Anemometr

Dlouhý konstantanový drát o průměru $0{,}5$ mm je v proudu vzduchu o teplotě 40 °C. Teplota drátu se vyrovnala s teplotou okolního vzduchu. Drátem náhle začne protékat elektrický proud o intenzitě $0{,}4$ A. Po 60 s stoupla teplota drátu o půl stupně Celsia. Určete střední součinitel přestupu tepla z drátu do vzduchu a vypočtěte hodnotu složky rychlosti vzduchu kolmé k ose drátu. Při výpočtu zanedbejte vliv teploty na změnu termofyzikálních a transportních vlastností vzduchu, tj. korekční faktor $(\mu_\infty/\mu_\mathrm{w})^{0{,}25} \sim 1$ (Sieder–Tate).

Konstantan (54 % Cu, 45 % Ni, 1 % Mn) při teplotě 20 °C: hustota $8920\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku $410\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, součinitel tepelné vodivosti $22{,}2\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Součinitel tepelné vodivosti při teplotě 0°C je $22,2\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ a při teplotě 100°C je $23{,}4\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Měrný odpor konstantanu $\varrho^{(\mathrm{e})}$ je $0{,}50 \cdot 10^{-6}\ \Omega\,\mathrm{m^2\,m^{-1}}$.

Začněme opět přemýšlením o formulaci úlohy (měli bychom si určitě nakreslit obrázek, i když zde žádný asi v tuto chvíli nevidíte). Řešíme úlohu nestacionárního (je zadána počáteční teplota a teplota po nějaké době) vedení tepla (v konstantanovém drátu je teplo přenášeno mechanismem kondukce) v dlouhém válci (drát) s objemovým zdrojem tepla (protékající elektrický proud vytváří Jouleovo teplo) a s okrajovou podmínkou třetího druhu (tj. zadanou teplotou okolí a součinitelem přestupu tepla na povrchu). Intenzita přestupu tepla na povrchu navíc závisí na rychlosti obtékání drátu okolním vzduchem, tedy parametru, který má být výsledkem našeho výpočtu.

Na první pohled tedy hledáme řešení úlohy s níž jsme se v obecné podobě nesetkali, ani na přednáškách, ani na cvičeních. Řešili jsme sice vedení tepla v drátu (válci) s vnitřním zdrojem tepla, ale stacionární. Řešili jsme nestacionární ohřev drátu (válce), ale bez vnitřního zdroje tepla. Počítali jsme, na základě nějaké vhodné korelace, při znalosti rychlosti okolního proudícího vzduchu, součinitel přestupu tepla mezi válcem a okolím, ale ne opačně. Zvládneme tedy vyřešit daný případ? Navíc, v zadání je spousta tajemných informací. V zadání je uvedena teplota drátu po určité době. Ale o jakou teplotu se jedná? Vždyť víme, že vlivem kondukce a objemového zdroje tepla dojde k tomu, že teplota v jádru drátu bude vyšší než teplota na povrchu. Na druhou stranu si vzpomínáme na případy, kdy byl vnitřní termický odpor (konduktivní) tělesa zanedbatelný vůči odporu vnějšímu (konvektivní) a v těchto případech bylo možné zanedbat rozložení teploty uvnitř tělesa a považovat teplotu tělesa za konstantní, vyvíjející se pouze s časem (vzpomeňte, že se jedná o případy charakterizované malou hodnotou Biotova čísla $\mathrm{Bi} \ll 1$).

Protože nám v tuto chvíli již dochází síly, zkusme náš případ zjednodušit na případ se zanedbatelným vnitřním termickým odporem, tj. teplota drátu T je po průřezu konstantní. Předpokládejme také, že po 60 s bylo již dosaženo ustáleného stavu (i když víme, že je k tomu teoreticky potřeba neomezeně dlouhého času a prakticky času několikanásobně delšího než je časová konstanta systému). Všechny předpoklady bychom pak samozřejmě měli ověřit. V ustáleném stavu pak musí být tepelný tok $R^{(\mathrm{e})}\,I^2$ (Joule), vznikající průchodem elektrického proudu I drátem, odváděn do okolí povrchem drátu mechanismem konvekce. Tento tepelný tok je pak možné vyjádřit s pomocí součinitele přestupu tepla α a teploty okolního prostředí T_f. Tuto jednoduchou bilanci pak můžeme vyjádřit jako

$$R^{(\mathrm{e})}\,I^2 = \alpha S\,(T - T_\mathrm{f}) \quad \dots \quad \underbrace{\varrho^{(\mathrm{e})}\frac{L}{\pi R^2}}_{R^{(\mathrm{e})}}\,I^2 = \alpha\,\underbrace{2\pi R L}_{S}\,(T - T_\mathrm{f})\ , \tag{1}$$

kde R je poloměr drátu a S je velikost jeho teplosměnného povrchu (povrch válce, drát je dlouhý). S pomocí této bilance již můžeme vyjádřit hledaný součinitel přestupu tepla mezi drátem a okolím jako

$$\alpha = \frac{\varrho^{(\mathrm{e})}\,I^2}{2\pi^2 R^3\,(T - T_\mathrm{f})} = \frac{0{,}50 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}4^2}{2\pi^2 \cdot 0{,}00025^3 \cdot (40{,}5 - 40)} = 518{,}764\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}\,. \tag{2}$$

Pokusme se nyní ověřit předpoklady výpočtu. Začneme Biotovým číslem pro ověření, že můžeme zanedbat vnitřní termický odpor tělesa (válce, drátu), tj.

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda_\mathrm{w}} = \frac{518{,}764 \cdot 0{,}00025}{22{,}2} = 0{,}00584 \ll 1\,. \tag{3}$$

Z vypočtené hodnoty Biotova čísla vidíme, že předpoklad o možnosti zanedbání vnitřního termického odporu je splněn. Nezapomeňme, že do výše uvedené definice Biotova čísla dosazujeme součinitel tepelné vodivosti tělesa (válce, drátu), pro jistotu zde označenou λ_{w}. Zde jsme použili hodnotu pro teplotu $20\ ^{\circ}\mathrm{C}$ (jak je patrné ze zadání, tak se tato vlastnost s teplotou významněji nemění).

V tuto chvíli bychom tedy měli ještě ověřit předpoklad, že jsme již téměř dosáhli ustáleného stavu, tj. pokusit se určit časovou konstantu systému. S tímto však již také máte své zkušenosti. Zabývali jste se nestacionárním ohřevem tělesa pro malé hodnoty Biotova čísla. Ve vašich bilancích však nevystupoval vnitřní zdroj tepla. Zkusme tedy nestacionární bilanční rovnici doplnit o výkon, označme ho třeba P, který vzniká v tělese. Doplňme ho do bilanční rovnice a upravujme, separujme, integrujme, upravujme, …

$$Mc_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T\right) + P \tag{4}$$

$$\int\limits_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{\alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T\right) + P} = \frac{1}{Mc_p}\int\limits_{0}^{t}\mathrm{d}t \tag{5}$$

$$-\frac{1}{\alpha S}\ln\frac{\alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T\right) + P}{\alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T_0\right) + P} = -\frac{1}{Mc_p}t \tag{6}$$

$$\boxed{\ln\frac{\alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T\right) + P}{\alpha S\left(T_{\mathrm{f}} - T_0\right) + P} = -\frac{\alpha S}{Mc_p}t = -\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

Podařilo se nám najít časovou závislost teploty T tělesa o hmotnosti M a povrchu S, které je umístěno v prostředí o teplotě T_{f}. Počáteční teplota tělesa byla T_0 (v nulovém čase, počáteční podmínka). Intenzita přenosu tepla mezi tělesem a prostředím je vyjádřena součinitelem přestupu tepla α. V tělese je teplo generováno rychlostí P (tepelný výkon vznikající v tělese). V posledním výraze bychom také mohli identifikovat časovou konstantu celého systému označenou τ. Nezapomínejme však pořád, že tento vztah platí pro případ zanedbatelného vnitřního termického odporu vůči odporu vnějšímu.

V našem případě můžeme vztah ještě dále mírně zjednodušit. Počáteční teplota tělesa (válce, drátu) je rovna teplotě okolí, tj. $T_0 = T_{\mathrm{f}}$. Dosadíme-li a následně vyjádříme teplotu tělesa v libovolném čase, dostaneme

$$\boxed{\ln\left[\frac{\alpha S}{P}\left(T_{\mathrm{f}} - T\right) + 1\right] = -\frac{\alpha S}{Mc_p}t = -\frac{t}{\tau}}, \tag{8}$$

$$\boxed{T = T_{\mathrm{f}} + \frac{P}{\alpha S}\left[1 - e^{-\frac{\alpha S}{Mc_p}t}\right] = T_{\mathrm{f}} + \frac{P}{\alpha S}\left[1 - e^{-\frac{\alpha S}{\varrho Vc_p}t}\right] = T_{\mathrm{f}} + \frac{P}{\alpha S}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]; \quad \tau = \frac{\varrho Vc_p}{\alpha S}}. \tag{9}$$

Spočítejme nyní velikost časové konstanty systému τ a ověřme zpětně jakou bude mít naše těleso teplotu po $60\ \mathrm{s}$ ohřevu při dříve určeném součiniteli přestupu tepla. Určeme nejprve nějaké geometrické parametry či fyzikální poměry, které se v rovnici objevují.

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi RL}{\pi R^2 L} = \frac{2}{R} = \frac{2}{0{,}00025} = 8000\ \mathrm{m}^{-1} \tag{10}$$

$$\frac{S}{P} = \frac{2\pi RL}{\varrho^{(\mathrm{e})}LI^2/(\pi R^2)} = \frac{2\pi^2 R^3}{\varrho^{(\mathrm{e})}I^2} = \frac{2\pi^2\cdot 0{,}00025^3}{0{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}4^2} = 0{,}00385531\ \mathrm{m}^2\,\mathrm{W}^{-1} \tag{11}$$

Nyní již můžeme dosadit a určit požadované veličiny.

$$\tau = \frac{\varrho Vc_p}{\alpha S} = \frac{8920\cdot 410}{8000\cdot 518{,}764} = 0{,}881\ \mathrm{s} \tag{12}$$

$$T_{60} = T_{\mathrm{f}} + \frac{P}{\alpha S}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = 40 + \frac{1}{518{,}764\cdot 0{,}00385531}\left[1 - e^{-\frac{60}{0{,}881}}\right] = 40{,}499997\ ^{\circ}\mathrm{C} \tag{13}$$

Jak je z výsledku výpočtu teploty patrné, tak teplota drátku po $60\ \mathrm{s}$ opravdu dosáhne s jistotou ustáleného stavu. Tento fakt je patrný i z velikosti vypočtené časové konstanty, protože $60\ \mathrm{s} \gg 0{,}881\ \mathrm{s}$. Co kdyby tomu tak nebylo? No, v tom případě bychom museli určit hodnotu součinitele přestupu tepla řešením nelineární rovnice popisující časovou závislost teploty tak, abychom dostali naměřenou teplotu v daném čase.

V tuto chvíli můžeme tedy stanovenou hodnotu součinitele přestupu tepla

$$\boxed{\alpha = 518{,}8\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}} \tag{14}$$

považovat za ověřenou a zbývá nám již jenom určit odpovídající rychlost proudění.

Naším posledním úkolem je tedy stanovit rychlost proudění na základě známého součinitele přestupu tepla. Standardní úloha s níž se setkáváme, je úloha, kdy na základě známé rychlosti proudění stanovujeme velikost součinitele přestupu tepla. Jak to děláme? Najdeme vhodnou korelaci pro obtékání tělesa, v našem případě válce, a s pomocí bezrozměrných čísel určíme požadované parametry. Pro příčné obtékání válce se často používá korelace, sestavená Whitakerem (pomocník),

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0{,}25 + \left(0{,}4\sqrt{\mathrm{Re}} + 0{,}06\,\mathrm{Re}^{2/3}\right)\mathrm{Pr}^{0{,}4}; \quad \mathrm{Re} = \frac{u_\infty D}{\nu}\,, \tag{15}$$

v níž jsou všechny vlastnosti vztaženy k proudícímu médiu (vzduchu) při teplotě nabíhajícího proudu neovlivněné tělesem (ve vztahu výše jsme již zanedbali Sieder-Tateovu korekci). Znovu si porovnejte definici Nusseltova čísla s číslem Biotovým.

Určíme tedy Nusseltovo a Prandtlovo číslo, s pomocí korelace určíme číslo Reynoldsovo a nakonec dopočteme rychlost.

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{518{,}8 \cdot 0{,}0005}{0{,}0270} = 9{,}607; \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\varrho c_p}} = \frac{17{,}2 \cdot 10^{-6}}{\frac{0{,}0270}{1{,}1119 \cdot 1006}} = 0{,}7126 \tag{16}$$

Reynoldsovo číslo je pak řešením nelineární rovnice

$$9{,}607 = 0{,}25 + \left(0{,}4\sqrt{\mathrm{Re}} + 0{,}06\,\mathrm{Re}^{2/3}\right)0{,}7126^{0{,}4} \quad \ldots \quad \mathrm{Re} = 365{,}5\,. \tag{17}$$

Následně pak již z definice Reynoldsova čísla dopočteme hledanou rychlost proudění

$$\boxed{u_\infty = \frac{\mathrm{Re}\,\nu}{D} = \frac{365{,}5 \cdot 17{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}0005} = 12{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\,. \tag{18}$$

Možná zbývá na závěr ještě uvést maličkou poznámku týkající se řešení výše uvedené nelineární rovnice. Někteří z vás budou používat metodu střelby, někteří si upraví rovnici do tvaru umožňujícího aplikovat prostou iterační metodu, kterou znáte z numerické matematiky, někteří použijí Microsoft Excel a někteří Matlab či jeho volně dostupnou variantu Octave. Jak vidíte, možností je mnoho. Tou nejjednodušší v tomto případě bylo využití výpočetní inteligence WolframAlpha (`https://www.wolframalpha.com/`) do níž zadáte rovnici například v následujícím tvaru.

```
9.607=0.25+(0.4*sqrt(x)+0.06*x^(2/3))*0.7126^0.4
```