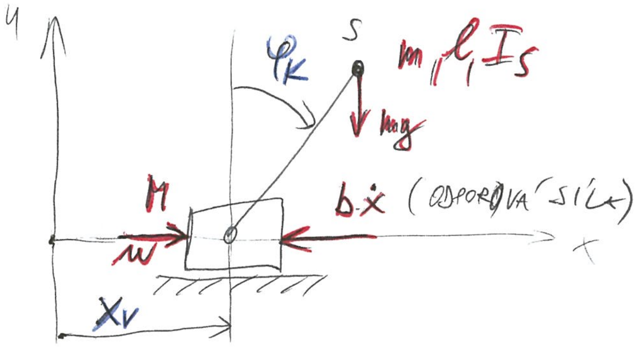
PROJEKT 1 : ŘMS1

1. CVIČENÍ

- PŘÍKLAD KYVADLO NA VOZÍKU
  - → SESTAVENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC (LR II)
  - → STAVOVÝ POPIS
  - → LINEARIZACE: $\dot{x} = Ax + Bu$
    $y = Cx + Du$



— Řešíme řízení kyvadla na vozíčku, se souřadnicemi x_v a φ_k, tíhou vozíčku M, parametry kyvadla m, l, I_S; na vozíček působí síla u a odporová síla $b\cdot\dot{x}$

— Vstup: síla u

— Výstup: x-souřadnice bodu S kyvadla

→ Pro řízení → potřebujeme získat matematický popis ve formě diferenciálních rovnic - ideálně stavový popis

→ Použijeme LR II (získáme přímo vlastní pohybové rovnice)
Lagrangeovy rovnice II. druhu

→ Máme 2 stupně volnosti → 2 souřadnice → 4 diff. rovnice 1. řádu

LR II

1. $E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$

$\omega^2 = \dot{\varphi}_k^2$

$x_S = x_v + l \sin\varphi_k \qquad \dot{x}_S = \dot{x}_v + \dot{\varphi}_k l \cos\varphi_k$

$y_S = l \cos\varphi_k \qquad \dot{y}_S = -\dot{\varphi}_k l \sin\varphi_k$

$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \dot{x}_v^2 + \dot{\varphi}_k^2 l^2 + 2\dot{x}_v \dot{\varphi}_k l \cos\varphi_k$

Po dosazení:

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}_v^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_v^2 + 2\dot{x}_v \dot{\varphi}_k l \cos\varphi_k + \dot{\varphi}_k^2 l^2\right) + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_k^2$$

2. $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1,2; \quad q = \begin{bmatrix} x_v \\ \varphi_k \end{bmatrix}$

Derivace levé strany:

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_v} = (M+m)\dot{x}_v + 2\dot{\varphi}_k l \cos\varphi_k \, m \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_v} = (M+m)\ddot{x}_v + m l \cos\varphi_k \cdot \ddot{\varphi}_k - m l \sin\varphi_k \dot{\varphi}_k^2$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_k} = (I_S + m l^2)\dot{\varphi}_k + 2\dot{x}_v l \cos\varphi_k \cdot m \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_k} = (I_S + m l^2)\ddot{\varphi}_k + m l \cos\varphi_k \cdot \ddot{x}_v - m l \sin\varphi_k \dot{\varphi}_k \dot{x}_v$

$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_k} = -m \dot{x}_v \dot{\varphi}_k l \sin\varphi_k \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_v} = 0$

3. Princip virtuálních prací pro Q_j

$\sum Q_j q_j = u \cdot x_v - (b \cdot \dot{x}_v) x_v - (mg) y_S \qquad \delta y_S = -l \sin\varphi_k \cdot \delta\varphi_k$

$\delta x_v = \delta x_v$

$Q_1 \delta x_v = u \, \delta x_v - (b\dot{x}_v)\, \delta x_v \Rightarrow Q_1 = u - b\dot{x}_v$

$Q_2 \delta\varphi_k = + m g l \sin\varphi_k \, \delta\varphi_k \Rightarrow Q_2 = m g l \sin\varphi_k$

4. SESTAVENÍ ROVNIC:

$$(M+m)\ddot{x}_v + ml\cos\varphi_k\cdot\ddot{\varphi}_k - ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2 - 0 = u - b\dot{x}_v$$

$$(I_s+ml^2)\ddot{\varphi}_k + ml\cos\varphi_k\cdot\ddot{x}_v - ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k\dot{x}_v = mgl\sin\varphi_k$$

5. MATICOVÝ TVAR

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\varphi_k \\ ml\cos\varphi_k & I_s+ml^2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2 \\ mgl\sin\varphi_k \end{bmatrix}}_{\underline{G}}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

→ POTŘEBUJEME NAJÍT $\ddot{x}_v$ a $\ddot{\varphi}_k$: $\begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \underline{M}^{-1}\underline{G}$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(M)}$$

$$\ddot{x}_v = \frac{(I_s+ml^2)(u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2) - ml\cos\varphi_k\cdot mgl\sin\varphi_k}{\det(M)} = \left(\frac{M_{22}G_1 - M_{12}G_2}{\det(M)}\right)$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{-ml\cos\varphi_k(u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2) + (M+m)mgl\sin\varphi_k}{\det(M)} \left(= \frac{-M_{21}G_1 + M_{11}G_2}{\det(M)}\right)$$

$$\det(M) = (M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2\varphi_k$$

→ STAVOVÝ POPIS (DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU):

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_v \\ \dot{x}_v \\ \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{X}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(u - bx_2 + ml\sin x_3\cdot x_4^2) - m^2l^2\cos x_3\sin x_3\cdot g}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3(u - bx_2 + ml\sin x_3\cdot x_4^2) + (M+m)mgl\sin x_3}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix} = \underline{f}$$

→ TAKTO ZÍSKANÝ ~~ROVNOVÁŽNÝ~~ STAVOVÝ POPIS BUDEME LINEARIZOVAT KOLEM ROVNOVÁŽNÉHO STAVU:

$$\underline{X_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_r = 0$$

→ LABILNÍ ROVNOVÁHA KYVADLA NA VOZÍČKU

LINEARIZACE

$$\ddot{x}_v = \frac{(I_s + ml^2)(u - b\dot{x}_v + ml \sin\varphi_k \cdot \dot{\varphi}_k^2) - ml\cos\varphi_k \cdot mg\, l \sin\varphi_k}{\det(M)}$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{-ml\cos\varphi_k \,(u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k \cdot \dot{\varphi}_k^2) + (M+m)\, mgl \sin\varphi_k}{\det(M)}$$

→ STAVOVÝ POPIS $\quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_v \\ \dot{x}_v \\ \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(u - bx_2 + ml\sin x_3 \cdot x_4^2) - m^2l^2\cos x_3 \sin x_3\, g}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3(u - bx_2 + ml\sin x_3\, x_4^2) - ml\, g \sin x_3 (M+m)}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix} = \underline{f}$$

PŘEPIŠ NA ČÁST BEZ VSTUPŮ A SE VSTUPY:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(-bx_2 + ml\sin x_3 \cdot x_4^2) - m^2l^2\cos x_3 \sin x_3\, g}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3(-bx_2 + ml\sin x_3\, x_4^2) - mlg\sin x_3 (M+m)}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I_s+ml^2}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{-ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}_2}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 \cdot u$$

↳ PŘENESEME DO SIMULINKU A ZLINEARIZUJEME

→ funkce Linmod

→ LINEARIZACE

↳ POUŽIJU TAYLORŮV ROZVOJ NA SOUSTAVU $\dot{\underline{x}} = \underline{f}$ V BODĚ ROVNOVÁHY $\underline{x}_r, u_r$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}_r, u_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_r, u_r}}}_{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial u}\right|_{\underline{x}_r, u_r}}}_{B} \cdot (u - u_r)$$

V BODĚ ROVNOVÁHY ... $\underline{f}(\underline{x}_r, u_r) = \emptyset$, JINAK BY BYLO $\Delta\dot{x} = \dot{x} - \underline{f}(\underline{x}_r, u_r)$

OBECNĚ: $\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A}\, \Delta \underline{x} + \underline{B} \cdot \Delta u$

POKUD $\underline{x}_r = \underline{0}$ a $u_r = \emptyset$ PAK

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot u$$

↳ PRO VÝSTUP y ($y = x_s$ ... x - POLOHA KONCE KYVADLA S)

$$y = x_v + l \sin \varphi_k = \underline{g_y} = x_1 + l \sin x_3$$

↳ PO LINEARIZACI (TAYLOR):

$$y = \left. g_y \right|_{\underline{x}_r, u_r} + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g_y}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_r, u_r}}}_{C} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g_y}{\partial u}\right|_{\underline{x}_r, u_r}}}_{D} (u - u_r)$$

OBECNĚ:

$$\Delta y = \underline{C} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{D} \cdot \Delta u$$

V NAŠEM PŘÍPADĚ $\left. g_y \right|_{\underline{x}_r, u_r} = \emptyset$, $\underline{x}_r = \underline{\emptyset}$, $u_r = \emptyset$

$$y = \underline{C} \cdot \underline{x} + D\, u$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u) \qquad \text{LINEARIZACE}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-b(I_s+ml^2)}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} & f'_{23} & \dfrac{2(I_s+ml^2)ml\sin x_3 \cdot x_4}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{b\,ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} & f'_{43} & \dfrac{-2ml\cos x_3\, ml\sin x_3 \cdot x_4}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I_s+ml^2}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{-ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$f'_{23} = \frac{\partial f(2)}{\partial x_3}$$

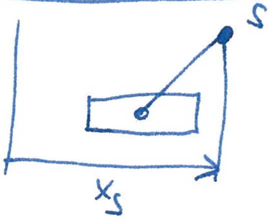
$$f'_{43} = \frac{\partial f(4)}{\partial x_3}$$

ZÍSKÁME TAYLORŮV ROZVOJ:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}_r, u_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_r, u_r}}}_{A} (\underline{x}-\underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial u}\right|_{x_r, u_r}}}_{B} (u-u_r)$$

VÝSTUPNÍ ROVNICE

$$y = g(\underline{x}, u)$$



$$y = x_v + l\sin\varphi_k = g(x_v, \varphi_k, u)$$

→ PŘEPÍŠEME POMOCÍ STAVU $\underline{x}$

$$y = x_1 + l\sin(x_3) = g'(\underline{x}, u)$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial y}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ l\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial g'}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$y = g'(\underline{x}_r, u_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g'}{\partial \underline{x}}\right|_{x_r, u_r}}}_{C} (\underline{x}-\underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g'}{\partial u}\right|_{x_r, u_r}}}_{D} (u-u_r)$$