PROJEKT 1 : ŘMS 1

2. CVIČENÍ

- PŘÍKLAD DIF. ROVNICE 3. ŘÁDU
  - → STAVOVÝ POPIS
  - → STABILITA
  - → ŘIDITELNOST
  - → POZOROVATELNOST
  - → STABILIZACE ZPĚTNOU VAZBOU: VÝSTUPNÍ, STAVOVÁ
  - → ACKERMANOVA FORMULE

STAVOVÝ POPIS, STABILITA, ŘIDITELNOST, POZOROVATELNOST

$$2z''' - 3z'' + 4z = 2u$$
$$y = z'$$

VSTUP: u
VÝSTUP: y

URČIT:
- STAVOVÝ POPIS
- STABILITA
- ŘIDITELNOST
- POZOROVATELNOST

STAVOVÝ POPIS: ↔ SOUSTAVA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

ZAVEDENÍ STAVŮ:

$$x_1 = z \qquad \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = z' \qquad \dot{x}_2 = x_3$$
$$x_3 = z'' \qquad \dot{x}_3 = \frac{3}{2}z'' - 2z + u$$

$$y = x_2$$

MATICOVÝ ZÁPIS

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A}\,\underline{X} + \underline{B}u$$
$$y = \underline{C}\,\underline{X} + \underline{D}u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

STABILITA → PÓLY SYSTÉMU MUSÍ LEŽET V ZÁPORNÉ POLOROVINĚ

$$|A - \lambda I| \overset{!}{=} 0 \rightarrow \lambda$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\frac{3}{2}-\lambda\right) - 2 \overset{!}{=} 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda - 2 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -0{,}9108 \\ \lambda_2 = \boxed{1{,}2054} + 0{,}8619i \\ \lambda_3 = \boxed{1{,}2054} - 0{,}8619i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ NESTABILNÍ SYSTÉM

matlab: eig(A)

ŘIDITELNOST: URČÍME Z HODNOSTI MATICE ŘIDITELNOSTI $\underline{R}$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{A}\,\underline{B} & \underline{A}^2\underline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{hodnost} = 3$$

počet stavů = hodnost($\underline{R}$)

$\Downarrow$

SOUSTAVA JE ŘIDITELNÁ

matlab: R=ctrb(A,B);
rank(R)

POZOROVATELNOST: URČÍME Z HODNOSTI MATICE POZOROVATELNOSTI $\underline{O}$

$$\underline{O} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{hodnost} = 3$$

počet stavů = hodnost($\underline{O}$)

$\Downarrow$

SOUSTAVA ~~JE~~ POZOROVATELNÁ

matlab: O=obsv(A,C);
rank(O)

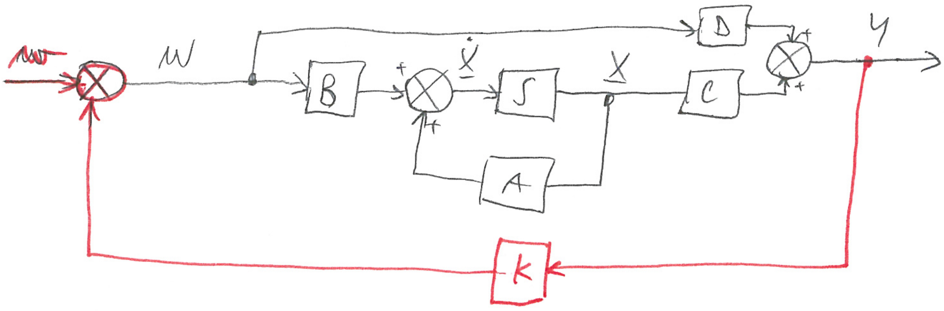
NÁVRH ŘÍZENÍ PRO SYSTÉM

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$$

$$y = \underline{C}x + \underline{D}u$$, KTERÝ JE NESTABILNÍ

STABILIZACE:

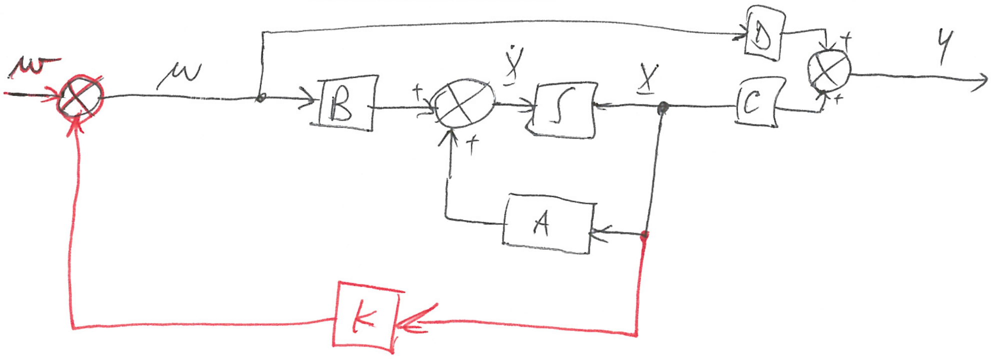
→ VÝSTUPNÍ ZPĚTNÁ VAZBA



→ HLEDÁME ZESÍLENÍ ZPĚTNÉ VAZBY Z VÝSTUPŮ y

↳ DOSAZOVÁNÍ RŮZNÝCH "K" [→ matlab rlocus(A,B,C,D)]

→ STAVOVÁ ZPĚTNÁ VAZBA



→ HLEDÁME ZESÍLENÍ ZPĚTNÉ VAZBY ZE STAVŮ $\underline{x}$

↳ VÍCE METOD ZÍSKÁNÍ K; UKÁŽEME SI

ACKERMANNOVU FORMULI

→ PRO ŘIDITELNÝ SYSTÉM (NUTNÁ PODMÍNKA A POSTAČUJÍCÍ) LZE NAJÍT

ZESÍLENÍ $K = e_n^T R^{-1} \underline{D(A)}$ KTERÉ UMÍSTÍ PÓLY DLE VOLBY

(KONTROLOVÁ VĚTA)

↳ CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM NA MATICI $\underline{A}$

↳ ALGORITMUS:

$$\underline{q_0} = \underline{e_n^T R^{-1}}$$

$$\underline{q_i} = \underline{q_{i-1}} (A - \lambda_i I)$$

$$K = q_n$$

PRO NÁŠ PŘÍPAD $\left(2z''' - 3z'' + 4z = 2u \;;\; y = z'\right)$

JE $R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad e_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

VOLÍME PÓLY $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$q_0 = e_3^T R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = q_0\left(A - (-1)I\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = q_1\left(A - (-1)I\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = q_2\left(A - (-1)I\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} = K$$

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

ZESÍLENÍ STAVOVÉ ZPĚTNÉ VAZBY POMOCÍ ACKERMANOVY FORMULE

[matlab: ACKER(A, B, [-1 -1 -1])]

PRO KONTROLU:

$$u = w - K \cdot x$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKx + Bw = \underbrace{(A - BK)}_{\text{NOVÁ MATICE } A'} x + Bw$$

→ STABILITA: $\left|(A - BK) - \lambda I\right| \overset{!}{=} 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{6}{2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_i \begin{cases} -1 \\ -1 \\ -1 \end{cases}$$ ⇒ ODPOVÍDÁ ŽÁDANÝM PÓLŮM