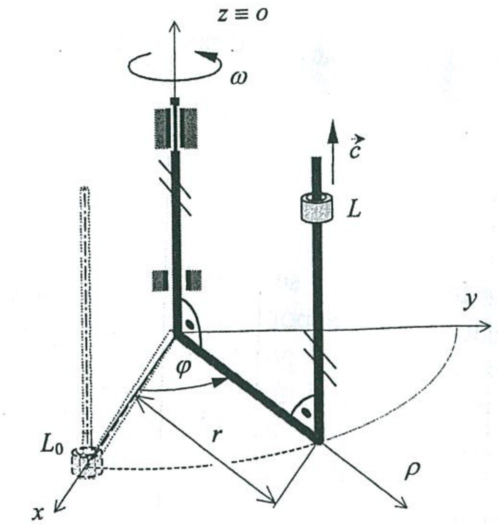
Příklad 2.2



Těleso tvořené dvěma rovnoběžnými tyčemi spojenými kolmou příčkou o délce r se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω okolo osy o.
Po druhé tyči (viz. obr.) se rovnoměrně pohybuje bodová objímka L rychlostí c = konst.

Dáno: $r = 0{,}05$ m ; $c = 0{,}1$ ms^{-1}; $\omega = 4\pi$ s^{-1} .
Počáteční podmínky: pro $t = 0$ je $L \equiv L_0$ na ose x.

Vypočtěte trajektorii, rychlost a zrychlení bodu L nejprve v pravoúhlém souřadnicovém systému a poté v přirozeném souřadnicovém systému. Vyjádřete délku proběhnuté dráhy jako funkci času.

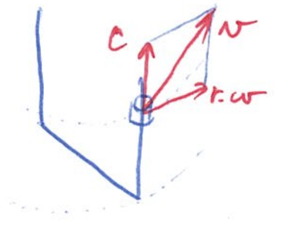
D: r, c, ω
p.p.: $t = 0$ ... $L \equiv L_0$ na ose x
U: traj., rychl., zrychl. bodu L, $s(t)$, poloměr křivosti ρ

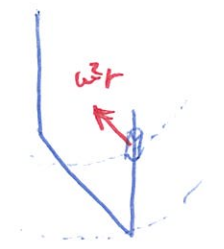
→ PRAVOÚHLÉ SOUŘADNICE

$\varphi = \omega \cdot t$ TRAJEKTORIE:
$x_L = r \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\omega t$
$y_L = r \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\omega t$
$z_L = c \cdot t$

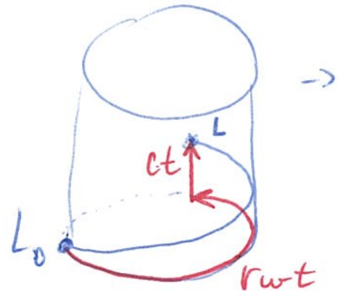
RYCHLOST:
$v_x = \frac{dx_L}{dt} = -\omega \cdot r \sin\omega t$
$v_y = \frac{dy_L}{dt} = \omega \cdot r \cdot \cos\omega t$
$v_z = c$
$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} =$
$= \sqrt{(\omega r)^2 \sin^2\omega t + (\omega r)^2 \cos^2\omega t + c^2} =$
$= \sqrt{(\omega \cdot r)^2 + c^2}$ → VELIKOST RYCHLOSTI

ZRYCHLENÍ
$a_x = -\omega^2 r \cos\omega t$
$a_y = -\omega^2 r \sin\omega t$
$a_z = 0$
$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} =$
$= \sqrt{(\omega^2 r)^2 \cos^2\omega t + (\omega^2 r)^2 \sin^2\omega t} =$
$= \sqrt{(\omega^2 r)^2} = \omega^2 r$
→ VELIKOST ZRYCHLENÍ

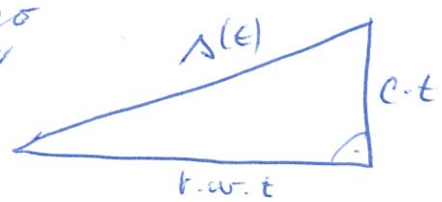




→ DÉLKA PROBĚHNUTÉ TRAJEKTORIE V ČASE ($s(t)$) → PRŮVODNÍ TROJHRAN



→ ROZVINUTO VÁLCOVOU PLOCHU



$s = \sqrt{\omega^2 r^2 t^2 + c^2 t^2} =$
$= \sqrt{(\omega r)^2 + c^2} \cdot t$
$v = \dot{s} = \sqrt{(\omega t)^2 + c^2}$
↳ NA TEČNĚ
$a_t = \dot{v} = 0$ → TEČNÉ ZRYCHLENÍ

NORMÁLOVÉ ZRYCHLENÍ (PRO ROTAČNÍ POHYB)

$a_n = r \cdot \omega^2$

CELKOVÉ ZRYCHLENÍ

$|a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r \cdot \omega^2$

POLOMĚR KŘIVOSTI:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{r^2\omega^2 + c^2}{r \cdot \omega^2} = r + \frac{c^2}{r\omega^2}$$

PRO $c = 0$ ... KRUŽNICE ($\rho = r$)

PRO $\omega = 0$ ... PŘÍMKA ($\rho \to \infty$, „SMSLÁ PŘÍMKA")