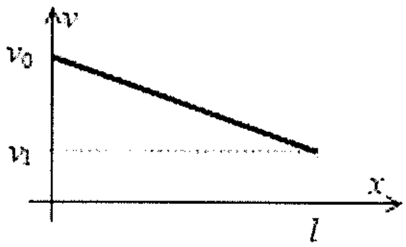
Příklad 1.3

U přímočaře se pohybujícího bodu je dána závislost rychlosti na odlehlosti.



Dáno:

l = 100 mm , v_0 = 0,4 ms^{-1}, v_1 = 0,05 ms^{-1}.

Určete: Dobu T pro požadovaný pokles rychlosti .

Průběhy rychlosti a zrychlení jako funkce času.

D: l, v_0, v_1

U: $T, v(t), a(t)$

→ URČÍM VZTAH RYCHLOSTI NA DRÁZE PODLE GRAFU:

$$v = v_0 + \frac{\Delta v}{\Delta x} x = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{l - 0} x = v_0 - \frac{v_0 - v_1}{l} x$$

OZNAČÍM $k = \frac{v_0 - v_1}{l}$

→ MÁM FUNKCI $v(x)$, MOHU TEDY NAPSAT, ŽE $v = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - k \cdot x$$

→ K "dx" PŘEVEDU ČLEN S PROMĚNNOU "x" A UPRAVÍM PRO INTEGRACI

$$\frac{dx}{v_0 - k \cdot x} = dt$$

$$\underbrace{\int \frac{dx}{v_0 - k \cdot x}}_{\text{ŘEŠÍM SUBSTITUCÍ}} = \int dt$$

$$\int \frac{dx}{v_0 - kx} = \left| \begin{matrix} v_0 - kx = u \\ -k\,dx = du \\ dx = -\frac{1}{k} du \end{matrix} \right| = -\frac{1}{k} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{k} \ln |u|$$

A DOSADÍM ZPÁTKY Z "u":

$$-\frac{1}{k} \ln |v_0 - kx| \Big|_0^x = \int_0^t dt$$

MEZE: POHYB ZAČÍNÁ V $x=0$ (Z GRAFU), ČAS ZAČÁTKU POHYBU VOLÍME $t=0$, HORNÍ MEZE VOLÍME JAKO OBECNOU POLOHU "x" V OBECNÉM ČASE "t" ABYCHOM ZÍSKALI ZÁVISLOST POLOHY NA ČASE

$$-\frac{1}{k} \ln |v_0 - kx| - \left(-\frac{1}{k} \ln (v_0)\right) = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{v_0}{v_0 - k \cdot x} \right| = t$$

PRO $x \in \langle 0, l \rangle$ $v_0 - k \cdot x > 0$, PAK PLATÍ

$$\frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - k \cdot x}\right) = t$$

DOSAZENÍM DRÁHY "l" ZA "x" ZÍSKÁM DOBU "T":

$$\boxed{T = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_0 - k \cdot l}\right) = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)}$$

POTŘEBUJI "$x(t)$"

$$e^{\ln\left(\frac{v_0}{v_0 - k \cdot x}\right)} = e^{kt}$$

$$\frac{v_0}{v_0 - k \cdot x} = e^{k \cdot t}$$

$$v_0 e^{-kt} = v_0 - k \cdot x$$

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$ PRŮBĚH POLOHY $x(t)$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{k}\left(-(-k) e^{-kt}\right) = \frac{v_0}{k} k e^{-kt} = v_0 e^{-kt}}$$ PRŮBĚH RYCHLOSTI

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = -v_0 k e^{-kt}}$$ PRŮBĚH ZRYCHLENÍ