Biomechanika srdečněcévní soustavy a konstitutivní modelování

Biomechanika a lékařské přístroje

Biomechanika I

Lukáš Horný

Laboratoř biomechaniky člověka
Ústavu mechaniky Fakulty strojní
ČVUT v Praze

M – Konstitutivní modelování

Anisotropie a inelsticita

Teorie

M1 Deformace

M2 Napětí

M3 Jak zahrnout nelinearitu

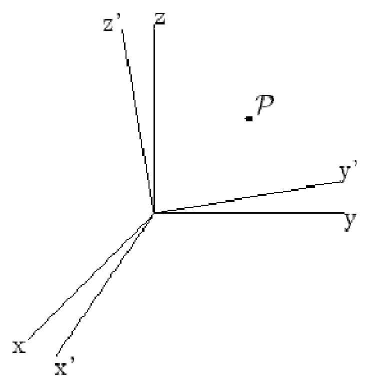
M4 Jak zahrnout anisotropii

M5 Jak zahrnout viskoelasticitu

Isotropie

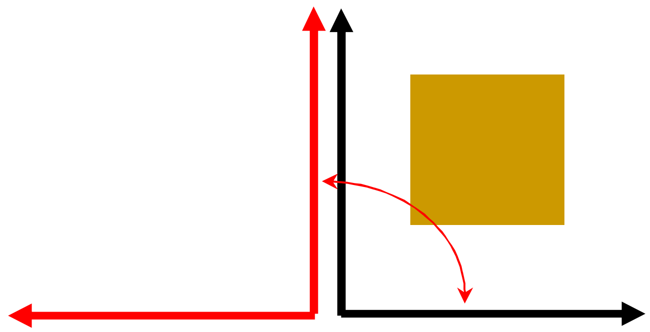
- Ortogonální transformace **Q**

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \qquad \det\mathbf{Q} = \pm 1$$



Q Reprezentuje rotaci souřadnicového systému, když det**Q** = 1 (vlastní rotace).

- Symetrie transformací



Otočení o 90° převede souřadnice čtverce tak, že rozdíly souřadnic vrcholů mají v černé i červené soustavě stejné absolutní hodnoty, a tak se čtverec jeví opět jako čtverec. Takovým transformacím říkáme symetrie (shodnosti).

Složením dvou symetrií je opět symetrie (grupa symetrií).

http://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system

http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry

Isotropie

- Isotropní materiál

  čili „isotropní tenzorová funkce“

Elasticita

$$\boldsymbol{\sigma} = g(\mathbf{b})$$

Isotropní elasticita

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = g\left(\mathbf{Q}\mathbf{b}\mathbf{Q}^T\right)$$

Transformace isotropní tenzorové (2. řádu) funkce tenzorové proměnné (2. řádu)

Isotropní hyperelasticita

$$W(\mathbf{C}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T\right)$$

Transformace isotropní skalární funkce tenzorové proměnné (2. řádu)

http://en.wikipedia.org/wiki/Isotropy

Anisotropie

- Anisotropní materiál

Je takový materiál, kde rovnice: neplatí pro všechna $\mathbf{Q}$ ($\det\mathbf{Q} = 1$), ale je pro „některá.“

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{QCQ}^T)$$

Otázkou která Q to jsou, je právě otázka po materiálové symetrii (pro kovy studované v klasické krystalografii).

Problém anisotropní skalární funkce $W(\mathbf{C})$ jedné tenzorové proměnné lze ovšem převést na problém isotropní funkci více tenzorových proměnných.

http://www.springerlink.com/content/g2151656385136u0/fulltext.pdf

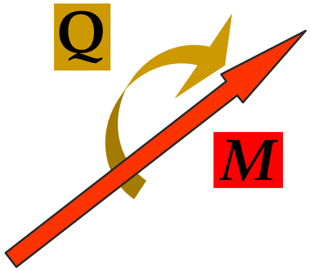
http://www.biomech.tugraz.at/files/publications/Holzapfel_et_al-JElasticity-2000

http://www.biomech.tugraz.at/files/publications/Gasser_et_al-J_R_Soc_Interface-2006

Anisotropie

- Transverzálně isotropní materiál

  materiál s jedním preferovaným směrem



$$\mathbf{Q}\boldsymbol{M} = \pm\boldsymbol{M} \quad \Rightarrow \quad W(\mathbf{C}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T\right)$$

$W(\mathbf{C})$ nyní budeme uvažovat jako $W(\mathbf{C},\mathbf{M})$, kde $\mathbf{M} = \boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{M}$

$$W(\mathbf{C},\mathbf{M}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T\right)$$

pro všechny vlastní ortogonální transformace Q

Anisotropie

- Invarianty pro transverzálně isotropní materiál

Obdobně jako se $W(\mathbf{C})$ nakonec vyjadřuje jako $W(I_1^{\mathbf{C}}, I_2^{\mathbf{C}}, I_3^{\mathbf{C}})$, tak se i $W(\mathbf{C},\mathbf{M})$ převede na $W(I_\alpha^{\mathbf{C}}, I_\beta^{\mathbf{CM}})$.

Přechodem od jedné k více proměnným vzniknou další (hlavní) invarianty.

$$I_4 = \mathbf{C} : \mathbf{M} = \boldsymbol{M} \cdot \left(\mathbf{C}\boldsymbol{M}\right) \qquad I_5 = \mathbf{C}^2 : \mathbf{M} = \boldsymbol{M} \cdot \left(\mathbf{C}^2 \boldsymbol{M}\right)$$

Anisotropie

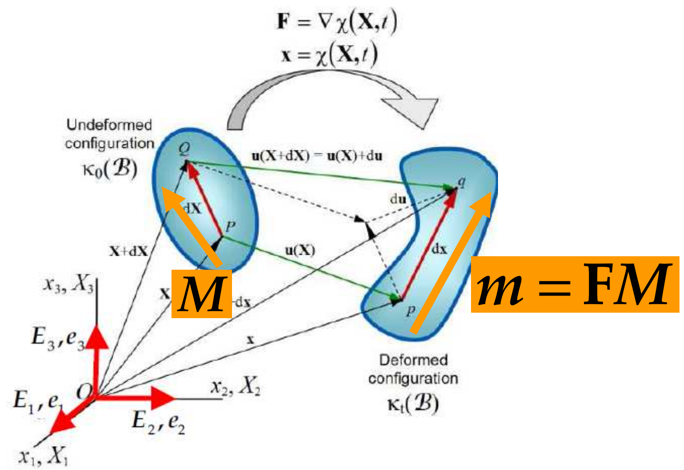
- Geometrická interpretace I_4

$$\boldsymbol{m} = \mathbf{F}\boldsymbol{M}$$

Připomeňme, že deformační gradient $\mathbf{F}$ převádí jednotkový referenční vektor $\boldsymbol{M}$ na zdeformovaný vektor $\boldsymbol{m}$ ($|\boldsymbol{m}| = \lambda, \boldsymbol{M}| = 1$).

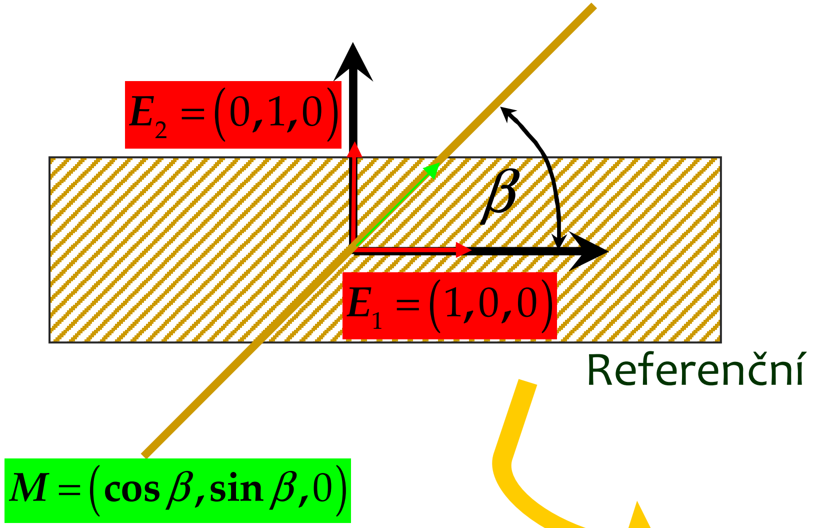
$$I_4 = \mathbf{C} : \mathbf{M} = \boldsymbol{M} \cdot (\mathbf{C}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M} \cdot \left(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\boldsymbol{M}\right) = \left(\boldsymbol{M}\mathbf{F}^T\right) \cdot (\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = (\mathbf{F}\boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = \lambda_f^2$$

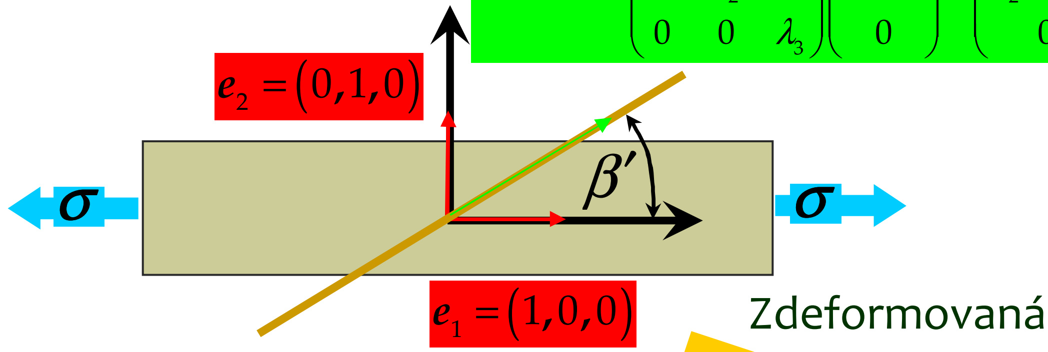
I_4 tedy vyjadřuje kvadrát stretche, který materiál podstoupil ve směru $\boldsymbol{M}$. Jestliže si představujeme $\boldsymbol{M}$ např. jako směr reprezentující orientaci výztuže, pak je jeho zahrnutí do konstitutivní rovnice zcela přirozené.



Anisotropie

- Geometrická interpretace I_4





$$m=\mathbf{F}M=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\cos\beta\\ \lambda_2\sin\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0&0\\0&\lambda_2^2&0\\0&0&\lambda_3^2\end{pmatrix}$$

$$I_4=\mathbf{C}:\mathbf{M}=M\cdot(\mathbf{C}M)=(\cos\beta,\sin\beta,0)\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0&0\\0&\lambda_2^2&0\\0&0&\lambda_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\0\end{pmatrix}=(\cos\beta,\sin\beta,0)\begin{pmatrix}\lambda_1^2\cos\beta\\ \lambda_2^2\sin\beta\\0\end{pmatrix}=\lambda_1^2\cos^2\beta+\lambda_2^2\sin^2\beta$$

Anisotropie

- Vícesměrná anisotropie

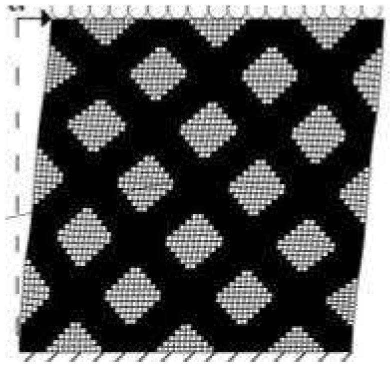
$$\mathbf{M}_i = \boldsymbol{M}_i \otimes \boldsymbol{M}_i \quad i = 1,..,n$$

$$W\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_1,...,\mathbf{M}_n\right) = W\left(\mathbf{QCQ}^T,\mathbf{QM}_1\mathbf{Q}^T,...,\mathbf{QM}_n\mathbf{Q}^T\right)$$

pro všechny vlastní ortogonální transformace Q

Tento způsob popisu generuje další invarianty asociované s preferovanými směry (a kombinací těchto směrů).

Např. pro planární vzorek se dvěma preferovanými směry v rovině vzorku odkloněnými od osy x o β a $-\beta$ (lokální ortotropie pro mechanicky ekvivalentní směry) dojde k situaci, že invarianty popisující délku zdeformovaného vektoru v preferovaném směru mají stejný tvar.



$$I\left(\beta\right) = \mathbf{C}:\mathbf{M}\left(\beta\right) = \mathbf{C}:\mathbf{M}\left(-\beta\right) = I\left(-\beta\right)$$

Způsob tvorby dalších invariantů je detailněji popsán v Itskov M. *Tensor algebra and tensor analysis for engineers* (dostupné z IP domény cvut.cz; konkrétně s. 118 ale zájemcům je třeba doporučit celou knihu).

Anisotropie

- Biomechanické modely

$$W=\frac{\mu}{2}\left(I_1-3\right)+\frac{k_1}{2k_2}\left(e^{k_2\left(I_4-1\right)^2}-1\right)$$

GA Holzapfel, TC Gasser, RW Ogden (2000) A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. Journal of Elasticity, 61 (1-3) , pp. 1-48.

http://www.springerlink.com/content/q11854641750u2738

$$W=\frac{\mu}{2}\left(I_1-3\right)-\frac{\nu J_m}{2}\mathbf{ln}\left(1-\frac{\left(I_4-1\right)^2}{J_m}\right)$$

CO Horgan, G Saccomandi (2005) A new constitutive theory for fiber-reinforced incompressible nonlinearly elastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53 (9) , pp. 1985-2015.

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509605000852

Relativně často je stále využíván i historicky starší, tzv. *zobecněný Fungův, model*, který ovšem není založen na invariantech a je třeba pracovat stále s jedním souřadnicovým systémem.

$$W=\frac{\mu}{2}\left(I_1-3\right)+a\left(e^{Q}-1\right) \qquad Q=b_{11}E_{11}^2+b_{22}E_{22}^2+b_{33}E_{33}^2+2b_{12}E_{12}^2+2b_{23}^2+2b_{13}E_{13}^2$$

Inelasticita

- Viskoelasticita

Existuje několik způsobů, jak do konstitutivního modelu implementovat viskoelasticitu (creep, relaxaci, závislost na rychlosti zatěžování).

Zejména pomocí dynamického modulu pružnosti, diferenciální formulací, integrální formulací nebo vnitřních proměnných.

$$\sigma = E'\varepsilon_0 \cos \omega t + E''\varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$E^* = E' + iE'' \qquad \eta = \frac{E''}{E'}$$

Komplexní modul

$$S(t) = \int_0^t G(t-\tau)\frac{dS_e}{dE}\frac{dE}{d\tau}d\tau$$

Hereditární integrál

Inelasticita

- Viskohyperelasticita

Předpokládá se, že viskoelastické procesy přispívají k volné energii systému ψ a mají potenciál.

$$\psi = \psi_e + \psi_v = W\left(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i\right) + \psi_v\left(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}, \mathbf{M}_i\right)$$

Kde platí, že:

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\,\mathbf{F}^T\,\mathbf{d}\mathbf{F} \qquad \mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T\right) \qquad \boldsymbol{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

Rychlosti deformace *Gradient rychlosti*

Výhodou toho přístupu je snadná algebraická implementace anisotropie.

Inelasticita

- Viskohyperelasticita

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_v = 2\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \dot{\mathbf{C}}}\right)$$

Opět úlohu formulujeme pomocí invariantů. Dostáváme se k volné energii ψ jakožto skalární funkci dvou (v případě anisotropie tří a více) tenzorových proměnných.

$$\psi_v = \eta J_2 \left(I_1 - 3\right) \qquad J_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} : \dot{\mathbf{C}}^2\right)$$

η materiálový parametr

Závěrečné poznámky

- Tvorba modelu

$$\psi = W\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_i\right) + \psi_v\left(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\mathbf{M}_i\right)$$

$$W\left(\mathbf{I},\mathbf{M}_i\right) + \psi_v\left(\mathbf{I},\mathbf{0},\mathbf{M}_i\right) = 0$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(\mathbf{C},\dot{\mathbf{C}},\mathbf{M}_i\right)$$

$$\mathbf{S}\left(\mathbf{I},\mathbf{0},\mathbf{M}_i\right) = \mathbf{0}$$

Objektivita

Konvexita (?)

(1. a 2. princip termodynamiky)