

Elektrický ohříváč vzduchu

Stanovte maximální přípustný proud, který může protékat topným odporovým drátem ($1,428 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$, $20 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) o průměru 2 mm elektrického ohříváče, proudí-li ohříváčem kolmo na osu drátu ohříváný suchý vzduch o teplotě 60°C rychlostí 5 m s^{-1} . Maximální přípustná teplota odporového drátu je 800°C . Drát je pokryt tenkou vrstvičkou slídy ($0,58 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) o tloušťce 0,5 mm. Dále vypočítejte povrchovou teplotu slídy a výkon, který je za těchto podmínek schopen drát přenést do okolního vzduchu, vztažený na jednotkovou délku drátu. Sdílení tepla zářením neuvažujte. Při výpočtu zanedbejte změnu termofyzikálních vlastností suchého vzduchu vlivem jeho oteplení.

Nejprve určíme součinitel přestupu tepla mezi povrchem odporového drátu a okolním prostředím. V tomto případě s pomocí vhodné korelace pro nucenou konvekci při obtékání válce. Máme-li zanedbat změnu vlastností vzduchu s teplotou, znamená to, že nemusíme použít Sieder–Tateovu korekci. Součinitel přestupu tepla pak určíme s pomocí korelace pro Nusseltovo číslo při vnějším obtékání válce

$$\text{Nu} = 0,25 + \left(0,4\text{Re}^{1/2} + 0,06\text{Re}^{2/3}\right) \text{Pr}^{0,4}, \quad (1)$$

do níž dosazujeme vlastnosti při teplotě nabíhajícího proudu $T_\infty = 60^\circ \text{C}$ (viz tabulka korelací). Určíme tedy Reynoldsovo a Prandtlovo číslo vzduchu právě při teplotě $T_\infty = 60^\circ \text{C}$,

$$\text{Re} = \frac{u_\infty D}{\nu} = \frac{5 \cdot 0,003}{19,2 \cdot 10^{-6}} = 781,25; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{19,2 \cdot 10^{-6}}{\frac{0,0285}{1,0456 \cdot 1007}} = 0,70934 \quad (2)$$

a s jejich pomocí spočteme Nusseltovo číslo (samozřejmě zkontrolujeme zdali je námi zvolená korelace vhodná z hlediska rozsahu Re a Pr) jako

$$\text{Nu} = 0,25 + \left(0,4 \cdot 781,25^{1/2} + 0,06 \cdot 781,25^{2/3}\right) \cdot 0,70934^{0,4} = 14,432. \quad (3)$$

S pomocí Nusseltova čísla můžeme určit součinitel přestupu tepla

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} \quad \dots \quad \alpha = \text{Nu} \frac{\lambda}{D} = 14,432 \cdot \frac{0,0285}{0,003} = 137,10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}. \quad (4)$$

Protékající elektrický proud odporovým drátem vytváří v odporovém drátu objemový zdroj tepla. Vznikající teplo je pak odváděno skrz slídovou izolaci do okolního prostředí. Objemová hustota rychlosti vzniku tepla (Joule) závisí též na velikosti proudu I protékajícím vodičem. Naším cílem je určit takovou velikost proudu, aby maximální teplota v odporovém drátu, tj. teplota v ose odporového drátu (válce), byla $T_{\max} = 800^\circ \text{C}$. Z výsledků teoretického odvození teplotního pole ve válci ohříváného objemovým zdrojem tepla s okrajovou podmínkou třetího druhu na jeho povrchu vyplynulo, že teplotní pole ve válci (odporovém drátu) popisuje rovnice

$$T - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)} R^2}{4\lambda} \left[1 + \frac{4}{\text{Bi}} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]; \quad \text{Bi} = \frac{2\alpha R}{\lambda}, \quad (5)$$

kde R je poloměr válce (odporového drátu), λ je jeho tepelná vodivost a $\dot{Q}^{(g)}$ je objemová hustota rychlosti vzniku tepla. Do tohoto vztahu však nemůžeme dosadit přímo velikost součinitele přestupu tepla získaného při vnějším obtékání odporového drátu s izolací. Proč? Protože mezi povrchem vodiče a vnějším obtékaným povrchem je právě vrstva slídové izolace. Ve výše uvedeném Biotově čísle tedy nahradíme součinitel přestupu tepla součinitelem prostupu tepla, který vezme v úvahu jak vedení tepla ve slídové izolaci, tak přestup tepla do okolí. Tento součinitel prostupu tepla musíme vyjádřit **v místě povrchu odporového drátu** (protože výše uvedené teoretické řešení předpokládalo, že právě na této ploše dochází k přenosu tepla do okolí). Nástrojem,

který použijeme pro vyjádření součinitele prostupu tepla budou termické odpory (s je tloušťka slídové izolace a λ je její tepelná vodivost),

$$R_T = \frac{1}{k|_S S} = \frac{1}{k|_R \cdot 2\pi R L} = \frac{\ln \frac{R+s}{R}}{2\pi L \lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot 2\pi (R+s) L}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{k|_R R} = \frac{\ln \frac{R+s}{R}}{\lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot (R+s)}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{k|_R R} = \frac{\ln \frac{1,5}{1}}{0,58} + \frac{1}{137,1 \cdot 0,0015} = 5,56171 \text{ m K W}^{-1}. \quad (8)$$

Z posledního vztahu již nemusíme vyjadřovat součinitel prostupu tepla, nepožaduje-li se to po nás, protože Biotovo číslo můžeme vyjádřit na základě spočteného výrazu jako

$$\text{Bi} = \frac{2kR}{\lambda} = \frac{2}{5,56171 \cdot 20} = 0,017980. \quad (9)$$

V tomto okamžiku můžeme již s pomocí výše uvedeného řešení teplotního pole v odporovém drátu (válci) vyjádřit velikost objemového zdroje tepla $\dot{Q}^{(g)}$ jako

$$T_{\max} - T_f = T|_{r=0} - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)} R^2}{4\lambda} \left[1 + \frac{4}{\text{Bi}} \right] \quad \dots \quad \dot{Q}^{(g)} = \frac{4\lambda (T_{\max} - T_f)}{R^2 \left[1 + \frac{4}{\text{Bi}} \right]}, \quad (10)$$

$$\dot{Q}^{(g)} = \frac{4 \cdot 20 \cdot (800 - 60)}{0,001^2 \left[1 + \frac{4}{0,01798} \right]} = 264\,913\,215 \text{ W m}^{-3}. \quad (11)$$

Vzhledem k tomu, že se nám podařilo spočítat vydanost objemového zdroje tepla, kterou umíme svázat s mechanismem jeho vzniku (Jouleovo teplo), můžeme již určit velikost proudu protékající drátem.

$$\dot{Q}^{(g)} = \frac{R^{(\text{el})} I^2}{\pi R^2 L} = \frac{\varrho^{(\text{el})} \frac{L}{\pi R^2} I^2}{\pi R^2 L} = \frac{\varrho^{(\text{el})} I^2}{\pi^2 R^4} \quad \dots \quad I = \sqrt{\frac{\pi^2 R^4 \dot{Q}^{(g)}}{\varrho^{(\text{el})}}} \quad (12)$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi^2 0,001^4 \cdot 264\,913\,215}{1,428 \cdot 10^{-6}}} = 42,790 \text{ A} \quad (13)$$

Velikost výkonu, který musíme z odporového drátu odvádět, vztažený na jednotku délky odporového drátu, spočteme s pomocí objemového zdroje tepla jako

$$\dot{Q} = \dot{Q}^{(g)} \cdot \underbrace{\pi R^2 L}_V \quad \dots \quad \frac{\dot{Q}}{L} = \dot{Q}^{(g)} \cdot \pi R^2 = 264\,913\,215 \cdot \pi 0,001^2 = 832,25 \text{ W m}^{-1}. \quad (14)$$

Vypočtený tepelný tok generovaný v objemu odporového drátu (případně i vztažený na jednotkovou délku tohoto drátu) musí procházet vrstvou slídové izolace a následně nucenou konvekcí přestupovat do okolí. Povrchovou teplotu slídové izolace T_{sf} tedy spočteme například s pomocí

$$\dot{Q} = \dot{Q}^{(g)} \cdot \underbrace{\pi R^2 L}_V = \alpha \cdot \underbrace{2\pi (R+s) L}_S (T_{\text{sf}} - T_f), \quad (15)$$

$$T_{\text{sf}} = T_f + \frac{\dot{Q}^{(g)} \cdot R^2}{2\alpha (R+s)} = 60 + \frac{264\,913\,215 \cdot 0,001^2}{2 \cdot 137,10 \cdot 0,0015} = 704,088 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (16)$$

I když to již zadání nepožaduje, spočteme ještě povrchovou teplotu odporového drátu, tj. teplotu T_{ws} rozhraní odporový drát – slída. Velikost Biotova čísla opět naznačuje, že se jedná o případ vedení tepla v tělese se zanedbatelným vnitřním termickým odporem a že tato teplota bude o něco málo menší, než teplota v ose drátu

$T_{\max} = 800 \text{ }^{\circ}\text{C}$. I v tomto případě můžeme použít několika přístupů. Jeden spočívá v tom, že výše uvedený tepelný tok musí projít i vrstvičkou slídové izolace a tento tepelný tok můžeme vyjádřit s pomocí rozdílu teplot na této slídové izolaci. Protože známe teplotu T_{sf} rozhraní slídové izolace – okolní prostředí, můžeme pak dopočítat teplotu slídové izolace na jejím styku s odporovým drátem. V případě výpočtu teploty povrchu odporového drátu můžeme též použít výše uvedeného teoretického řešení teploty ve válci (odporovém drátu) s objemovým zdrojem tepla (toto řešení není možné použít pro slídovou izolaci). Zkusme tedy využít tohoto řešení

$$T_{\text{ws}} - T_{\text{f}} = T|_{r=R} - T_{\text{f}} = \frac{\dot{Q}^{(\text{g})} R^2}{4\lambda} \left[1 + \frac{4}{\text{Bi}} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \Big|_{r=R} = \frac{\dot{Q}^{(\text{g})} R^2}{4\lambda} \frac{4}{\text{Bi}} = \frac{\dot{Q}^{(\text{g})} R^2}{\lambda \text{Bi}}, \quad (17)$$

$$T_{\text{ws}} = T_{\text{f}} + \frac{\dot{Q}^{(\text{g})} R^2}{\lambda \text{Bi}} = 60 + \frac{264913215 \cdot 0,001^2}{20 \cdot 0,01798} = 796,69 \text{ }^{\circ}\text{C}. \quad (18)$$

Z vypočtené teploty opravdu vidíme, že se teplota v ose odporového drátu a teplota jeho povrchu liší jen o několik stupňů Celsia. Když se ještě jednou nad výslednou rovnicí zamyslíte, určitě si uvědomíte, že vyjadřuje podobný vztah, který jsme použili pro vyjádření teploty T_{sf} , avšak zde jsme místo součinitele přestupu tepla použili dříve určený součinitel prostupu tepla (samozřejmě na odpovídající ploše a s odpovídajícím rozdílem teplot).