

Zakalíme, popustíme

Ocelový hřídel (7790 kg m^{-3} , $500 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $48 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) o průměru 25 mm a délce 500 mm byl ohřát během normalizačního žíhání na teplotu 920°C . Ochlazování hřídele normálně probíhá jeho pomalým chladnutím v prostředí klidného vzduchu o teplotě 20°C . Kolem hřídele však náhodou na začátku ochlazování začal proudit vzduch rychlostí 10 m s^{-1} kolmo na osu hřídele. Technologové potřebují určit maximální rychlosti poklesu teploty hřídele během jeho ochlazování. Spočítejte také jak dlouho bude trvat ochlazování hřídele v případě, že jste ochotni vzít do rukou součást o teplotě 50°C a také energii, kterou jste předali okolnímu vzduchu. Při výpočtu zanedbejte vliv změny termofyzikálních vlastností vzduchu s teplotou. Ověřte platnost podmínek řešení.

Nejprve určíme součinitel přestupu tepla mezi povrchem tělesa a okolním prostředím. Vzhledem k tomu, že délka hřídele je mnohem větší než jeho průměr nahradíme hřídel případem vnějšího obtékání válce. Mámeli zanedbat změnu vlastností vzduchu s teplotou, znamená to, že nemusíme použít Sieder–Tateovu korekci. Součinitel přestupu tepla pak určíme s pomocí korelace pro Nusseltovo číslo při vnějším obtékání válce

$$\text{Nu} = 0,25 + \left(0,4\text{Re}^{1/2} + 0,06\text{Re}^{2/3}\right) \text{Pr}^{0,4}, \quad (1)$$

do níž dosazujeme vlastnosti při teplotě nabíhajícího proudu $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ (viz tabulka korelací). Určíme tedy Reynoldsovo a Prandtlovo číslo vzduchu právě při teplotě $T_\infty = 20^\circ\text{C}$.

$$\text{Re} = \frac{u_\infty D}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,025}{15,3 \cdot 10^{-6}} = 16339,9; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{15,3 \cdot 10^{-6}}{\frac{0,0256}{1,1887 \cdot 1006}} = 0,7147 \quad (2)$$

a s jejich pomocí spočteme Nusseltovo číslo (samozřejmě zkontrolujeme zdali je námi zvolená korelace vhodná z hlediska rozsahu Re a Pr) jako

$$\text{Nu} = 0,25 + \left(0,4 \cdot 16339,9^{1/2} + 0,06 \cdot 16339,9^{2/3}\right) \cdot 0,7147^{0,4} = 78,731. \quad (3)$$

S pomocí Nusseltova čísla můžeme určit součinitel přestupu tepla

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} \quad \dots \quad \alpha = \text{Nu} \frac{\lambda}{D} = 78,731 \cdot \frac{0,0256}{0,025} = 80,62 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}. \quad (4)$$

Dále se již budeme věnovat nestacionárnímu chlazení válce. Jak víme, charakter nestacionárního vedení tepla v tuhých tělesech, z hlediska významu vnitřního a vnějšího termického odporu, můžeme vyjádřit s pomocí Biotova čísla (porovnejte s Nusseltovým číslem zvláště z hlediska použitého součinitele tepelné vodivosti)

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{80,62 \cdot 0,0125}{48} = 0,021 \ll 1. \quad (5)$$

Z výsledků výpočtu vidíme, že Biotovo číslo indikuje případ vedení tepla se zanedbatelným vnitřním termickým odporem. Jedná se o případ, kdy je možno zanedbat gradienty teplot uvnitř tělesa a předpokládat, že těleso má konstantní teplotu závisící pouze na čase t . Pro tento případ jsme si odvodili jednoduchou exponenciální závislost teploty tělesa na čase

$$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{\alpha S}{mc_p} t} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (6)$$

kde vystupuje též časová konstanta τ . Určíme tedy povrch tělesa S a jeho hmotnost m

$$S = \pi D L + \frac{\pi D^2}{2} = \pi \cdot 0,025 \cdot 0,5 + \frac{\pi \cdot 0,025^2}{2} = 0,0402517 \text{ m}^2, \quad (7)$$

$$m = \frac{\pi D^2}{4} L \rho = \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \cdot 0,5 \cdot 7790 = 1,91195 \text{ kg} \quad (8)$$

a s jejich pomocí následně velikost časové konstanty τ

$$\tau = \frac{mc_p}{\alpha S} = \frac{1,91195 \cdot 500}{80,62 \cdot 0,0402517} = 294,591 \text{ s.} \quad (9)$$

Nyní již můžeme určit dobu potřebnou pro chlazení hřídele z teploty $T_0 = 920 \text{ °C}$ a teplotu $T = 50 \text{ °C}$

$$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \dots \quad t = -\tau \ln \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = -294,591 \cdot \ln \frac{50 - 20}{920 - 20} = 1001,96 \text{ s} \quad (10)$$

a energii, kterou jsme předali okolnímu chladicímu vzduchu (stejná jako energie potřebná pro ochlazení hřídele)

$$Q = m c_p (T_0 - T) = 1,91195 \cdot 500 \cdot (920 - 50) = 831698,25 \text{ J.} \quad (11)$$

Poslední, vlastně první, co jsme měli spočítat, byla maximální rychlost ochlazování hřídele. Rychlost ochlazování hřídele určíme velice jednoduše s pomocí časové derivace funkce vyjadřující časovou závislost teploty, tj.

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = (T_0 - T_f) \frac{d}{dt} \left[\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \right] = -\frac{T_0 - T_f}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12)$$

Z výsledku vidíme, že rychlost změny teploty exponenciálně klesá (v absolutní hodnotě) s rostoucím časem t a maximální rychlostí bude hřídel ochlazován na počátku, tj. čase $t = 0$.

$$\dot{T}_{\max} = -\frac{T_0 - T_f}{\tau} = -\frac{920 - 20}{294,591} = -3,055 \text{ K s}^{-1} \quad (13)$$