Coordinate System for Design of Laminate Tube Winding Angle). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 212–218, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003f] Mareš, T. (2003f): Úhel vinutí jednovrstvé laminátové trubky maximalizující tuhost vŇIi kroucení (Winding Angle of Single Ply Laminate Tube that Maximize Twist Stiffness). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 219–228, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003g] Mareš, T. (2003g): Vícevrstvá laminátová trubka namáhaná krutem (Multilayer Laminate Tube under Torsion). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 229–234, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003h] Mareš, T. (2003h): Laminátová trubka jednovrstvá namáhaná kombinací tahu, krutu a vnitřního přetlaku (Single Ply Laminate Tube under Tension, Torsion and Interior Pressure). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 247–255, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003i] Mareš, T. (2003i): Laminátová trubka vícevrstvá namáhaná kombinací tahu, krutu a vnitřního přetlaku (Multilayer Laminate Tube under Tension, Torsion and Interior Pressure). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 256–262, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003j] Mareš, T. (2003j): Návrh laminátové trubky namáhané nejistým zatížením (Design of Laminate Tube under Uncertain Loading). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 263–275, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2003k] Mareš, T. (2003k): Formulace zobecněného Hookeova zákona laminátové vrstvy (Formulation of generalized constitutive low of laminate plate). In Daniel, M., editor, *Proceedings of the Summer Workshop of Applied Mechanics, Prague, June 2003*, pages 206–211, Prague. Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics.

[Mareš, 2004] Mareš, T. (2004): *Maximalizace tuhosti laminátových desek a trubek volbou orientace vrstev.* PhD thesis, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, Prague.

[Mareš, 2005a] Mareš, T. (2005a): *Maximalizace tuhosti laminátových desek a trubek.* Nákladem Tomáše Mareše, Praha. ISBN 80-239-4469-X.

[Mareš, 2005b] Mareš, T. (2005b): Laminate Tube Stiffness Maximization by Winding Angle Control. *Bulletin of Applied Mechanics* **1**, 29–54. ISSN 1801–1217.

[Mareš, 2005c] Mareš, T. (2005c): Maximalizace tuhosti prutových konstrukcí. *Bulletin of Applied Mechanics* **2**, 91–107.

[Mareš, 2005d] Mareš, T. (2005d): Resume of PhD Thesis. *Bulletin of Applied Mechanics* **3**, 153–160.

[Mareš and Holý, 2000] Mareš, T. and Holý, S. (2000): Linear Programming in Structural Optimization. In *CTU Workshop 2000*, page 291, Prague. Czech Technical University in Prague.

[Mareš and Holý, 2001a] Mareš, T. and Holý, S. (2001a): Evolutionary Constructing Compared with Structural Optimization. In *CO-MAT-TECH 2001*, pages 308–313, Trnava.

[Mareš and Holý, 2001b] Mareš, T. and Holý, S. (2001b): *Obecná pravidla konstrukční optimalizace (Common Rules of Structural Optimization).* Technical Report 205/01/27, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Mareš and Holý, 2001c] Mareš, T. and Holý, S. (2001c): *Inovace výuky předmětu Tenkostěnné konstrukce. Část: Obecné zásady optimalizace.* Technical Report 205/01/21, grant. project FR VŠ MŠMT 1827/2001, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Mareš and Holý, 2001d] Mareš, T. and Holý, S. (2001d): *Řešení nekonvexní optimalizační úlohy (The Solution of Nonconvex Optimization Problems).* Technical Report 205/01/28, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Mareš and Holý, 2002] Mareš, T. and Holý, S. (2002): A Method of Structural Optimization (Způsob konstrukční optimalizace). In *CTU Workshop 2002*, pages 710–711, Prague. Czech Technical University in Prague.

[Mareš *et al.*, 2001] Mareš, T., Vítek, K., and Holý, S. (2001): *Matematické metody v konstrukční optimalizaci (Mathematical Methods of Structural Optimization).* Technical Report 2051/01/32, Czech Technical University in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, Prague.

[Marion and Temam, 1989] Marion, M. and Temam, R. (1989): Nonlinear Galerkin Methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **26**, 1139–1157.

[Mattheck and Burkhardt, 1990] Mattheck, C. and Burkhardt, S. (1990): A New Method of Structural Shape Optimisation Based on Biological Growth. *Int. J. Fatigue* **12(3)**, 185–190.

[Maňas, 1979] Maňas, M. (1979): *Optimalizační metody.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[Maňas, 1991] Maňas, M. (1991): *Teorie her a její aplikace.* SNTL, Praha.

[Mavčič *et al.*, 2002] Mavčič, B., Pompe, B., Daniel, M., Iglič, A., and Kralj-Iglič, V. (2002): Mathematical estimation of stress distribution in normal and dysplastic human hip. *Journal of Orthopaedic Research* **20**, 1025–1030.

[McMillan, 1975] McMillan, C. J. (1975): *Mathematical Programming.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Metropolis *et al.*, 1953] Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A., and Teller, E. (1953): Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.* **21**, 1087–1092.

[Michell, 1904] Michell, A. G. M. (1904): The limits of economy of material in frame structures. *Phil. Mag.* **8**, 589–597.

[Михлин, 1957] Михлин, С. Г. (1957): *Вариационные методы в математической физике.* Гостешиздат, Москва.

[Ong *et al.*, 1988] Ong, T. G., Rozvany, G. I. N., and Szeto, W. T. (1988): Least weight design of perforated elastic plates for given compliance: nonzero Poisson's ratio. *Comp. Meth. Appl. Mech.* **66**, 301–322.

[Pedersen *et al.*, 2001] Pedersen, C. B. W., Buhl, T., and Sigmund, O. (2001): Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50**, 2683–2705.

[Pedregal, 1999] Pedregal, P. (1999): Optimization, relaxation and Young measures. *Bulletin of the AMS* **36**, 27–58.

[Pedregal, 2000] Pedregal, P. (2000): *Variational Methods in Nonlinear Elasticity.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[Pedregal, 2001] Pedregal, P. (2001): Fully explicit quasiconvexification of the mean-square deviation of the gradient of the state in optimal design. *Electronic research announcements of the American Mathematical Society* **7**, 72–78.

[Peterson *et al.*, 1967] Peterson, E. L., Duffin, R. J., and Zener, C. (1967): *Geometric Programming: Theory and Application.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Pirsig, 1979] Pirsig, R. M. (1979): *Zen and Art of Motorcycle Maintenance.* William Morrow, New York.

[Pompe *et al.*, 2003] Pompe, B., Daniel, M., Sochor, M., Vengust, R., Kralj-Iglič, V., and Iglič, A. (2003): Gradient of contact stress in normal and dysplastic human hip. *Medical Engineering & Physics* **25**, 379–385.

[Prager, 1974] Prager, W. (1974): *Introduction to structural optimization.* Springer-Verlag, Vienna. Course held at the Department of Mechanics of Solids, International Centre for Mechanical Sciences, Udine, October, 1974, International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, No. 212.

[Prager and Rozvany, 1977a] Prager, W. and Rozvany, G. I. N. (1977a): Optimal layout of grillages. *J. Struct. Mech.* **5**, 1–18.

[Prager and Rozvany, 1977b] Prager, W. and Rozvany, G. I. N. (1977b): Optimization of structural geometry. In Bednarek, A. and Cesari, L., editors, *Dynamical systems*, pages 265–294, New York. Academic Press.

[Rektorys, 1999] Rektorys, K. (1974,1999): *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[Rektorys, 1995] Rektorys, K. (1995): *Přehled užité matematiky, I. a II. díl.* Prometheus, Praha.

[Rodrigues *et al.*, 1999] Rodrigues, H. C., Soto, C. A., and Taylor, J. E. (1999): A design model to predict optimal two-material, composite structure. *Structural Optimization* **17**, 186–198.

[Rossow and Taylor, 1973] Rossow, M. P. and Taylor, J. E. (1973): A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. *AIAA J.* **11**, 1566–1569.

[Roubíček, 1997] Roubíček, T. (1997): *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus.* Walter de Gruyter, Berlin.

[Rozvany, 1972a] Rozvany, G. I. N. (1972a): Grillages of maximum strength and maximum stiffness. *Int. J. Mech. Sci.* **14**, 651–666.

[Rozvany, 1972b] Rozvany, G. I. N. (1972b): Optimal load transmission by flexure. *Comp. Meth. Appl. Mech.* **1**, 253–263.

[Rozvany, 1992] Rozvany, G. I. N. (1992): Optimal layout theory: analytical solution for elastic structures with several deflection constraints and load conditions. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **4**, 247–249.

[Rozvany, 2001a] Rozvany, G. I. N. (2001a): Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **21**, 90–108.

[Rozvany, 2001b] Rozvany, G. I. N. (2001b): Stress ratio and compliance based methods in topology optimization – a critical review. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **21**, 109–119.

[Rozvany *et al.*, 1995] Rozvany, G. I. N., Bendsóe, M. P., and Kirsch, U. (1995): Layout Optimization of Structures. *Applied Mechanics Reviews* **48**, 41–119.

[Rozvany and Birker, 1994] Rozvany, G. I. N. and Birker, T. (1994): On singular topologies in exact layout optimization. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **8**, 228–235.

[Rozvany *et al.*, 1987] Rozvany, G. I. N., Olhoff, N., Bendsóe, M. P., *et al.* (1987): Least weight design of perforated elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* **23**, 521–536 (part I) and 537–550 (part II).

[Rozvany *et al.*, 1982] Rozvany, G. I. N., Olhoff, N., Cheng, K. T., and Taylor, J. E. (1982): On the solid plate paradox in structural, optimization. *Journal of Structural Mechanics* **10**, 1–32.

[Rozvany and Prager, 1976] Rozvany, G. I. N. and Prager, W. (1976): Optimal design of partially discretized grillages. *J. Mech. Phys. Solids* **24**, 125–136.

[Rozvany and Prager, 1979] Rozvany, G. I. N. and Prager, W. (1979): A new class of structural optimization problems: optimal archgrids. *Comp. Mech. Appl. Mech. Eng.* **19**, 127–150.

[Rozvany and Zhou, 1991] Rozvany, G. I. N. and Zhou, M. (1991): Applications of COC method in layout optimization. In Escheauer, H., Mattheck, C., and Olhoff, N., editors, *Proc. Conf. Eng. Opt. in Design Processes*, Berlin–Heidelberg–New York–London–Barcelona–Hong Kong–Milan–Paris–Singapore–Tokyo. Springer-Verlag. Held in Karlsruhe 1990.

[Rozvany and Zhou, 1992] Rozvany, G. I. N. and Zhou, M. (1992): Extensions of new discretized optimality criteria methods to structures with pasive control. In *Proc. 4th AIAA/USAF/NASA/OAI Symp. Multidisc. Anal. Optim.*, pages 288–297, Washington D.C. AIAA. Held in Cleveland, OH.

[Rozvany *et al.*, 1992] Rozvany, G. I. N., Zhou, M., and Birker, T. (1992): Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **4**, 250–254.

[Sanchez-Palencia and Zaoui, 1985] Sanchez-Palencia, E. and Zaoui, A., editors (1985): *Homogenization Techniques for Composite Media*, Italy, Udine.

[SAXENA and ANANTHASURESH, 2000] SAXENA, A. and ANANTHASURESH, G. K. (2000): On an optimal property of compliant topologies. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **19**, 36–49.

[SIGMUND, 1994] SIGMUND, O. (1994): *Design of material structures using topology optimization.* PhD thesis, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark.

[SIGMUND, 1996] SIGMUND, O. (1996): Some inverse problems in topology design of materials, and mechanisms. In *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems, (Stuttgart, 1995)*, pages 277–284. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. Boston. London.

[SIGMUND, 1999] SIGMUND, O. (1999): On the optimality of bone microstructures. In PEDERSEN, P. and BENDSÓE, M. P., editors, *IUTAM Symposium: Synthesis in Boid Solid Mechanics*, pages 221–234, Dordrecht, Boston, London. Kluwer Academic Publishers Group.

[SIGMUND, 2000] SIGMUND, O. (2000): A new Class of Extremal Composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48 (2)**, 397–428.

[SIGMUND and PETERSSON, 1998] SIGMUND, O. and PETERSSON, J. (1998): Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **16**, 68–75.

[SOBOTKA, 1981] SOBOTKA, Z. (1981): *Reologie hmot a konstrukcí.* Academia, Praha.

[SOREMEKUN, 1997] SOREMEKUN, G. A. E. (1997): *Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization.* Master's thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia 24061–0219.

[SPUNT, 1971] SPUNT, L. (1971): *Optimum Structural Desing.* Prentice Hall, New York.

[STOLPE and SVANBERG, 2001] STOLPE, M. and SVANBERG, K. (2001): On the trajectories of penalization methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer-Verlag* **21**, 128–139.

[SVÄTOKRÍŽNÝ, 1984] SVÄTOKRÍŽNÝ, P. (1984): *Lineární algebra v úlohách.* Alfa – Vydavatel'stvo technickej a ekonomickej literatury, Bratislava.

[TAYLOR, 1998] TAYLOR, J. E. (1998): An energy model for the optimal design of linear continuum structures. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **16**, 116–127.

[TIMOSHENKO, 1940] TIMOSHENKO, S. P. (1940): *Theory of Plates and Shells.* McGraw-Hill Book Company, Inc., London, New York, Toronto.

[TSAI, 1988] TSAI, S. W. (1988): *Composite Design.* Think Composites, Dayton–Tokyo–Paris.

[TSAI, 1992] TSAI, S. W. (1992): *Theory of Composite Design.* Think Composites, Dayton–Tokyo–Paris.

[ВАЦУДЗУ, 1987] ВАЦУДЗУ, К. (1987): *Вариационные методы в теории упругости.* Мир, Москва. Перевод на руский язык.

[VAJNBERG, 1972] VAJNBERG, M. M. (1972): *Варияционный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* Наука, Москва.

[VENGUST *et al.*, 2001] VENGUST, R., DANIEL, M., ANTOLIČ, V., ZUPANC, O., IGLIČ, A., and KRALJ-IGLIČ, V. (2001): Biomechanical evaluation of the hip after innominate osteotomy: a long-term follow-up study. *Archives of Orthopaedic and Trauma Surgery* **121**, 511–516.

[Vengust *et al.*, 2000] Vengust, R., Drobnič, M., Daniel, M., Antolič, V., Pernuš, F., Iglič, A., and Kralj-Iglič, V. (2000): Role of magnification of standard antero-posterior radiographs in determination of contact hip joint stress. *Biomedical Engineering – Application, Basis and Communication* **12**, 30–31.

[Venter and Haftka, 1997] Venter, G. and Haftka, R. T. (1997): *Minimum-Bias Based Experimental Design for Constructing Response Surfaces in Structural Optimization.* Technical report, Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.

[Venter *et al.*, 1996] Venter, G., Haftka, R. T., and Starnes, J. H. J. (1996): *Construction of Response Surfaces for Design Optimization Applications.* Technical report, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.

[Vigdergauz, 1986] Vigdergauz, S. B. (1986): Effective elastic parameters of a plate with a regular, system of equal-strength holes. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela* **21**, 165–169.

[Vincent and Grantham, 1981] Vincent, T. L. and Grantham, W. J. (1981): *Optimality in Parametric Systems.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Vitásek, 1987] Vitásek, E. (1987): *Numerické metody.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

[Šubrt, 1981] Šubrt, L. (1981): *Teorie desek a skořepin.* Czech Technical University in Prague.

[Washizu, 1975] Washizu, K. (1975): *Variational Methods in Elasticity nad Plasticity.* Pergamon Press, Oxford, 2nd edition.

[Wilde, 1978] Wilde, D. J. (1978): *Globally Optimal Design.* John Wiley & Sons, London, New York.

[Zhou, 1992] Zhou, M. (1992): *A new discretized optimality criteria method in structural optimization.* PhD thesis, Essen University.

[Zhou, 1995] Zhou, M. (1995): An efficient DCOC algorithm based on highquality approximation for problems including eigenvalue constraints. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **128**, 383–394.

[Zhou and Haftka, 1994] Zhou, M. and Haftka, R. T. (1994): A comparison of optimality criteria methods for stress and displacement constraints. In *Proc. 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Dyn. Mat. Conf.*, Washington D.C. AIAA. Held in Hilton Head, SC.

[Zhou and Rozvany, 1991] Zhou, M. and Rozvany, G. I. N. (1991): The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **89**, 309–336.

[Zhou and Rozvany, 1992] Zhou, M. and Rozvany, G. I. N. (1992): DCOC: an optimality criteria method for large systems. Part I: theory. Part II: algorithm. *Structural Optimization, Springer-Verlag* **5**, 12–25.

[Zhou and Rozvany, 1996] Zhou, M. and Rozvany, G. I. N. (1996): An improved approximation method for the DCOC method of sizing optimization. *Comp. Struct.* **60**, 763–769.

[Zienkiewicz, 1971] Zienkiewicz, O. C. (1971): *The finite element method in engineering science.* McGraw-Hill Book Company, Inc., London, New York, Toronto.

[Šejnoha *et al.*, 2001] Šejnoha, M., Kabele, P., Němeček, J., Zeman, J., and Haslinger, J. (2001): Elastic and Inelastic Analysis of Heterogeneous Material. CTU in Prague (unpublished).

[Šejnoha *et al.*, 1998] Šejnoha, M., Šejnoha, J., and Bittnarová, J. (1998): *The Theory of Elasticity.* Czech Technical University in Prague, Prague.

[Šverák, 1992] Šverák, V. (1992): Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A, Mathematical and Physical Sciences* **120**, 185–189.

Rejstřík

Rejstřík autorů