ŘMS

1. a 2. cvičení

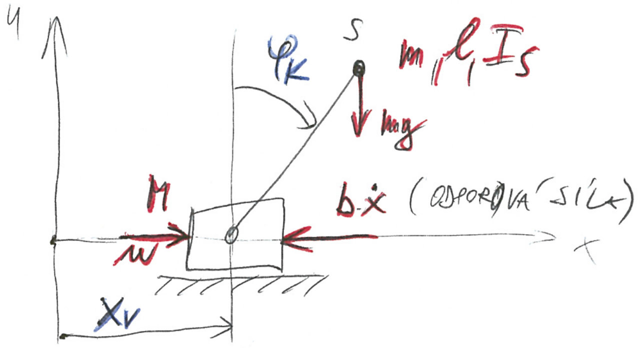
– PŘÍKLAD: KYVADLO NA VOZÍČKU

→ SESTAVENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC (LR II)

→ STAVOVÝ POPIS

→ LINEARIZACE

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$



— ŘEŠÍME ŘÍZENÍ KYVADLA NA VOZÍKU, SE SOUŘADNICEMI x_V a φ_K, TÍHOU VOZÍKU M, PARAMETRY KYVADLA m, l, I_S; NA VOZÍK PŮSOBÍ SÍLA u A ODPOROVÁ SÍLA $b \cdot \dot{x}$

— VSTUP: SÍLA u

— VÝSTUP: X-SOUŘADNICE BODU S KYVADLA

→ PRO ŘÍZENÍ → POTŘEBUJEME ZÍSKAT MATEMATICKÝ POPIS VE FORMĚ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC – IDEÁLNĚ STAVOVÝ POPIS

→ POUŽIJEME LR II (ZÍSKÁME PŘÍMO VLASTNÍ POHYBOVÉ ROVNICE)
LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU

→ MÁME 2 STUPNĚ VOLNOSTI → 2 SOUŘADNICE → 4 DIFF. ROVNICE 1. ŘÁDU

LR II

1. $E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}_V^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$

$\omega^2 = \dot{\varphi}_K^2$

$x_S = x_V + l \sin \varphi_K \qquad \dot{x}_S = \dot{x}_V + \dot{\varphi}_K l \cos \varphi_K$

$y_S = l \cos \varphi_K \qquad \dot{y}_S = -\dot{\varphi}_K l \sin \varphi_K$

$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \dot{x}_V^2 + \dot{\varphi}_K^2 l^2 + 2 \dot{x}_V \dot{\varphi}_K l \cos \varphi_K$

PO DOSAZENÍ:

$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}_V^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_V^2 + 2 \dot{x}_V \dot{\varphi}_K l \cos \varphi_K + \dot{\varphi}_K^2 l^2 \right) + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}_K^2$

2. $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, 2; \quad q = \begin{bmatrix} x_V \\ \varphi_K \end{bmatrix}$

DERIVACE LEVÉ STRANY:

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_V} = (M + m) \dot{x}_V + 2 \dot{\varphi}_K l \cos \varphi_K \, m \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_V} = (M+m) \ddot{x}_V + m l \cos \varphi_K \cdot \ddot{\varphi}_K - m l \sin \varphi_K \cdot \dot{\varphi}_K^2$

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_K} = (I_S + m l^2) \dot{\varphi}_K + 2 \dot{x}_V l \cos \varphi_K \cdot m \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_K} = (I_S + m l^2) \ddot{\varphi}_K + m l \cos \varphi_K \cdot \ddot{x}_V - m l \sin \varphi_K \dot{\varphi}_K \dot{x}_V$

$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi_K} = -m \dot{x}_V \dot{\varphi}_K l \sin \varphi_K \qquad \frac{\partial E_k}{\partial x_V} = 0$

3. PRINCIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ PRO Q_j

$\sum Q_j \, \delta q_j = u \cdot \delta x_V - (b \cdot \dot{x}_V) \delta x_V - (mg) \delta y_S \qquad \delta y_S = -l \sin \varphi_K \cdot \delta \varphi_K$
$\qquad \delta x_V = \delta x_V$

$Q_1 \delta x_V = u \, \delta x_V - (b \dot{x}_V) \, \delta x_V \implies Q_1 = u - b \dot{x}_V$

$Q_2 \delta \varphi_K = + m g l \sin \varphi_K \, \delta \varphi_K \implies Q_2 = m g l \sin \varphi_K$

4. SESTAVENÍ ROVNIC:

$$(M+m)\ddot{x}_v + ml\cos\varphi_k\cdot\ddot{\varphi}_k - ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2 - 0 = u - b\dot{x}_v$$

$$(I_s+ml^2)\ddot{\varphi}_k + ml\cos\varphi_k\cdot\ddot{x}_v - ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k\dot{x}_v = mgl\sin\varphi_k$$

5. MATICOVÝ TVAR

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\varphi_k \\ ml\cos\varphi_k & I_s+ml^2 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2 \\ mgl\sin\varphi_k \end{bmatrix}}_{\underline{G}}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

→ POTŘEBUJEME NAJÍT $\ddot{x}_v$ a $\ddot{\varphi}_k$: $\begin{bmatrix} \ddot{x}_v \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \underline{M}^{-1}\underline{G}$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(M)}$$

$$\ddot{x}_v = \frac{(I_s+ml^2)(u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2) - ml\cos\varphi_k\cdot mgl\sin\varphi_k}{\det(M)} = \left(\frac{M_{22}G_1 - M_{12}G_2}{\det(M)}\right)$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{-ml\cos\varphi_k(u - b\dot{x}_v + ml\sin\varphi_k\cdot\dot{\varphi}_k^2) + (M+m)mgl\sin\varphi_k}{\det(M)} \left(= \frac{-M_{21}G_1 + M_{11}G_2}{\det(M)}\right)$$

$$\det(M) = (M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2\varphi_k$$

→ STAVOVÝ POPIS (DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU):

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_v \\ \dot{x}_v \\ \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{X}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(u - bx_2 + ml\sin x_3\cdot x_4^2) - m^2l^2\cos x_3\sin x_3\cdot g}{(M+m)\cdot(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3(u - bx_2 + ml\sin x_3\cdot x_4^2) + (M+m)mgl\sin x_3}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix} = \underline{f}$$

→ TAKTO ZÍSKANÝ ~~ROVNOVÁŽNÝ~~ STAVOVÝ POPIS BUDEME LINEARIZOVAT KOLEM ROVNOVÁŽNÉHO STAVU:

$$\underline{X}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_r = 0$$

→ LABILNÍ ROVNOVÁHA KYVADLA NA VOZÍČKU

LINEARIZACE

$$\ddot{x}_V = \frac{(I_s + ml^2)(u - b\dot{x}_V + ml \sin\varphi_k \cdot \dot{\varphi}_k^2) - ml\cos\varphi_k \cdot mg\, l \sin\varphi_k}{\det(M)}$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{-ml\cos\varphi_k (u - b\dot{x}_V + ml\sin\varphi_k \cdot \dot{\varphi}_k^2) + (M+m)\, mgl \sin\varphi_k}{\det(M)}$$

→ STAVOVÝ POPIS

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_V \\ \dot{x}_V \\ \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(u - bx_2 + ml\sin x_3 \cdot x_4^2) - m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3\, g}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3 (u - bx_2 + ml\sin x_3\, x_4^2) - m^2 l g \sin x_3 (M+m)}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix} = \underline{f}$$

PŘEPÍŠI NA ČÁST BEZ VSTUPU A SE VSTUPY:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{(I_s+ml^2)(-bx_2 + ml\sin x_3 \cdot x_4^2) - m^2l^2\cos x_3 \sin x_3\, g}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \dfrac{-ml\cos x_3(-bx_2 + ml\sin x_3\, x_4^2) - mlg\sin x_3 (M+m)}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I_s + ml^2}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{-ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2) - m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}}_{\underline{f}_2} u$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 \cdot u$$

↳ PŘENESEME DO SIMULINKU A ZLINEARIZUJEME

→ funkce Linmod

→ LINEARIZACE

↳ POUŽIJU TAYLORŮV ROZVOJ NA SOUSTAVU $\dot{\underline{x}} = \underline{f}$ V BODĚ ROVNOVÁHY $\underline{x}_r, \underline{u}_r$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}_r, \underline{u}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r}}}_{A} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\right|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r}}}_{B} \cdot (\underline{u} - \underline{u}_r)$$

V BODĚ ROVNOVÁHY ... $\underline{f}(\underline{x}_r, \underline{u}_r) = \emptyset$, JINAK BY BYLO $\Delta\dot{x} = \dot{x} - \underline{f}(\underline{x}_r, \underline{u}_r)$

OBECNĚ: $\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A}\, \Delta \underline{x} + \underline{B} \cdot \Delta \underline{u}$

POKUD $\underline{x}_r = \underline{0}$ a $\underline{u}_r = \emptyset$ PAK

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}$$

↳ PRO VÝSTUP y ($y = x_s$ ... X - POLOHA KONCE KYVADLA S)

$$y = x_v + l \sin \varphi_k = \underline{g_y} = x_1 + l \sin x_3$$

↳ PO LINEARIZACI (TAYLOR):

$$y = g_y\Big|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r} + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g_y}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r}}}_{C} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g_y}{\partial \underline{u}}\right|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r}}}_{D} (\underline{u} - \underline{u}_r)$$

OBECNĚ:

$$\Delta y = \underline{C} \cdot \Delta \underline{x} + \underline{D} \cdot \Delta \underline{u}$$

V NAŠEM PŘÍPADĚ $g_y\Big|_{\underline{x}_r, \underline{u}_r} = \emptyset$, $\underline{x}_r = \underline{\emptyset}$, $\underline{u}_r = \emptyset$

$$y = \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D}\, \underline{u}$$

$$\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}, u) \qquad \text{LINEARIZACE}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-b(I_s+ml^2)}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} & f'_{23} & \dfrac{2(I_s+ml^2)ml\sin x_3 \cdot x_4}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{b\,ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} & f'_{43} & \dfrac{-2ml\cos x_3\, ml\sin x_3 \cdot x_4}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I_s+ml^2}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \\ 0 \\ \dfrac{-ml\cos x_3}{(M+m)(I_s+ml^2)-m^2l^2\cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$f'_{23} = \frac{\partial f(2)}{\partial x_3}$$

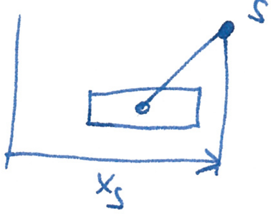
$$f'_{43} = \frac{\partial f(4)}{\partial x_3}$$

ZÍSKÁME TAYLORŮV ROZVOJ:

$$\dot{\underline{X}} = \underline{f}(\underline{X}_r, u_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{X}}\right|_{\underline{X}_r, u_r}}}_{A}(X - X_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial u}\right|_{X_r, u_r}}}_{B}(u - u_r)$$

VÝSTUPNÍ ROVNICE

$$y = g(\underline{X}, u)$$



$$y = x_v + l\sin\varphi_k = g(x_v, \varphi_k, u)$$

→ PŘEPÍŠEME POMOCÍ STAVU $\underline{X}$

$$y = x_1 + l\sin(x_3) = g'(\underline{X}, u)$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial y}{\partial \underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ l\cos x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial g'}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$y = g'(\underline{X}_r, u_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g'}{\partial \underline{x}}\right|_{x_r, u_r}}}_{C}(x - x_r) + \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial g'}{\partial u}\right|_{x_r, u_r}}}_{D}(u - u_r)$$