

Biomechanika II

Modely napjatosti a deformace cév,
vliv zbytkových napětí a aktivní vlastnosti

ČVUT v Praze, fakulta strojní,
ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Obor: Biomechanika a lékařské přístroje

Lukáš Horný
Lukas.horny@fs.cvut.cz

Říjen 2016

Předpokládané znalosti

- Předpokládá se, že student si osvojil znalosti anatomie a fyziologie; pokud ne, vizte předměty: *Základy anatomie fyziologie I a II, Biomechanika I*
- Předpokládá se znalost předmětů *Pružnost a pevnost I a II*
- Předpokládá se základní znalost nelineární mechaniky kontinua vyložená během kurzu *Projekt I (BLP)*
na studenty specializace „lékařské přístroje“ bude v tomto směru brán zvláštní ohled
- Předpokládají se znalosti hydromechaniky
konkrétně tyto pojmy a jevy: přeměna mechanické energie popsána Bernoulliiovou rovnicí, Navierovy–Stokesovy rovnice a chování vazké (newtonské) kapaliny

Pedagogický cíl

Cílem je, aby posluchač měl představu o tom:

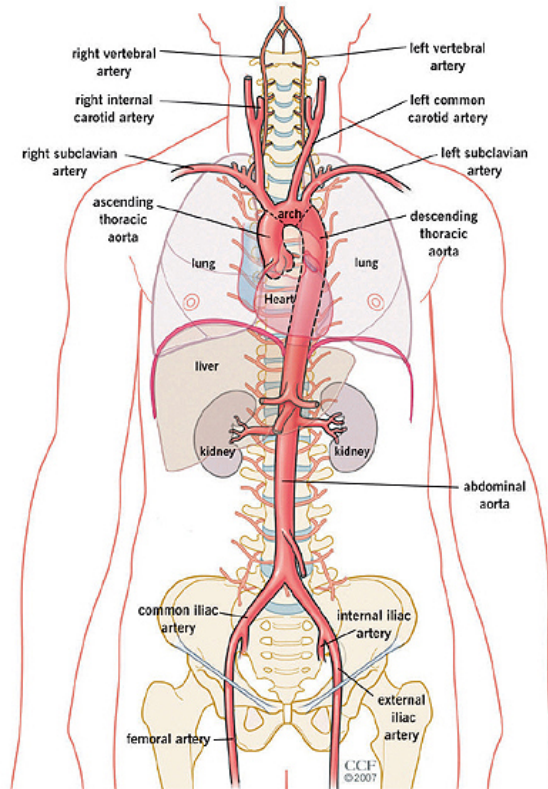
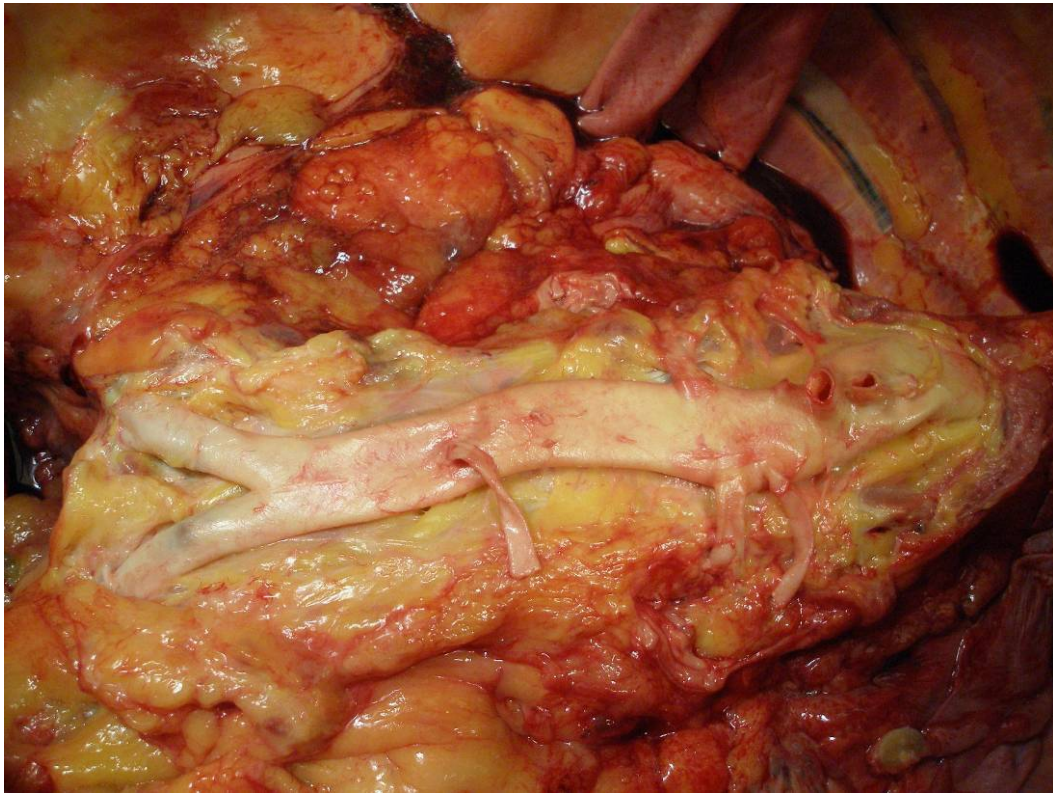
- jak můžeme modelovat napjatost a deformaci v tubulárních objektech lidského těla, výklad je prováděn na příkladu břišní aorty
- jaký je rozdíl mezi modely 2D a 3D napjatosti
- že tkáně lidského těla rostou zbytkově napjaté a že zbytková napjatost má významnou mechanickou funkci
- Pasivní vs. aktivní vlastnosti (aktivace hladkého svalstva a vliv na mechanické chování)

Břišní aorta

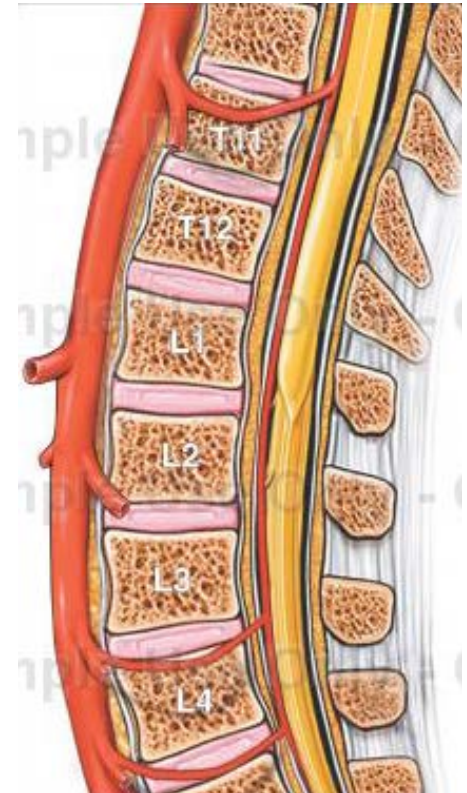
Příklad, výukový model, pro tubulární tkáně
a orgány

Břišní aorta: anatomie

- Pitva



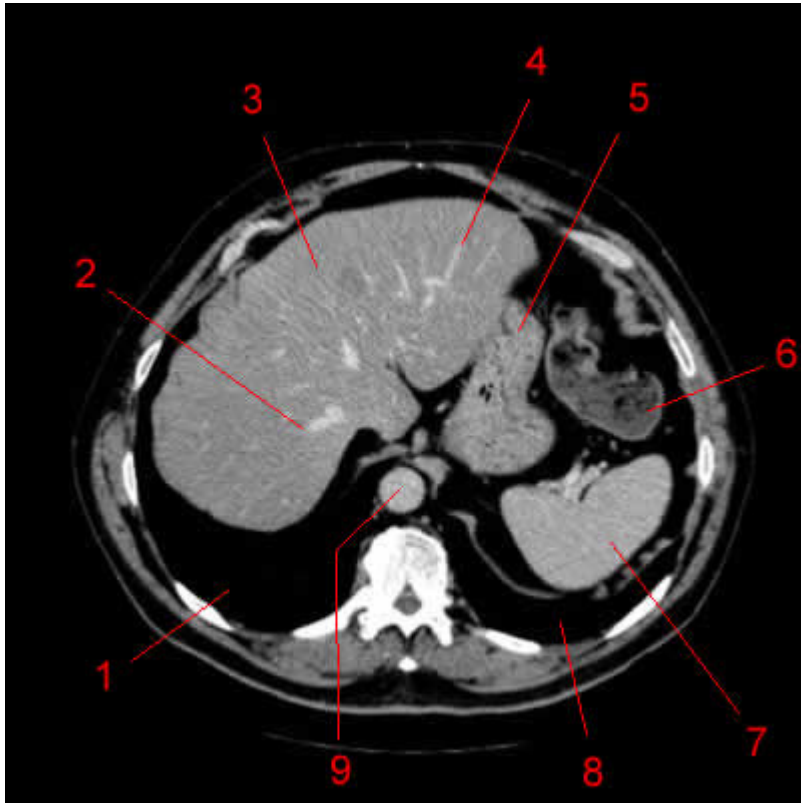
Repro: <http://my.clevelandclinic.org/heart/heart-blood-vessels/aorta.aspx>



Repro: <http://www.doereport.com/enlargeexhibit.php?ID=15311>

Břišní aorta: anatomie

- CT



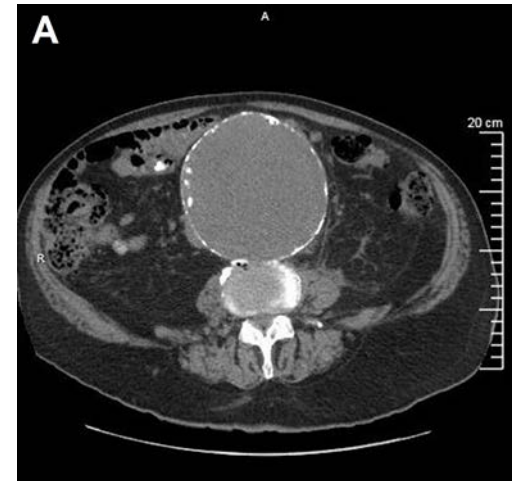
- 1 Pravá plíce
- 2 Pravá jaterní tepna
- 3 Játra
- 4 Levá jaterní tepna
- 5 Žaludek
- 6 Levý ohyb tračníku tlustého střeva
- 7 Slezina
- 8 Levá plíce
- 9 Aorta

Nekontrastní CT
zobrazující obrovské
aneuryzma (výduť)
břišní aorty

sagitálně

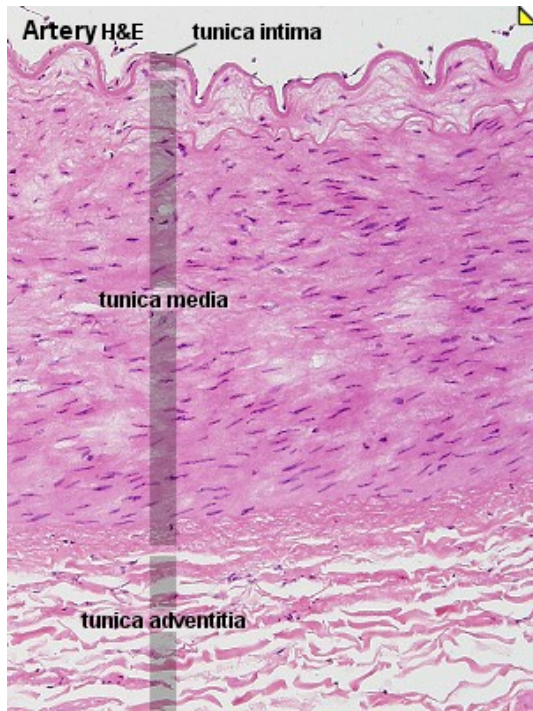


axiálně

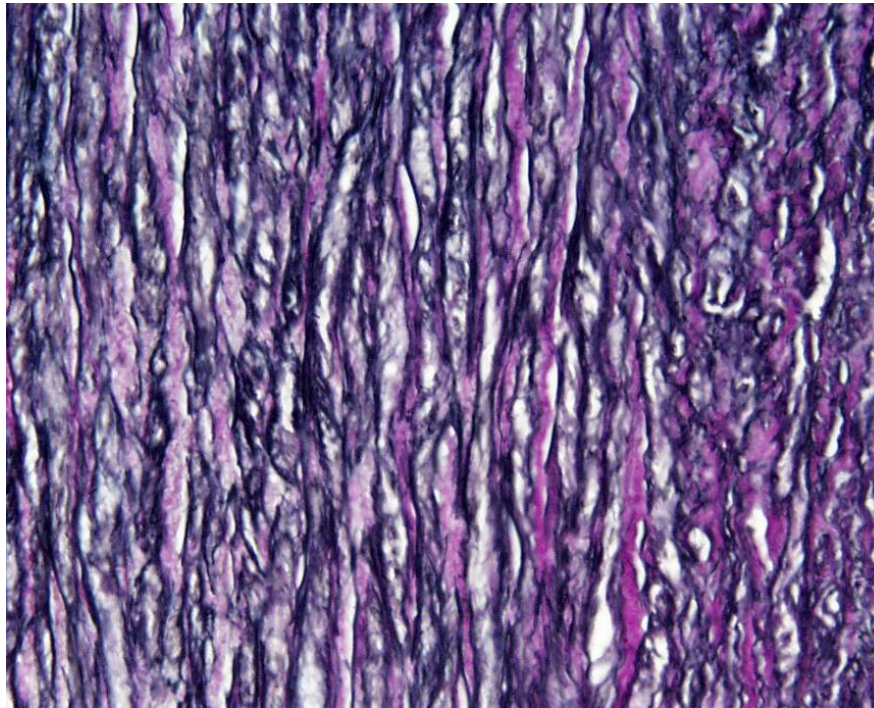


Břišní aorta: anatomie

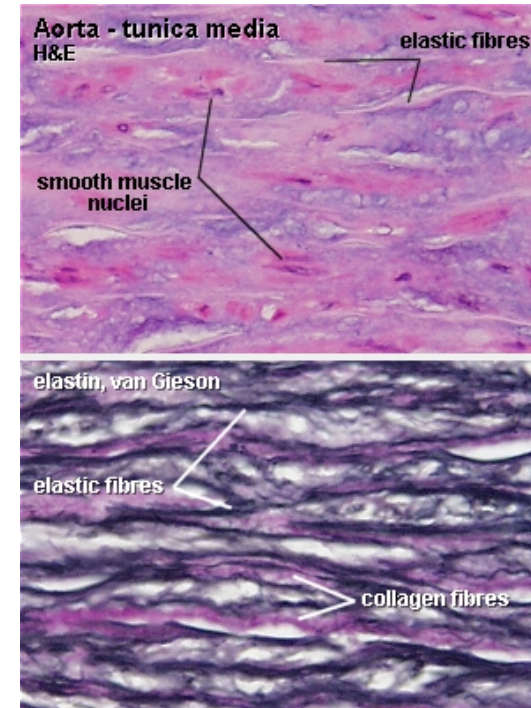
- Aorta je elastická tepna



Repro: <http://www.lab.anhb.uwa.edu.au/mb140/corepages/vascular/vascular.htm>

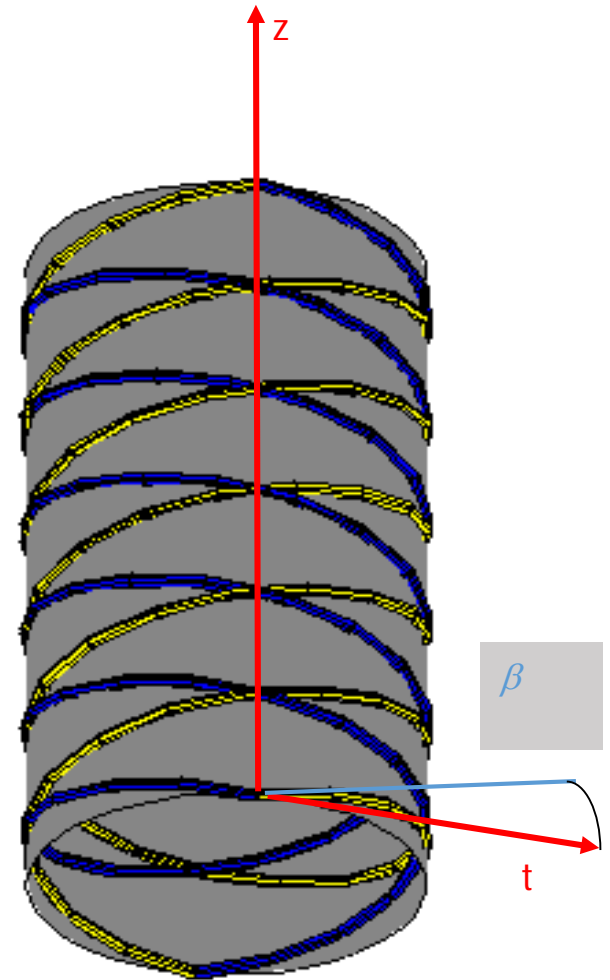
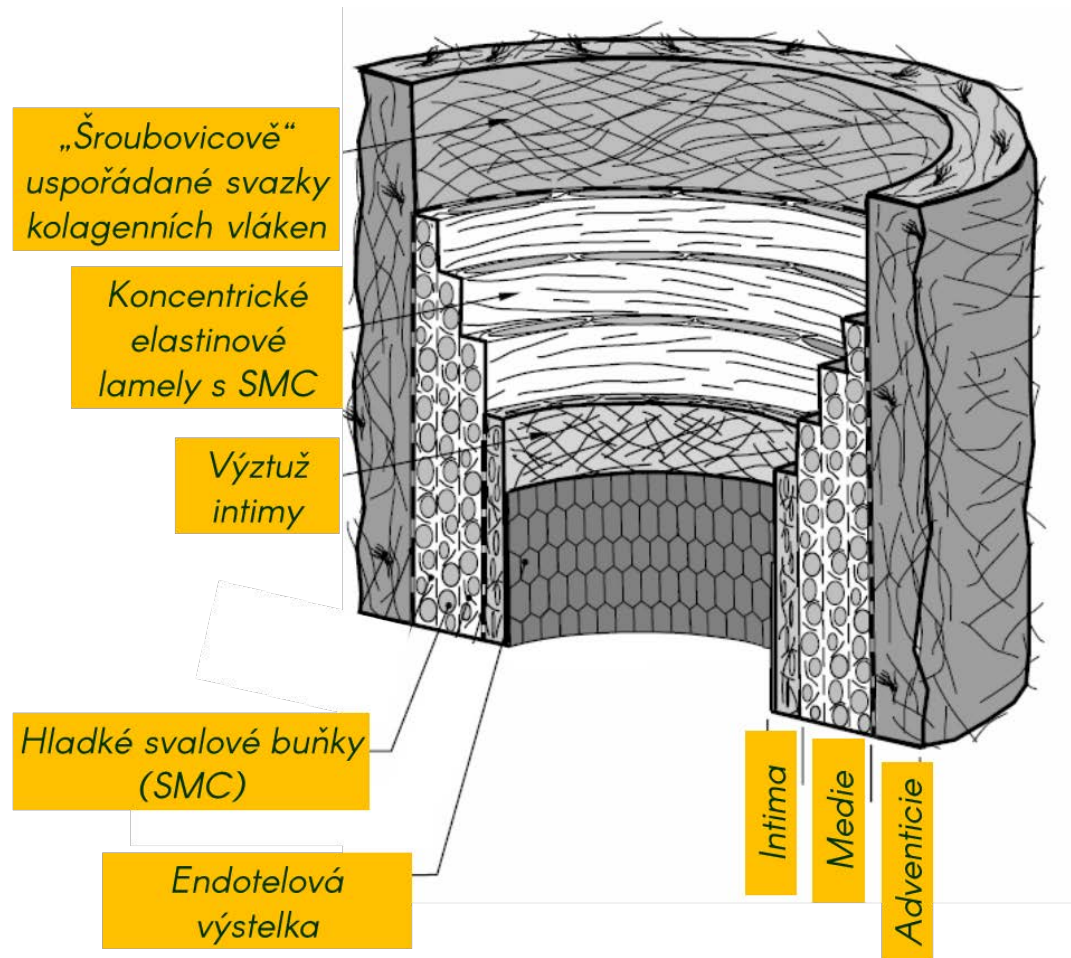


Repro: http://php.med.unsw.edu.au/embryology/images/a/ae/Artery_histology_16.jpg

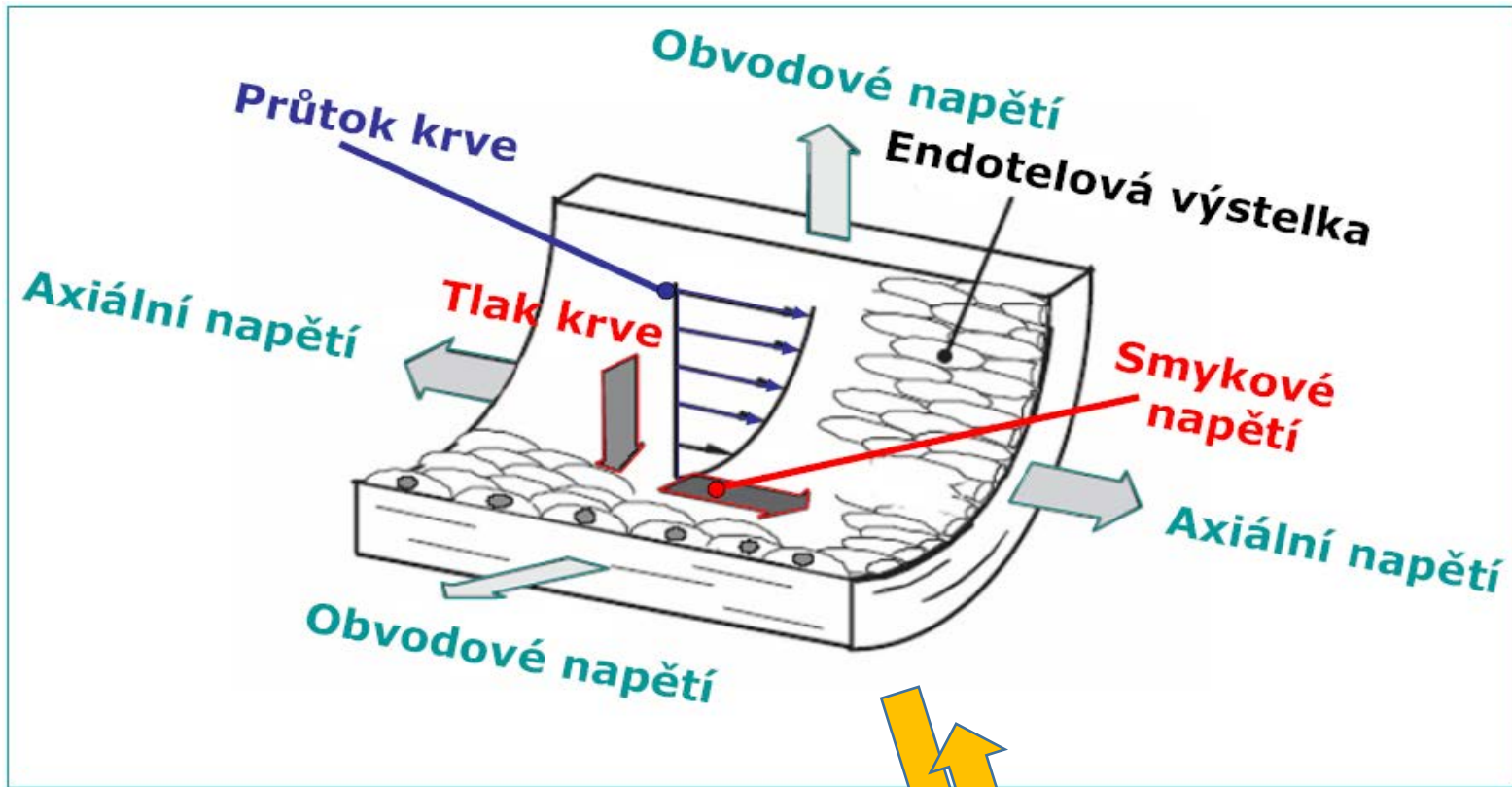


Břišní aorta: anatomie

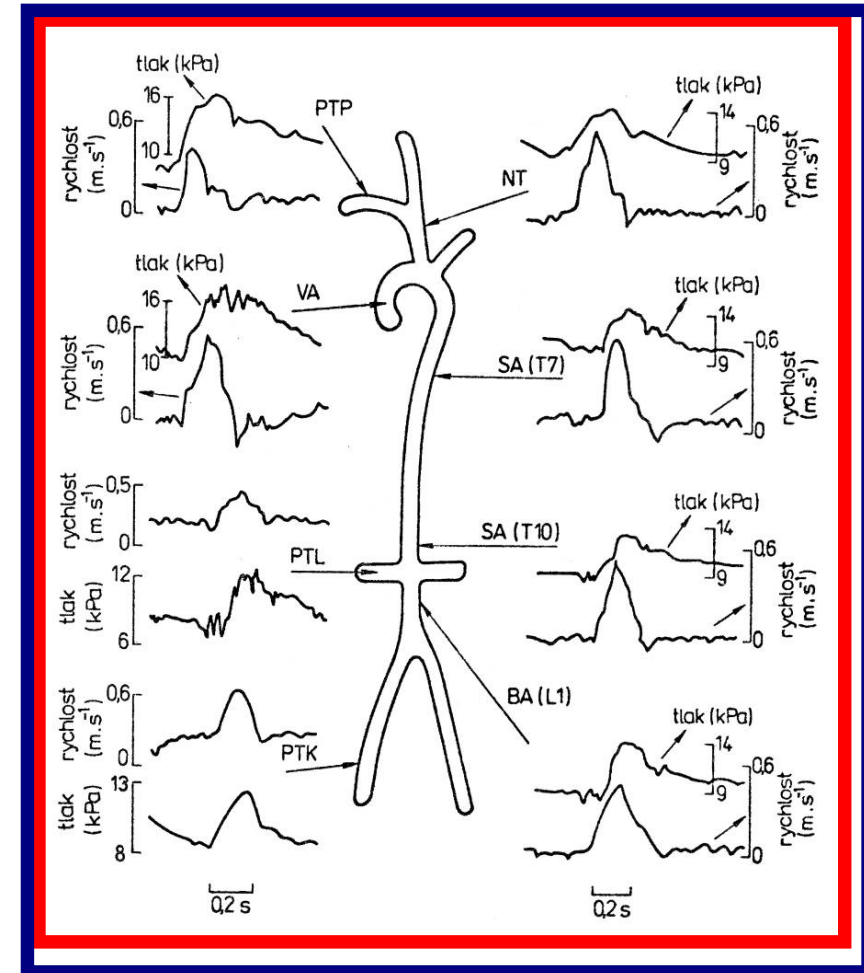
- Aorta je elastická tepna



Mechanická interakce

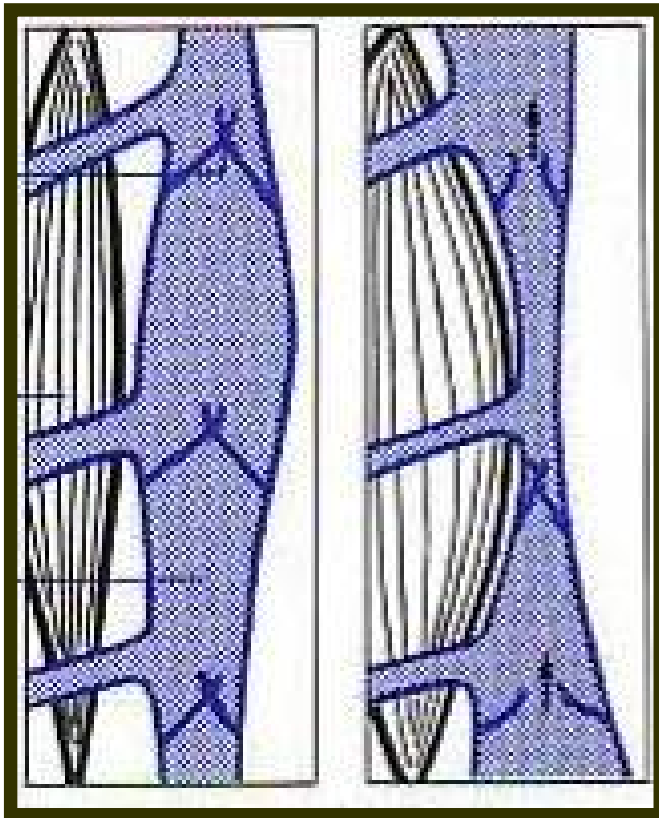


Tepelná výměna

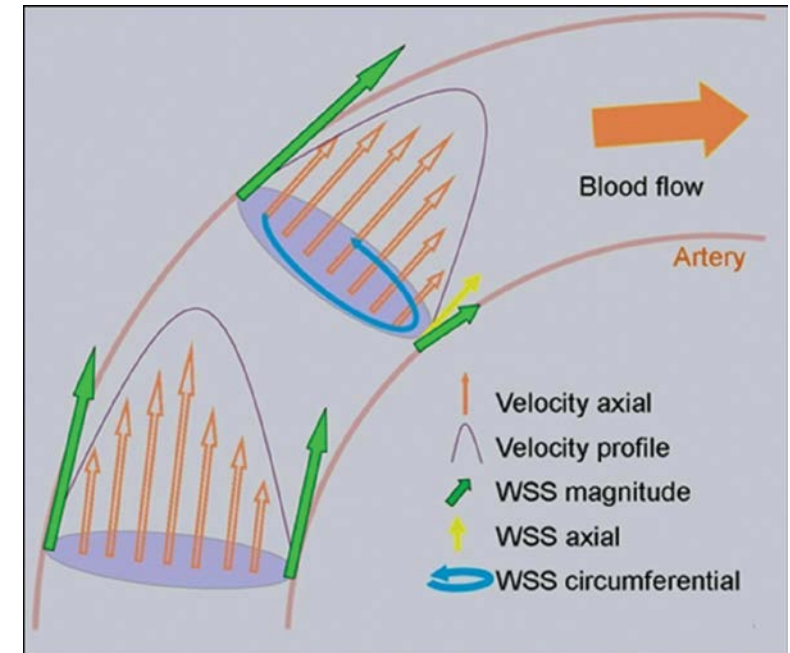


Mechanická interakce

- Silová interakce obecně neprobíhá jen vnitřním tlakem



Stlačení žilní stěny
kosterním svalem
(svalová pumpa)



Smykové napětí na vnitřní
stěně tepny nemusí být jen

τ_{zr} ale i $\tau_{\theta r}$

Mechanická interakce

- Podélné předpětí tepen

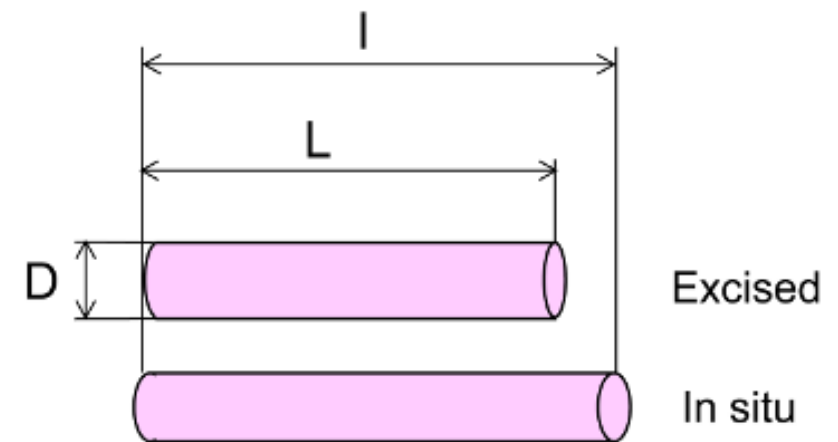
Břišní aorta
in situ



Břišní aorta
ex situ

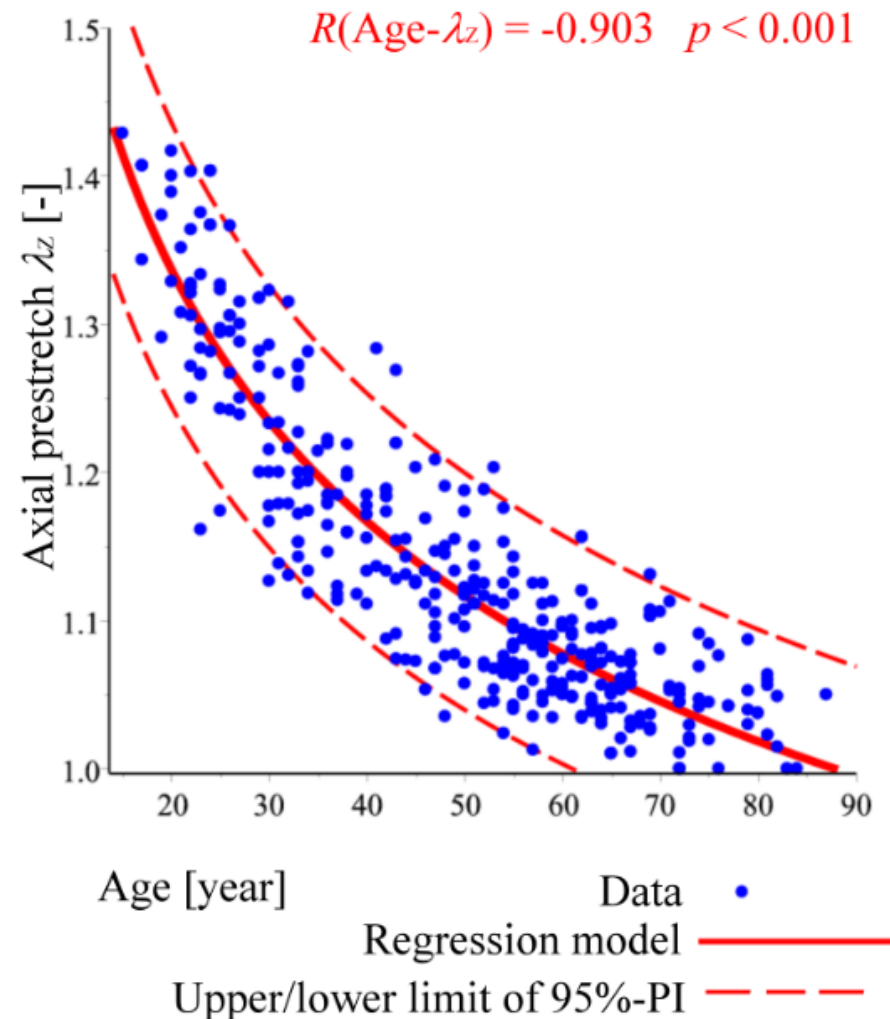


$$\lambda_{zZ}^{ini} = \frac{l}{L} = \frac{L + \Delta L}{L}$$

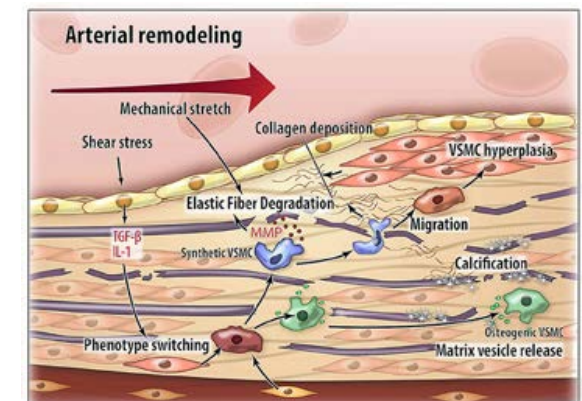
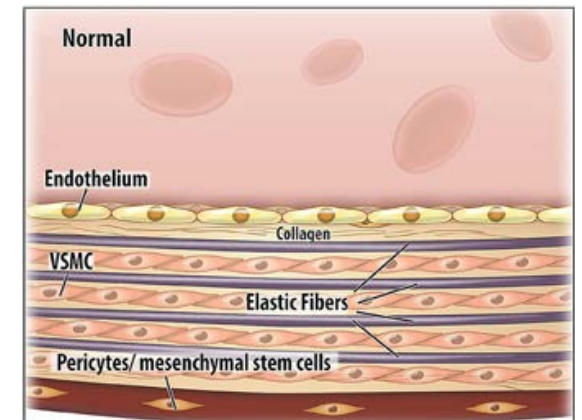


Mechanická interakce

- Podélné předpětí břišní aorty vs. stáří



Akumulace poškození kalcifikací a proteolýzou, suboptimální remodelace → AGING



Výpočtový model 2D

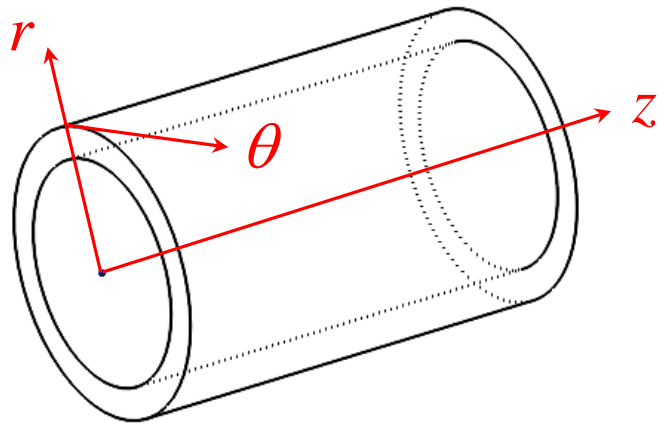
- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)

Předpoklady modelu:

- Geometrie: válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezují natočení a radiální posuv
- Zatížení: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená do průřezu
- Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsaný hustotou deformační energie W
- Posuvy a deformace: velké
- Napjatost: 2D homogenní
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

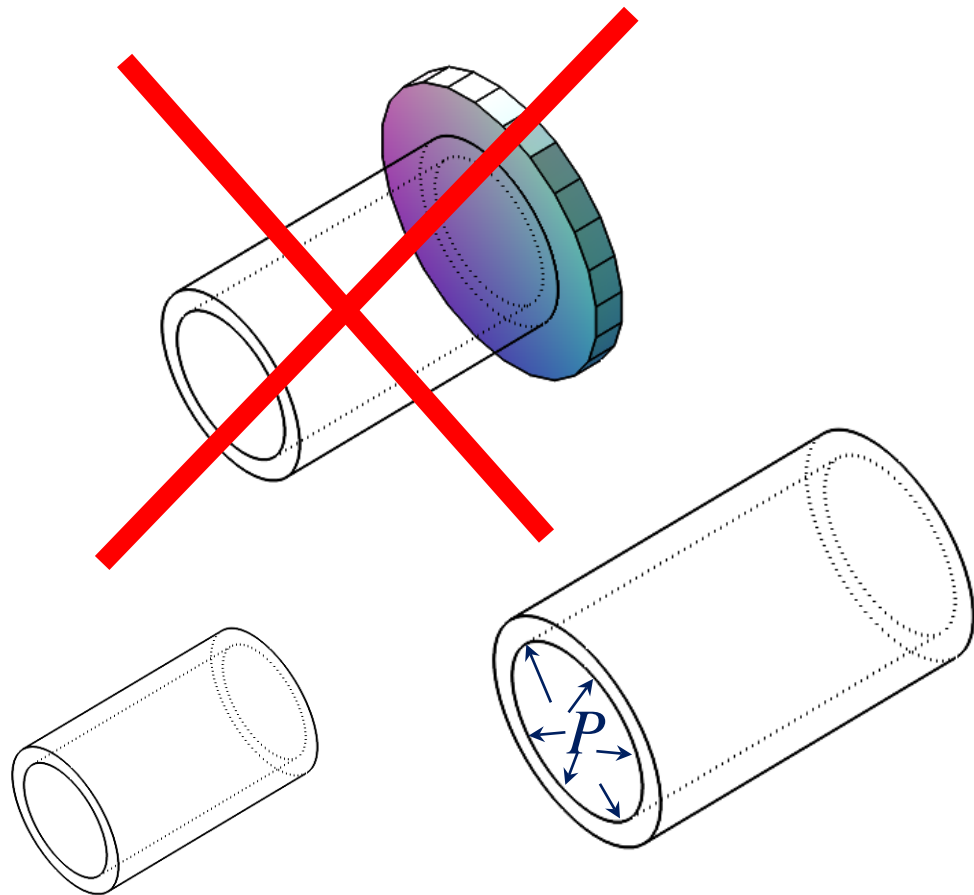
- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)



- **Geometrie:** válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezují natočení a radiální posuv
- Zatížení: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená do průřezu
- Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsáný hustotou deformační energie W
- Posuvy a deformace: velké
- Napjatost: 2D homogenní
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

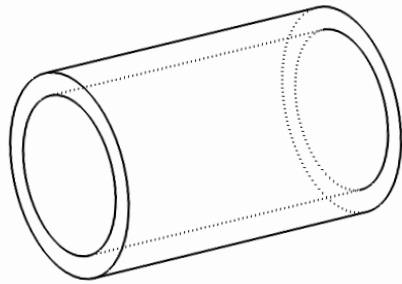
- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)



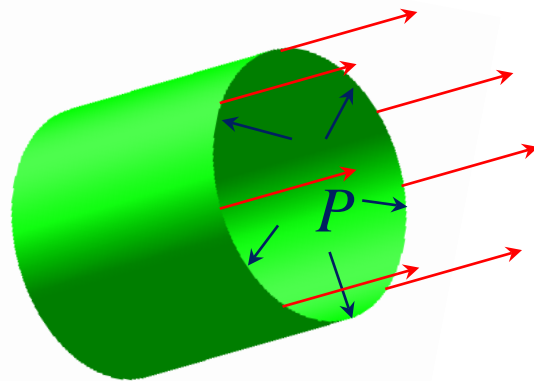
- Geometrie: válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezuji natočení a radiální posuv
- Zatížení na střední ploše: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená po obvodu
- Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsáný hustotou deformační energie W
- Posuvy a deformace: velké
- Napjatost: 2D homogenní
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)



$$F = 2\pi r f$$



- Geometrie: válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezují natočení a radiální posuv
- Zatížení na střední ploše: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená po obvodu
- Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsany hustotou deformační energie W
- Posuvy a deformace: velké
- Napjatost: 2D homogenní
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)

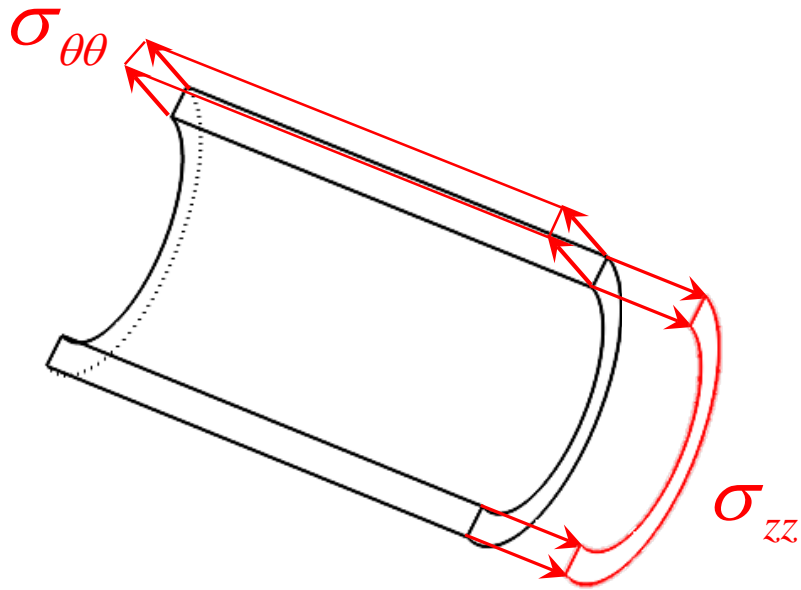
$$W = \frac{c_1}{2} \left(e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{RR}^2 + E_{ZZ}^2)} - 1 \right)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}$$

- Geometrie: válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezují natočení a radiální posuv
- Zatížení na střední ploše: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená po obvodu
- **Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsaný hustotou deformační energie W**
- Posuvy a deformace: velké
- Napjatost: 2D homogenní
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)

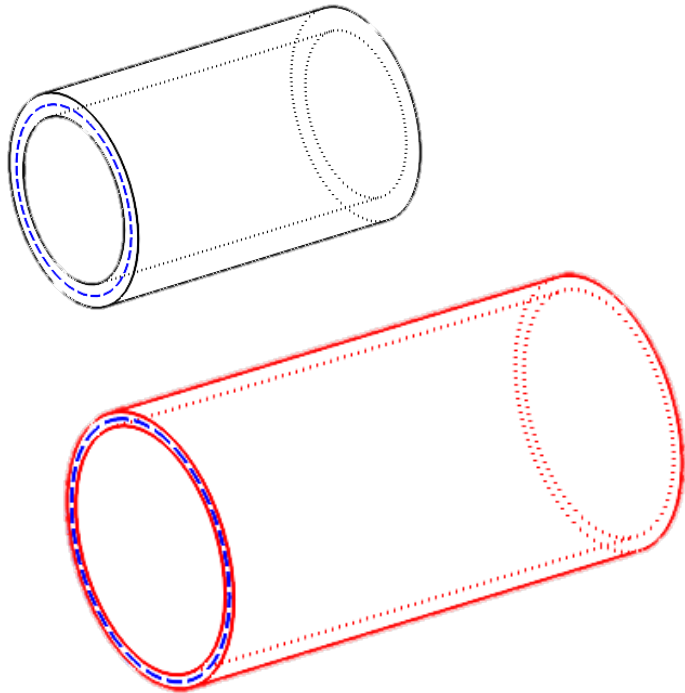


$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0$$

- Geometrie: válec $R \gg H$
- Vazby: (1) působí na střední ploše, (2) neomezují natočení a radiální posuv
- Zatížení na střední ploše: (1) vnitřní tlak, (2) axiální síla rovnoměrně rozprostřená po obvodu
- Materiál: nestlačitelný, nelineární a anizotropní popsáný hustotou deformační energie W
- Posuvy a deformace: velké
- **Napjatost: 2D homogenní**
- Deformace: 3D homogenní

Výpočtový model 2D

- Tenkostěnná válcová skořepina (membrána)



- **Deformace: 3D homogenní**
Referenční konfigurace:
 R, H, L
Zdeformovaná konfigurace:
 r, h, l

$$h = \lambda_{rR} H$$

$$r = \lambda_{\theta\Theta} R$$

$$z = \lambda_{zZ} Z$$

Výpočtový model 2D

- Tenzorový popis deformace

$$\begin{aligned} h &= \lambda_{rR} H \\ r &= \lambda_{\theta\Theta} R \\ z &= \lambda_{zZ} Z \end{aligned} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h}{H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{Z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{pmatrix} E_{RR} & 0 & 0 \\ 0 & E_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zZ} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Výpočtový model 2D

- Kinematická podmínka nestlačitelnosti $v = V$

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} = \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} = 1$$

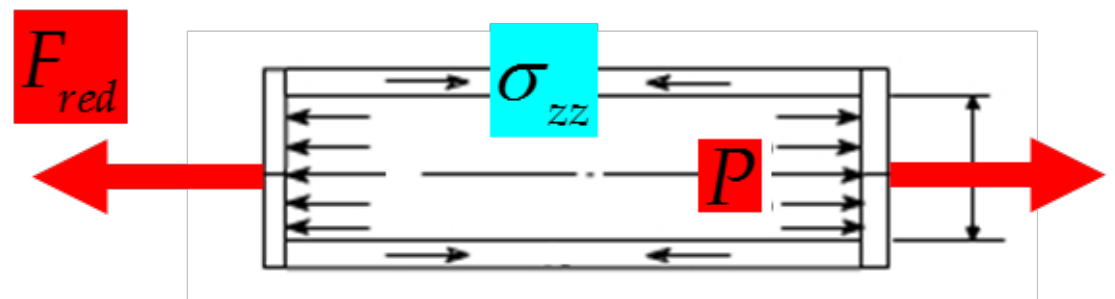
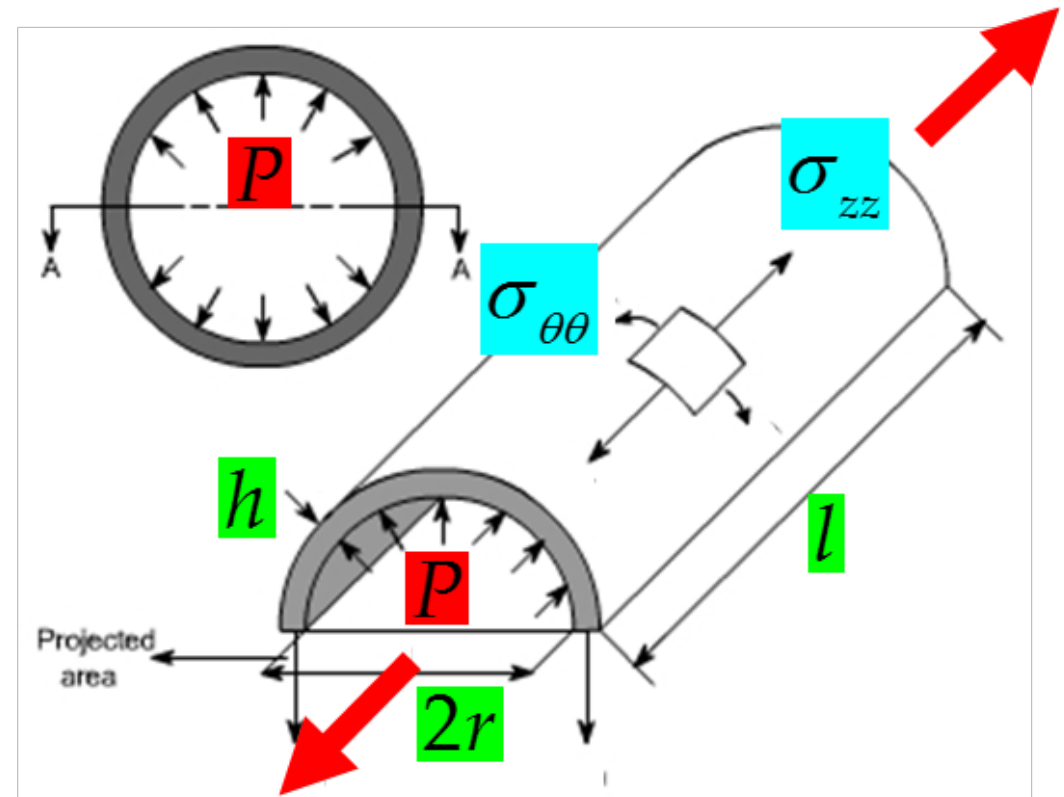
Výpočtový model 2D

- Silová rovnováha

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\sigma_{rr} = 0$$



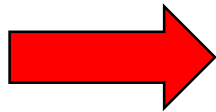
Výpočtový model 2D

- Finální soustavu rovnic popisující nafukování a protahování uzavřené tenkostěnné nádoby získáme dosazením z konstitutivních rovnic

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p$$

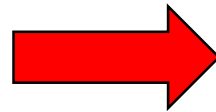
$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p$$



$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\sigma_{rr} = 0$$



$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{rP}{h}$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = 0$$

Výpočtový model 2D

- Úpravy soustavy rovnic

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\theta} \lambda_{zZ} = 1$$

$$h = \lambda_{rR} H$$

$$r = \lambda_{\theta\theta} R$$

$$\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} - p = \frac{rP}{h}$$

$$\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = 0$$

$$\left[\lambda_{\theta\theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}}$$

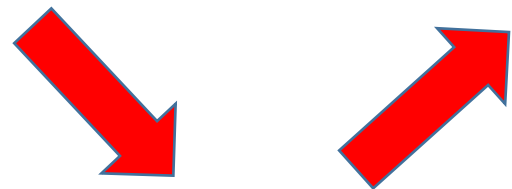
$$- \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}}$$

$$= \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H} P$$

$$\left[\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}}$$

$$- \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}}$$

$$= \lambda_{\theta\theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{2H} P + \frac{\lambda_{zZ}}{2\pi RH} F_{red}$$



$$p = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}}$$

Výpočtový model 2D

- 2 rovnice pro dvě neznámé
např.: volím P , F_{red} a vypočtu $\lambda_{\theta\Theta}$, λ_{zZ}

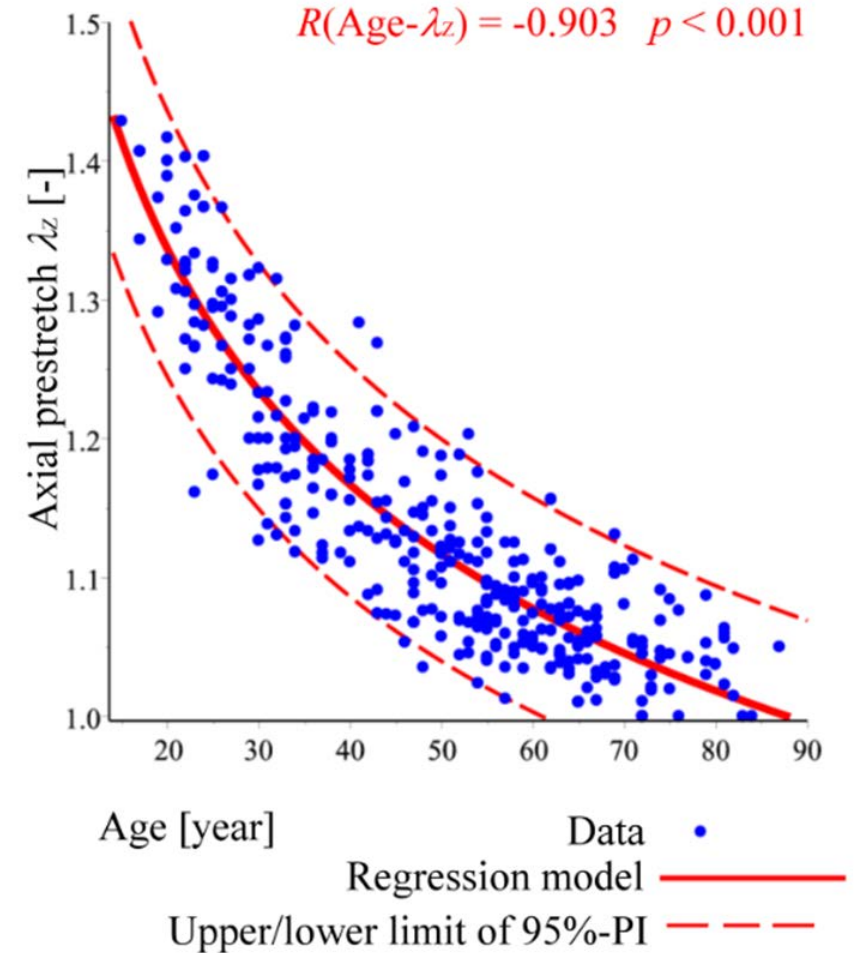
$$\left[\lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{H} P$$

$$\left[\lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} - \left[\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} \right]_{\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}} = \lambda_{\theta\Theta}^2 \lambda_{zZ} \frac{R}{2H} P + \frac{\lambda_{zZ}}{2\pi RH} F_{red}$$

napětí zpětně dopočtu z konstitutivních rovnic
nebo rovnic rovnováhy, z geometrických rovnic
určím zdeformované r a h

Výpočtový model 2D

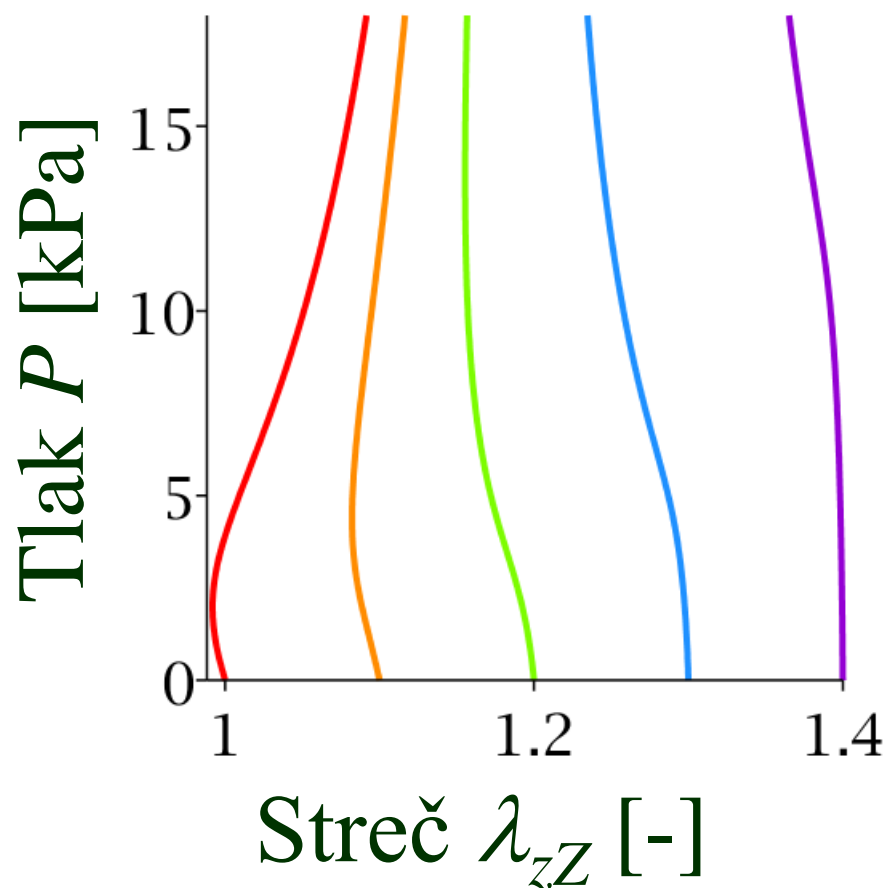
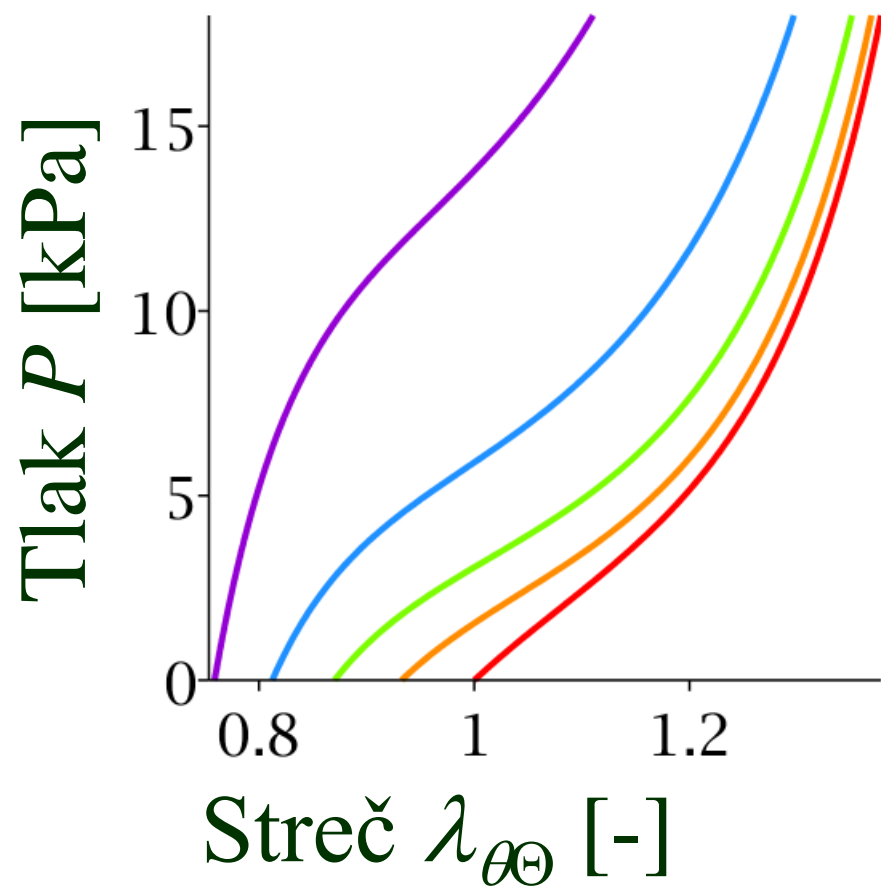
- Prozkoumejme, jaký vliv má podélné předpětí na mechanickou odezvu břišní aorty při jejím nafukování



Výpočtový model 2D

- Volíme $\lambda_{zZ}^{ini} = 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$
pro $\lambda_{zZ}^{ini} = 1$ je $F_{red} = 0$
v ostatních případech ho budeme muset vypočítat
- Pro W volíme $c_1 = 14.7$ kPa, $c_2 = 3.04$, $c_3 = 7.38$,
 $R_i = 5.3$ mm, $H = 1.22$ mm
pro muže stáří 38 let podle Labrosse a kol. 2013 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S175161611200210X>
- Tlak volíme $P = 0.1(i - 1)$ kPa, kde $i = 1..181$

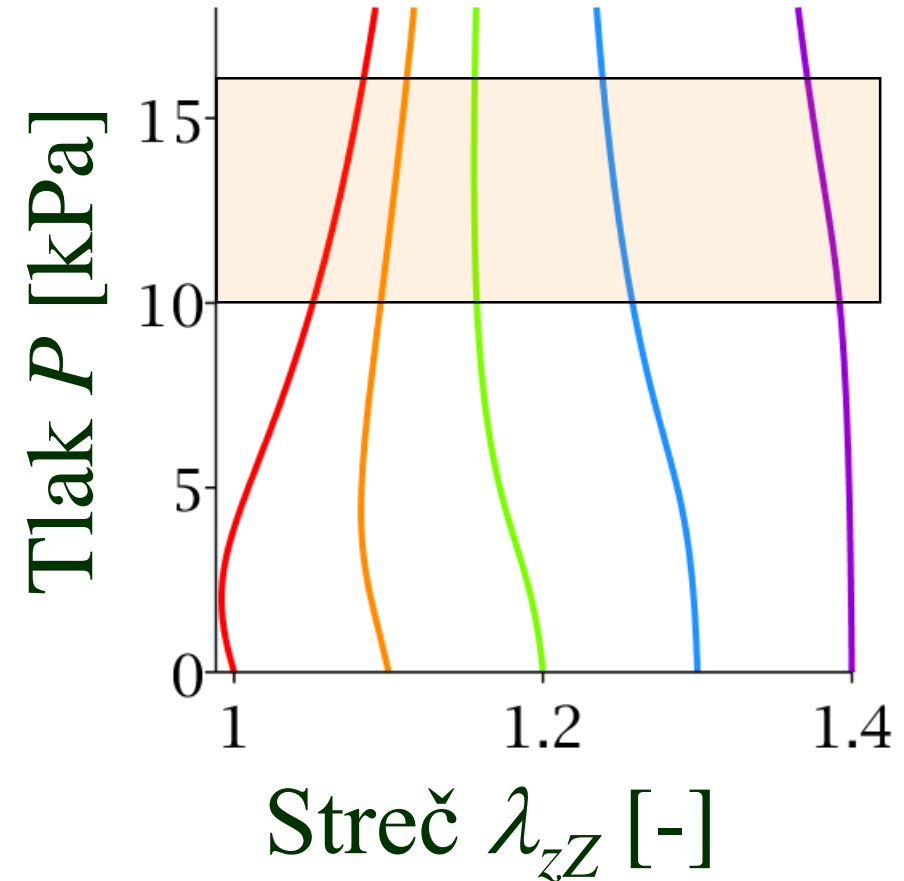
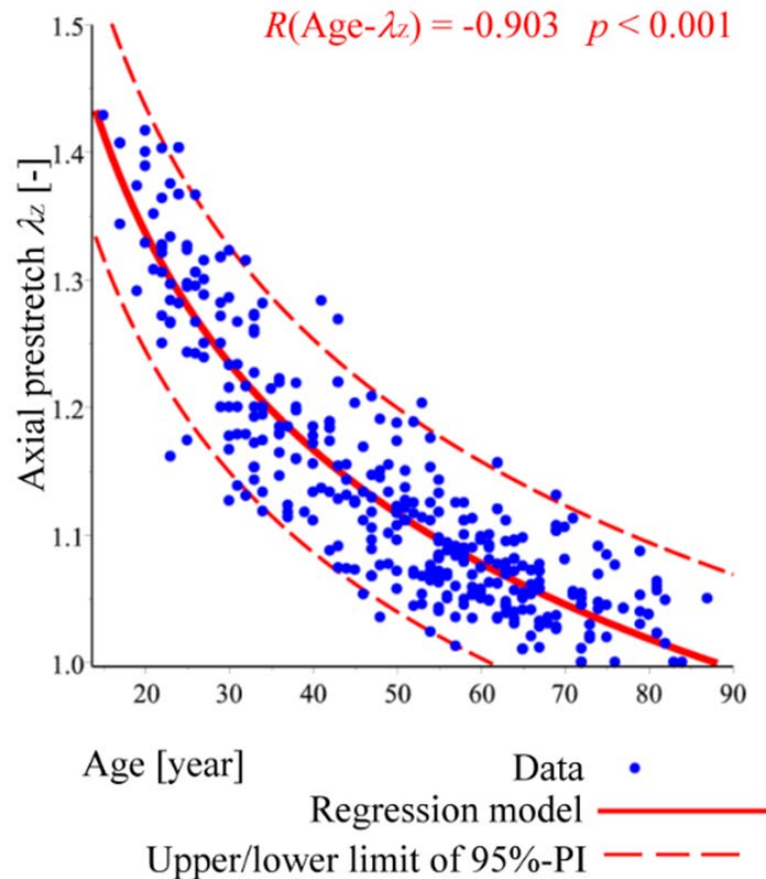
Výpočtový model 2D



$F_{red}(\lambda_{zZ} = 1) = 0 \text{ N}$
 $F_{red}(\lambda_{zZ} = 1.1) = 0.74 \text{ N}$
 $F_{red}(\lambda_{zZ} = 1.2) = 2.2 \text{ N}$
 $F_{red}(\lambda_{zZ} = 1.3) = 6.4 \text{ N}$
 $F_{red}(\lambda_{zZ} = 1.4) = 22 \text{ N}$

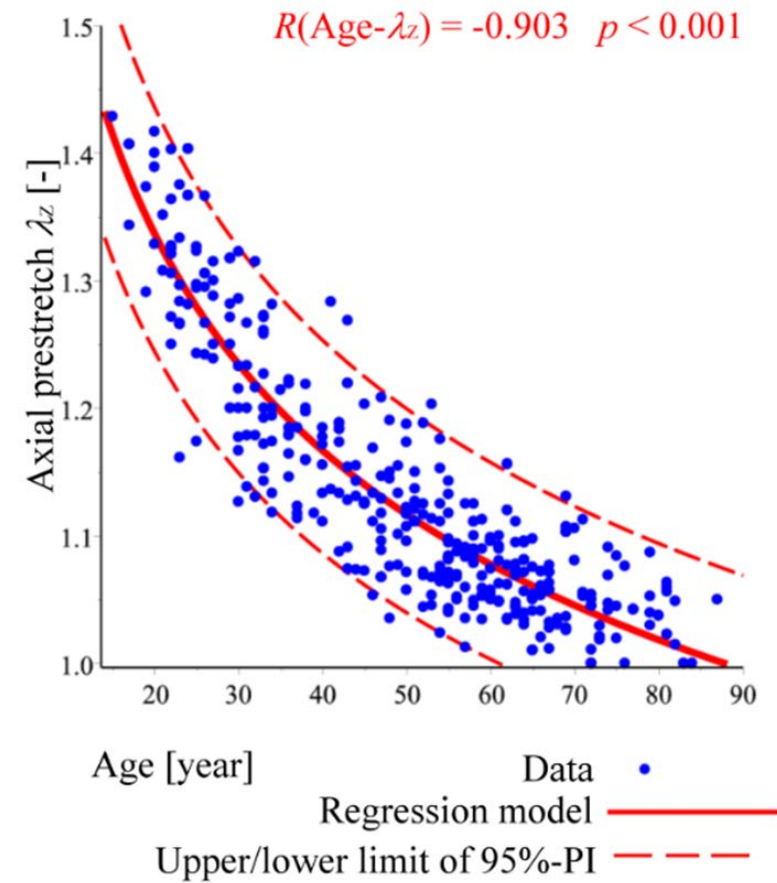
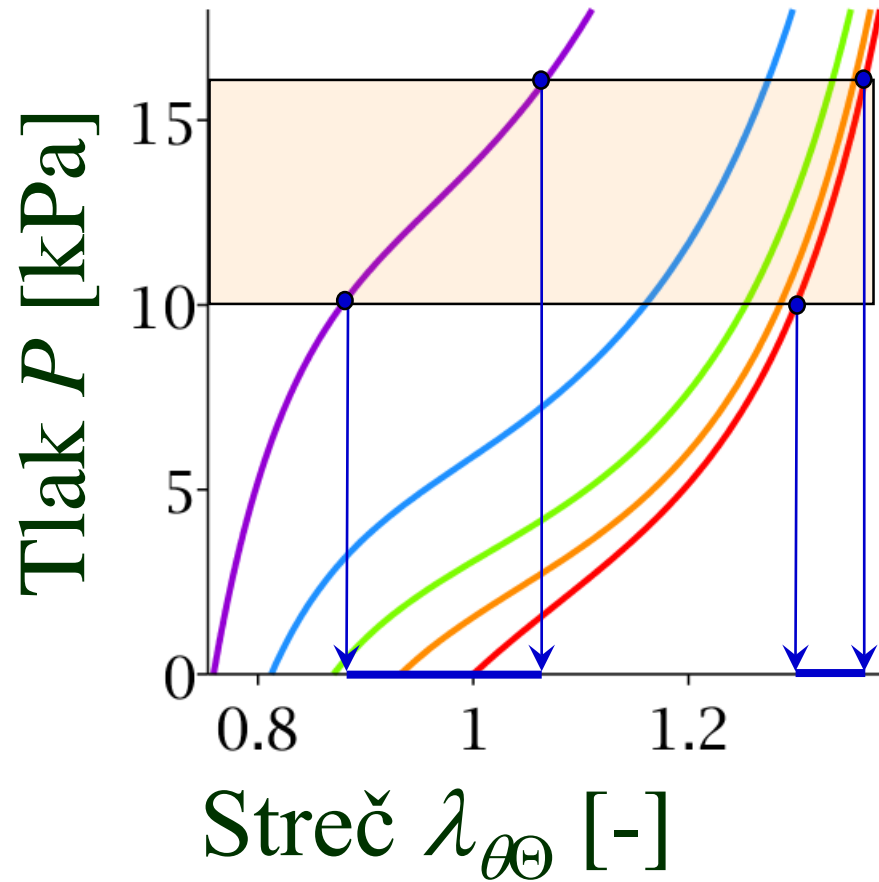
Výpočtový model 2D

- Důsledky podélného předpětí:
minimalizace variace podélné deformace

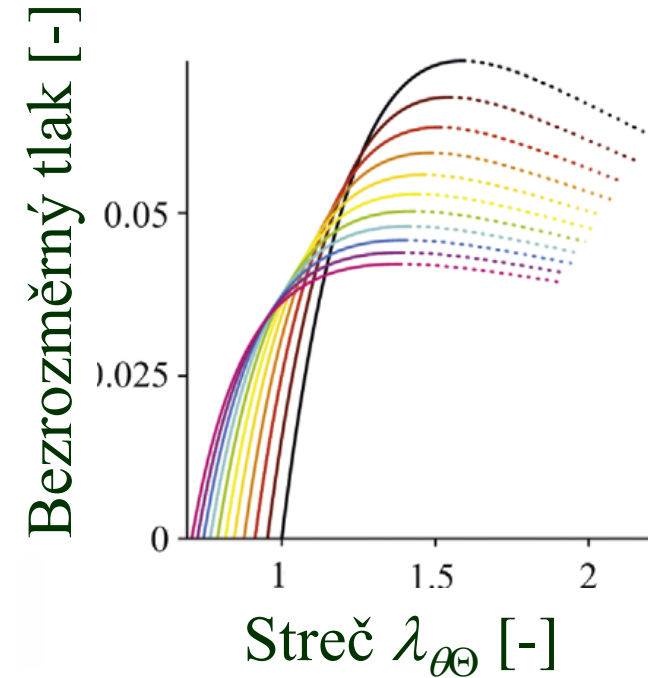
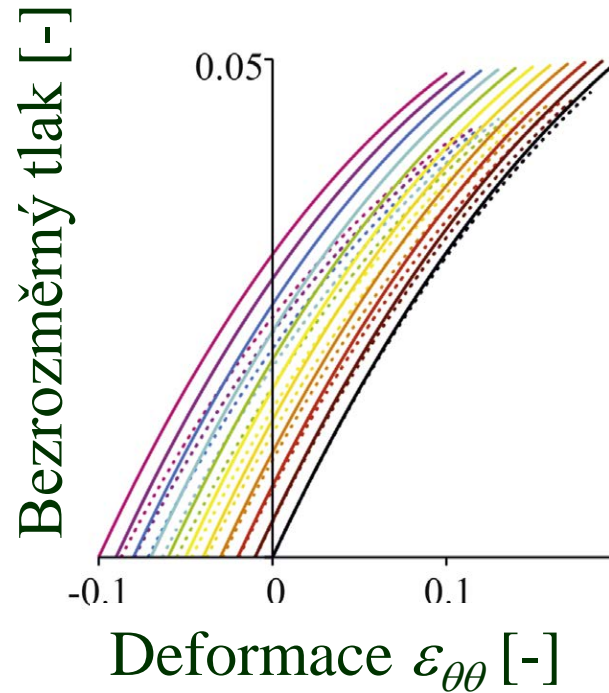
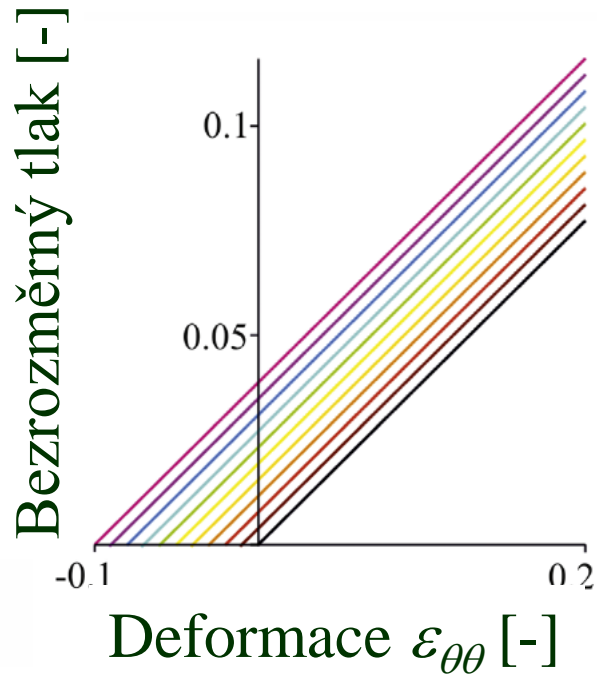


Výpočtový model 2D

- Důsledky podélného předpětí
zvýšení obvodové roztažnosti tepny



Výhodnost předpětí je důsledek nelinearity



Lineární pružnost I. řádu

- nestlačitelný materiál
- malé posuvy
- malé deformace
- hookeovský materiál

Lineární pružnost II. řádu

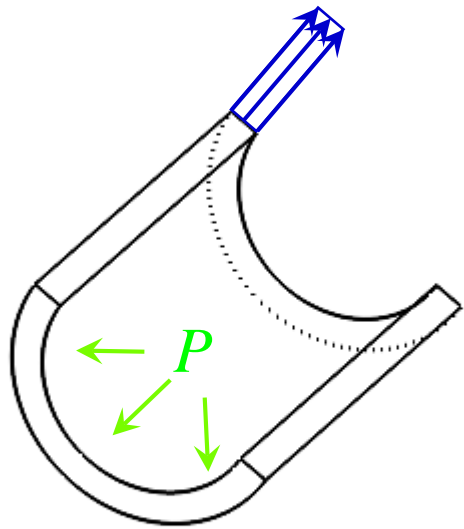
- nestlačitelný materiál
- velké posuvy
- malé deformace
- linearizovaný neo-Hooke

Nelineární pružnost

- nestlačitelný materiál
- velké posuvy
- velké deformace
- neo-Hooke materiál

Výpočtový model 2D vs 3D

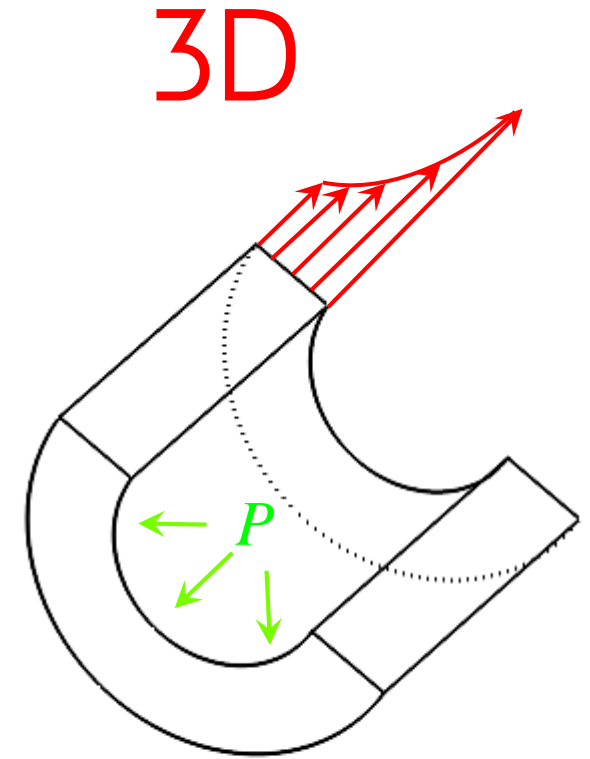
- Skořepina s homogenní membránovou napjatostí



2D

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = P \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right)$$

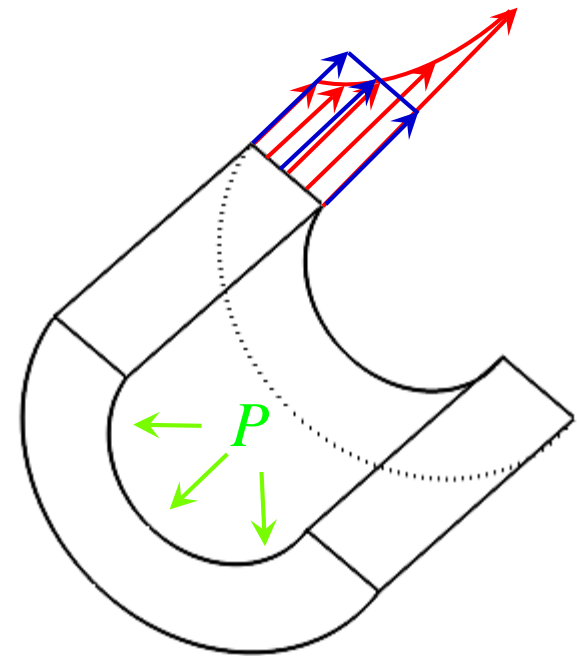


- Silnostěnná nádoba s nehomogenním polem napjatosti

Výpočtový model 2D vs 3D

- Pokud se stavová veličina mění po tloušťce stěny, skořepinový model je neadekvátní, protože veličiny homogenizuje a soustředí do střední plochy

2D	3D
$\sigma_{\theta\theta} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} = konst.$	$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$



Výpočtový model 2D vs 3D

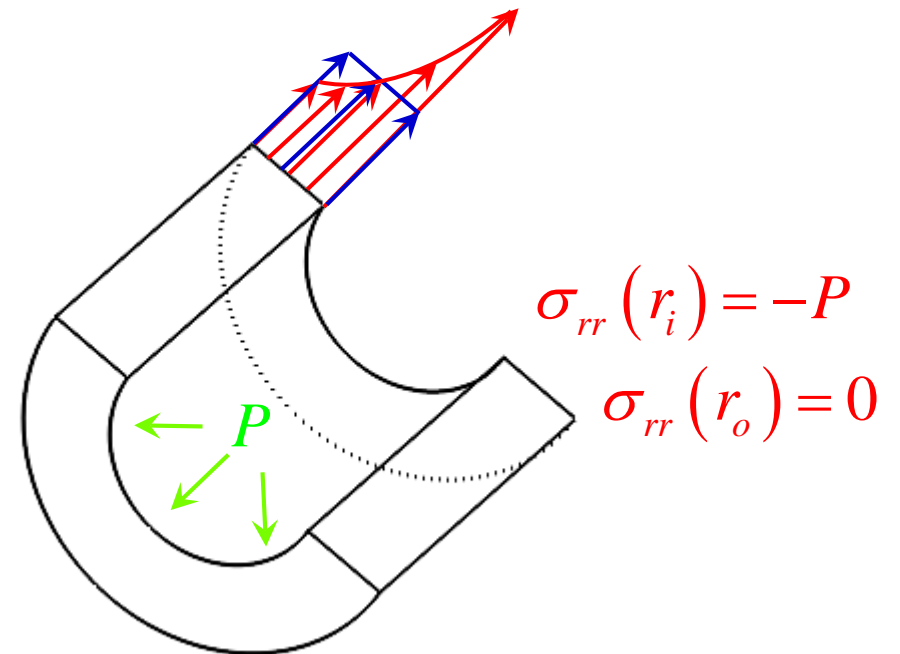
- Pokud se stavová veličina mění po tloušťce stěny, skořepinový model je neadekvátní, protože veličiny homogenizuje a soustředí do střední plochy

$$2D \quad \sigma_{rr} = \bar{\sigma}_{rr} = konst.$$

$$|\sigma_{rr}| \ll |\sigma_{\theta\theta}| \Rightarrow \sigma_{rr} \left(\bar{r} = \frac{r_e + r_i}{2} \right) = \bar{\sigma}_{rr} = 0$$

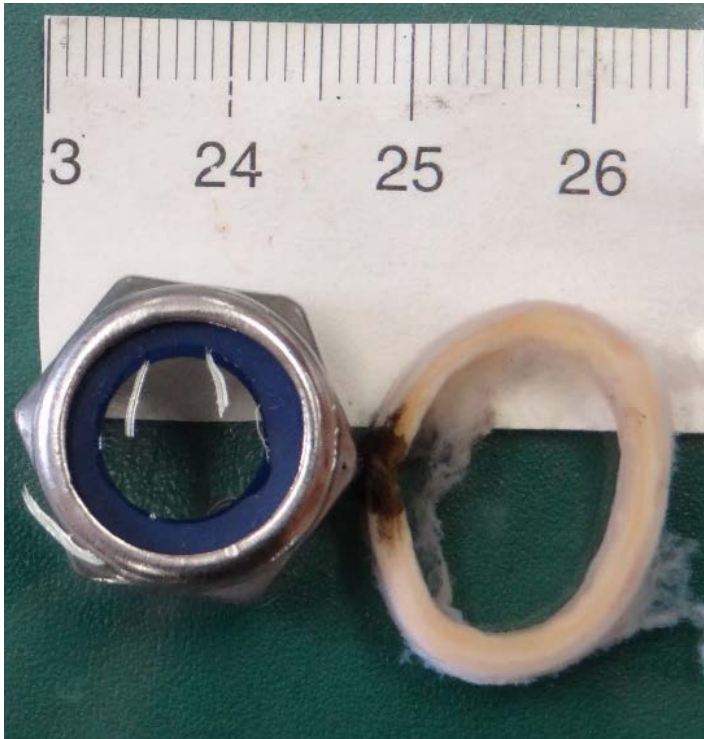
$$\sigma_{rr} \left(\bar{r} = \frac{r_e + r_i}{2} \right) = \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}(r_i) + \sigma_{rr}(r_o)}{2} = -\frac{P}{2}$$

$$3D \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$$



Výpočtový model 3D

- (obvodové) zbytkové napětí a zbytková deformace



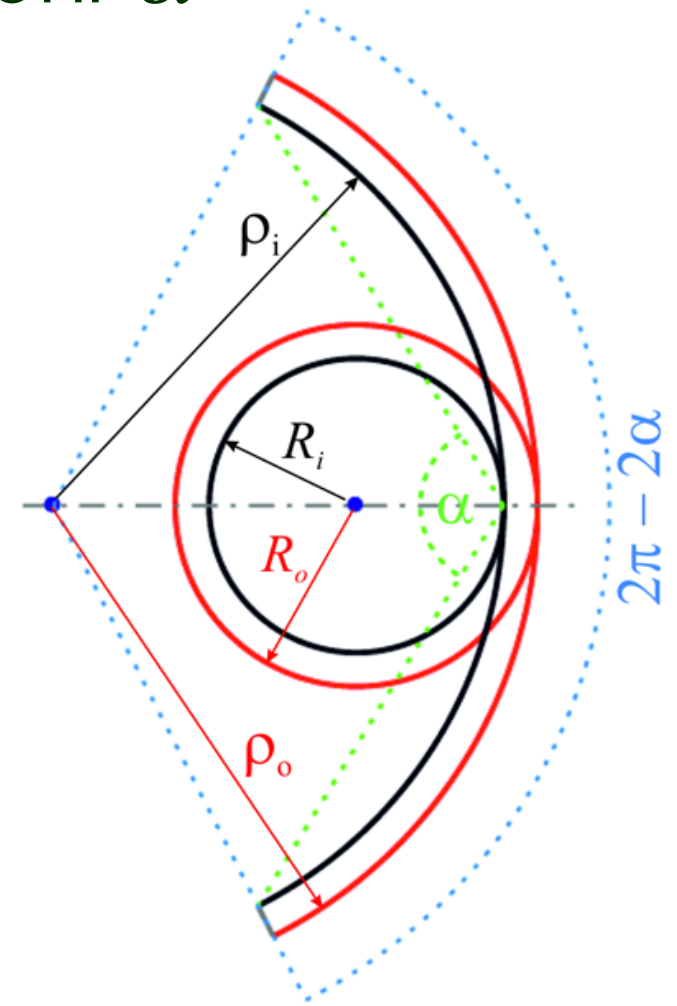
Zbytkově napjatý stav

Beznapěťový stav



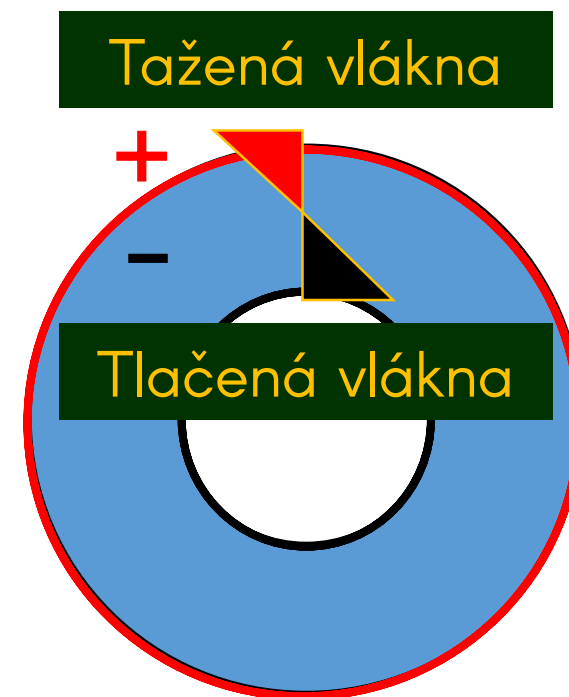
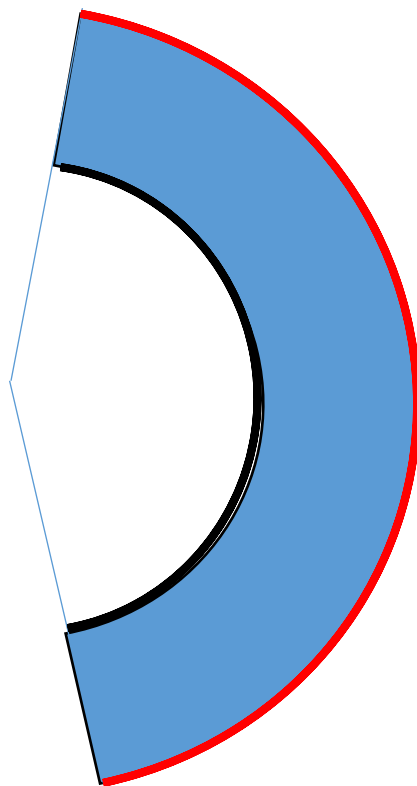
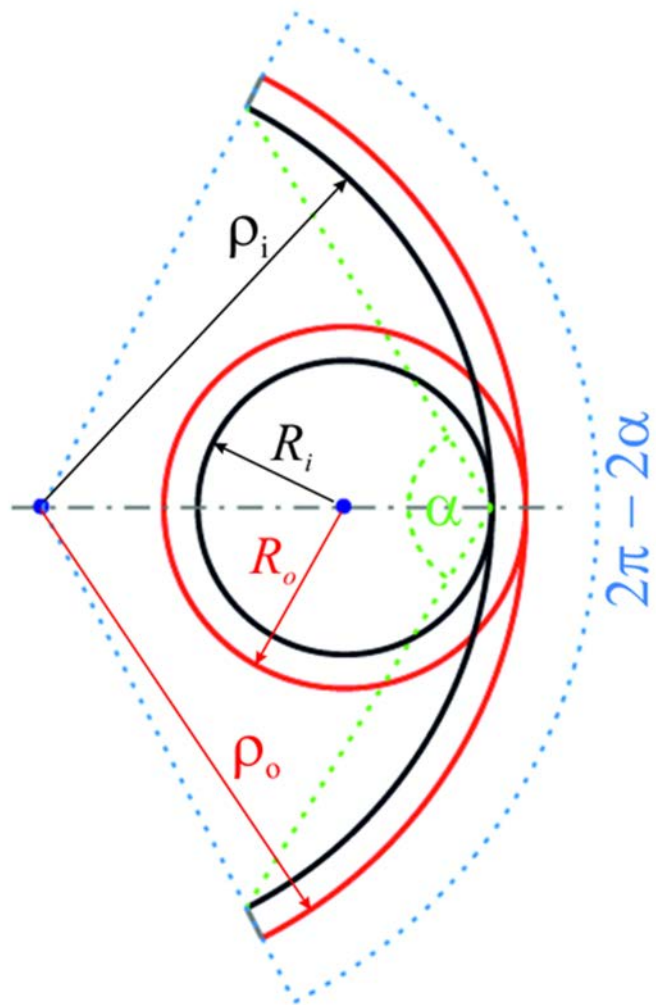
Výpočtový model 3D

- Zbytková deformace – úhel rozevření α



Výpočtový model 3D

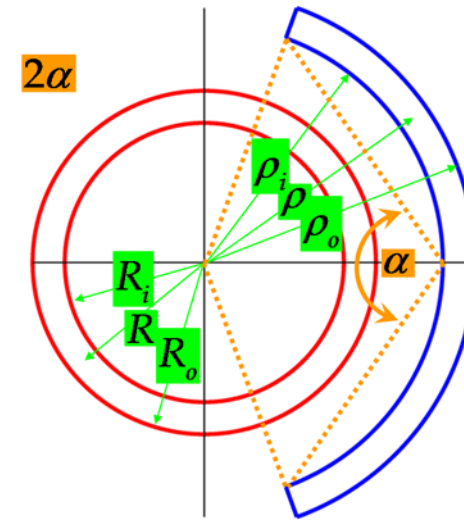
- Zbytková deformace – zakřivený ohýbaný prut



Výpočtový model 3D

- Kinematika ve dvou krocích
 (1) uzavření $f_1: (\rho, \phi, \zeta) \longrightarrow (R, \Theta, Z)$

$$f_1: \xi \longrightarrow X$$



$$R = R(\rho)$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{2\pi - 2\alpha} \phi$$

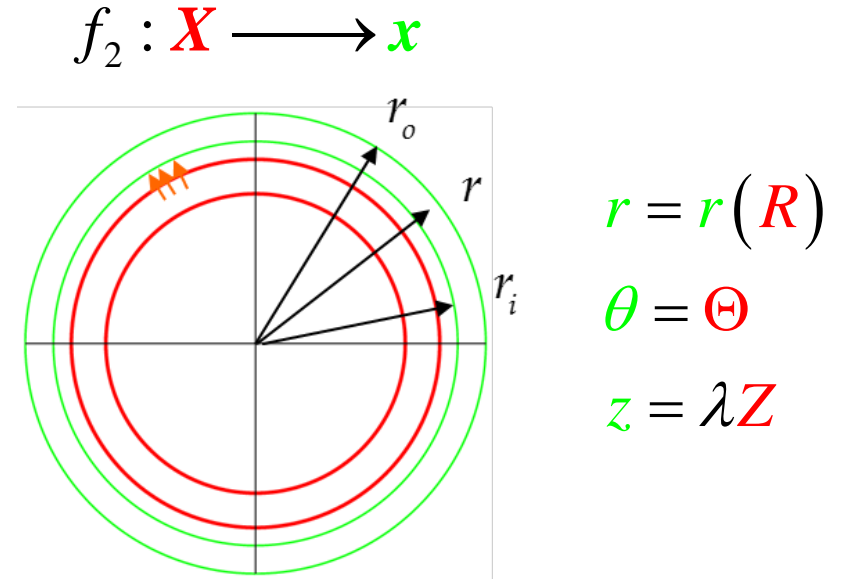
$$Z = \delta \zeta$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{df_1(\xi)}{d\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial R}{\partial \zeta} \\ \frac{R}{1} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} & \frac{R}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} & \frac{R}{1} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial Z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \phi} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(\rho)}{\rho} \frac{\pi}{\pi - \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{R\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\Theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Z\zeta} \end{pmatrix}$$

Výpočtový model 3D

- Kinematika ve dvou krocích
(2) nafouknutí, natažení

$$f_2 : (R, \Theta, Z) \longrightarrow (r, \theta, z)$$



$$\mathbf{F}_2 = \frac{df_2(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{r}{1} \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & \frac{r}{1} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(R)}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r(R)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}$$

Výpočtový model 3D

- Výsledná kinematika $f : (\rho, \phi, \zeta) \longrightarrow (r, \theta, z)$
skládání zobrazení $f = f_2 \circ f_1$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial r}{\partial \phi} & \frac{\partial r}{\partial \zeta} \\ \frac{r}{1} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} & \frac{r}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} & \frac{r}{1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r(\rho)}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi - \alpha}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z\zeta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{R\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\Theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Z\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z\zeta} \end{pmatrix}$$

Výpočtový model 3D

- Rovnice rovnováhy $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

Výpočtový model 3D

- Rovnice rovnováhy

pro $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{r\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z\zeta} \end{pmatrix}$ předpokládejme, že $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

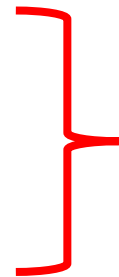
Výpočtový model 3D

- Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$



Splníme předpokladem, že

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, \theta, z) = \sigma_{rr}(r)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z) = \sigma_{\theta\theta}(r)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r, \theta, z) = \sigma_{zz}(r)$$



$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

Výpočtový model 3D

- Radiální rovnováha

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\sigma_{rr} = \frac{-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} dr$$

OP: $\sigma_{rr}(r_i) = -P \quad \wedge \quad \sigma_{rr}(r_o) = 0$

$$\int_{\sigma_{rr}(r_i)}^{\sigma_{rr}(r_o)} d\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r_o) - \sigma_{rr}(r_i) = 0 + P = P$$

$$\int_{\sigma_{rr}(r_i)}^{\sigma_{rr}(r_o)} d\sigma_{rr} = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

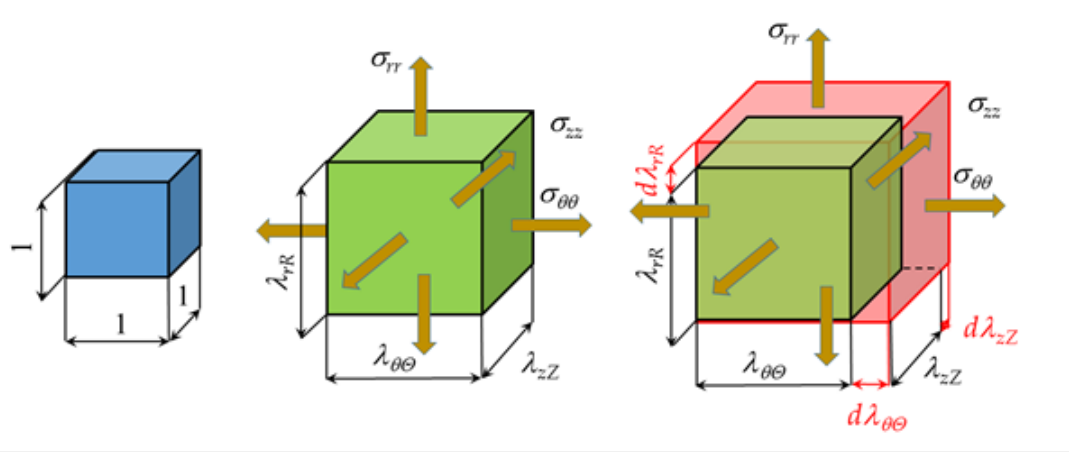
$$P = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

Výpočtový model 3D

- Aplikace nestlačitelnosti do napětí

přechod od $W = W(\lambda_{rR}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ})$ k $W = W(\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ}) = \hat{W}(\lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ})$

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} d\lambda_{rR} + \lambda_{rR} \lambda_{zZ} d\lambda_{\theta\Theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} d\lambda_{zZ} = 0$$



$$\lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} d\lambda_{rR} = -\lambda_{rR} \lambda_{zZ} d\lambda_{\theta\Theta} - \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} d\lambda_{zZ}$$

$$dW = \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} \sigma_{rr} d\lambda_{rR} + \lambda_{rR} \lambda_{zZ} \sigma_{\theta\theta} d\lambda_{\theta\Theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \sigma_{zz} d\lambda_{zZ}$$

$$dW = \lambda_{rR} \lambda_{zZ} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) d\lambda_{\theta\Theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) d\lambda_{zZ}$$

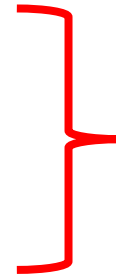
Výpočtový model 3D

- Aplikace nestlačitelnosti do napětí

přechod od $W = W(\lambda_{rR}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ})$ k $W = W(\lambda_{rR} = \lambda_{\theta\Theta}^{-1} \lambda_{zZ}^{-1}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ}) = \hat{W}(\lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ})$

$$dW = \lambda_{rR} \lambda_{zZ} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) d\lambda_{\theta\Theta} + \lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) d\lambda_{zZ}$$

$$d\hat{W} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} d\lambda_{\theta\Theta} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} d\lambda_{zZ}$$



$$\lambda_{rR} \lambda_{zZ} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}}$$

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}}$$

Výpočtový model 3D

- Aplikace nestlačitelnosti do napětí vede k nové formě zápisu konstitutivní rovnice pro nestlačitelný materiál

$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} \lambda_{zZ} = 1$$
$$\lambda_{rR} \lambda_{zZ} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}}$$
$$\lambda_{rR} \lambda_{\theta\Theta} (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}}$$



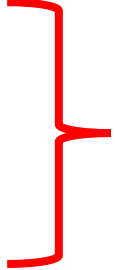
$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}}$$
$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}}$$

vs.

$$\sigma_{rr} = \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} - p$$
$$\sigma_{zz} = \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p$$

Výpočtový model 3D

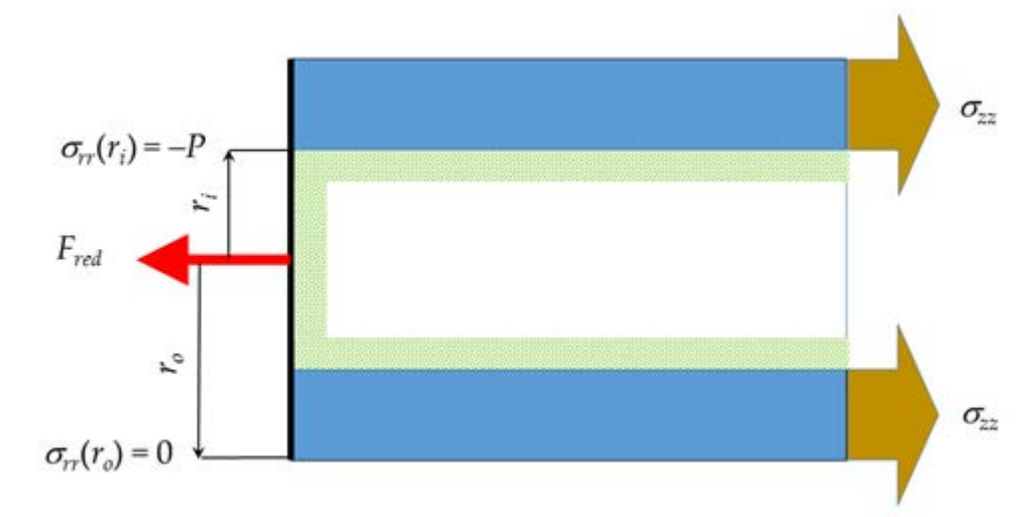
- Radiální rovnováha

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} dr$$
$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}}$$

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{dr}{r}$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r)$$



$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{zz} r dr$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}}$$

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{zz} r dr$$

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \left(\sigma_{rr} + \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} \right) r dr = -\pi r_i^2 P + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr =$$

$$= -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} 2r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

$$\frac{dr^2}{dr} = 2r$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha

uvažme, že

$$-\pi r_i^2 P = \pi r_i^2 \sigma_{rr}(r_i) - \pi r_o^2 \sigma_{rr}(r_o) = -\pi \left[r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o}$$

takže

$$F_{red} = -\pi r_i^2 P + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi \left[r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha

uvažme, že

$$\pi \left[r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr + \pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr \quad \Rightarrow \quad -\pi \left[r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr$$

takže

$$F_{red} = -\pi \left[r^2 \sigma_{rr}(r) \right]_{r_i}^{r_o} + \pi \int_{r_i}^{r_o} \sigma_{rr} \frac{dr^2}{dr} dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha

uvažme, že

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r}$$

takže

$$\begin{aligned} F_{red} &= -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{d\sigma_{rr}}{dr} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} r^2 dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = \\ &= -\pi \int_{r_i}^{r_o} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr \end{aligned}$$

Výpočtový model 3D

- Axiální rovnováha má tvar

$$F_{red} = -\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} r dr + 2\pi \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} r dr = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left(2\lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} \right) r dr$$

Výpočtový model 3D

- Výpočtový model silnostěnné nádoby můžeme použít jak při zavírání kroužku, tak při nafukování a protahování trubice

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \frac{dr}{r}$$

$$F_{red} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left(2\lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\theta\theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\theta\theta}} \right) r dr$$

Dvě nelineární rovnice s numerickou integrací pro dvě neznámé.
Volím např. P a F_{red} a vypočtu $\lambda_{\theta\theta}$ a λ_{zZ} .

Výpočtový model 3D

- Výpočtový model silnostěnné nádoby
břišní aorta: muž 38 let

$$W = \frac{c_1}{2} \left(e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3 (E_{RR}^2 + E_{ZZ}^2)} - 1 \right)$$

$$P = \int_{r_i}^{r_o} \lambda_{\Theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\Theta\Theta}} \frac{dr}{r}$$

$$F_{red} = \pi \int_{r_i}^{r_o} \left(2\lambda_{zZ} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{zZ}} - \lambda_{\Theta\Theta} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_{\Theta\Theta}} \right) r dr$$

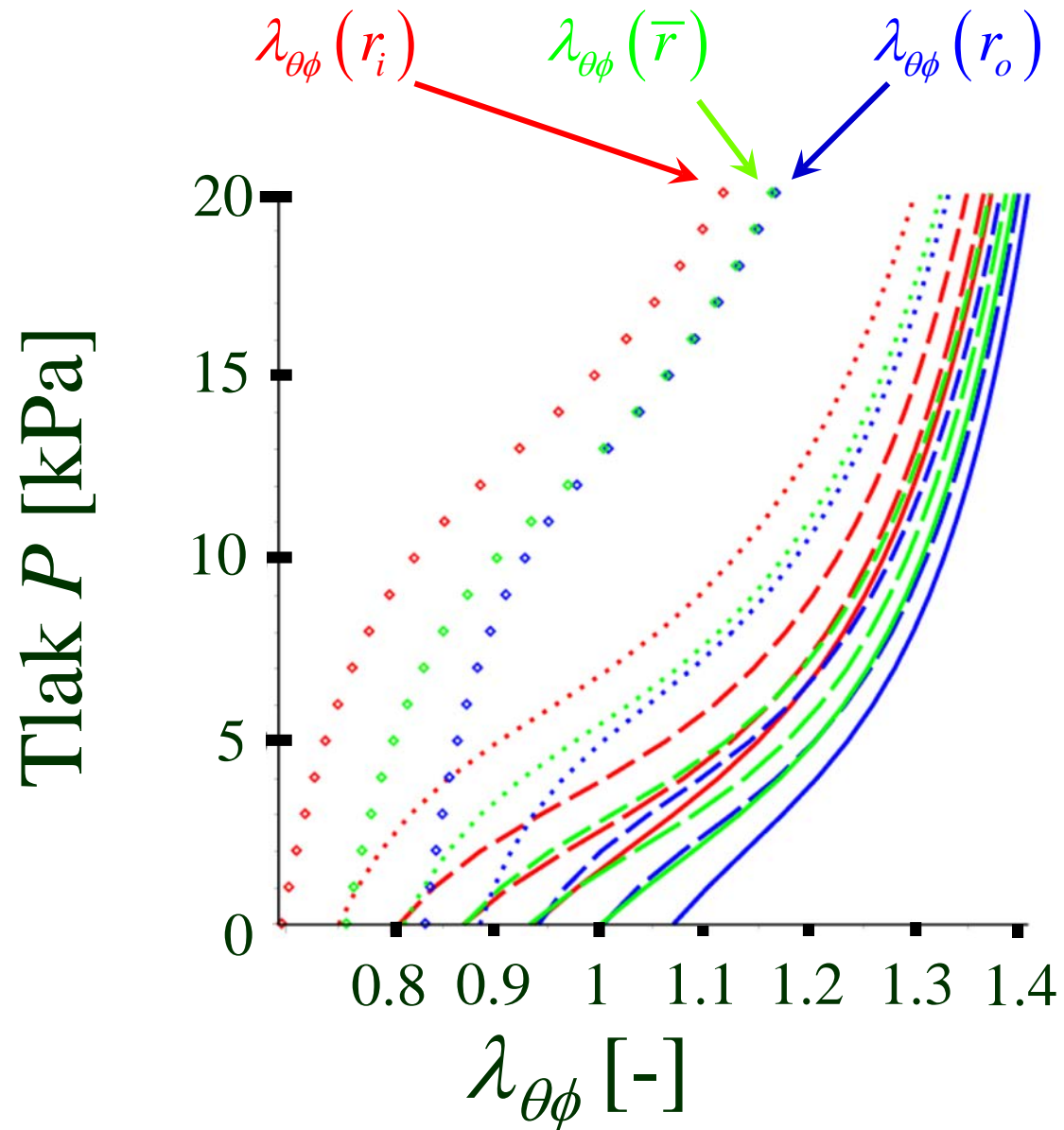
$$c_1 = 14.7 \text{ kPa}, c_2 = 3.04, c_3 = 7.38$$

$$R_i = 5.3 \text{ mm}, H = 1.22 \text{ mm}$$

$$\alpha = 117^\circ$$

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S175161611200210X>

Výpočtový model 3D vs 2D



V silnostěnné trubici není rozložení napětí a deformace po tloušťce stěny lineární, a tak poloha $\bar{r} = (r_i + r_o) / 2$ ve 2D neodpovídá poloze \bar{r} vypočtené ve 3D.

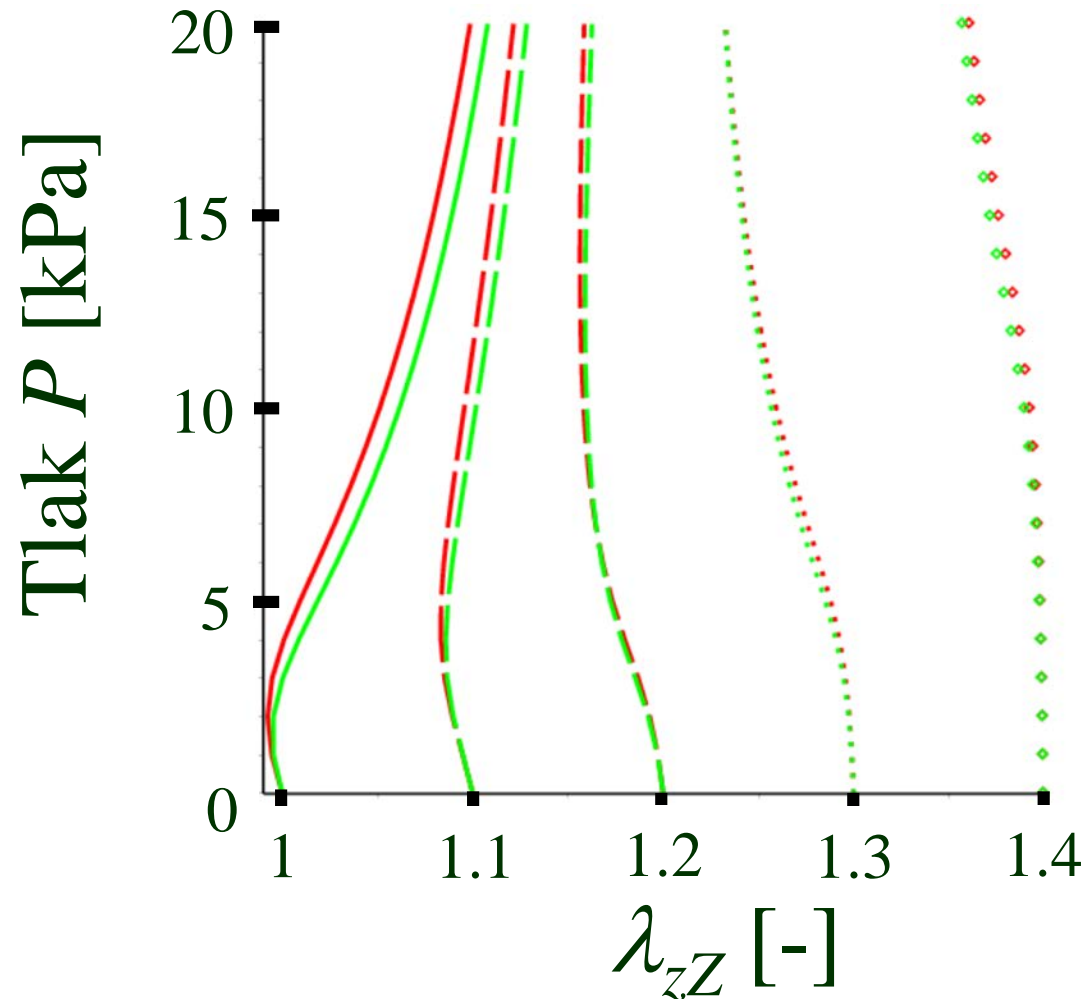
Obdobně pro deformace.

$$2D \quad \lambda_{\theta\phi}(\bar{r}) \neq \frac{\lambda_{\theta\phi}(r_i) + \lambda_{\theta\phi}(r_o)}{2} \quad 3D$$

Výpočtový model 3D vs 2D

Tenkostěnný model (2D)

Silnostěnný model (3D)

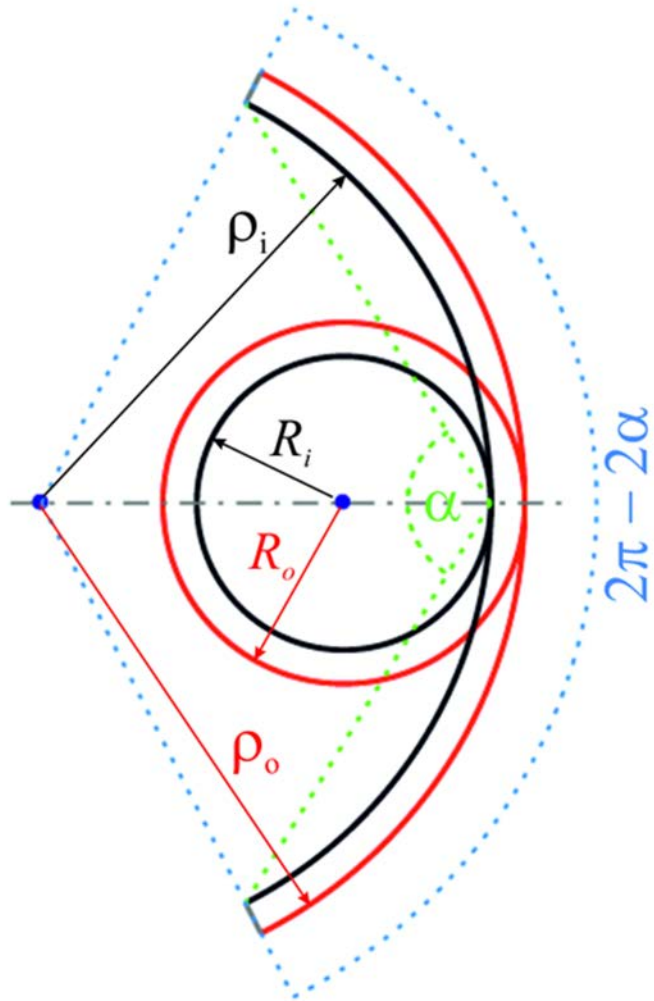


Ačkoliv v silnostěnné trubici platí,
že $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r), \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r), \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r),$
 $\lambda_{r\rho} = \lambda_{r\rho}(r), \lambda_{\theta\phi} = \lambda_{\theta\phi}(r),$
tak $\lambda_{z\zeta} = konst \neq \lambda_{z\zeta}(r) .$

Proto $\lambda_{z\zeta}(r_i) = \lambda_{z\zeta}(r_o) .$

Výpočtový model 3D

- Zbytková deformace pro $\alpha = 117^\circ$



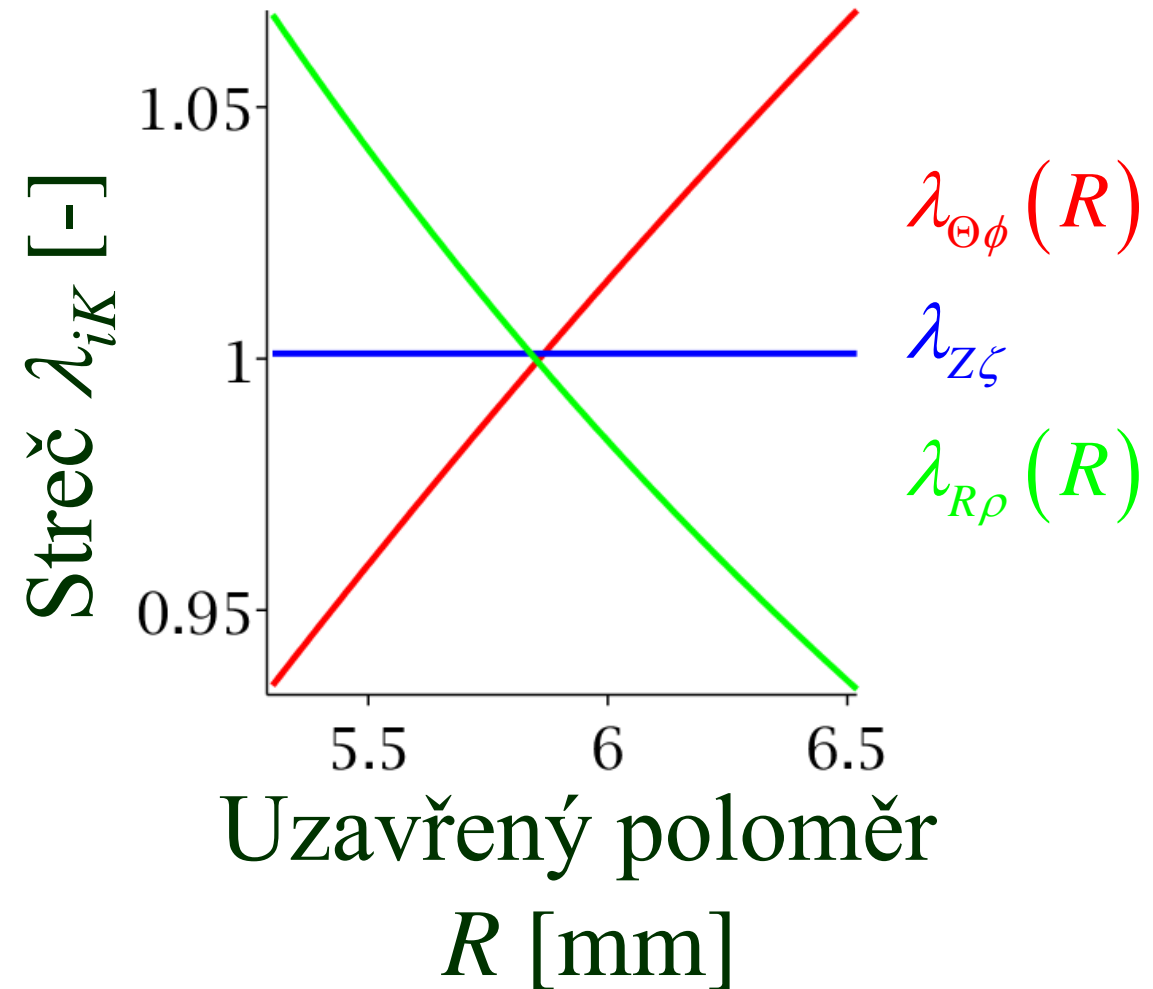
$$\rho_i = 16.19 \text{ mm}$$

$$\rho_o = 17.42 \text{ mm}$$

$$\lambda_{z\zeta} = 1.001$$

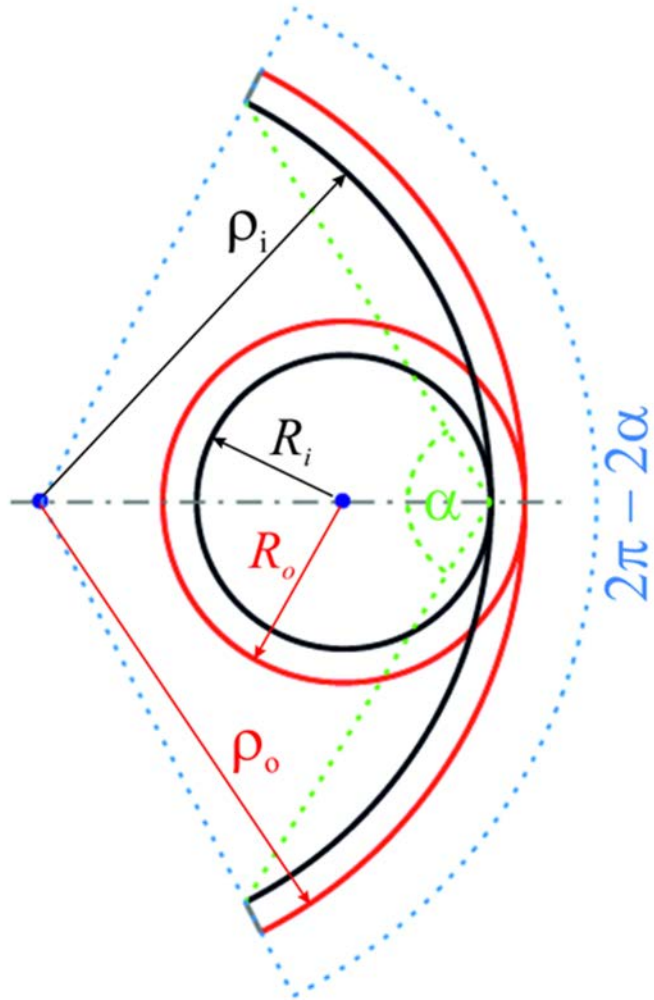
$$R_i = 5.3 \text{ mm}$$

$$R_o = 6.52 \text{ mm}$$

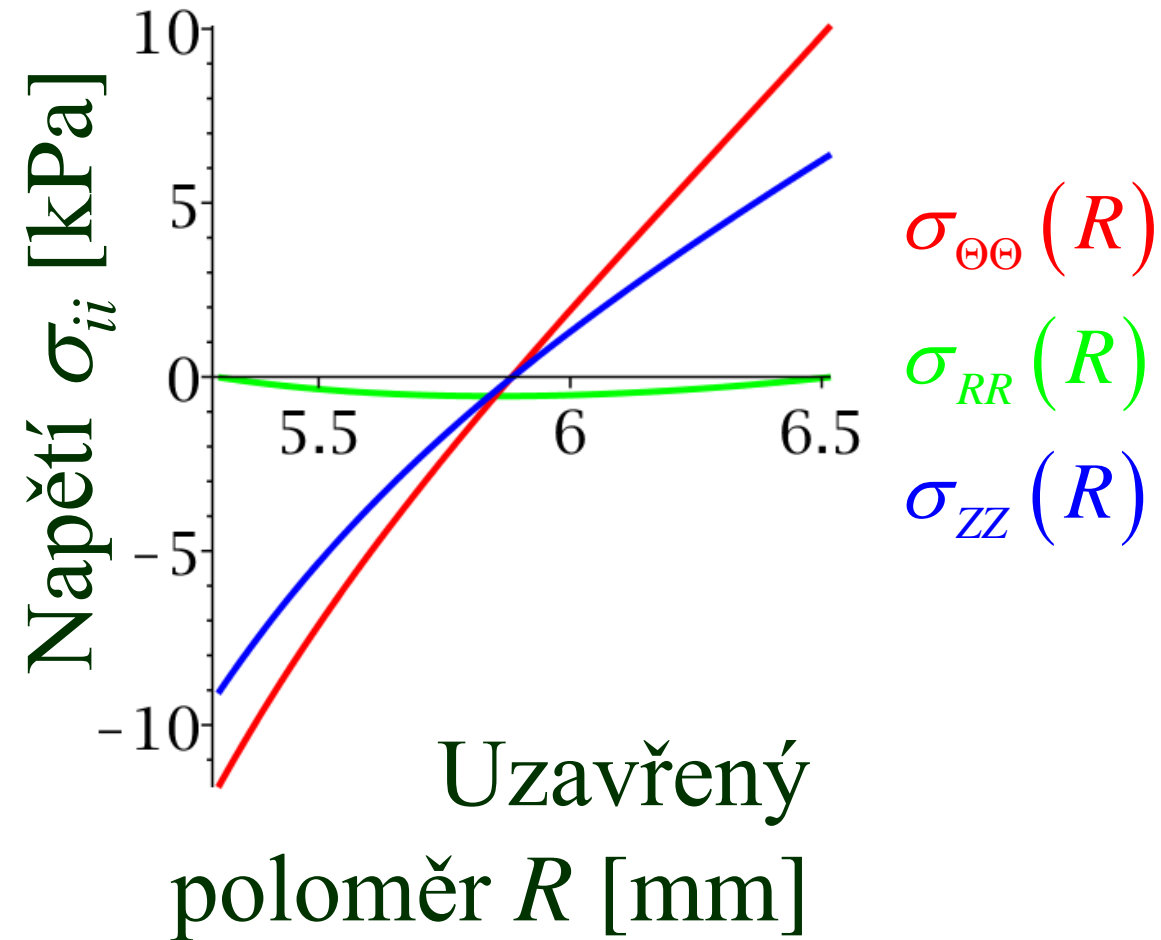


Výpočtový model 3D

- Zbytková napětí pro $\alpha = 117^\circ$ a $\lambda_{z\zeta} = 1.001$



$$\begin{aligned}\rho_i &= 16.19 \text{ mm} \\ \rho_o &= 17.42 \text{ mm} \\ \lambda_{z\zeta} &= 1.001 \\ R_i &= 5.3 \text{ mm} \\ R_o &= 6.52 \text{ mm}\end{aligned}$$

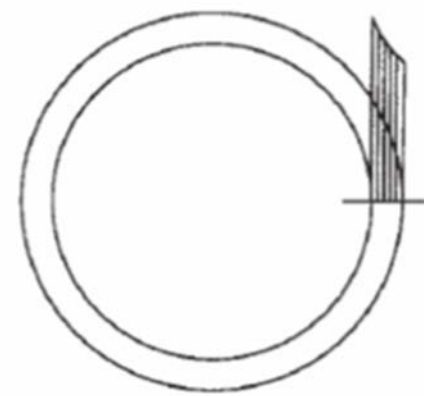
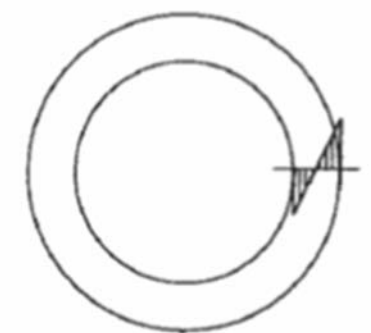
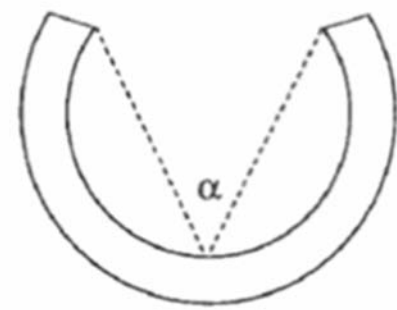
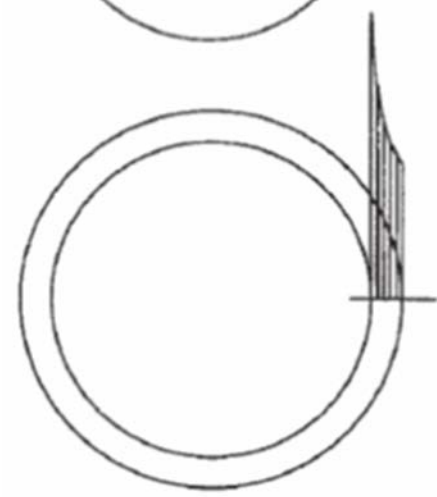
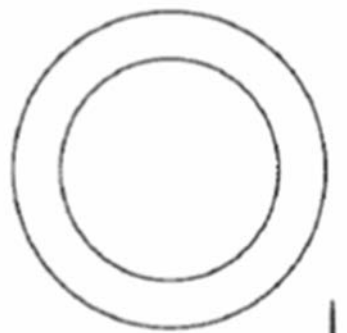
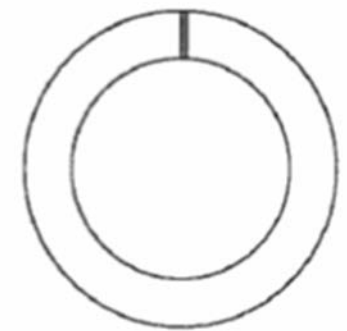


Výpočtový model 3D

- Vliv zbytkových napětí na napjatost při nafukování

Beznapěťový stav

Po nafouknutí



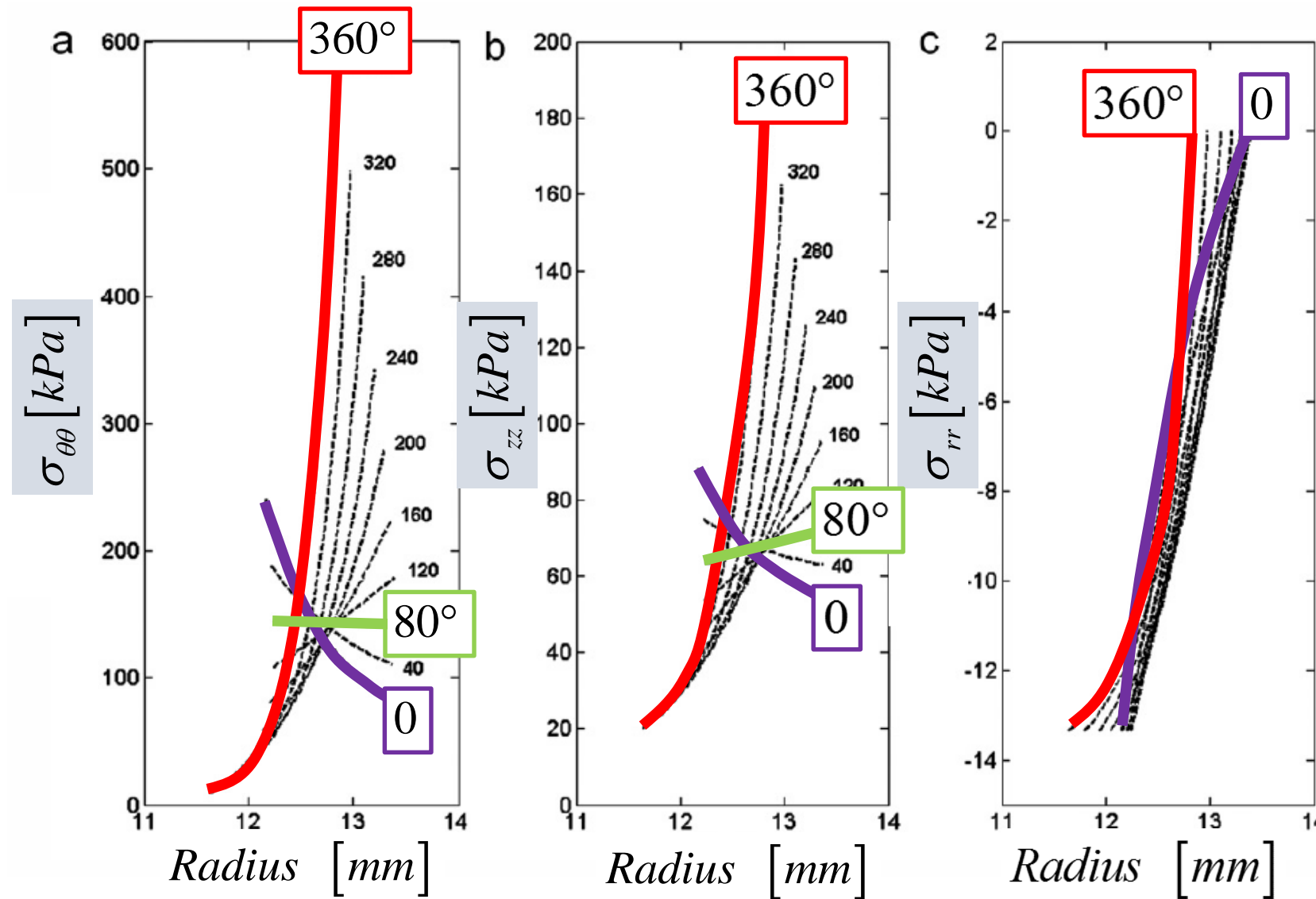
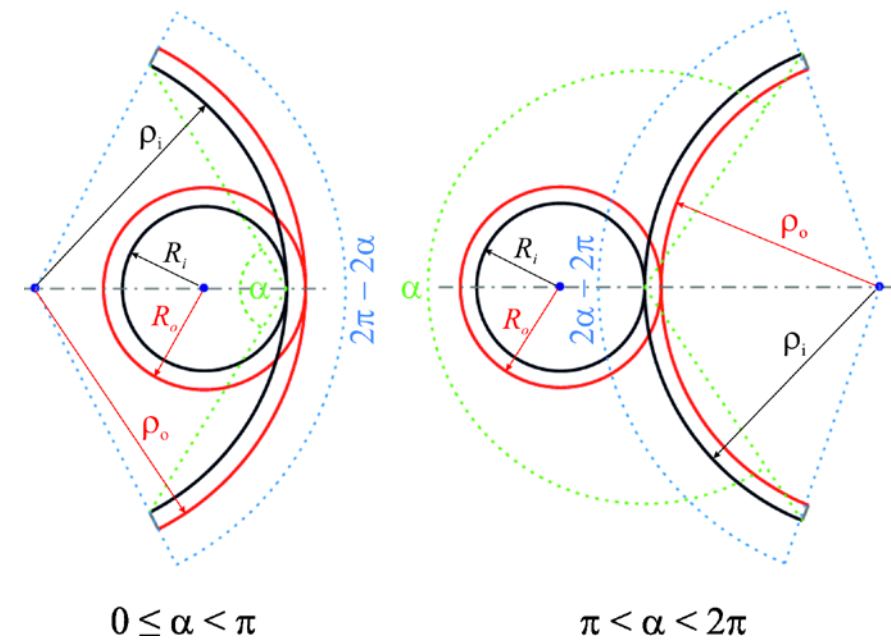
Beznapěťový stav

Zbytkově napjatý stav

Po nafouknutí

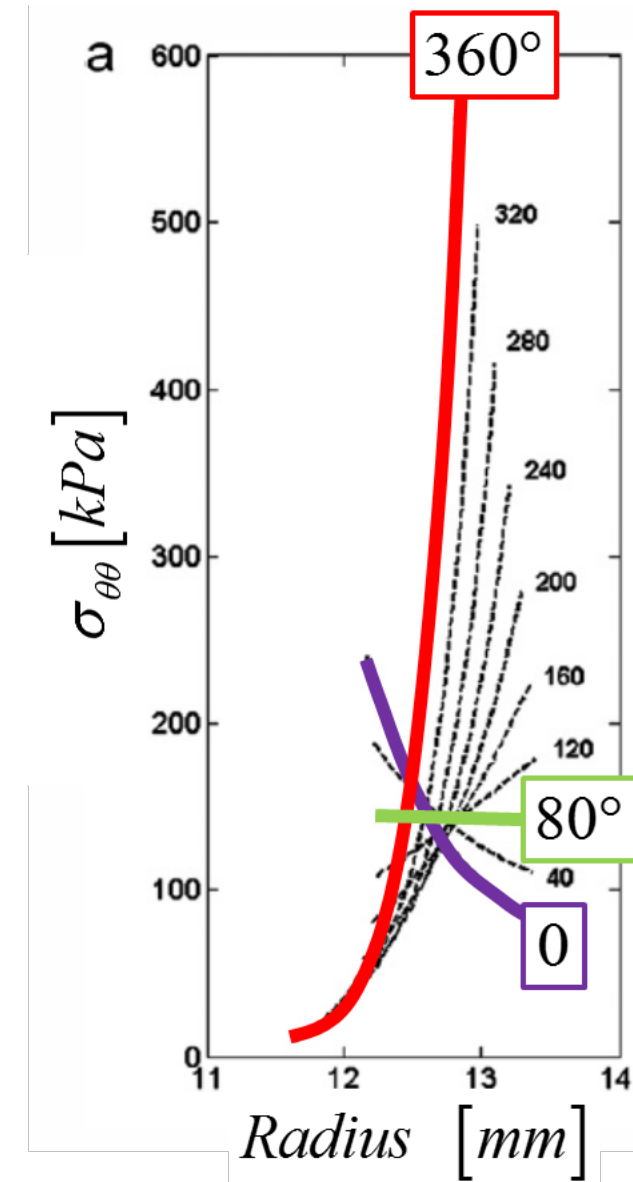


Výpočtový model 3D

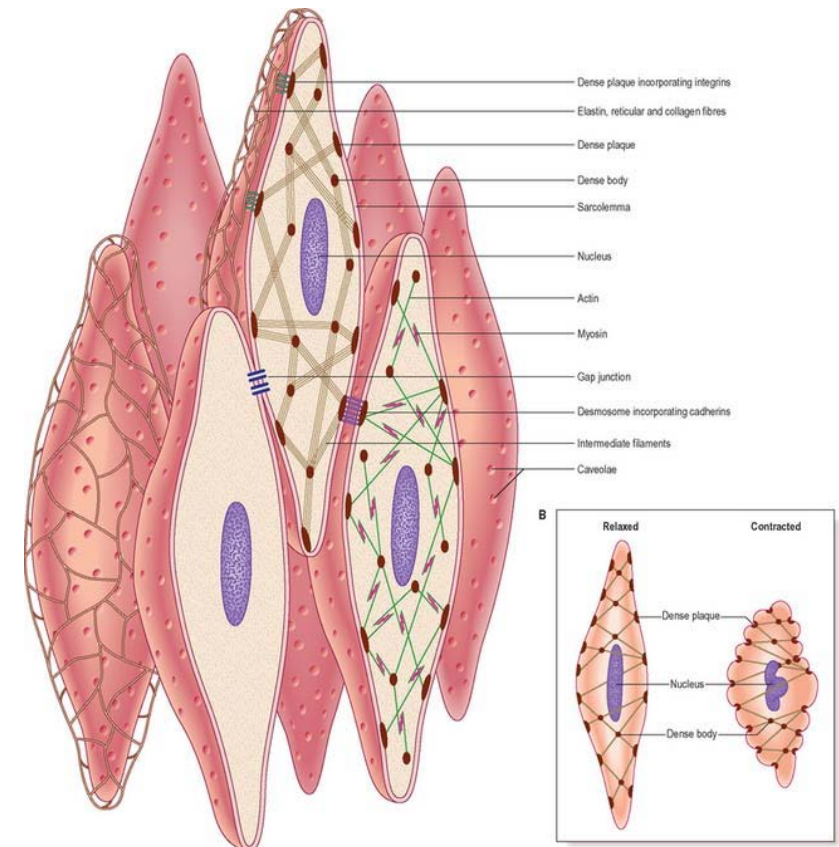
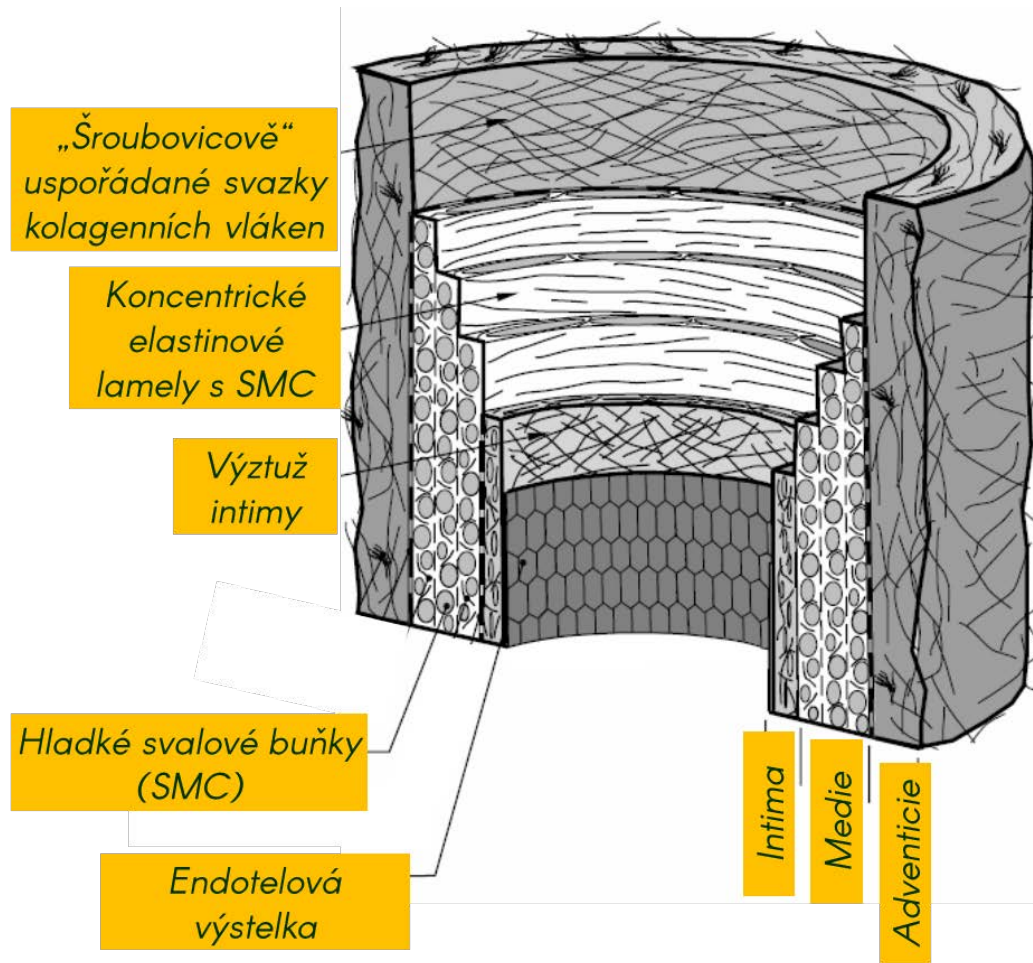


Výpočtový model 3D

- Stárnutí a patologické procesy vedou ke ztrátě optimální regulace mechanobiologických pochodů
- Neoptimální remodelace tepny způsobí růst zbytkových napětí–deformací do hodnot tepennou stěnu přetěžujících



Aktivní vlastnosti cévní stěny

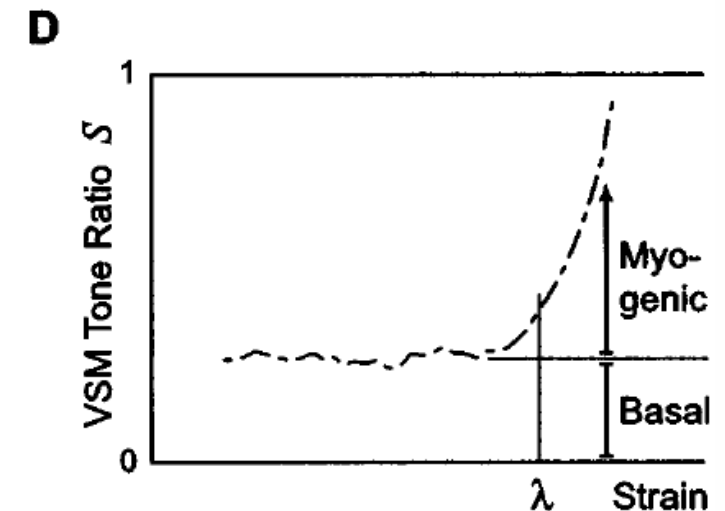
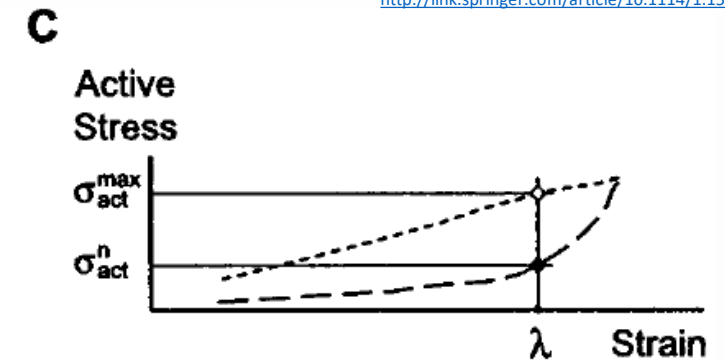
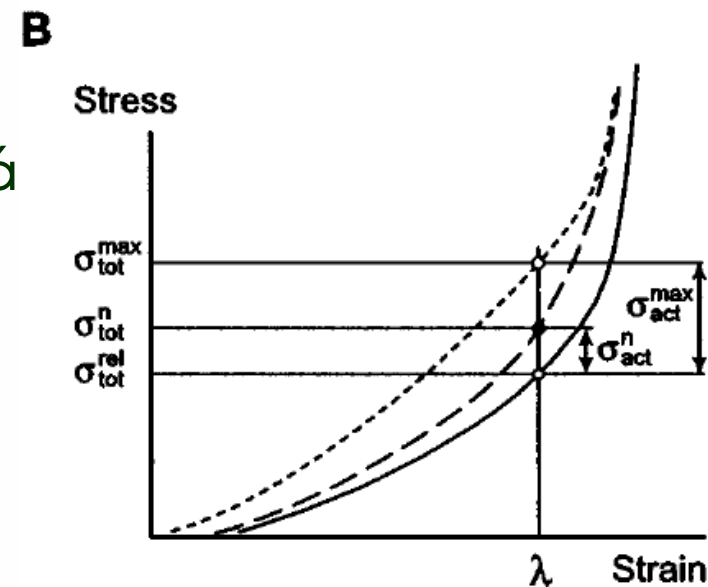
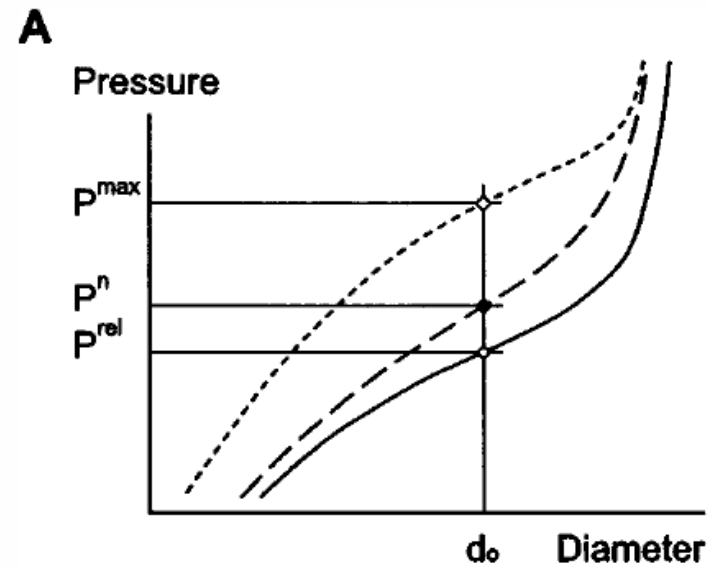


Aktivní vlastnosti cévní stěny

- Elastická tepna může aktivně tuhnout, a zrychlit tak průchod pulsní vlny

změna rozměrů není významná (relaxace/kontrakce SMC)

<http://link.springer.com/article/10.1114/1.1507326>

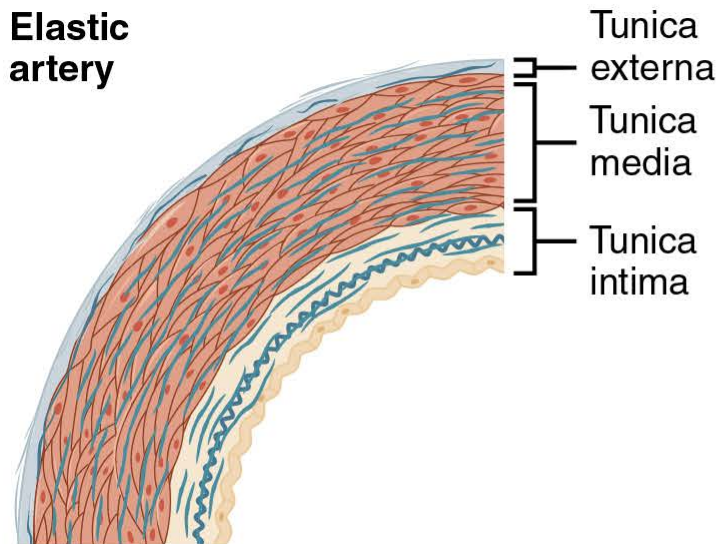


— VSM under Total Relaxation
- - VSM under Normal Conditions
- - - VSM under Maximal Contraction

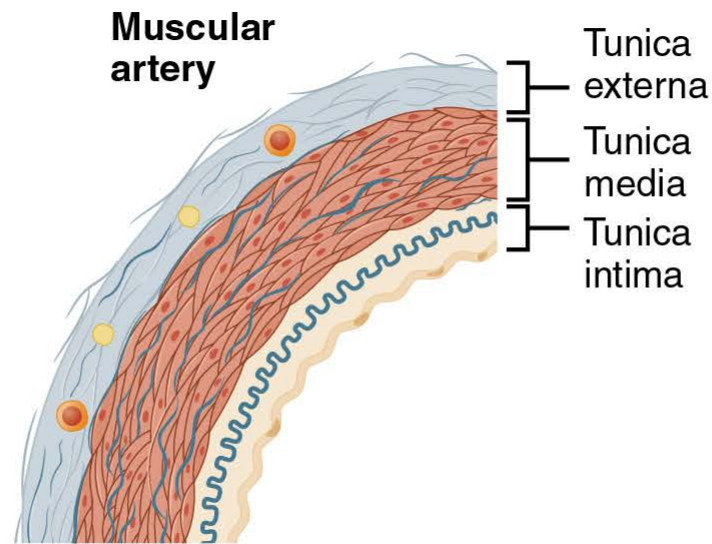
Aktivní vlastnosti cévní stěny

- Odporová tepna nebo tepénka budou kontrakcí SMC významně měnit rozměry (škrtit průtok krve)

Elastic artery



Muscular artery



Arteriole

