

KAPALINNÉ TŘENÍ

využívá se v ložiskách energetických strojů aj.
(pro nízké ztráty kapalinného tření)

pro uložení hřídelů s vysokým časově proměnným
zatížením (pro schopnost utlumení nárazů)

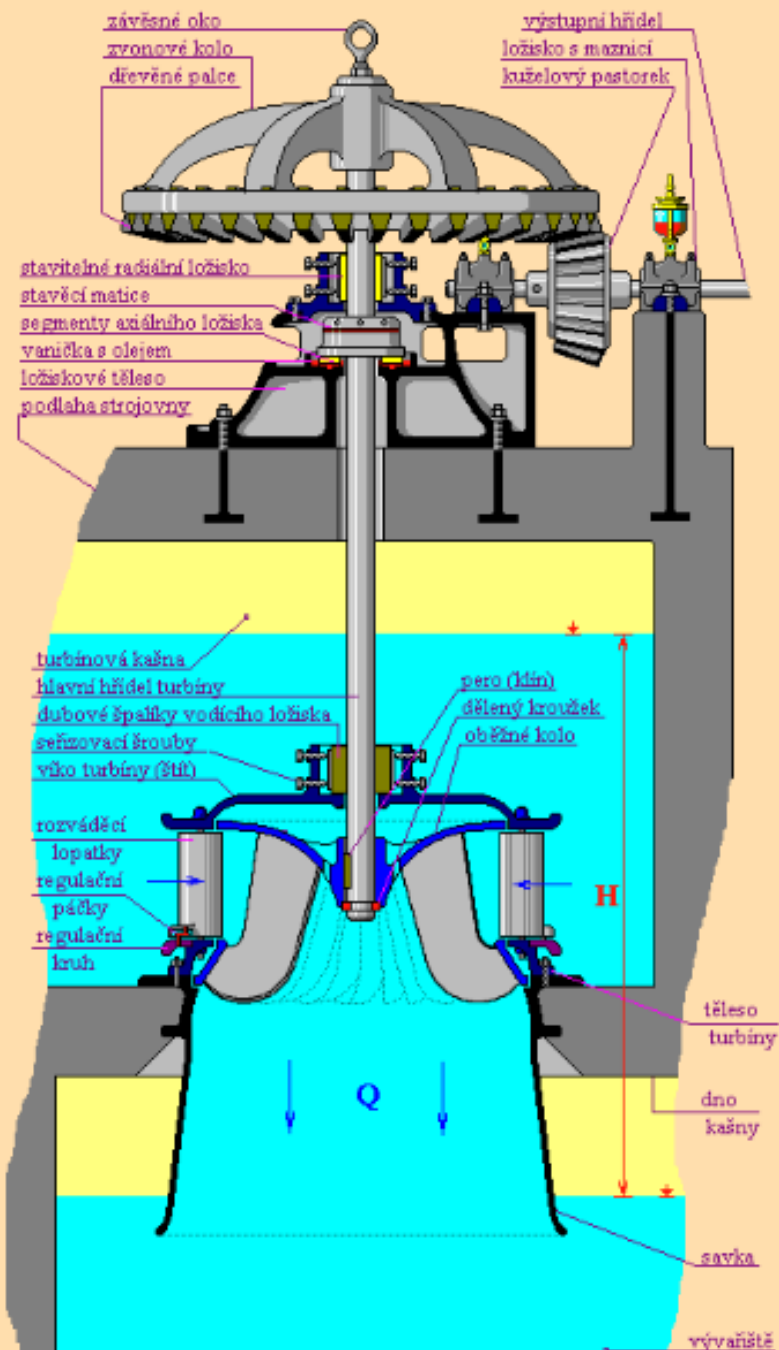
pro vysoké frekvence otáčení – dokonalé vyvážení
a nízké ztráty (i aerostatické uložení)

Smíšené tření – složení částečně kapalinného tření
s účinky suchého tření

vyjádření podílu obou typů tření na:

– odporové síly a momenty

– opotřebení (objem materiálu, tloušťka odebrané
vrstvy, změny vlastností)



ZÁKONY PRO ŘEŠENÍ PROUDĚNÍ TEKUTIN

Nestlačitelná tekutina = kapalina, stlačitelná = plyn, mokrá pára = směs, přehřátá pára = plyn

Vektorová analýza

Prostředek pro řešení proudění tekutin

Proudění – ustálené
– neustálené

Skaláry a vektory

skalární pole (např. rozložení teploty T), stejná hodnota na **hladině**
maximální stoupání hodnoty ve směru kolmo k hladinám
gradient – vektor, např. pro teplotní pole je na hladině $T = \text{konst.}$

Největší spád
hodnoty $T(x,y,z)$ ve
skalárním poli

$$\vec{\text{grad}} T = \vec{i} \cdot T_x + \vec{j} \cdot T_y + \vec{k} \cdot T_z = \vec{\nabla} T$$

jednotkové vektory ve směru souřadných os x , y a z jsou \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}
vektory jsou psány písmem *italic* a vektor nabla bez šipky

index u veličiny
dává parciální
derivaci - T_x

$$\text{vektor } \vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

vektorový operátor
(Hamiltonův, nabla)

vektor rychlosti \vec{C}
má složky do směru
souř. os u , v a w

vektorové pole (např. rozložení \vec{C} rychlosti v tekutině) uplatnění
vektorového operátoru může být ve formě **skalárního součinu**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \text{divergence} \text{ (výtok z jednotkového objemu, skalár div } c)$$

Ve vektorovém počtu je **divergence** diferenciální operátor udávající **zřídlovost** vektorového pole. Je-li např. zkoumaným polem gradient teploty (vektory nechť udávají např. rychlost vedení tepla), potom kladná divergence v daném bodě znamená, že v daném bodě vzniká teplo, záporná naopak, že v daném místě teplo zaniká.

Vektorový součin vektorového operátoru a vektoru rychlosti

$$\vec{c} = \vec{i} \cdot u + \vec{j} \cdot v + \vec{k} \cdot w$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \text{rotace vektoru rychlosti } \vec{C} = \text{rot } C$$

Vektorové pole s rotací (vektor) ve všech bodech rovnou 0 je tzv. nevírové pole (**potenciální**)

Proudění potenciální = **nevírové**

Rotace udává lokální míru rotace (otáčení), která je definována vektorovým polem.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \text{rotace vektoru } \vec{C}$$

(je vektor, dvojnásobek úhlové rychlosti $\vec{\omega}$)

Reynoldsovo číslo bezrozměrné podobnostní kritérium, $Re = 2320$ je hranice pro laminární a turbulentní proudění

podobnostní kritérium – poměr sil setrvačných a třecích

setrvačné síly – tlak = $h \cdot \gamma = u^2 / (2 \cdot g) \cdot \rho \cdot g$

třecí síly – smyk $\tau = \eta \cdot u / d$

$$Re = \frac{u \cdot d}{\nu} \quad [m \cdot s^{-1} \cdot m / (m^2 \cdot s^{-1}) = 1]$$

d charakteristický rozměr

u rychlost

ν kinematická viskozita

γ hustota x grav. zrychlení g

$\gamma = \rho \cdot g$ specif. váha

Kluzná ložiska pracují s kapalinami s vysokou viskozitou a malými tloušťkami spár mezi kluznými plochami – proto je proudění maziva v ložiskách **laminární**.

Zatímco rozložení teploty je skalárním polem, rozložení gradientu teploty je vektorovým polem. Vektorovými poli jsou často silová pole např. gravitační, elektrostatická, magnetická. Skalární pole je např. pole rozložení hustoty (plynu).

Rotace je matematický operátor definovaný pro vektorové funkce n proměnných, který v každém bodě udává lokální míru rotace (otáčení) definované tímto polem. Značí se **rot**, případně (hlavně v anglické literatuře) **curl**. Je definován jako $\nabla \times \mathbf{F}$ (vektor, kombinace operátoru nabra a vektorového součinu), ve třech rozměrech (pro funkci tří proměnných) jej lze zapsat ve tvaru:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Rotace využívá např. Stokesova věta, která převádí **křivkový integrál** vektorového pole po uzavřené křivce na **plošný integrál** rotace tohoto vektorového pole přes libovolnou plochu křivkou ohraničenou. Je-li rotace vektorového pole nulová, pak se toto pole dá napsat jako gradient skalární funkce (tzv. potenciálu) a nazývá se polem potenciálním.

Ve **vektorovém počtu** je **divergence** diferenciální operátor udávající **zřídlovost** vektorového pole. Je-li např. zkoumaným polem gradient teploty (vektory necht' udávají např. rychlost vedení tepla), potom kladná divergence v daném bodě znamená, že v daném bodě vzniká teplo, záporná naopak, že v daném místě teplo zaniká.

Divergence využívá Gaussova věta, která převádí výpočet toku vektorového pole uzavřenou plochou na výpočet integrálu divergence daného vektorového pole přes objem plochou uzavřený.

Je-li \mathbf{F} spojitě diferencovatelné vektorové pole, potom jeho divergenci definujeme jako **skalární** veličinu

$$\text{div } \mathbf{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Skalární součin $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta$ dává **Laplaceův** operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
 skalár

Křivkový integrál vektoru \vec{a} podél uzavřené křivky C

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

je **cirkulace** vektoru \vec{a} po uzavřené křivce C
 S je plocha ohraničená křivkou C
 (cirkulace – **tok vektoru plochou**, skalár)

Stokesova věta: Tok vektoru ($\text{rot } \vec{a}$) plochou S je roven cirkulaci vektoru \vec{a} po uzavřené křivce C

pro skalární pole je gradient vektor, např. $\vec{\nabla} T = \text{grad } T$
 pro vektorové pole je skalární součin $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ skalárem (**divergence**, výtok z jedn. objemu)
 pro vektorové pole je vektorový součin $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ vektorem (**rotace**)

2. Newtonův zákon: síla je rovna časové změně hybnosti, uplatňuje se na jednotkový objem nebo dV

$$\vec{F} = \rho \cdot \frac{d}{dt} (\vec{c})$$

vektor síly – složkové rovnice rovnováhy
 časová změna hybnosti – setrvačné síly
 hustota ρ může být proměnná vzhledem k místu

Síly působící v kapalině na elementární objem dV jsou objemové (setrvačné, gravitační, elektrostatické, magnetické)
 plošné působící na povrch elementu (napětí tlaková, tečná)

Rádusvektor polohy $\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z$ **rychlost** $\vec{c} = \frac{d}{dt} (\vec{r})$

Rychlostní pole proudění tekutiny

Vektorové pole vektoru \vec{a} – je-li vektorem rychlost, je rotací vektoru dvojnásobek úhlové rychlosti.

Je-li rotace vektoru \vec{a} rovna 0, může být tento vektor považován za gradient skalární funkce.

V kapalině – rychlost složena z posuvné rychlosti a rychlosti pro rotační pohyb.

Vektorové pole – např. rychlosti, s nulovou rotací, potom vektor je gradientem skalární funkce (**potenciálu**).

Divergence vektorového pole je tok vektoru diferenciální uzavřenou plochou v bodě dělený uzavřeným objemem.

Nezřídlové proudění – zachování hmoty (nulová divergence pro nestlačitelné kapaliny).

Cirkulace vektoru podél uzavřené křivky je rovna toku rotace tohoto vektoru plochou křivkou uzavřenou (Stokes).

Laplaceovo pole

Skalární funkce F má gradient, tj. vektor $\vec{\text{grad}} F \equiv \vec{a}$ (např. hustota plynu $F = \rho$, rozložení teploty aj.)

Rotace gradientu $\text{rot}(\vec{\text{grad}} a)$ musí být rovna 0 a divergence vektoru \vec{a} je $\text{div} \vec{a} = \Delta F$,

pole je potom laminární, nerotační (Newtonovo) – má vrstvy, hladiny se stejnou hodnotou F ,

potom, je-li $\text{div} \vec{a} = 0$ a existuje-li vektor \vec{v} takový, že $\vec{a} = \text{rot}(\vec{v})$ a také $\text{div} \vec{v} = 0$,

je vektor \vec{v} **vektorový potenciál** vektoru \vec{a} a toto pole je pole Laplaceovo.

Rovnice silové rovnováhy objemového elementu tekutiny

síly – objemové, resp. **hmotové** (setrvačnost, gravitace, magnetické, elektrostatické)
– plošné (**napětí** tečná a normálná v plochách na hranici elementu)

t je čas
T je teplota

hmotové síly jsou součinem diferenciálu hmoty a zrychlení – nejčastěji gravitační, ale i unášivého pohybu, na zrychlení se převádí i účinky magnetické, elektrického pole aj.

Hydrostatika – Eulerova rovnice $dp = \rho \cdot \vec{R} \cdot d\vec{r}$ $\vec{R} = i \cdot a_x + j \cdot a_y + k \cdot a_z$
 $p = \rho \cdot g \cdot h$ **přírůstek tlaku (skalár)** \vec{R} je vektor zrychlení, a_x jeho složka
 $d\vec{r}$ radius vektor

Hydrodynamika – Eulerova rovnice $\vec{c} \times \text{grad } c + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{R} - 1/\rho \cdot \text{grad } p$ do 3 os souřadných
derivace rychlosti dle času (vektor) síly setrvačné, hmotové a tlakové

Rovnice zachování hmoty a zachování energie (integrální zákony)

rovnice **kontinuity** divergence $(\rho \cdot \vec{c}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ **tekutina, kapalina jen první člen**

zákon **zachování energie** $\sum E = 0$ $dL = p \cdot dV$

přiváděné teplo **Q**, vnitřní energie **U**, energie pohybová E_{kin} , práce vykonaná L_1 a přivedená L_2

Základní zákony proudění vazké tekutiny – rovnováha sil

na stěnu elementu kapaliny. Souřadné osy a orientace složek napětí ve stěně elementu kapaliny jsou znázorněny na obr.4.1. Ve stěnách působí tečná napětí τ_{ij} a pro $i=j$ normální napětí $\sigma_i = \tau_{ii} + \text{konst.}$ Kroneckerův symbol δ_{ij} je pro $i=j$ roven 1 a pro i není rovno j má hodnotu 0. Tečné napětí v kapalině, resp. obecně v tekutině, je

$$\tau_{ij} = \eta \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \cdot p \quad (4.1)$$

Jelikož tlak je dán aritmetickým průměrem normálních napětí $-3 \cdot p = \sigma_i + \sigma_j + \sigma_k$ a je vždy $p \geq 0$, lze odvodit pro normální napětí výraz

$$\sigma_i = 2 \cdot \eta \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_i} - p - \frac{2}{3} \cdot \eta \cdot \text{div } \vec{c} \quad (4.2)$$

Ve výrazu pro normální napětí je koeficient $-2/3 \cdot \eta = \eta^*$ označován jako tzv. druhá neboli objemová vazkost, která vyjadřuje odpor tekutiny proti změně objemu. Hodnota $-2/3 \cdot \eta$ je odvozena pro jednoatomový plyn a používá se jako přibližná hodnota i pro řešení plynem mazaných ložisek. Výraz

$$\text{div } \vec{c} = \frac{\partial c_i}{\partial x_i} + \frac{\partial c_j}{\partial x_j} + \frac{\partial c_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.3)$$

dává skalární hodnotu. Na levé straně pohybové rovnice je časová změna hybnosti vyjádřena derivací podle času t a pro složkovou rovnici do některé souřadné osy lze odvodit

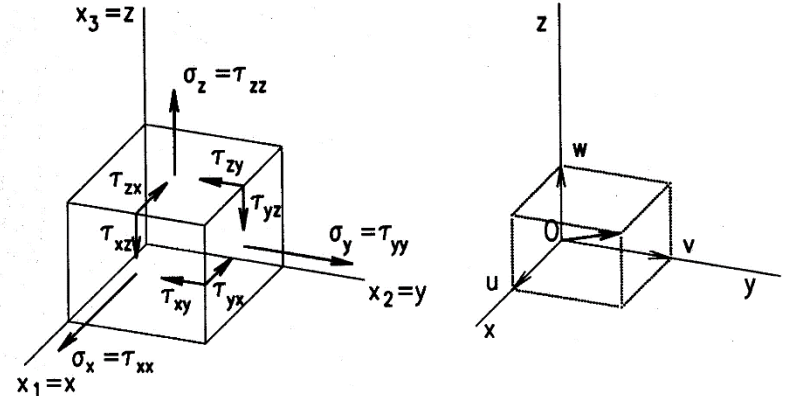
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + c_i \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_i} + c_j \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_k \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \right) = a_i \cdot \rho + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \quad (4.4)$$

Z rov.(4.1) je možno dosadit za složky napětí do rov.(4.4). Tím získáme 3 složkové rovnice rovnováhy, tzv. Navier-Stokesovy rovnice. Pokud zjednodušíme levou stranu rov.(4.4) symbolem D/dt , je obecně složková rovnice rovnováhy

$$\rho \cdot \frac{Dc_i}{dt} = a_i \cdot \rho - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left\{ \eta \cdot \left[\frac{\partial c_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_i} + \frac{\partial c_j}{\partial x_j} + \frac{\partial c_k}{\partial x_k} \right) \right] \right\} \quad (4.5)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left[\eta \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left[\eta \cdot \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_i} + \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \right) \right]$$

Za i, j a k se postupně dosazuje pro první složkovou rovnici x, y, z , pro další rovnici y, z, x a pro třetí směr z, x, y . Složky rychlosti kapaliny a orientace souřadných os je znázorněna na obr.4.1.



Obr.4.1 Napětí na elementu tekutiny a složky rychlosti

V oblasti strojřevnství se spíše setkáme s Navier-Stokesovými rovnicemi v cylindrických souřadnicích r, φ a z . Složky rychlosti proudění tekutiny jsou u ve směru obvodu, v ve směru radiálním a w ve směru osy z . Složková rovnice ve směru obvodu (tangenciálním) má tvar

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + u \cdot \frac{v}{r} \right] = \rho \cdot a_\varphi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \quad (4.6)$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \left\{ \eta \cdot \left[\frac{2}{r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \right) - \frac{2}{3} \cdot \text{div } \vec{c} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left[\eta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[\eta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \right] + 2 \cdot \frac{\eta}{r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)$$

Vnější silové pole je vyjádřeno složkami zrychlení a_φ, a_r, a_z . Složková rovnice rovnováhy pro směr radiální (ve směru poloměru kolmo k ose cylindrických souřadnic z)

Základní zákony proudění vazké tekutiny

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u^2}{r} \right] = \rho \cdot a_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \quad (4.7)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \eta \cdot \left[2 \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \cdot \text{div } \vec{c} \right] \right\} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\eta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + 2 \cdot \frac{\eta}{r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)$$

Ve směru osy z cylindrických souřadnic má složková Navier-Stokesova rovnice tvar

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \rho \cdot a_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \quad (4.8)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \text{div } \vec{c} \right) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \cdot r \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\eta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

Rov.(4.3) dává pro cylindrické souřadnice vyjádření $\text{div } \vec{c}$ ve tvaru

$$\text{div } \vec{c} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v) + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.9.a)$$

Základním fyzikálním principem je zákon zachování hmoty. Patří mezi tzv. integrální principy. Pro proudění tekutiny vyjadřuje princip, že součet hmoty do pevně stanoveného elementárního objemu přiváděné a z něj odváděné je nulový. Pro plyny se může měnit hustota ρ , takže zatímco pro nestlačitelné kapaliny, kdy je $\rho = \text{konst.}$, platí $\text{div } \vec{c} = 0$, pro tekutiny obecně platí

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot w) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.9.b)$$

Ve výpočtech proudění kapalin se uvedený princip používá s označením rovnice kontinuity. Pro konstantní hustotu platí rovněž pro objemy a při ustáleném průtoku potrubím je konstantní průtočné množství (objem nebo hmota) za jednotku času protékající určitým průřezem.

Zákon zachování energie je dalším integrálním principem. Každému elementu tekutiny je sdíleno nebo odváděno teplo vedením. Napětí na stěnách elementu představuje síly, které mohou vykonávat mechanickou práci (působení tlaku v kapalině, normální napětí působící pohyb stěny nebo posuv stěny v její rovině účinkem tečného napětí v kapalině a přilnavosti kapaliny). Vnitřní tření v tekutině způsobuje přeměnu práce třecích sil v teplo. Proudící tekutina má kinetickou energii a její teplota představuje parametr její vnitřní energie. Pohybem tekutiny ve vnějším silovém poli je konána práce nebo spotřebovávána energie např. při pohybu tekutiny v gravitačním poli.

Změna kinetické energie pro diferenciální objem proudící tekutiny za jednotku času je dána změnou rychlosti s časem vynásobenou hustotou, tzn. výrazem

$$\Delta E_{kin} = \rho \cdot \sum_{i,j,k} \left[c_i \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + c_i \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_i} + c_j \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_k \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \right) \right] \cdot dV \quad (4.10)$$

Podobně lze symbolicky vyjádřit změnu vnitřní energie diferenciálního objemu dV při změně jeho teploty s časem rovnicí

$$\Delta U = \rho \cdot \frac{D}{Dt} (c_v \cdot \Delta T) \cdot dV \quad (4.11)$$

kde T je absolutní teplota a c_v měrná tepelná kapacita při stálém objemu. Práce vnějších objemových sil L_v je dána výrazem (objemové síly jsou vázány na diferenciály hmoty resp. objemu jako síly setrvačné, gravitační, magnetické, elektrostatické a a_i je odpovídající zrychlení)

$$L_v = \rho \cdot \sum_i (a_i \cdot c_i) \cdot dV \quad (4.12)$$

Práci plošných sil je možno upravit do tvaru

$$L_s = \sum_{i,j,k} \left[c_i \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right) + \left(\sigma_{ij} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_k} + \tau_{ij} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \tau_{ik} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial x_k} \right) \right] \cdot dV \quad (4.13)$$

Základní zákony proudění vazké tekutiny

kde byla provedena úprava typu

$$\tau \cdot d\mathbf{S} \cdot \vec{c} = \frac{d}{dx}(\tau \cdot \vec{c}) \cdot dV$$

Vedením tepla je do elementu tekutiny přivedeno z okolí teplo Q_v (tepelná vodivost je značena $\lambda \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

vedení tepla $Q_v = \sum_{i,j,k} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}) \right] \cdot dV$ (4.14)

Zákon zachování energie dává součet energií a prací za diferenciální časový interval a je vyjádřen vztahem

$$\Delta E_{kin} + \Delta U = L_v + L_s + Q_v$$
 (4.15)

Vedení tepla z okolí Q_v a změnu vnitřní energie ΔU v malém časovém intervalu můžeme pro běžné případy strojírenské praxe zanedbat. Po dosazení a úpravě je možno odvodit následující rovnici, kde třetí člen pravé strany rovnice vyjadřuje velikost tepla vzniklého třením v tekutině

$$\Delta E_{kin} = L_v + L_s + \eta \cdot \Phi \cdot dV + \frac{Dp}{Dt} \cdot dV$$
 (4.16)

Disipační funkce Φ charakterizující ztráty třením má tvar

tření $\Phi = \left\{ \sum_{i,j,k} \left[2 \cdot \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_j} + \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \cdot \text{div } \vec{c} \right\}$ (4.17)

V proudící tekutině je měrná tepelná kapacita c_v , teplota T a tlak p funkcí polohy. Pro získání derivací D/dt , které potřebujeme pro $D/dt(c_v \cdot T)$ a pro Dp/dt , musíme derivovat podle následujícího předpisu

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

vnitřní energie

Pro dokonalý plyn platí stavová rovnice (pro objem 1 mol) (4.18)

$$p = \rho \cdot R \cdot T = \rho \cdot (c_p - c_v) \cdot T \quad c_v \cdot T = c_p \cdot T - \frac{p}{\rho}$$

Při řešení kluzných ložisek mazaných kapalným mazivem je obvykle považováno mazivo za nestlačitelné a uvažuje se konstantní hustota $\rho = \text{konst}$ a $\text{div } \vec{c} = 0$. Podobně pro měrnou tepelnou kapacitu bereme $c_p = c_v = c = \text{konst}$. Při ustáleném běhu se nemění tlak s časem, takže je derivace tlaku $dp/dt = 0$ a tepelná vodivost je rovněž konstantní $\lambda = \text{konst}$. Tepelná bilance, při které bude v rovnováze změna vnitřní energie, přivedené teplo a třením vznikající teplo, má potom tvar

$$\rho \cdot c \cdot (u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z}) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi \cdot \eta$$
 (4.19)

Pro proudění mezi dvěma velmi blízkými rovnoběžnými rovinnými plochami (rovnoběžnými s osami x a z), pokud můžeme zanedbat spád teploty podél těchto ploch a uvažovat pouze spád teploty ve směru normály k těmto plochám, je složka rychlosti do směru normály ploch rovna nule $v = 0$ a tepelná bilance se zjednoduší do tvaru

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] = 0$$
 (4.20)

teplo předané vedením

teplo vzniklé třením

Ostatní derivace teploty a složek rychlostí jsou zanedbatelné resp. nulové. Rovnice (4.20) dovolí určit rozložení teploty v kapalině mezi dvěma blízkými rovnoběžnými stěnami, když je kapalina ohřívána teplem vznikajícím vnitřním třením a šířícím se v kapalině vedením. Pro obdobnou situaci, kdy se jedná o proudění mezi dvěma blízkými sousými válcovými stěnami a pro rotační souměrnost podle osy válcových ploch, bude při zanedbání změny vnitřní energie platit podle rov. (4.19)

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = - 2 \cdot \eta \cdot \left\{ \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v) \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} - \eta \cdot \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\}$$
 (4.21)

použití média, které je přiváděno pod tlakem od vnějšího zdroje do spáry mezi kluznými plochami. V obou případech musí mazivo spárou protékat. Mazivo působí na kluzné plochy tlakem a tečným napětím ve vrstvě velmi blízké povrchu kluzné plochy. Rozložení rychlosti v mazivu určuje tečná napětí v mazivu a průtočné množství maziva, které protéká určitým zvoleným průřezem.

Pohyb kluzných ploch je vyvoláván působením hnací síly nebo momentu a při pohybu je překonáván odpor proti pohybu. Tento odpor je dán tečným napětím a způsobuje změnu mechanické práce v teplo. Toto teplo je předáváno mazivu a ohřívá ho. Pokud bude toto ohřátí znatelné, projeví se i změnou viskozity maziva. Změna viskozity zpětně ovlivní odpor proti pohybu a situace povede až k ustálení určité teploty, kterou můžeme považovat za rovnovážnou.

4.3 PŘEDPOKLADY ŘEŠENÍ

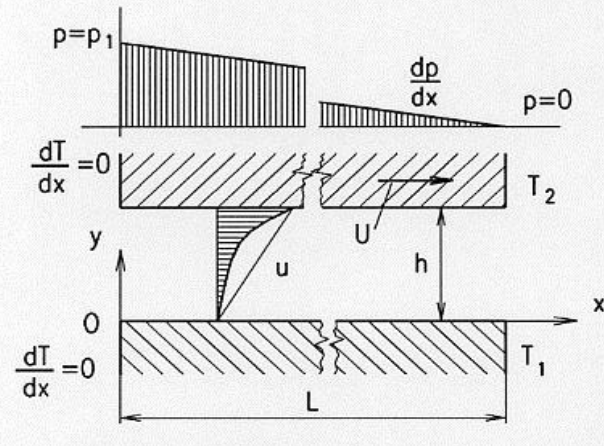
Spára mezi kluznými plochami je vyplněna kapalným mazivem a je třeba určit rozložení rychlosti maziva při pohybu kluzných ploch. Rozložení rychlosti dává tečná napětí v kapalině, která musí být v rovnováze s tlakovými účinky, setrvačnými a dalšími hmotovými či objemovými silami, jako jsou síly gravitační, účinky dostředivého zrychlení, síly elektromagnetické, elektrostatické aj.

Řešení nejprve provedeme za zjednodušujících předpokladů. K těmto předpokladům patří následující:

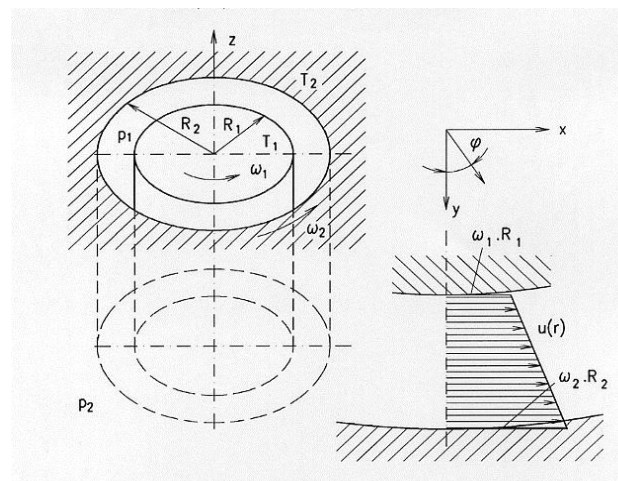
1. Na mazivo nebude působit žádné vnější silové pole. Zanedbává se tedy tíha maziva.
2. Setrvačné síly a síly vyvolané zrychlením maziva jsou oproti tlakovým a viskózním silám zanedbatelně malé.
3. Přílnavost maziva k povrchům kluzných ploch je taková, že můžeme zanedbat skluz maziva po povrchu kluzných ploch.
4. Teplota, hustota a viskozita maziva je ve všech místech stejná a stálá s časem.
5. Průtok maziva o velké viskozitě spárou poměrně malé tloušťky je laminární, ustálený.
6. Tloušťka spáry vyplněné mazivem je velmi malá ve srovnání s ostatními rozměry kluzných ploch (poloměry zakřivení, délky).

Řešené příklady laminárního proudění

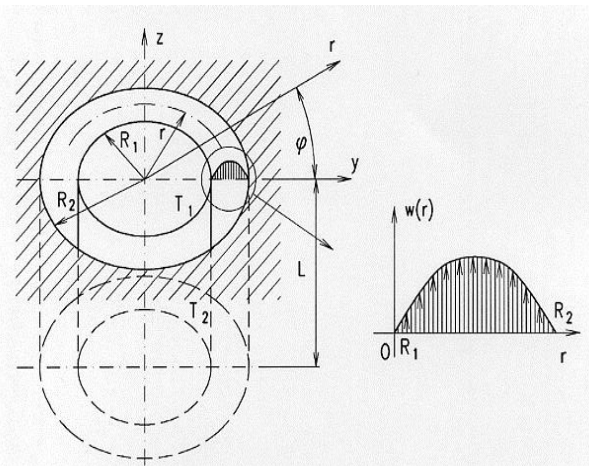
dvě rovnoběžné desky
rovnoměrný pohyb
přímočarý



dva sousední válce
rotující podle společné
osy



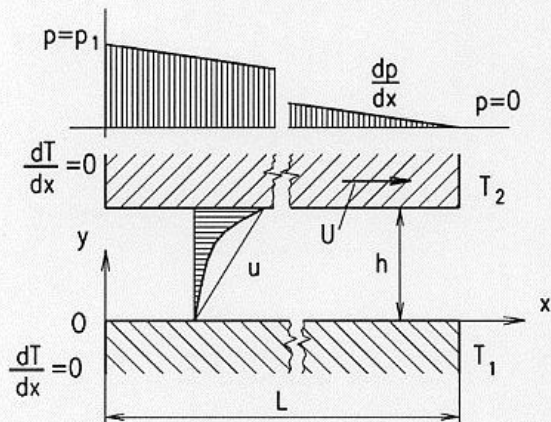
dva sousední válce
průtok spárou ve
směru jejich osy



Základními zákony proudění viskózní tekutiny jsou 3 složkové rovnice rovnováhy (Navier-Stokesovy rovnice), zákon zachování hmoty (rovnice kontinuity) a zákon zachování energie (energetická bilance). Při řešení praktických případů je třeba uvážit změnu viskozity a hustoty s teplotou. K pěti rovnicím přistupují další dvě závislosti. Pro řešení proudění plynu je nutno použít stavovou rovnici plynu, která vlastně nahrazuje závislost hustoty na teplotě kapaliny závislostí hustoty na tlaku a teplotě u plynu. Řešení všech těchto sedmi rovnic je pro většinu případů obtížné. Na čtyřech jednoduchých případech proudění kapaliny bude ilustrováno toto řešení.

Příklad 4.1

Při ustáleném průtoku viskózní tekutiny spárou mezi dvěma rovnoběžnými hladkými stěnami (deskami) nekonečné šířky vzniká tlakový spád daný rozdílnými tlaky na počátku a na konci spáry. Horní stěna (deska) nekonečné délky se podle obr.4.2 pohybuje přímočaře rovnoměrným pohybem konstantní rychlostí U . Rychlosti proudění kapaliny ve směru os y a z jsou nulové $v=w=0$. Horní deska má po celé své ploše konstantní teplotu T_2 , spodní konstantní teplotu T_1 . Vzhledem k malému rozdílu teplot T_1 a T_2 předpokládáme, že hustota a viskozita kapaliny je konstantní odpovídající střední teplotě $(T_1+T_2)/2$. Úkolem je určit rozložení rychlosti a teploty kapaliny mezi deskami jako funkci polohy dané souřadnicí y .



Obr.4.2 Průtok mezi dvěma rovnoběžnými stěnami

Ve složkové rovnici rovnováhy pro osu x (rov.4.5) je nenulová pouze derivace tlaku dp/dx a druhá derivace složky rychlosti u podle y , tzn. že platí $dp/dx = \eta \cdot d^2u/dy^2$. Protože složka rychlosti u je pouze funkcí y , získáme dvojitou integraci pro u

$$u = 1/(2\eta) \cdot dp/dx \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

Okrajové podmínky jsou: pro $y=0$ je $u=0$, pro $y=h$ je $u=U$.

Po dosazení okrajových podmínek určíme $C_1 = U/h - 1/(2\eta) \cdot dp/dx \cdot h$, $C_2=0$.

Rychlost je dána výrazem $u = -1/(2\eta) \cdot (h - y) \cdot y + U \cdot y/h$

Průtočné množství lze získat integrací přes tloušťku spáry h součinu $B \cdot u \cdot dy$, kde B je zvolená šířka ve směru osy z . Průtočné množství bude

$$Q = B \cdot [U \cdot h/2 + 1/(12\eta) \cdot dp/dx \cdot h^3]$$

Protože průtočné množství Q je pro jakékoliv x konstantní, je i $dp/dx = \text{konst.}$ Potom hodnoty tlaku p_1 na počátku a $p_2=0$ na konci spáry určují tlakový spád $dp/dx = p_1/L$ a průběh tlaku

$$p(x) = - (L - x)/L \cdot p_1$$

Tepelná bilance zahrnuje teplo vznikající třecími ztrátami v kapalině a teplo předávané vedením podle rov.(4.20). Po dosazení je

$$d^2T/dy^2 = \eta/\lambda \cdot [1/(2\eta) \cdot p_1/L \cdot (h - 2y) - U/h]^2$$

Dvojitou integrací podle y je možno získat rozložení teploty podél y . Pro určení integračních konstant se použijí okrajové podmínky, a to: pro $y=0$ je $T=T_1$, pro $y=h$ je $T=T_2$.

Pro nulovou rychlost horní desky $U=0$ je rozložení rychlosti

$$u = 1/(2\eta) \cdot dp/dx \cdot (h - y) \cdot y, \quad du/dy = 1/(2\eta) \cdot dp/dx \cdot (h - 2y)$$

Budou-li teploty obou desek stejné $T_1=T_2=T_0$, bude pro rozložení teploty mezi deskami platit

$$T - T_0 = 12 \cdot \eta / (\lambda \cdot h^4) \cdot [Q/(B \cdot h)]^2 \cdot (h^4/16 - y^4)$$

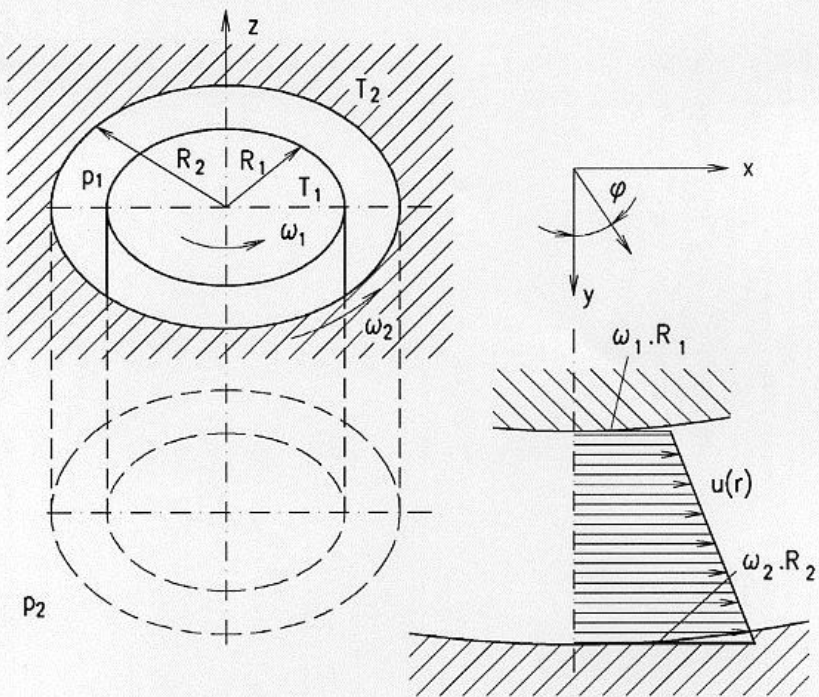
Příklad 4.2

Kapalina s konstantní hustotou a viskozitou je unášena a proudí spárou mezi dvěma sousedními válci nekonečné délky podle obr.4.3. Oba válce se otáčejí různou úhlovou rychlostí. Ve směru osy válců je složka rychlosti kapaliny $w=0$. Rychlost rotace je s časem stálá, rozložení rychlostí, tlaku a teploty je rotačně souměrné podle osy válců. Úkolem je stanovit rozložení rychlostí a teploty ve spáře.

Řešení je vhodné provést v cylindrických souřadnicích $x=r \cdot \cos \varphi$, $y=r \cdot \sin \varphi$ a z . Pro složky rychlosti platí $v=dr/dt$, $u=r \cdot d\varphi/dt$ a $w=dz/dt$. Použijeme složkové rovnice rovnováhy v cylindrických souřadnicích, rov.(4.6), (4.7) a (4.8). V cylindrických souřadnicích platí, že

složka rychlosti $w=0$, $v=0$ a složka u se mění pouze podél y , takže kromě du/dr jsou ostatní derivace u nulové. Z první a druhé složkové rovnice rovnováhy plyne

$$d^2u/dr^2 + d/dr(u/r) = 0 \quad \text{a} \quad \rho \cdot u^2/r = dp/dr$$



Obr.4.3 Proudění kapaliny ve spáře mezi dvěma válci

První rovnice je obyčejná Eulerova diferenciální rovnice a jejím řešením se stanoví rozložení rychlosti u podél tloušťky spáry. Řeší se substitucí $u=r^n$, kde n bude $n = \pm 1$. Obecné řešení je

$$u = C_1 \cdot r + C_2/r$$

Okrajové podmínky jsou: pro $r=R_1$ je $u=R_1 \cdot \omega_1$, pro $r=R_2$, ω_2 . Jejich dosazením se určí konstanty C_1 a C_2 . Pro stejné úhlové rychlosti je $C_2=0$ a rozložení rychlosti je lineární. Konstanty jsou

$$C_1 = (R_2^2 \cdot \omega_2 - R_1^2 \cdot \omega_1)/(R_2^2 - R_1^2) \quad C_2 = R_2^2 \cdot R_1^2 \cdot (\omega_1 - \omega_2)/(R_2^2 - R_1^2)$$

Druhá rovnice je použitelná pro stanovení rozložení tlaku. Řeší se separací proměnných a integrací. Za složku rychlosti u je třeba dosadit funkci r . Přibude další neznámá integrační konstanta C_3 , která bude určena z podmínky, že tlak na některém z poloměrů R_1 nebo R_2

musí být znám. Rozložení tlaku podél tloušťky spáry (závislost na poloměru r) má průběh

$$p(r) = \rho \cdot [C_1^2 \cdot r^2/2 + 2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \ln r - 3 \cdot C_2^2/r^2] - C_3$$

Velikost třecího momentu, který je třeba vyvinout na jednom z válců, aby byl dosažen popsáný stav, je dána integrací tečného napětí v kapalině na povrchu válce. Předpokladem je lepení kapaliny na povrchu bez skluzu v povrchové vrstvě minimální tloušťky. Pro rotačně souměrný případ s vyloučením změn ve směru osy z je točivý moment s ramenem R_1 dán výrazem

$$M = 2 \cdot \pi \cdot B \cdot R_1^2 \cdot \tau_{r\phi} = 4 \cdot \pi \cdot B \cdot \eta \cdot C_2$$

Pro tečné napětí použijeme vztah daný rov.(4.1) a po transformaci do cylindrických souřadnic získáme $\tau_{r\phi} = \eta \cdot (du/dr - u/r)$. V kapalině při rozdílné rychlosti dochází k vnitřnímu tření a vyvinuté teplo je vedením sdíleno. Tepelná bilance je dána rov.(4.21) a po dosažení bude

$$\lambda/r \cdot d/dr(r \cdot dT/dr) = - \eta \cdot (du/dr - u/r)^2$$

Do výrazu dosadíme za složku rychlosti $u=u(r)$ a dvojitou integrací přes dr dostaneme rozložení teploty v kapalině $T(r)$ ve tvaru

$$T = - \eta/\lambda \cdot C_2^2/r^2 - C_4 \cdot \ln r + C_5$$

Integrační konstanty se určí z okrajových podmínek - známých teplot na povrchu obou válců T_1 a T_2 .

Příklad 4.3

Pro proudění spárou mezi dvěma sousedními válcovými plochami s velkou délkou se předpokládá průtok pouze ve směru osy válců. Příklad je rotačně symetrický vzhledem k ose obou válců. Je známá teplota povrchů obou válců T_1 a T_2 . Radiální a obvodová složka rychlosti je $u=v=0$. Osová složka rychlosti w se mění pouze s poloměrem r . Tlakový spád je dán rozdílným tlakem na počátku a na konci spáry a je lineární, $dp/dz = \text{konst}$. Úkolem je určit rozložení rychlosti $w(r)$ a teploty $T(r)$.

Z rovnice rovnováhy elementu kapaliny ve směru osy z , rov.(4.8), kde jediná nenulová složka rychlosti w má nenulovou derivaci pouze dw/dr , plyne

$$dp/dz = 1/r \cdot d/dr[\eta \cdot r \cdot dw/dr]$$

Protože tlakový spád je konstantní $dp/dz = (p_1 - p_2)/L$, můžeme dosadit a integrací přes dr získat rozložení rychlosti $w(r)$ ve tvaru

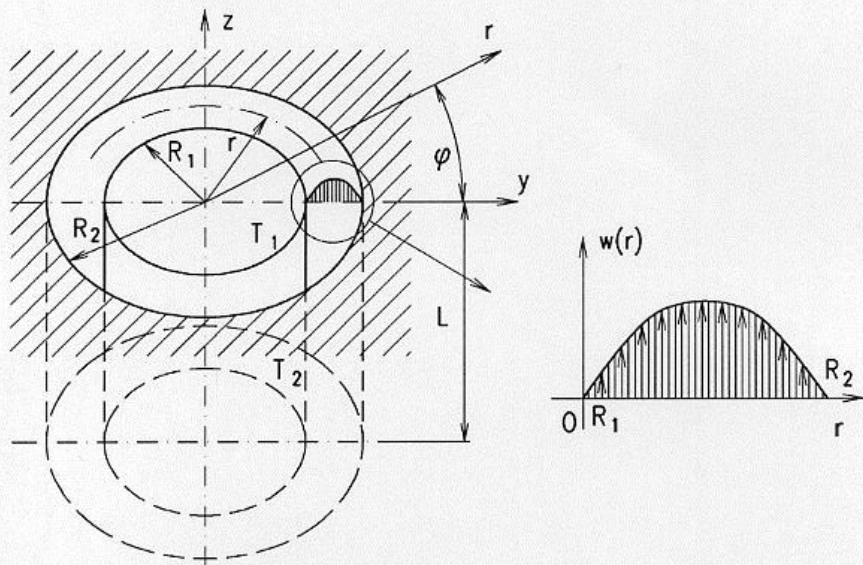
$$w = (p_1 - p_2)/(4 \cdot \eta \cdot L) \cdot [R_1^2 - r^2 + (R_2^2 - R_1^2) \cdot \ln r/R_1 \cdot 1/(\ln R_2/R_1)]$$

Integrační konstanty byly stanoveny dosazením okrajových podmínek, které jsou: pro $r=R_1$ a $r=R_2$ je $w=0$. Průtočné množství lze stanovit integrací rychlosti w po průřezu spáry

$$Q = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot w(r) \cdot dr = \pi \cdot (R_2^4 - R_1^4) / (8 \cdot \eta) \cdot (p_1 - p_2) / L$$

V případě tenké spáry, kdy bude $R_2 - R_1$ zanedbatelně malé proti R_1 , můžeme použít výsledek příkladu 4.1 pro tenkou spáru. Pro mezikruhovou spáru malé tloušťky nahradíme šířku rovné spáry $B=2 \cdot \pi \cdot R_S$, střední poloměr R_S bude aritmetickým průměrem $(R_1+R_2)/2=R_S$, tloušťka spáry bude $h=R_2 - R_1$, rychlost desky $U=0$. Potom je

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot R_S \cdot h^3 / (12 \cdot \eta) \cdot (p_1 - p_2) / L$$



Obr.4.4 Osový průtok mezikruhovým průřezem

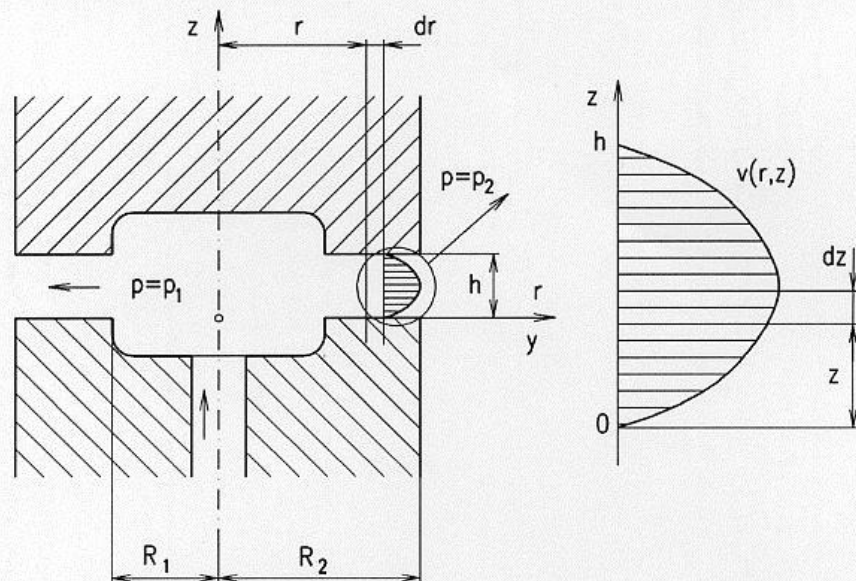
Pro rozložení teploty se použije tepelná bilance podle rov.(4.21). Vzhledem k rotační symetrii a neměnnosti teplot povrchů a rychlosti podél osy z má tepelná bilance po dosazení tvar

$$\lambda \cdot (d^2 T / dr^2 + 1/r \cdot dT/dr) = - \eta \cdot (dw/dr)^2$$

Rozložení teploty se určí dosazením $w(r)$ do tepelné bilance a integrací diferenciální rovnice pro $T(r)$. Pro odstranění integračních konstant se použijí okrajové podmínky, neboť pro $r=R_1$ je známá teplota T_1 a podobně pro $r=R_2$ teplota T_2 .

Příklad 4.4

Má se řešit ustálený průtok spárou mezi dvěma nepohyblivými kotoči s vnitřním vybráním podle obr.4.5. Viskózní kapalina je přiváděna pod tlakem p_1 do dutiny vybrání a protéká spárou do okolí, kde je tlak $p_2=0$. Je třeba určit rozložení rychlosti a tlaku ve spáře a průtočné množství. Teplota, hustota a viskozita kapaliny zůstávají konstantní, tloušťka spáry h je vůči ostatním rozměrům (např. R_1, R_2) velmi malá.



Obr.4.5 Rotačně symetrický průtok spárou mezi rovinnými plochami

Vzhledem k rotační symetrii a předpokládanému laminárnímu průtoku jsou obvodová složka rychlosti a osová složka rychlosti proudění kapaliny nulové, $u=w=0$. Druhá Navier-Stokesova složková rovnice v polárních souřadnicích (rov.4.7) obsahuje pouze nenulovou změnu tlaku s poloměrem a derivace radiální rychlosti v podle poloměru r , takže platí

$$- dp/dr + 2 \cdot \eta \cdot (\partial^2 v / \partial r^2 + 1/r \cdot \partial v / \partial r - v/r^2) + \eta \cdot \partial^2 v / \partial z^2 = 0$$

Protože člen v závorce je vlastně derivací $\partial / \partial r (\text{div } c)$, která musí být pro nestlačitelnou kapalinu nulová, je možno získat integrací rozložení rychlosti na libovolném poloměru r uvnitř spáry $R_1 < r < R_2$ jako funkci z . Okrajové podmínky jsou: pro $z=0$, je $v=0$ a pro $z=h$ je $v=0$. Složka rychlosti je

$$v = 1 / (2 \cdot \eta) \cdot dp/dr \cdot z \cdot (z - h)$$

Rozložení tlaku p podél poloměru r má okrajové podmínky: pro $r=R_1$ je $p=p_1$ a pro $r=R_2$ je $p=p_2$. Do rovnice kontinuity lze dosadit za v a tak získat vyjádření rozložení tlaku

$$\partial v / \partial r + v / r = 1 / (2 \cdot \eta) \cdot z \cdot (h - z) \cdot (1 / r \cdot dp / dr + d^2 p / dr^2) = 0$$

Výraz v závorce je roven nule a použitím substituce $dp/dr = s$ a $d^2 p / dr^2 = ds/dr$ se určí $s = C_1 / r$. Pro tlak plyne $p = C_1 \cdot \ln r + C_2$, resp.

$$p = [\ln(R_2/R_1)]^{-1} \cdot p_1 \cdot \ln(R_2/r) \quad \text{resp.} \quad dp/dr = -p_1/r \cdot [\ln(R_2/R_1)]^{-1}$$

Průtočné množství se získá integrací rozložení radiální rychlosti v , kdy jako meze vystupuje z od 0 do h a úhel φ od 0 do $2 \cdot \pi$, ve tvaru

$$Q = \int \int v(r, z) \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi = (\pi \cdot h^3 \cdot p_1) / (6 \cdot \eta \cdot K) \quad \text{kde je } K = \ln R_2/R_1$$

4.3 PŘEDPOKLADY ŘEŠENÍ

Spára mezi kluznými plochami je vyplněna kapalným mazivem a je třeba určit rozložení rychlosti maziva při pohybu kluzných ploch. Rozložení rychlosti dává tečná napětí v kapalině, která musí být v rovnováze s tlakovými účinky, setrvačnými a dalšími hmotovými či objemovými silami, jako jsou síly gravitační, účinky dostředivého zrychlení, síly elektromagnetické, elektrostatické aj.

Řešení nejprve provedeme za zjednodušujících předpokladů. K těmto předpokladům patří následující:

1. Na mazivo nebude působit žádné vnější silové pole. Zanedbává se tedy tíha maziva.
2. Setrvačné síly a síly vyvolané zrychlením maziva jsou oproti tlakovým a viskózním silám zanedbatelně malé.
3. Přilnavost maziva k povrchům kluzných ploch je taková, že můžeme zanedbat skluz maziva po povrchu kluzných ploch.
4. Teplota, hustota a viskozita maziva je ve všech místech stejná a stálá s časem.
5. Průtok maziva o velké viskozitě spárou poměrně malé tloušťky je laminární, ustálený.
6. Tloušťka spáry vyplněné mazivem je velmi malá ve srovnání s ostatními rozměry kluzných ploch (poloměry zakřivení, délky).

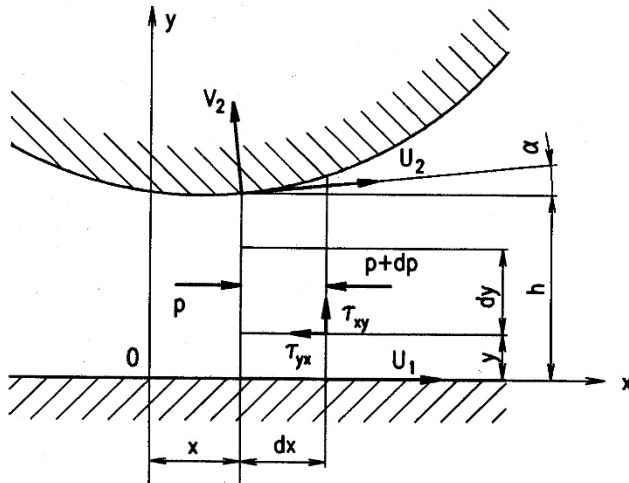
7. Tlak v mazivu se nemění v rozsahu tloušťky spáry, ale mění se podél spáry ve směru pohybu kluzných ploch i ve směru jejich šířky.
8. Složka rychlosti ve směru kolmém k povrchu kluzných ploch je zanedbatelná.
9. Zanedbává se změna složek rychlosti podél povrchu kluzných ploch a uvažuje se pouze změna těchto složek podél tloušťky spáry.

Na obr.4.6 je znázorněna část spáry mezi kluznými plochami. Kluzné plochy jsou válcové - nemění se tvar spáry v rovnoběžných řezech. Tloušťka spáry h je velmi malá ve srovnání s poloměry zakřivení kluzných ploch, takže i úhel α je velmi malý.

Hydrodynamická teorie mazání

7. Tlak v mazivu se nemění v rozsahu tloušťky spáry, ale mění se podél spáry ve směru pohybu kluzných ploch i ve směru jejich šířky.
8. Složka rychlosti ve směru kolmém k povrchu kluzných ploch je zanedbatelná.
9. Zanedbává se změna složek rychlosti podél povrchu kluzných ploch a uvažuje se pouze změna těchto složek podél tloušťky spáry.

Na obr.4.6 je znázorněna část spáry mezi kluznými plochami. Kluzné plochy jsou válcové - nemění se tvar spáry v rovnoběžných řezech. Tloušťka spáry h je velmi malá ve srovnání s poloměry zakřivení kluzných ploch, takže i úhel α je velmi malý.



Obr.4.6 Situace při průtoku spárou

Uvedené předpoklady řešení znamenají, že $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}=0$, $\frac{\partial w}{\partial z}=0$. Rov.(4.5) dává pro rovnováhu na elementu kapaliny ve směru x a z

(4.22.a,b)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

Reynoldsova ložisková rovnice

Protože se nepředpokládá změna tlaku v rozmezí tloušťky spáry, takže p není funkcí y , lze získat rychlosti u a w integrací. Integrační konstanty se určí z podmínek, že pro $y=0$ je $u=U_1$ a $w=0$ a pro $y=h$ je $u=U_2$ a $w=0$. Pro velmi malý úhel α považujeme $\cos \alpha=1$ a $\sin \alpha=\alpha=\text{tg } \alpha=0$. Pro rychlosti u a w platí

$$u = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y \cdot (y-h) + \frac{h-y}{h} \cdot U_1 + \frac{y}{h} \cdot U_2 \quad (4.23)$$

$$w = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot y \cdot (y-h) \quad (4.24)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu je hustota $\rho = \text{konst}$ a rovnice kontinuity rov.(4.9.b) dává pro $\partial v / \partial y = -\partial u / \partial x - \partial w / \partial z$. Integrací tohoto výrazu pro y se měnící od 0 do h získáme pro určité místo např. $y=h$ složku rychlosti kapaliny v na povrchu kluzné plochy, která je rovna svislé rychlosti kluzné plochy $V_2 = \partial h / \partial t$. Rychlosti u a w jsou funkcí y a obsahují derivaci tlaku podle x resp. z . Integrovat je třeba podle pravidla pro určitý integrál obsahující derivace (např.[8])

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f(x,y)] \cdot dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y) \cdot dy + f(x,b) \cdot \frac{db}{dx} - f(x,a) \cdot \frac{da}{dx}$$

Výsledkem určitého integrálu je Reynoldsova ložisková rovnice pro hydrodynamicky mazaná ložiska

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \quad (4.25)$$

$$= 6 \cdot \left[(U_1 - U_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right]$$

Součet na levé straně Reynoldsovy rovnice vyjadřuje výstavbu tlakového pole v ložisku. První člen pravé strany vyjadřuje účinek zužující se klínové spáry. Druhý člen pravé strany podává účinek prodlužování kluzných ploch např. v důsledku jejich poddajnosti. V praktických případech je roven nule. Třetí člen pravé strany zachycuje změnu tloušťky spáry s časem a je důležitý pro ložiska,

Protože se nepředpokládá změna tlaku v rozmezí tloušťky spáry, takže p není funkcí y , lze získat rychlosti u a w integrací. Integrační konstanty se určí z podmínek, že pro $y=0$ je $u=U_1$ a $w=0$ a pro $y=h$ je $u=U_2$ a $w=0$. Pro velmi malý úhel α považujeme $\cos \alpha=1$ a $\sin \alpha=\alpha=\text{tg } \alpha=0$. Pro rychlosti u a w platí

$$u = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y \cdot (y-h) + \frac{h-y}{h} \cdot U_1 + \frac{y}{h} \cdot U_2 \quad (4.23)$$

rozložení rychlostí ve spáře ložiska

$$w = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot y \cdot (y-h) \quad (4.24)$$

Pro nestlačitelnou kapalinu je hustota $\rho = \text{konst}$ a rovnice kontinuity rov.(4.9.b) dává pro $\partial v / \partial y = -\partial u / \partial x - \partial w / \partial z$. Integrací tohoto výrazu pro y se měnící od 0 do h získáme pro určité místo např. $y=h$ složku rychlosti kapaliny v na povrchu kluzné plochy, která je rovna svislé rychlosti kluzné plochy $V_2 = \partial h / \partial t$. Rychlosti u a w jsou funkcí y a obsahují derivaci tlaku podle x resp. z . Integrovat je třeba podle pravidla pro určitý integrál obsahující derivace (např.[8])

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f(x,y)] \cdot dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,y) \cdot dy + f(x,b) \cdot \frac{db}{dx} - f(x,a) \cdot \frac{da}{dx}$$

Výsledkem určitého integrálu je Reynoldsova ložisková rovnice pro hydrodynamicky mazaná ložiska

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \quad (4.25)$$

Reynoldsova ložisková rovnice

$$= 6 \cdot \left[(U_1 - U_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 2 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \right]$$

Součet na levé straně Reynoldsovy rovnice vyjadřuje výstavbu tlakového pole v ložisku. První člen pravé strany vyjadřuje účinek zužující se klínové spáry. Druhý člen pravé strany podává účinek prodlužování kluzných ploch např. v důsledku jejich poddajnosti. V praktických případech je roven nule. Třetí člen pravé strany zachycuje změnu tloušťky spáry s časem a je důležitý pro ložiska,