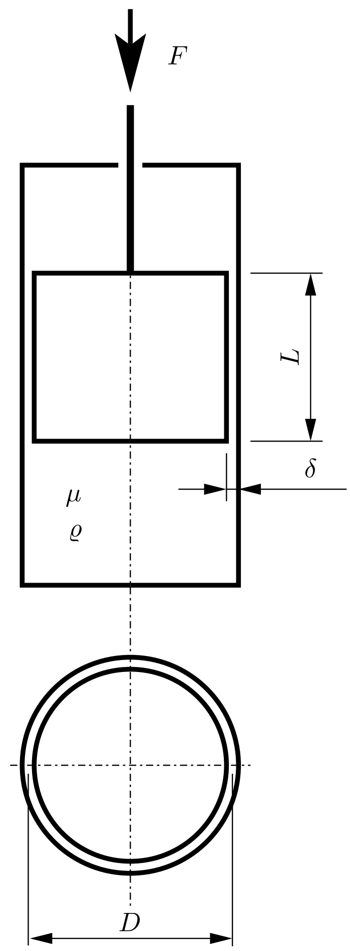
Olejový omezovač rychlosti klesání



Povolená rychlost klesání zátěže o tíze $10\ \mathrm{kN}$ má být na posledních $100\ \mathrm{mm}$ omezena hydraulickým tlumičem pohybu na hodnotu $100\ \mathrm{mm}$ za $60\ \mathrm{s}$. Určete velikost mezery mezi pístem a válcem hydraulického omezovače rychlosti klesání, je-li průměr a délka pístu $100\ \mathrm{mm}$. Hydraulický olej použitý v omezovači má při pracovní teplotě dynamickou viskozitu $50\ \mathrm{mPa\,s}$ a hustotu $850\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$. Proveďte též kontrolu podmínek platnosti Vašeho řešení a nakreslete Vaši představu o průběhu rychlosti ve štěrbině mezi válcem a pístem.

Jak by měl výše uvedený omezovač fungovat? Pod pístem je kapalina. Když píst zatížíme silou F, tak pod pístem vznikne přetlak o velikosti $\Delta p = F/S$ (S je plocha průřezu pístu) a kapalina bude proudit nad píst. Bude tedy axiálně protékat štěrbinou mezi oběma válci. Protože máme zadán jenom střední průměr a štěrbinka bude asi opravdu tenoučká (můžeme posoudit po výpočtu) použijeme vztah pro tlakové proudění mezi rovnoběžnými deskami a provedeme rozvinutí štěrbiny (můžeme se sice lopotit s prouděním v mezikruží, ale určitě si vzpomínáte, že toto aproximativní řešení se chová velice dobře z hlediska šířky štěrbiny). Do vztahu budeme ještě potřebovat objemový průtok oleje štěrbinou. Jak ho spočteme? Máme přeci zadánu povolenou rychlost klesání, označme třeba U, a opět si uvědomíme, že kapalinu pod pístem musíme dostat nad píst, tj. $\dot{V} = U\,S$. Ale ouha. Přemýšlíme dále a zamyslíme se nad okrajovými podmínkami při proudění ve štěrbině. Vnější válec stojí, tedy okrajová podmínka nulové rychlosti, pro níž použijeme výsledné řešení, je v pořádku. Co ale stěna tvořící válcovou plochu pístu? Ta se přeci pohybuje směrem dolů (tedy proti toku oleje štěrbinou) rychlostí klesání U. Tímto případem jsme se již ale zabývali. Ano, je to unášivé proudění mezi dvěma rovinnými deskami a výsledný objemový průtok jsme schopni vyřešit či alespoň nalézt. Teď si již jenom musíme dát pozor na znaménka a vše napsat s pomocí matematických symbolů (a to je právě ten okamžik, proč studujeme).

Výsledný objemový průtok oleje štěrbinou mezi pístem a válcem bude tedy dán superpozicí tlakového a unášivého proudění newtonské kapaliny ve štěrbině mezi dvěma rovnoběžnými deskami.

$$\dot{V} = U\,S = \frac{\Delta p W \delta^3}{12\mu L} - \frac{UW\delta}{2} = \frac{FW\delta^3}{12\mu LS} - \frac{UW\delta}{2}\,, \tag{1}$$

kde $S = \pi D^2/4$ je zmíněný průřez pístu, $W = \pi D$ je jeho obvod (pro rozvinutí štěrbiny) a δ je hledaná šířka štěrbiny.

Podíváme-li se však na sestavenou rovnici vidíme, že se jedná o nelineární rovnici třetího řádu. Nebude nejspíše velkým problémem rovnici vyřešit, zvláště pak po absolvování matematických kurzů, kurzů numerické matematiky, či dalších. Co však uděláme právě nyní? Nepodaří se nám úlohu nějak zjednodušit? Když se nad problémem zamyslíte, tak nejspíše odhadnete, že tlakové proudění bude mít mnohem větší příspěvek k výslednému objemovému průtoku, než proudění unášivé. Zanedbejme tedy unášivé proudění a pokusme se nalézt velikost štěrbiny δ.

$$U\,S = \frac{FW\delta^3}{12\mu LS} \quad \dots \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{12\mu LUS^2}{FW}} \tag{2}$$

Dosaďme a počítejme.

$$S = \pi \cdot 0{,}1^2/4 = 0{,}00785398\ \mathrm{m}^2 \tag{3}$$

$$W = \pi \cdot 0{,}1 = 0{,}314593\ \mathrm{m} \tag{4}$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}1/60) \cdot 0{,}00785398^2}{10000 \cdot 0{,}314593}} = 0{,}0001252\ \mathrm{m} = 0{,}125\ \mathrm{mm} \tag{5}$$

Po výpočtu vidíme, že velikost štěrbiny mezi válcem a pístem by měla být $0{,}125\ \mathrm{mm}$ (je opravdu malá a tak její rozvinutí asi nebude mít veliký vliv na přesnost výpočtu). Při výpočtu jsme však zanedbali objemový průtok od unášivého proudění, protože jsme předpokládali, že bude mnohem menší než od proudění tlakového. Nyní tedy přichází okamžik, kdybychom měli tento předpoklad ověřit.

$$\frac{UW\delta}{2} = \frac{(0{,}1/60) \cdot 0{,}314593 \cdot 0{,}0001252}{2} = 32{,}8 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1} \ll \tag{6}$$

$$\ll US = (0{,}1/60) \cdot 0{,}00785398 = 13{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1} \tag{7}$$

Vidíme, že příspěvek unášivého proudění k výslednému objemovému průtoku je o několik řádů menší než příspěvek tlakového proudění a předpoklad o možnosti jeho zanedbání byl správný. Kdyby nás však stále trápilo, jaký je ten *správnější* výsledek, museli bychom opravdu řešit kubickou rovnici (na řešení bychom mohli klidně použít i nějaký on-line nástroj, třeba vámi oblíbený `https://www.wolframalpha.com/`).

Nakonec ověřme režim proudění ve štěrbině, tj. vypočítejme Reynoldsovo číslo pro tlakové proudění ve štěrbině. Vzpomeňme si, že v případě nekruhových kanálů pracujeme s ekvivalentním průměrem, který je možné (zkuste si to sami) vyjádřit v případě nekonečně široké štěrbiny mezi dvěma deskami vzdálenými δ jako $D_\mathrm{e} = 2\delta$. Střední rychlost proudění ve štěrbině spočteme s pomocí objemového průtoku a plochy průřezu štěrbiny $A = W\delta$.

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{US}{W\delta} = \frac{(0{,}1/60) \cdot 0{,}00785398}{0{,}314593 \cdot 0{,}0001252} = 0{,}332\ \mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{8}$$

$$D_\mathrm{e} = 2\delta = 2 \cdot 0{,}0001252 = 0{,}0002504\ \mathrm{m} \tag{9}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar{u} D_\mathrm{e} \varrho}{\mu} = \frac{0{,}332 \cdot 0{,}0002504 \cdot 850}{0{,}05} = 1{,}4 < 2000 \tag{10}$$

Na závěr můžeme spočítat již nám oblíbenou hodnotu mechanické energie, která se za jednotku času přeměňuje na teplo, tj. rychlost disipace mechanické energie, jako

$$\dot{Q}^{(\mathrm{dissip})} = FU = 10000 \cdot (0{,}1/60) = 16{,}67\ \mathrm{W}\,. \tag{11}$$