

# Patobiomechanika pohybového aparátu

Lukáš Horný

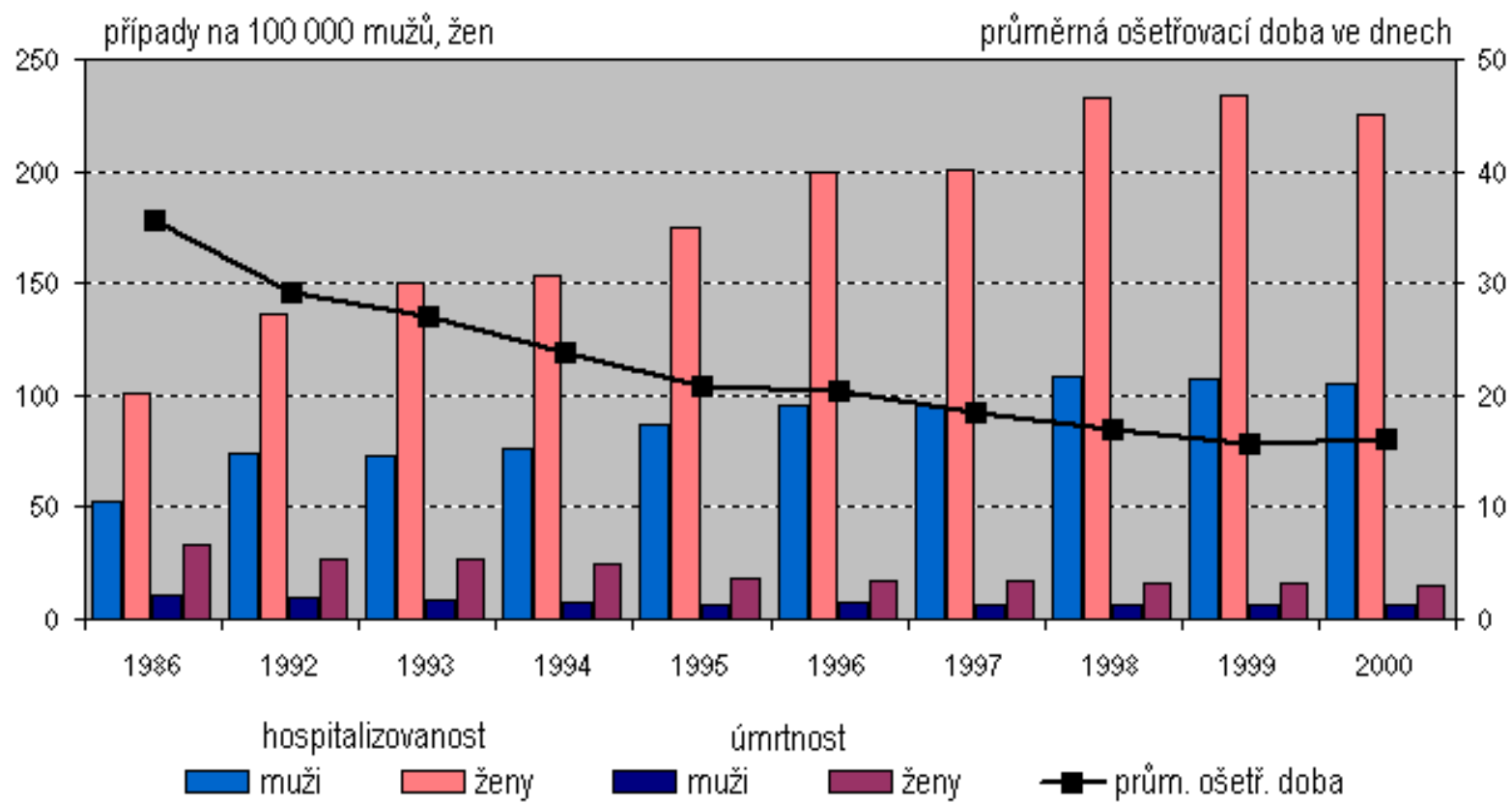
[lukas.horny@fs.cvut.cz](mailto:lukas.horny@fs.cvut.cz)

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky  
České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní



# MOTIVACE

Vývoj hospitalizovanosti, úmrtnosti a průměrné ošetrovací doby  
na zlomeniny proximálního femuru v letech 1986 - 2000

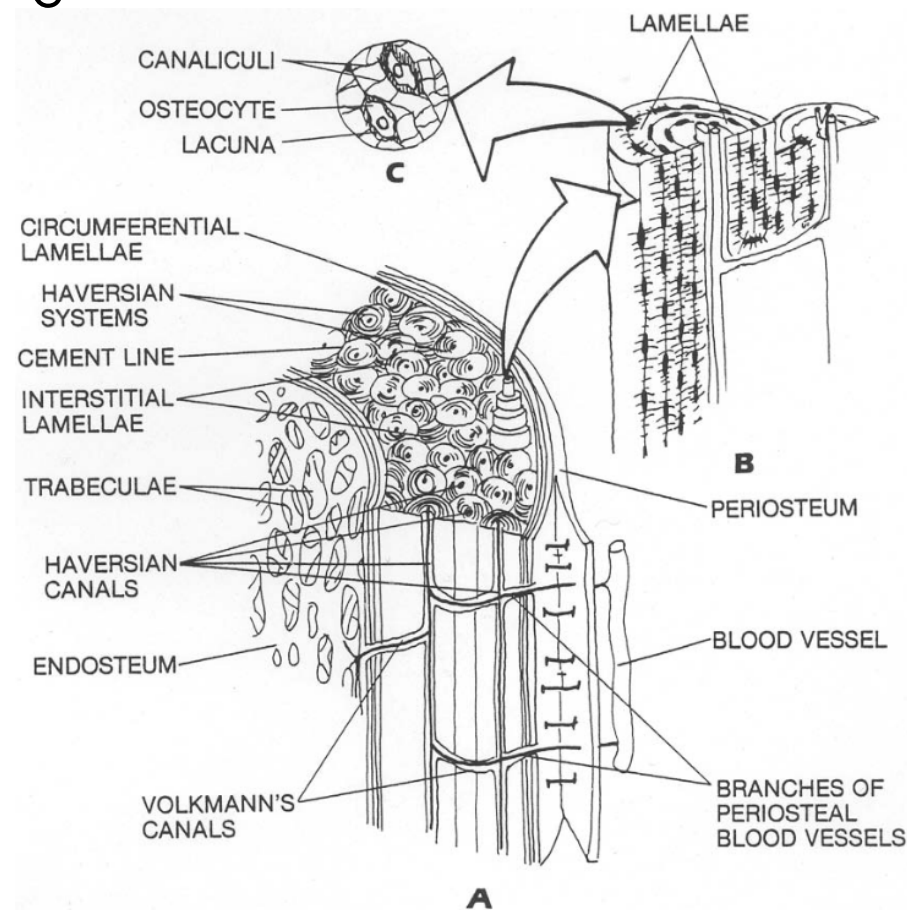
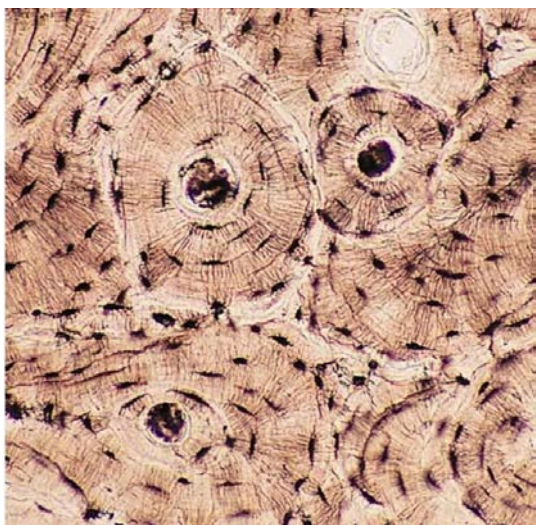


# Zlomeniny a poranění kostí

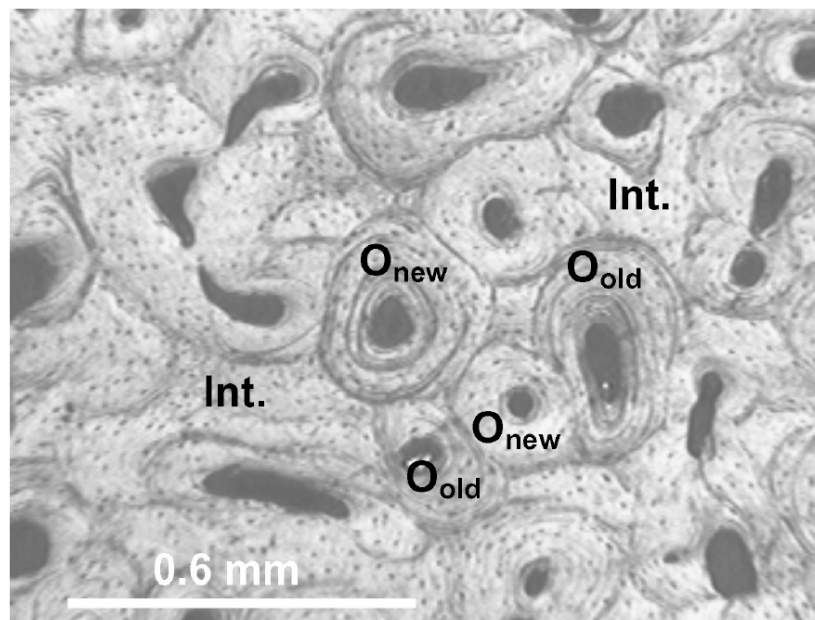
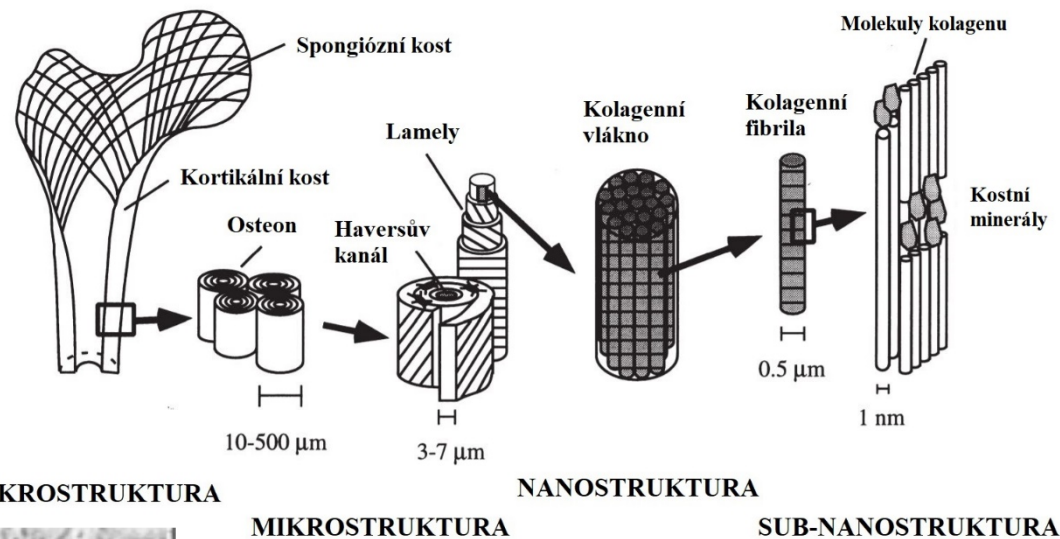
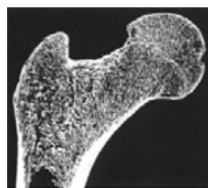
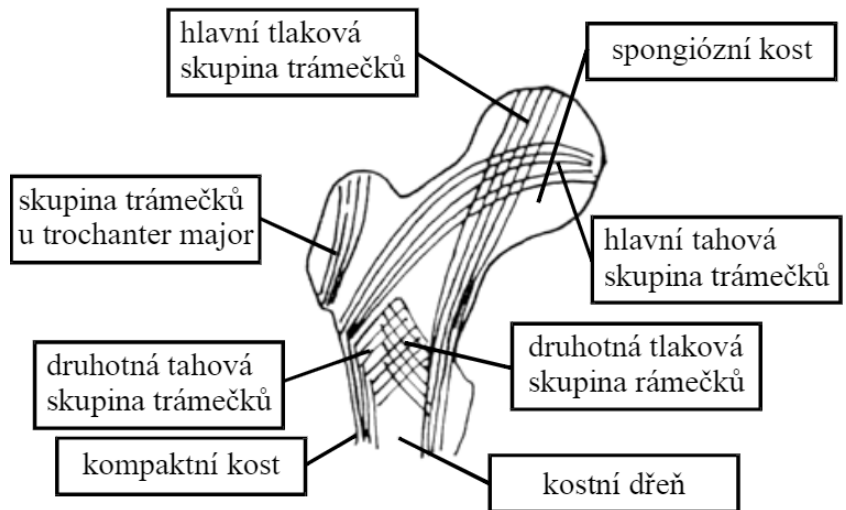
Typizace zlomenin

# Vlastnosti kostní tkáně

- Viskoelastická, nehomogenita, anizotropie, adaptabilita
- Základní parametry
  - hmotnost + elasticita → akumulace energie
  - plasticita + viskozita → tlumení pohybu
- Tvar kostí ovlivňuje jejich mechanické vlastnosti
- Základní stavební jednotka:  
**osteon (Haversovy systémy)**



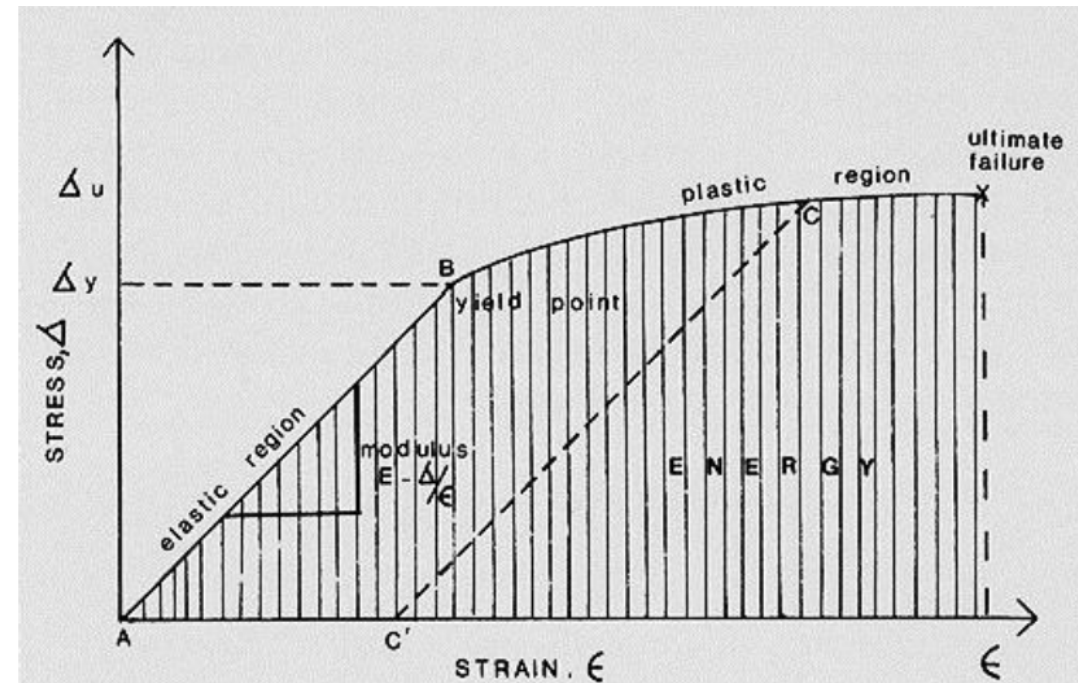
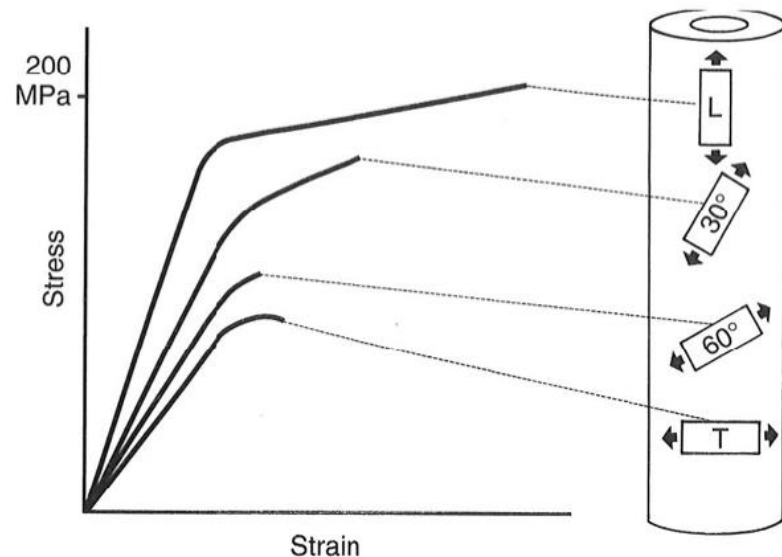
# Architektonika kosti



# Mechanické chování kosti

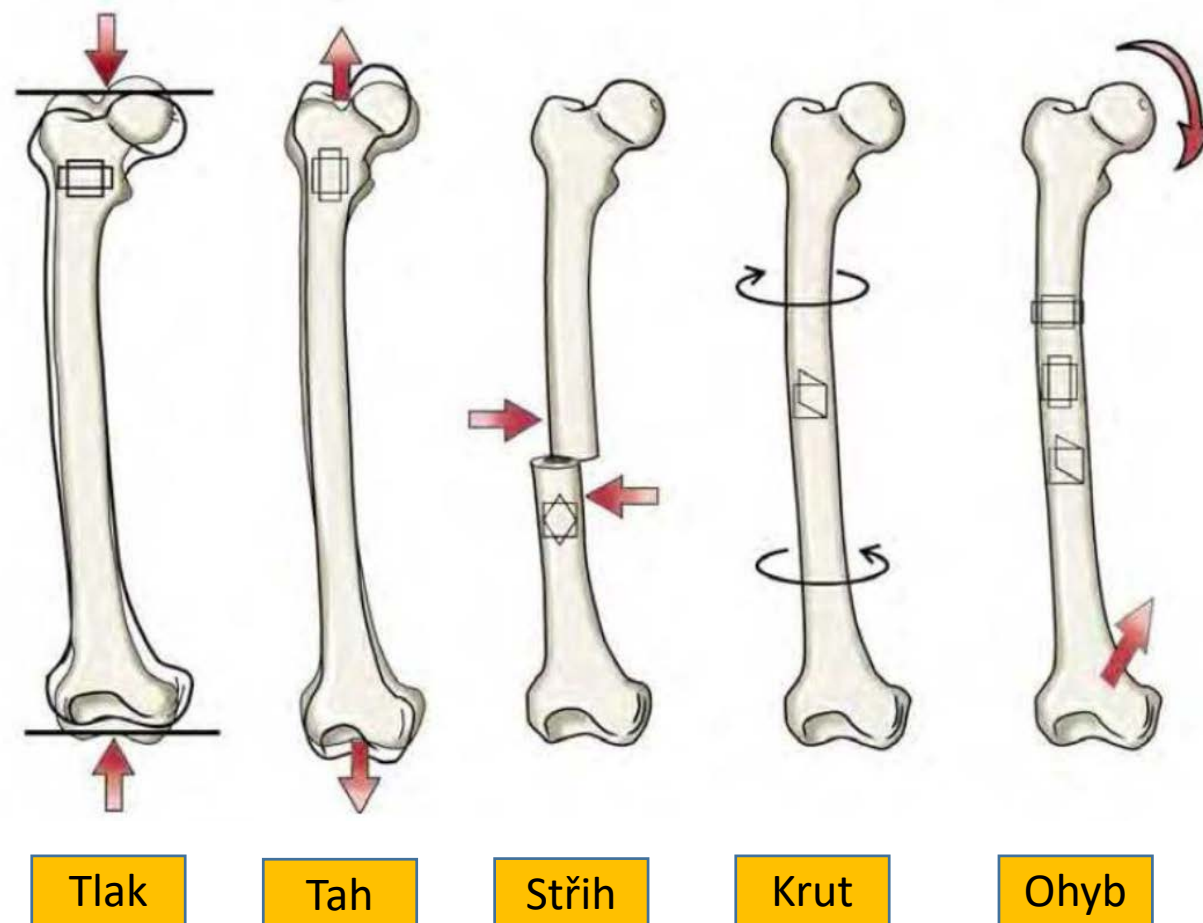
Je ovlivněno (pod vlivem sil a momentů):

- Jejimi mechanickými vlastnostmi
- Jejimi geometrickými charakteristikami
- Způsobem zatížení
- Mírou zatížení
- Frekvencí zatěžování



# Způsoby namáhání kostí

Kost je v *in vivo* podmínkách vystavena všem těmto způsobům zatěžování  
-> nejčastěji kombinované namáhání



# Typy zlomenin a jejich dislokace

**Zlomenina** – porušení kontinuity kosti úrazem nebo onemocněním (úplné i neúplné)

-> vznikající mechanismem:

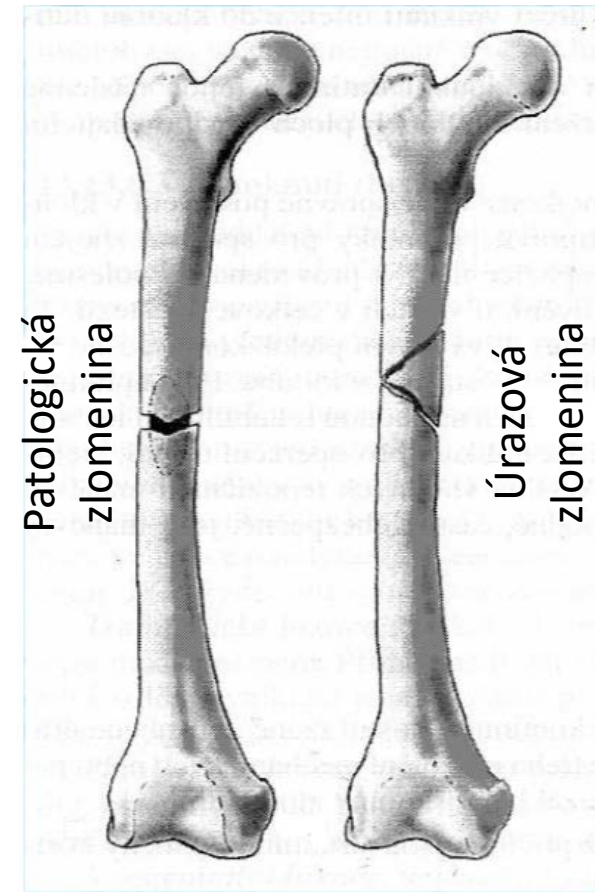
- Přímým (působením sil přímo v místě zlomeniny)
- Nepřímým (síla působí v oblasti vzdálené od místa lomu)



# Dělení zlomenin

## 1. Podle příčiny:

- Úrazové – působením zevního násilí: torzní, ohybové, avulzní, kompresní a střížné
- Únavové – vznikají na podkladě opakovaných mikrotraumat při přetěžování
- Patologické – ke zlomení kosti stačila abnormálně malá (či v některých případech žádná) síla



# Dělení zlomenin

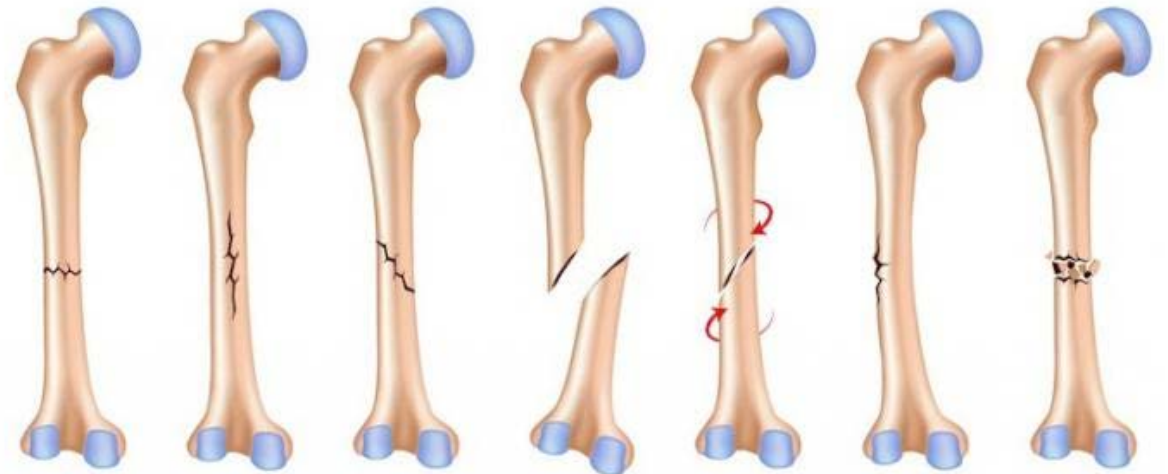
## 2. Podle mechanismu vzniku:

- a) Kompresivní – násilí působí v ose kosti, porušena je hlavně spongióza
- b) Impresivní – násilí působí na malý okrsek kosti, který vtlačuje dovnitř (lebeční kosti)
- c) Tahové – tah svalů a šlah, obvykle v úponových místech
- d) Ohybové – působením střížných, posunových sil

# Dělení zlomenin

## 3. Podle průběhu lomné linie:

- a) Příčné
- b) Vertikální
- c) Šikmé
- d) Avulzní – na úponech vazů a šlach
- e) Spirální
- f) Tangenciální – osteochondrální
- g) Tříštivé



# Dělení zlomenin

4. Podle porušení kožního krytu a poranění měkkých tkání:

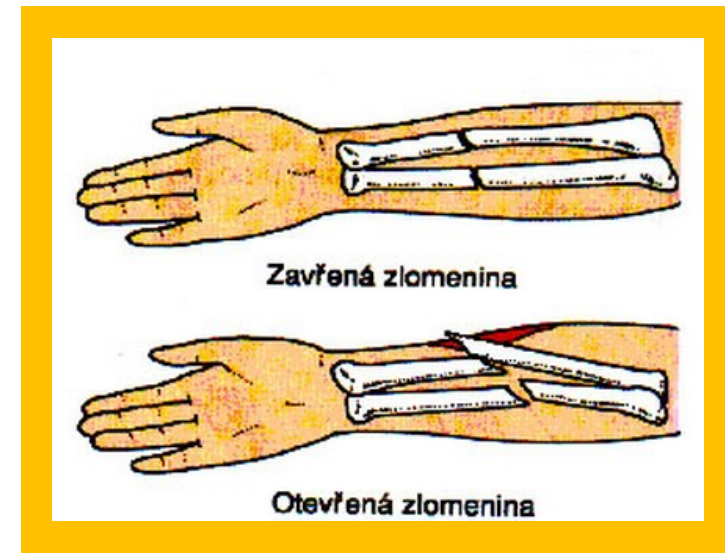
- Zavřené
- Otevřené – kost pronikne kůží až na povrch těla

5. Podle dislokace úlomků

- dislokace může být primární – násilím, jež způsobilo zlomeninu a sekundární – tahem svalů upínajících se na úlomky
- dislokaci úlomků hodnotíme vždy podle polohy periferního fragmentu proti fragmentu centrálnímu

6. Podle počtu úlomků

- Dvouúlomkové
- Tříúlomkové
- Čtyřúlomkové
- Tříštvé (kominutivní)



# Tahové zatížení

- Zlomeniny způsobené tahovým zatížením jsou běžně pozorovatelné u kostí s velkými proporcemi spongiózní kosti
  - Např. zánartní kosti, patní kost – abnormální tahové zatížení od svalů, čéška
- Mikroskopicky se mechanismus tahové zlomeniny projevuje především oddělováním v místech linií mezi osteony a jejich vytahováním.

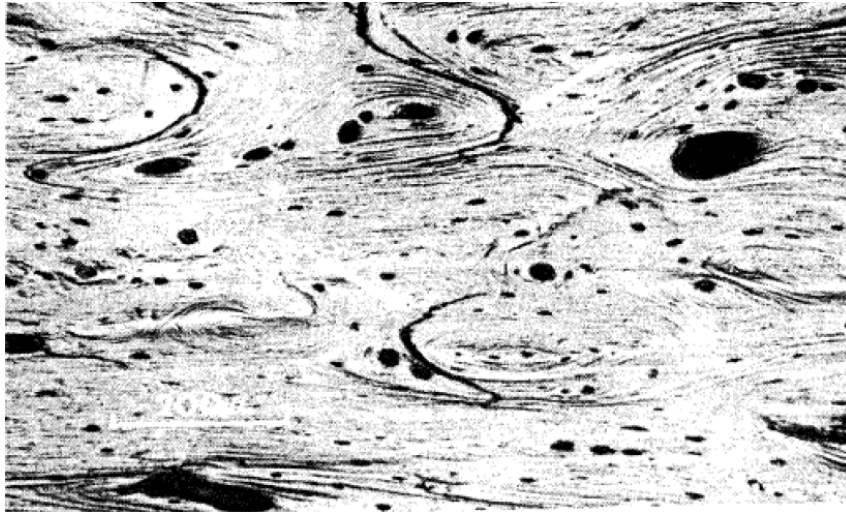
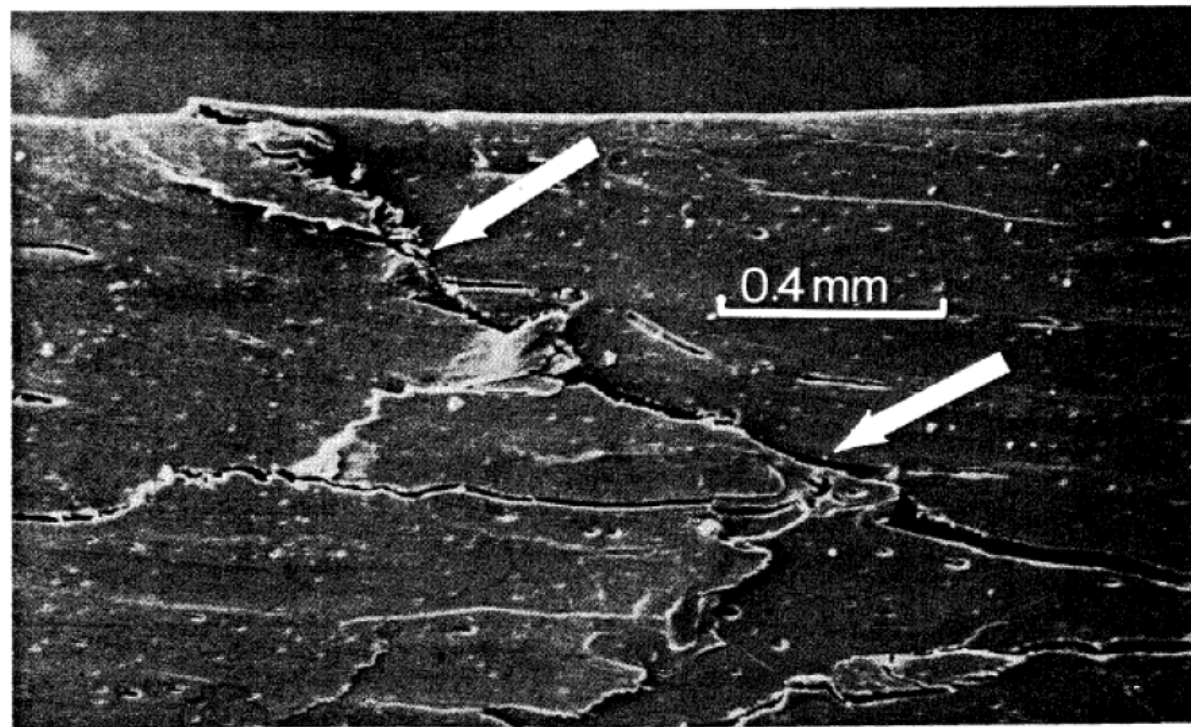


FIG. 1–12  
Reflected light photomicrograph of a human cortical bone specimen tested in tension (30×). Arrows indicate debonding at the cement lines and pulling out of the osteons. (Courtesy of Dennis R. Carter, Ph.D.)

# Tlakové zatížení

- Mikroskopicky se mechanismus tlakové zlomeniny projevuje především šikmým praskáním osteonů
- Klinicky kompresní zlomeniny jsou časté u obratlů, které jsou vystavené vysokým tlakovým zatížením

FIG. 1-15  
Scanning electron photomicrograph of a human cortical bone specimen tested in compression (30×). Arrows indicate oblique cracking of the osteons. (Courtesy of Dennis R. Carter, Ph.D.)



# Ohybové zatížení

- Při ohybovém namáhání působí tahová napětí na jedné a tlaková napětí na druhé straně neutrální osy → kost je asymetrická ⇒ tahová a tlaková složka se různí
- Ohyb je buď tříbodový nebo čtyřbodový
- Klinicky jsou ohybové zlomeniny častější u dlouhých kostí

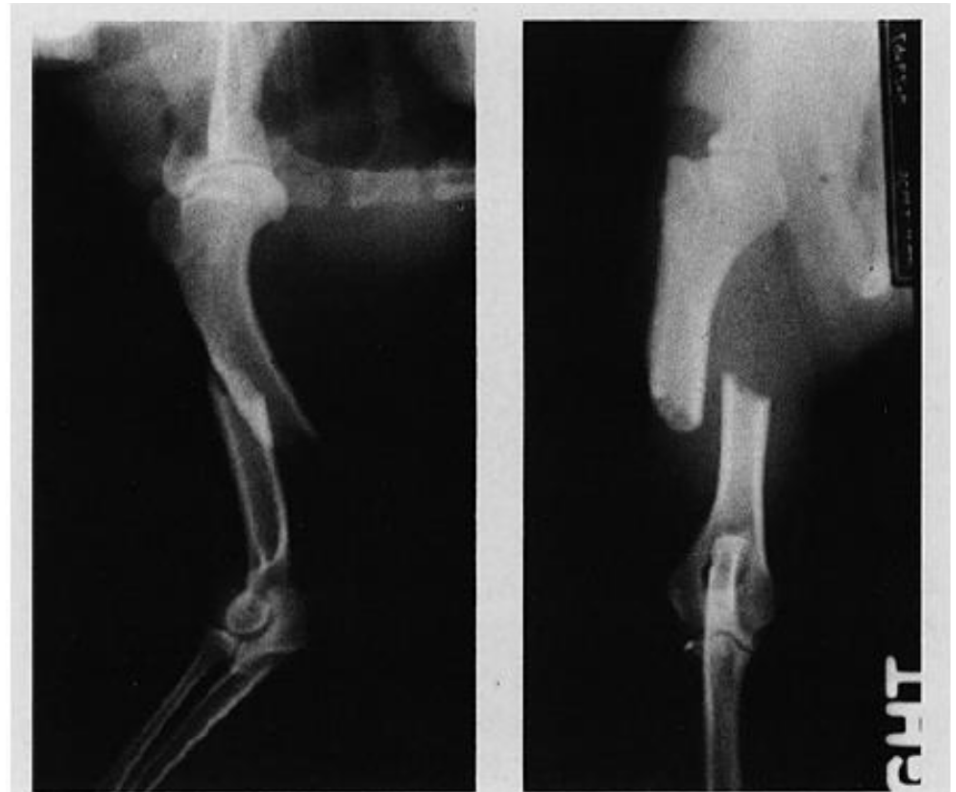
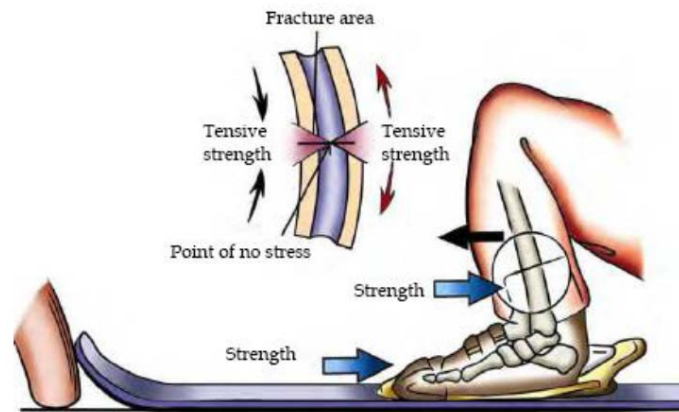
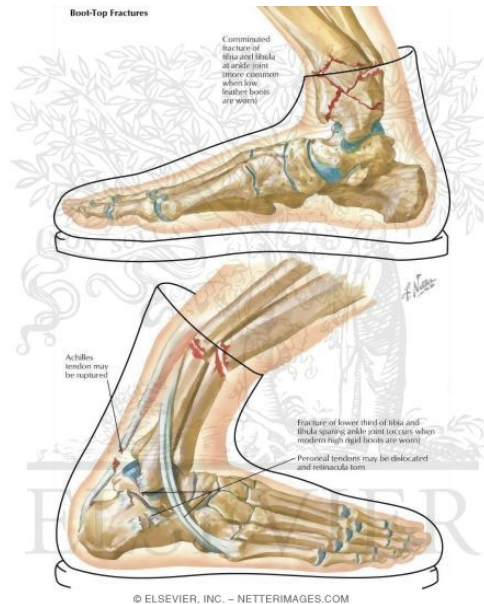


FIG. 12-12 Radiograph of a short oblique long-bone fracture probably produced by bending forces imposed on the midshaft humerus.

# Fraktografie (nauka o lomech)

- Poskytuje objektivní informace o reálném průběhu únavového procesu za daných podmínek
- Umožňuje rovněž posoudit, zda realizované laboratorní experimenty vhodně simulují reálné provozní podmínky v praxi.

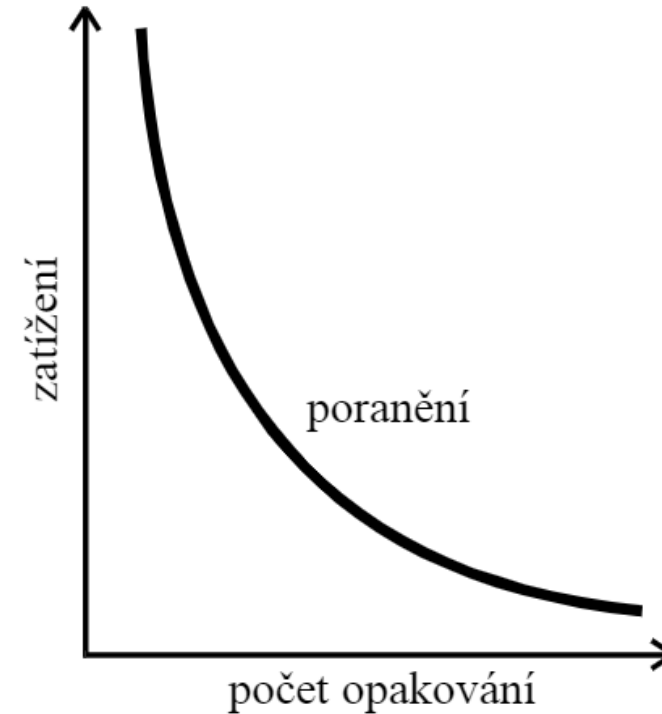
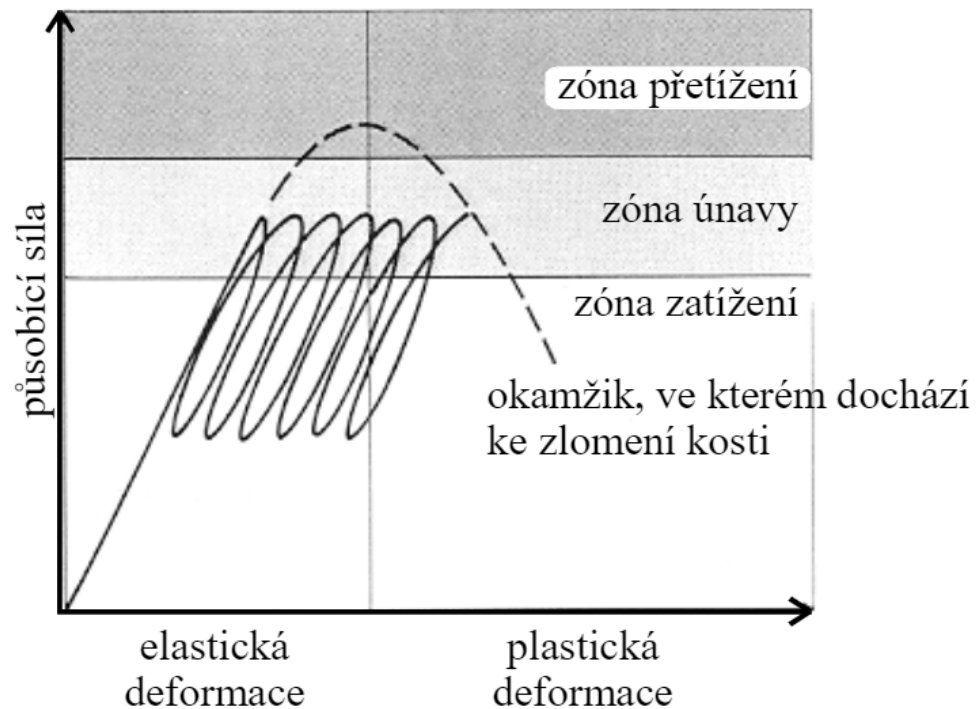


# Únavové chování kostí

Podmínky a vlivy porušení materiálu, vznik mezního stavu

# O co nám půjde?

1. Cyklické namáhání kosti (únava) – opakující se nevratné mikrodeformace
2. Kinetika únavových trhlin z hlediska lineární lomové mechaniky
3. Popis mechanismu vzniku únavové zlomeniny



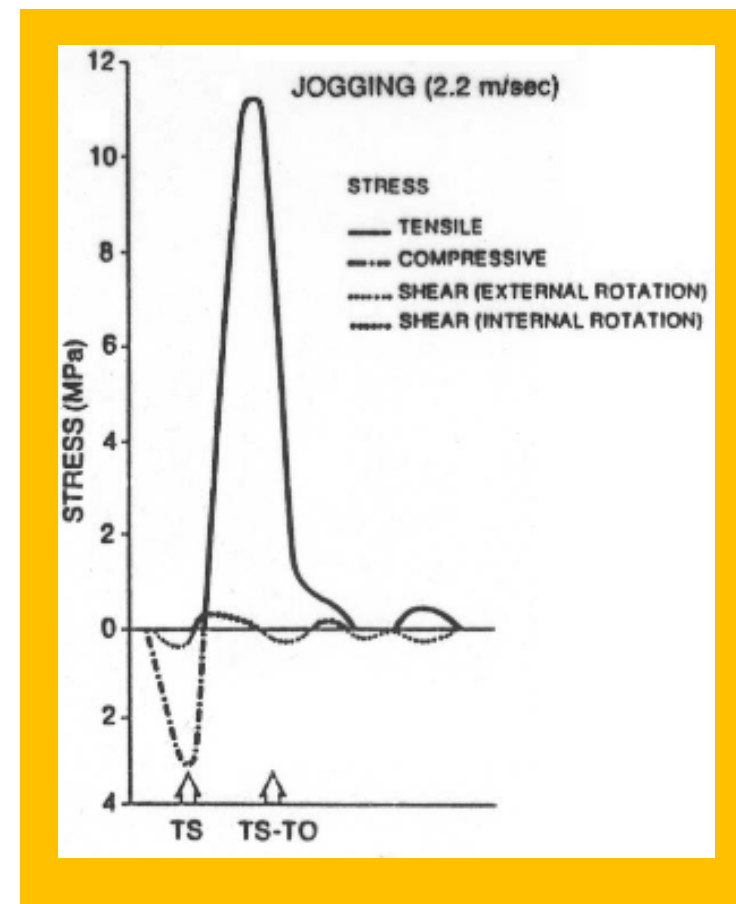
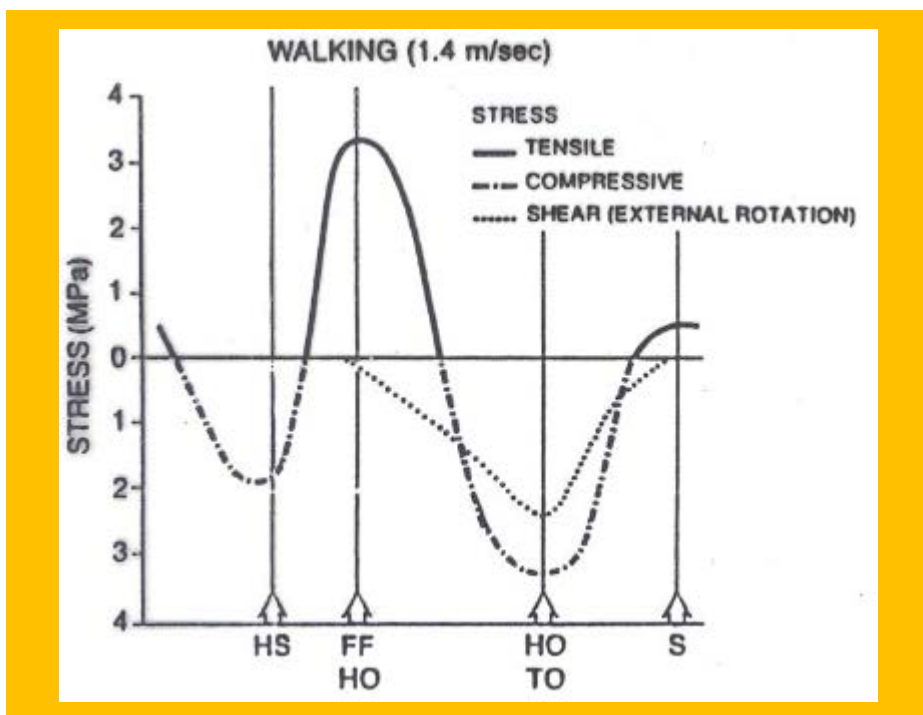
# Působení zátěže

- Působení zátěže na tibií při různé rychlosti pohybu

Chůze: 5 km.hod<sup>-1</sup>

x

Klus: 7.9 km.hod<sup>-1</sup>



# Základní lomová mechanika

Lomové chování materiálu

Zabývá se šířením a zastavováním tvorby trhlin – Lomový proces:

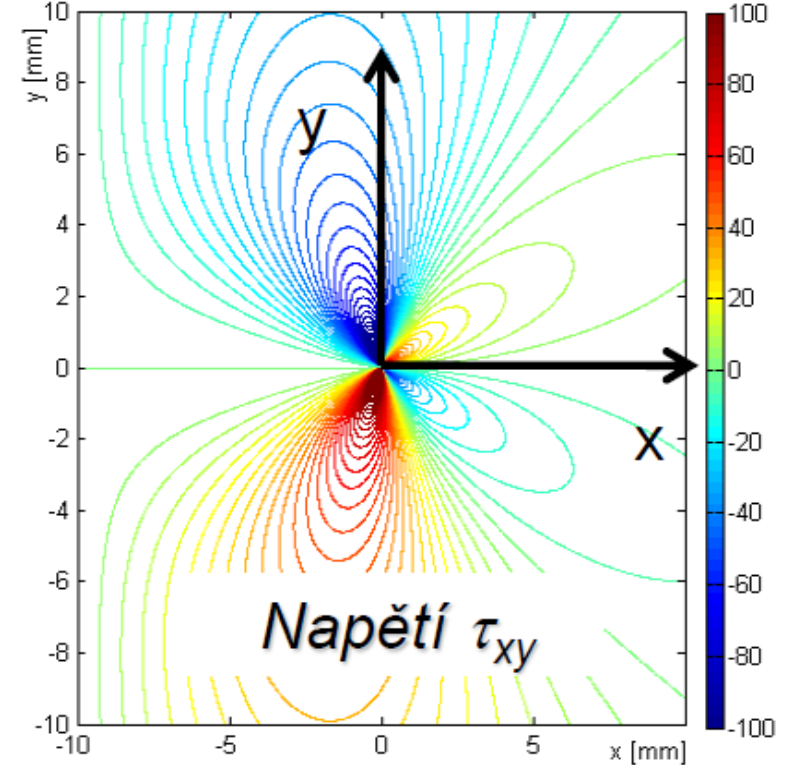
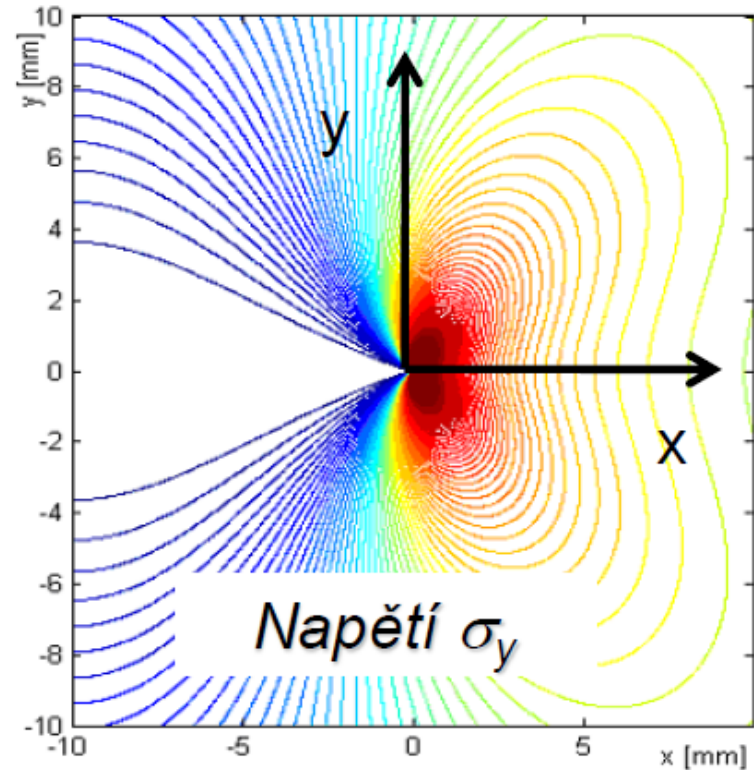
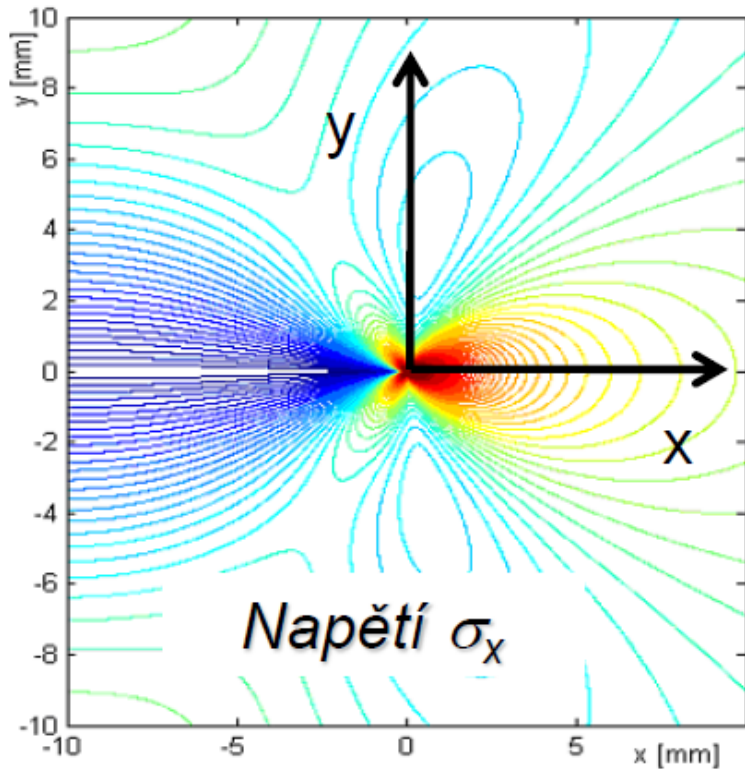
Vytváření lomových ploch v původně celistvém materiálu  $\Rightarrow$  etapa iniciace a etapa šíření trhliny

K porušení tělesa napomáhají vruby a působí napětí

Přístup přes lomovou mechaniku:

1. Posouzení nebezpečí porušení **křehkým lomem**  $\rightarrow$  zatěžování **NEMUSÍ** být dynamické, resp. cyklické!
2. Posouzení nebezpečí porušení **šířením únavových trhlin**  $\rightarrow$  zatěžování **MUSÍ** být dynamické, resp. cyklické!

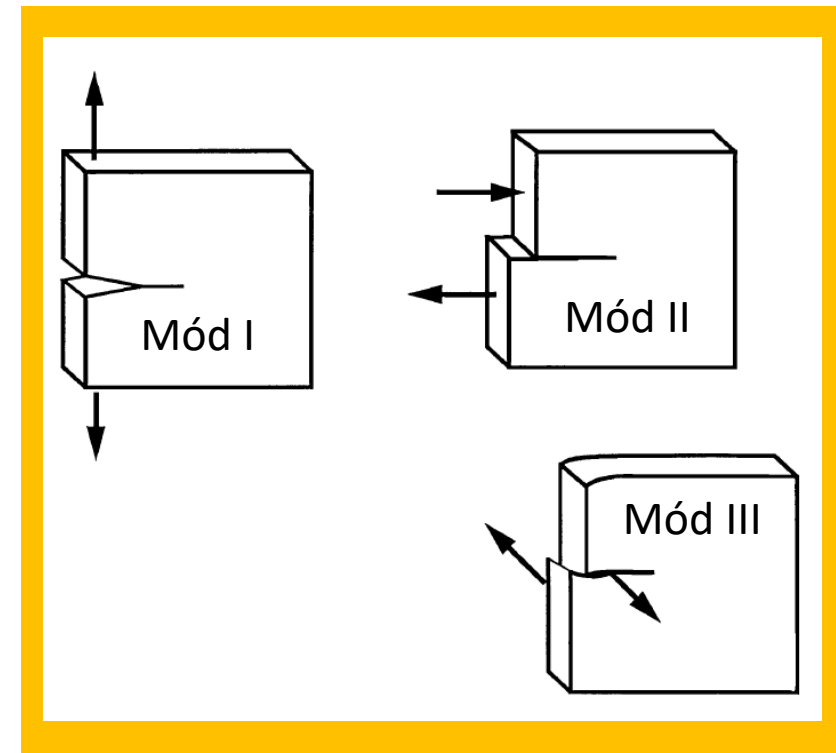
# Pole napětí a deformací v okolí trhliny



Růžička J.: MKP modelování šíření únavových trhlin, Diplomová práce, 2009

# Módy zatěžování tělesa s trhlinou

- Uvažujme pouze elastický stav napjatosti
  - Pro řešení stavu napjatosti v nízkém okolí čela trhliny se využívá princip superpozice.
  - Výsledné řešení je dáno superpozicí tří základních módů (způsobů) namáhání trhliny
1. **Tahový mód I:** růst trhliny je řízen tahovou složkou  $\sigma_y$  tenzoru napětí
  2. **Rovinný smykový mód II:** růst trhliny je řízen smykovou složkou  $\tau_{xy}$  tenzoru napětí
  3. **Antirovinný smykový mód III:** růst trhliny je řízen tahovou složkou  $\tau_{yz}$  tenzoru napětí



Módy zatěžování tělesa s trhlinou

# Analytický popis pole napětí a deformací

Pole napětí a deformací v blízkosti čela trhliny vyjadřujeme v polárním, resp. cylindrickém souřadném systému se středem na čele trhliny

Základní předpoklady matematického popisu:

- Vliv trhliny je ve vzdálených bodech zanedbatelný

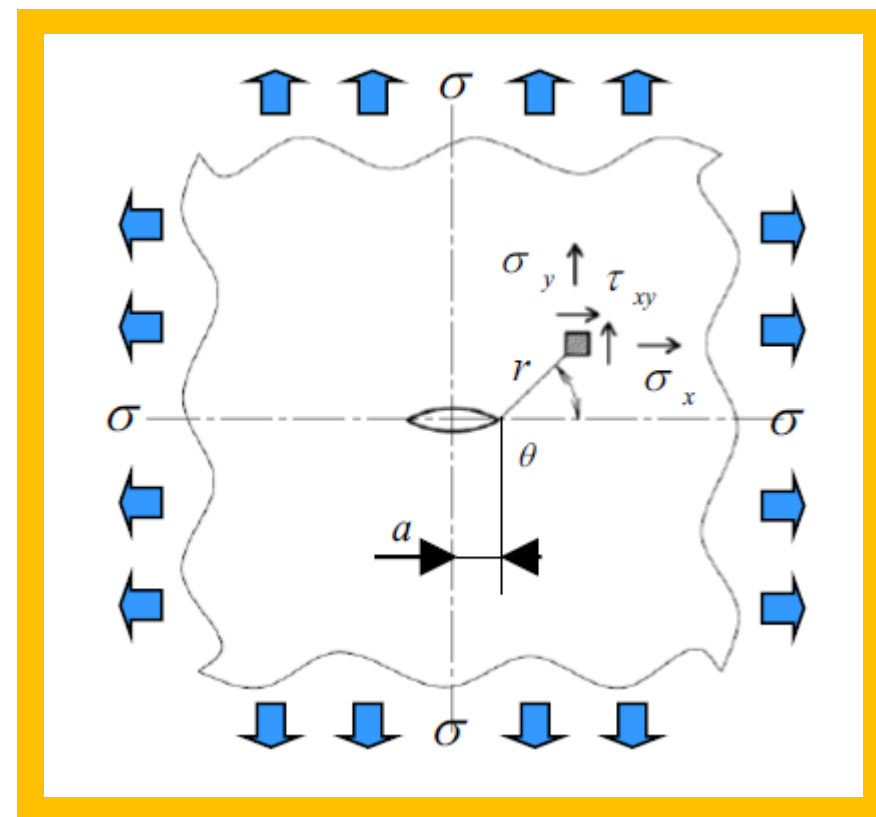
$$x \pm \infty \Rightarrow \lim \sigma_x(x, y) = \sigma$$

- V blízkosti čela dochází ke koncentraci napětí:

$$x \rightarrow \pm a \Rightarrow \sigma_y(x, y) > \sigma$$

- Lomové plochy trhliny jsou volné, když napětí:

$$\sigma_y(x, y) = 0 \text{ pro } y = 0, -a \leq x \leq a$$



Rovinná nekonečná deska

# Faktor intenzity napětí $K$

- Je jednou z nejčastěji používaných lomově-mechanických veličin, která popisuje stav napjatosti v blízkosti čela trhliny  $\Rightarrow$  **posouzení stability trhliny**
- Zahrnuje jak velikost vnějšího zatížení, tak i základní geometrické charakteristiky tělesa a trhliny
- Trhlinu lze považovat za velmi dlouhou excentrickou elipsu. Napětí v bodě poblíž špičky trhliny (tečky):  $\sigma_{ij,k}(r, \theta) = \frac{\sigma_k \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cdot f_{ij,k}(\theta)$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi \cdot r)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_y(r, \theta)$$

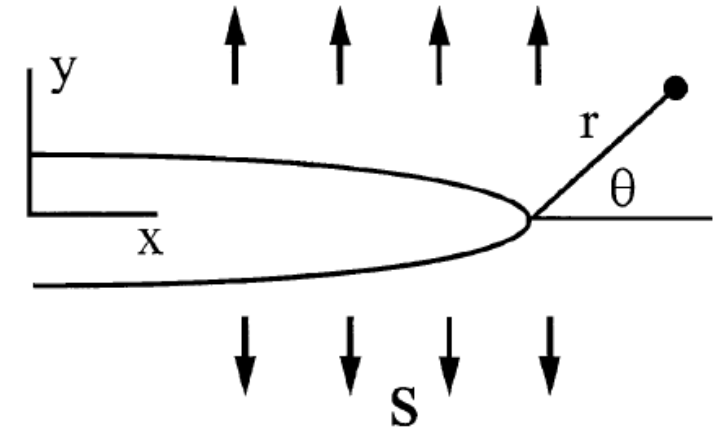
$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi \cdot r)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_{xy}(r, \theta)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi \cdot r)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_{yz}(r, \theta)$$

$$K_I = \sigma(\pi \cdot a)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_I(a, W, L, \dots)$$

$$K_I = \tau(\pi \cdot a)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_I(a, W, L, \dots)$$

$$K_I = \tau(\pi \cdot a)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_I(a, W, L, \dots)$$



Funkce  $Y_i(a, W, L, \dots)$  respektují konečné rozměry tělesa a označují se jako tzv. tvarové resp. korekční funkce

$$[K] = MPa \cdot m^{\frac{1}{2}}$$



# Mezní stav – LOM

- Okamžik lomu je možné vyjádřit pomocí  $K$ :

$$K_{Ic} = Y \cdot \sigma_c \sqrt{\pi a_c}$$

$$K_{Ic} < K \rightarrow \text{LOM}$$

- Veličinu  $K_{Ic}$  nazýváme **lomová houževnatost**
  - Charakterizuje odpor materiálu proti vzniku křehkého lomu
- Hodnota  $K_{Ic}$  závisí na materiálu a okolním prostředí

Material	$K_{Ic}$ , MPa-m <sup>1/2</sup>
2024 Aluminum	20–40
4330V Steel	86–110
Ti-6Al-4V	106–123
Concrete	0.23–1.43
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ceramic	3–5.3
SiC ceramic	3.4
PMMA polymer	0.8–1.75
Polycarbonate polymer	2.75–3.3
Cortical bone	2.2–6.3

# Definice mezního stavu

Mezní stav je takový ze zatěžovacích stavů tělesa, při němž se kvalitativně mění schopnosti tělesa plnit některou z požadovaných funkcí, příp. Těleso tuto schopnost zcela ztrácí  $\Rightarrow$  porušení lomem

Faktory mající vliv na chování trhlin:

- Vnější zatížení (charakter a velikost), zbytkové pnutí –  $\sigma$
- Konfigurace trhliny (poloha, tvar, velikost, počet) –  $a$
- Tvar a rozměry – okrajové podmínky –  $W$
- Mechanické vlastnosti materiálu –  $E$

$\Rightarrow$  Okamžitý stav tělesa je funkcí těchto faktorů:  $F = F(\sigma, a, W, E)$

# Definice mezního stavu

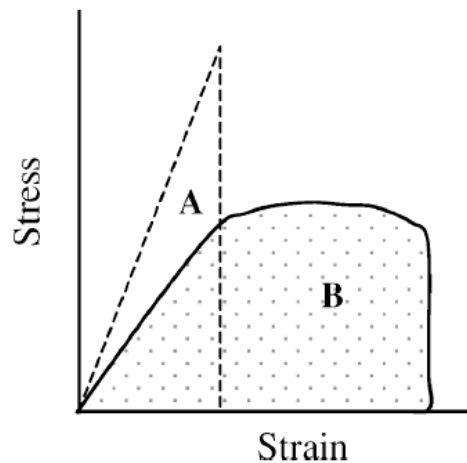
- Základním požadavkem na veličinu  $F$  je **geometrická invariantnost** -> umožněno změřit její kritickou hodnotu  $F_c$  pomocí jednoduchých zkušebních vzorků
- Mezního stavu dané konstrukce – podmínka **nestabilního šíření trhliny** – vyrobené z materiálu ( $m$ ) a zatížené při podmínkách  $T$  je dosaženo pokud veličina  $F$  charakterizující okamžitý stav této konstrukce s trhlinou **vyhovuje nerovnici:**

$$F \geq F_c$$

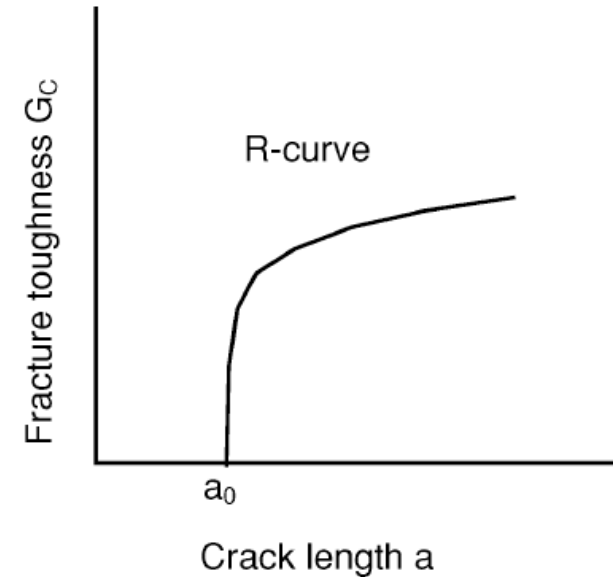
- Nejčastěji používané veličiny  $F$  pro vyjádření stability trhliny jsou:
  1. Faktor intenzity napětí  $K$  (Stress intensity factor)
  2. Rozevření trhliny COD (Crack opening displacement)
  3. Hnací síla trhliny  $G$ , resp.  $J$ -integrál

# Houževnatost kosti

- je schopnost kostní tkáně absorbovat energii během procesu selhání.
- Nejčastější používané metody pro stanovení houževnatosti kosti:
  - Energie do lomu (Energy to fracture)
  - Lomová houževnatost (Fracture toughness)
    - Charakterizovaná parametry:  $K_{Ic}$  ;  $G_c$



Oba parametry představují vnitřní vlastnosti materiálu bez ohledu na geometrii a velikosti vzorků.



Typická křivka napětí-deformace pro (A) křehké a (B) tvárné materiály

Schematické znázornění stoupající R-křivky pozorované u lidské kortikální kosti:  $a_0$  je prahová délka trhliny pro šíření trhliny.

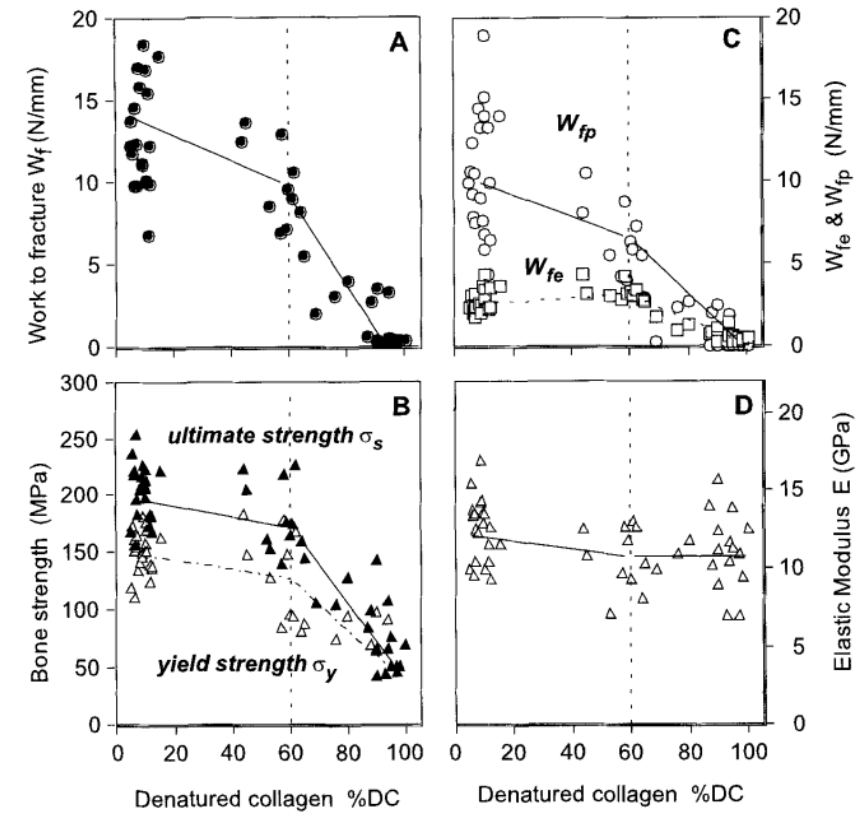
# Přehled hodnot lomové houževnatosti kosti

Bone type	$K_{Ic}$ , MPa m <sup>1/2</sup>	$G_c$ , Jm <sup>-2</sup>	Source
Mode I, transverse fracture			
Bovine femur	5.49	3100–5500	Melvin and Evans (1973)
Bovine tibia	2.2–4.6	780–1120	Bonfield and Datta (1976)
Equine metacarpus	7.5	2340–2680	Alto and Pope (1979)
Human tibia	2.2–5.7	350–900	Norman et al. (1992)
Human femur (young and old)	5.1 and 4.3	2262 and 1712 (derived from $K_{Ic}$ and E)	Wang et al. (2002)
Mode I, longitudinal fracture			
Bovine femur	3.21	1388–2557	Melvin and Evans (1973)
Bovine tibia	2.8–6.3	630–2238	Behiri and Bonfield (1984)
Human femur	2.2–5.7	350–900	Norman et al. (1992)
Mode II			
Human tibia	2.2–2.7	365	Norman et al. (1992)

# Faktory ovlivňující kostní houževnatost

## 1. Kompoziční:

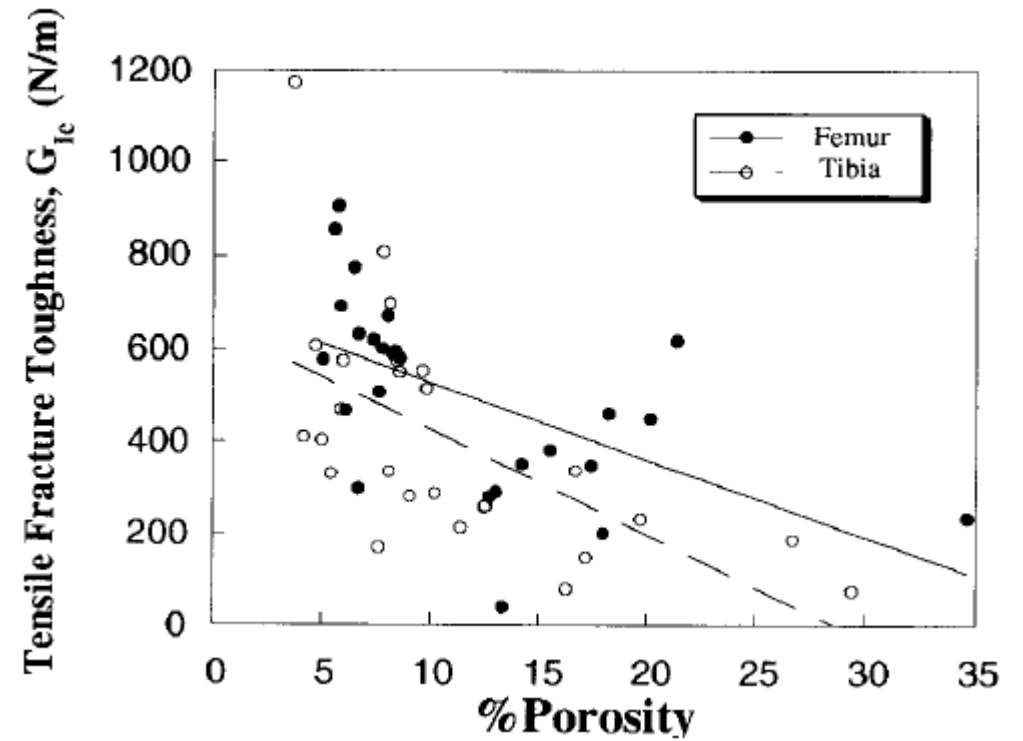
- Kostní hustota:  $\uparrow$  hustota  $\Rightarrow$   $\downarrow$  houževnatost
- Minerály:  $\uparrow$  minerálů  $\Rightarrow$   $\uparrow$  křehkost  $\Rightarrow$   $\downarrow$  energie do lomu
- Kolagen ([https://doi.org/10.1016/S0736-0266\(01\)00047-X](https://doi.org/10.1016/S0736-0266(01)00047-X))
  - Cross-link
- Tekutá fáze – obsah vody v kosti: dehydratované kosti projevují zvýšenou tuhost a pevnost, avšak sníženou houževnatost



# Faktory ovlivňující kostní houževnatost

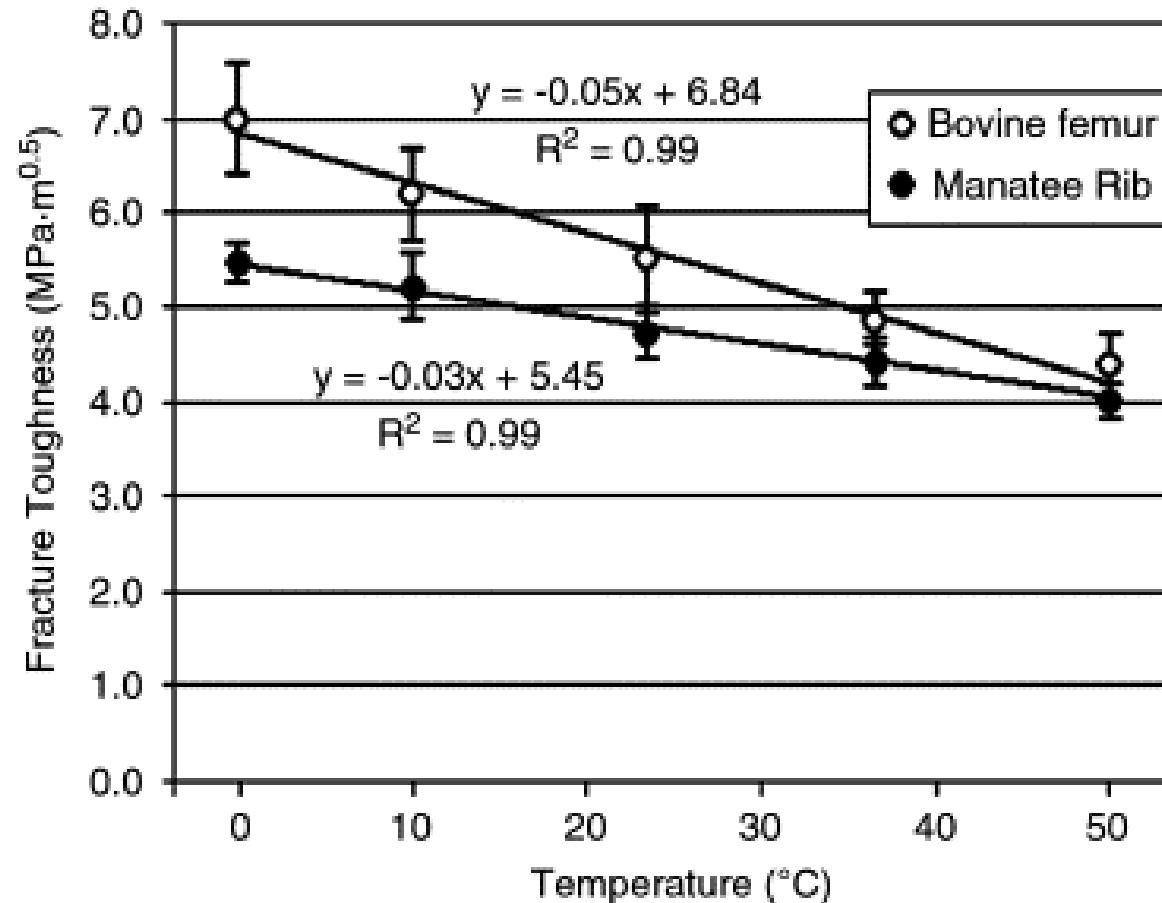
## 2. Mikrostrukturální

- Cementová linie
- Osteony
- Porozita
- Orientace
- Mikropoškození



# Faktory ovlivňující kostní houževnatost

3. Teplota: teplota má významný vliv na lomovou houževnatost kompaktní kosti.

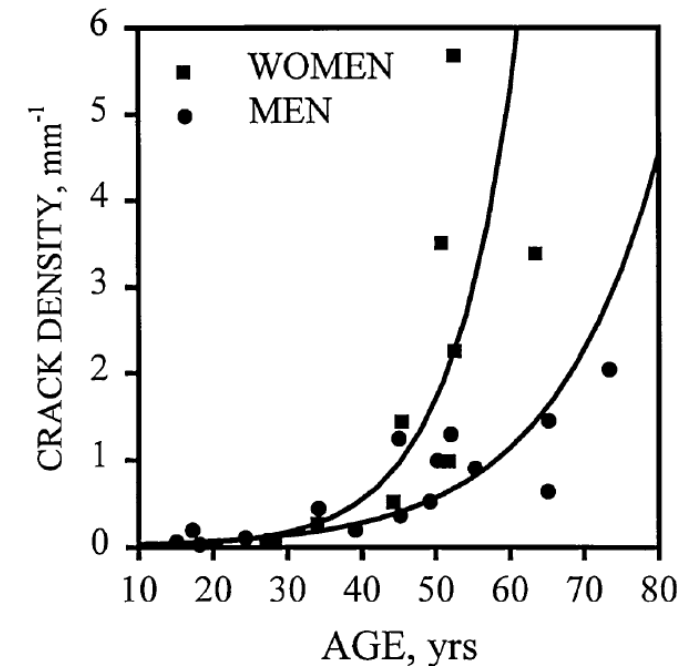




# Faktory ovlivňující kostní houževnatost

## 4. Věk (Stáří)

- Houževnatost kosti klesá se zvyšujícím se věkem
- Věk ovlivňuje i ostatní faktory
  - Kolagenová síť ([https://doi.org/10.1016/S8756-3282\(01\)00697-4](https://doi.org/10.1016/S8756-3282(01)00697-4))
  - Porozita
  - Heterogenita v kosti



# Maximální přípustná velikost trhliny

Pro lidskou kost (Kompaktní část tibie):  $K_{Ic} \approx 4 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$  (Norman et kol. 1995)

Uvažujme půlkruhovou prasklinu o poloměru  $r$ :

$$K_I = 2(a/\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma \cdot \left[ 1.211 - 0.189(\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Pro  $\theta = 0$ :

$$a_c = \frac{0.238\pi K_{Ic}^2}{\sigma^2}$$

Za předpokladu:  $E = 20 \text{ GPa}$ ;  $\varepsilon = 2000 \mu\varepsilon \Rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon = 40 \text{ MPa}$

$$a_c = 0.238\pi \left( \frac{4^2}{40^2} \right) = 7.5 \text{ mm}$$

# Energie potřebná pro šíření trhliny

$$\frac{dW_c}{da} = \frac{dU}{da}$$

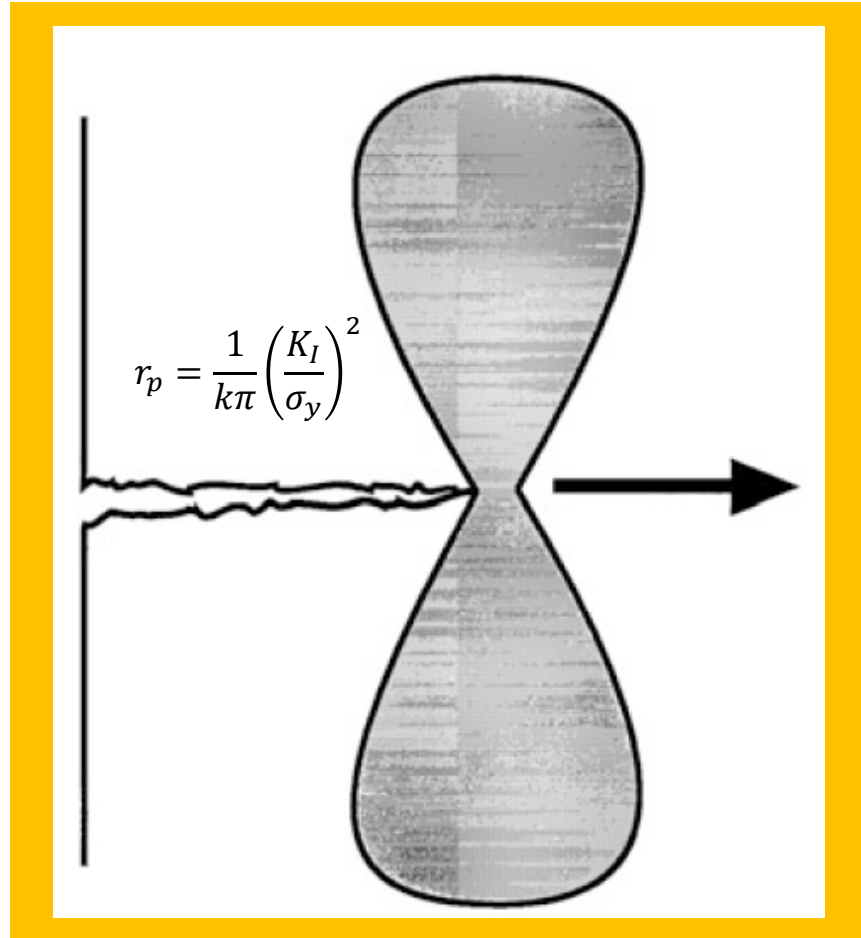
$$G = \frac{dU}{da} = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad \text{Strain energy release rate } (G_I = K_I^2 / E)$$

$$R = \frac{dW_c}{da} \quad \text{Crack growth resistance}$$

Pro šíření trhliny musí platit:  $G \geq R$

Finkel (1985) poukázal na to, že i když jsou trhliny poháněny deformační energií uloženou v hmotě pod tlakem, samy o sobě jsou bez setrvačnosti, a jsou tedy schopné okamžitě se otáčet jakýmkoli směrem, který slibuje elastické energii.

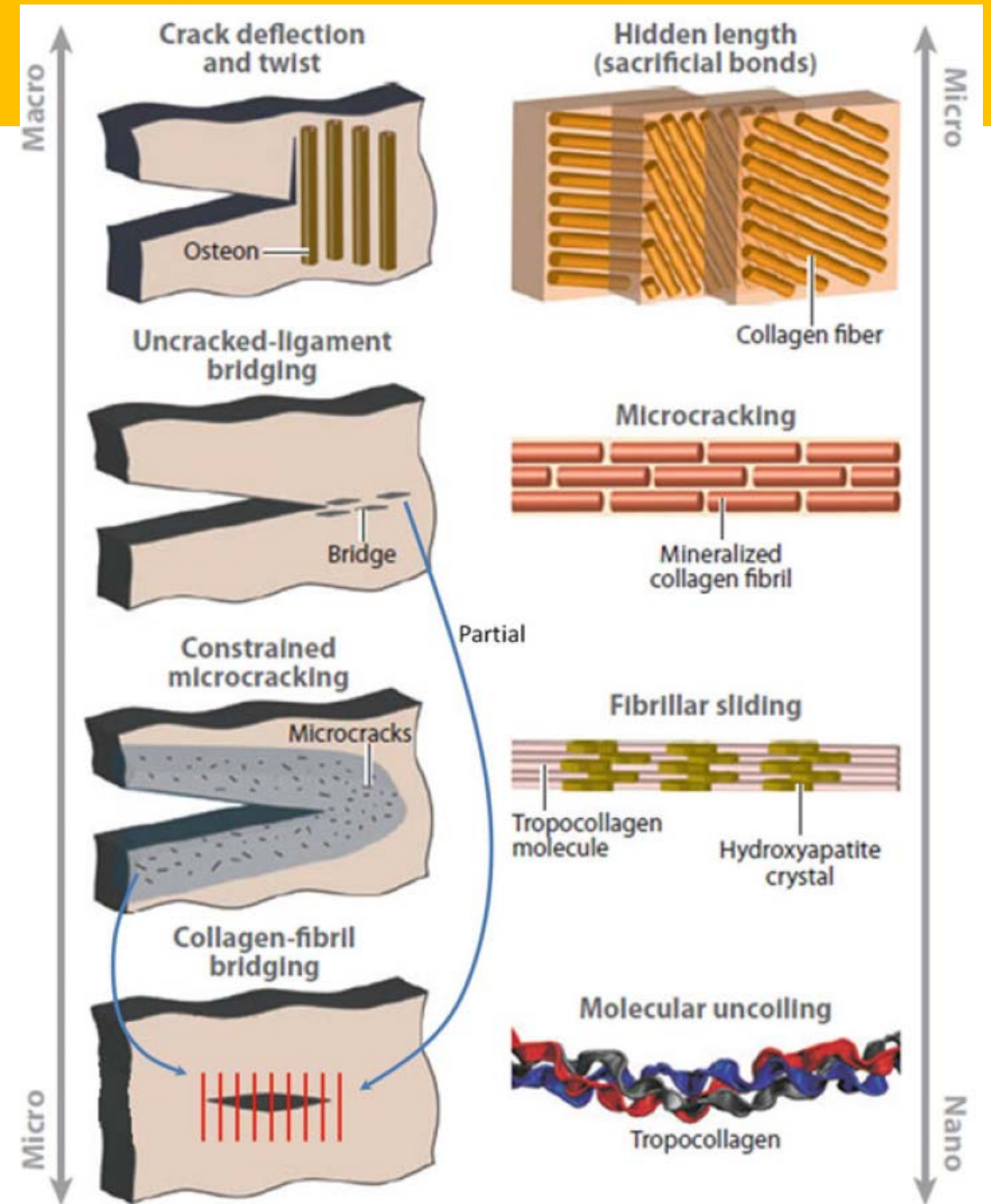
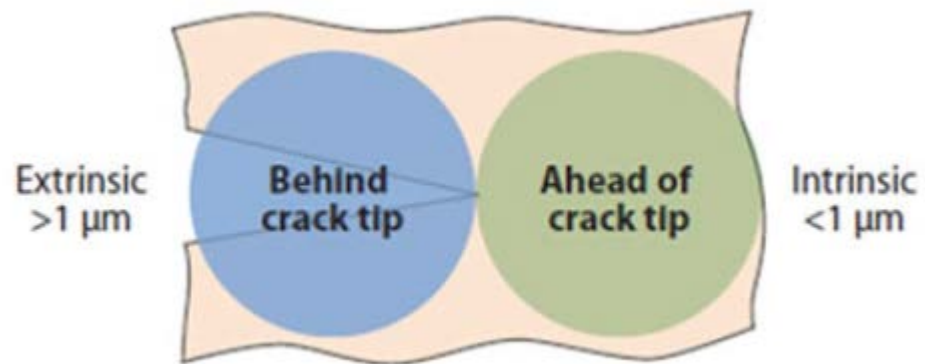
# Za hranice lineární teorie



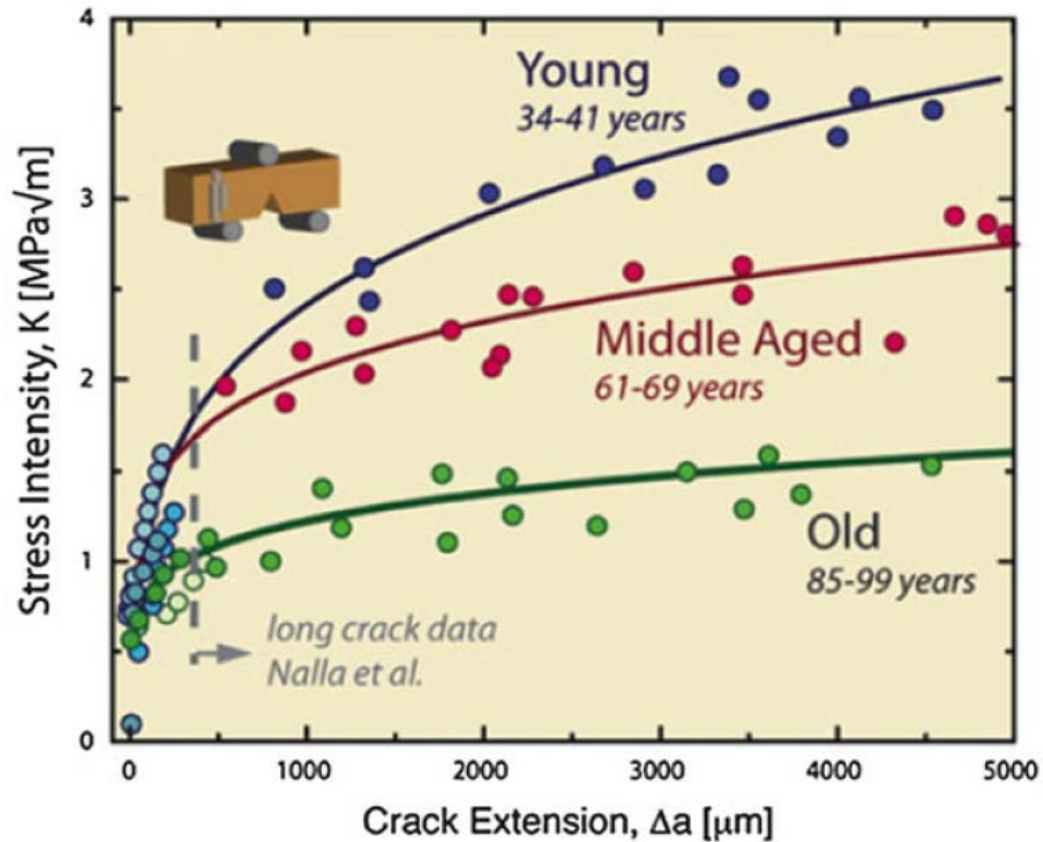
Plastická zóna na náběžné hraně  
šířící se trhliny

# Za hranice lineární teorie

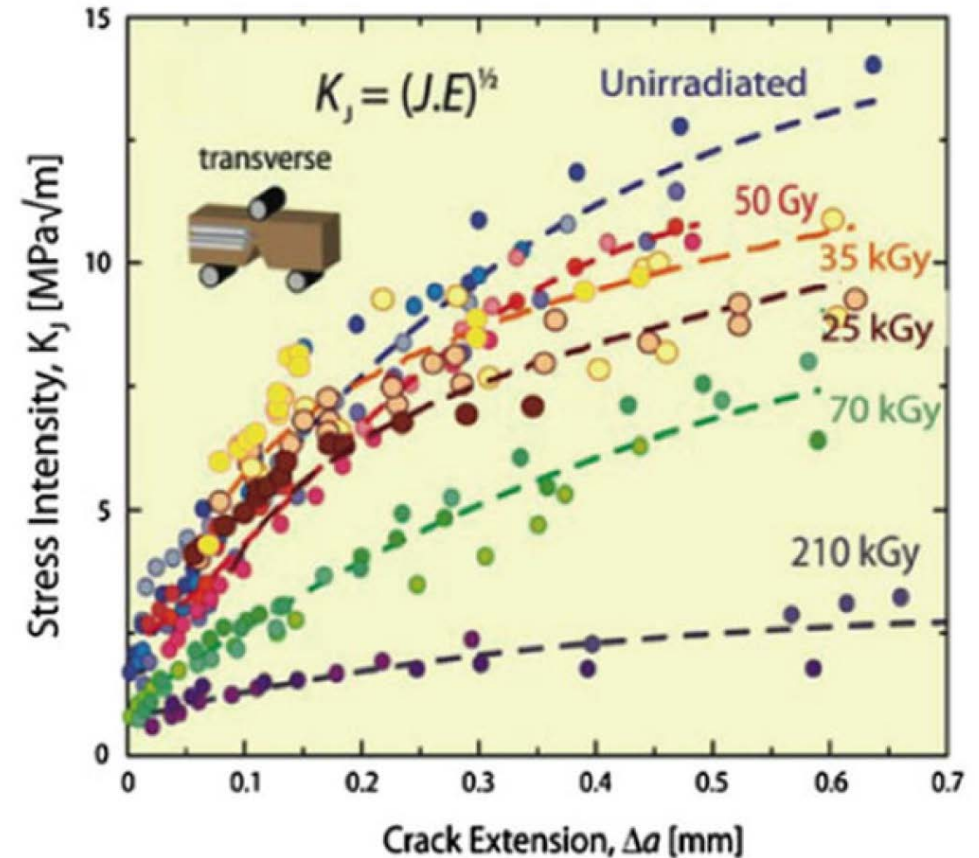
- Šíření trhliny v kosti se zpomaluje (nebo zrychluje!) změnami materiálu před nebo za špičkou šířící se trhliny.



# Za hranice lineární teorie



Nárůst ohybové lomové houževnatosti s délkou trhlin je silně ovlivněn věkem



Zvýšení ohybové lomové houževnatosti s délkou trhlin je silně sníženo radiačním poškozením kolagenové matrice

# Mechanismus kostní zlomeniny

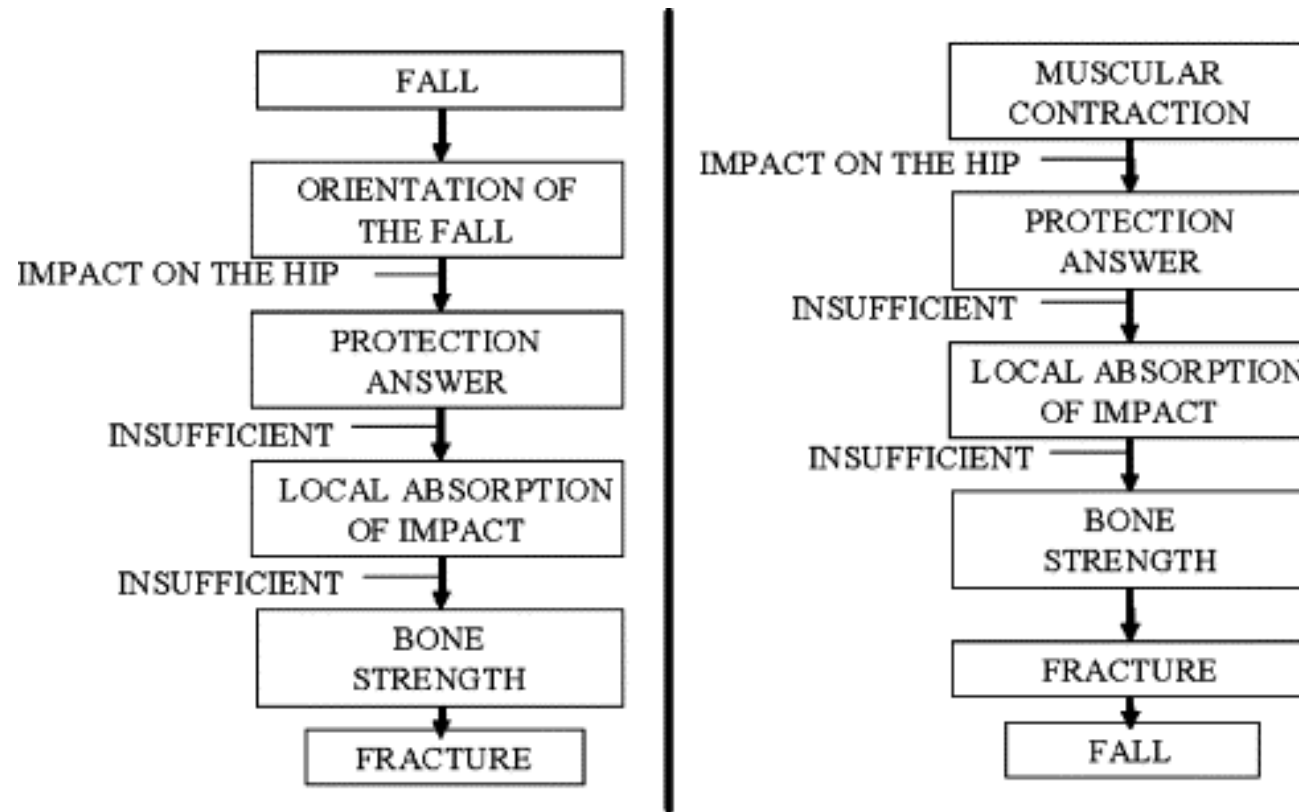


Schéma dvou obvyklých mechanismů zlomeniny kostí.

# S-N diagram kosti

- Křivka není asymptotická jako u jiných materiálů, kdy opakované zatížení na určité hranici nezpůsobí poškození
- K únavové zlomenině dojde, pokud frekvence zatěžování znemožní remodelaci, která by zabránila zlomení
- Caler a Carter (1989) prokázali, že únavová životnost lidské femorální kůry je delší v tlaku než v tahu.

$$N_f = 1.445 \cdot 10^{53} / S^{14.1} \quad (\text{tah})$$

$$N_f = 9.333 \cdot 10^{40} / S^{10.3} \quad (\text{tlak})$$

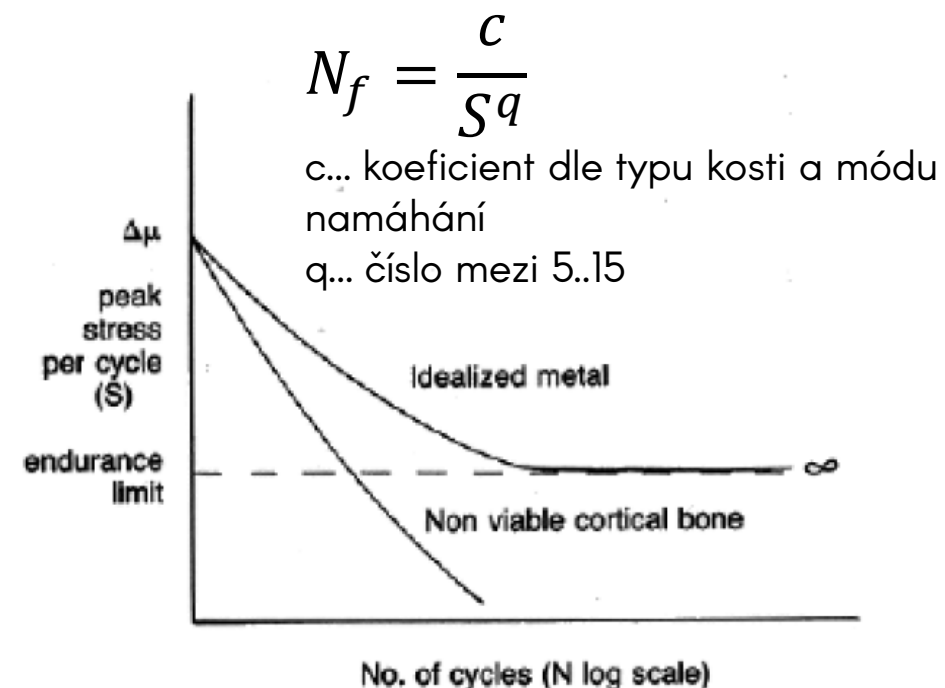


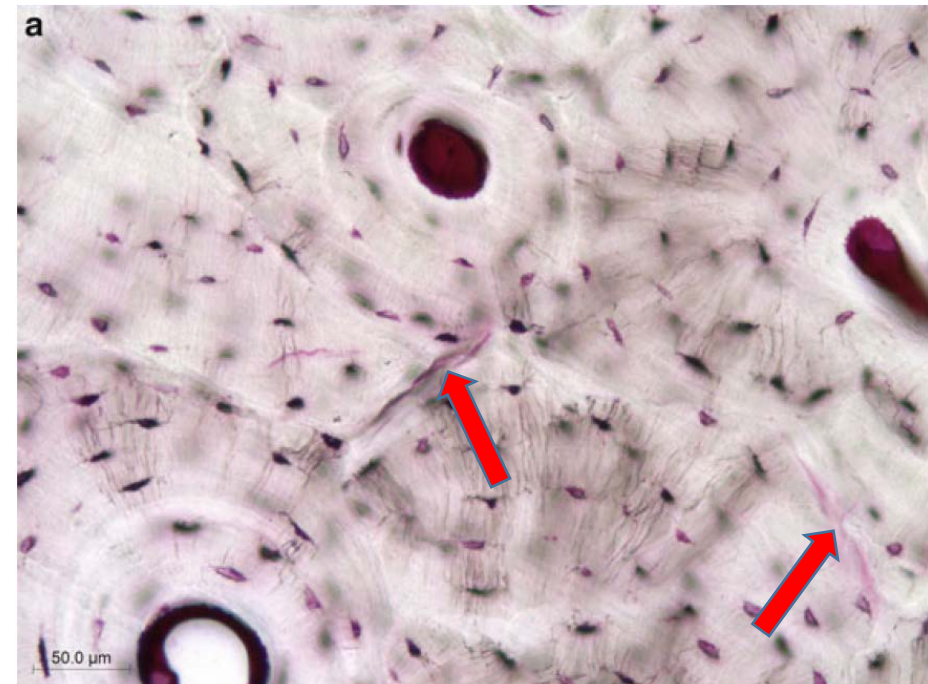
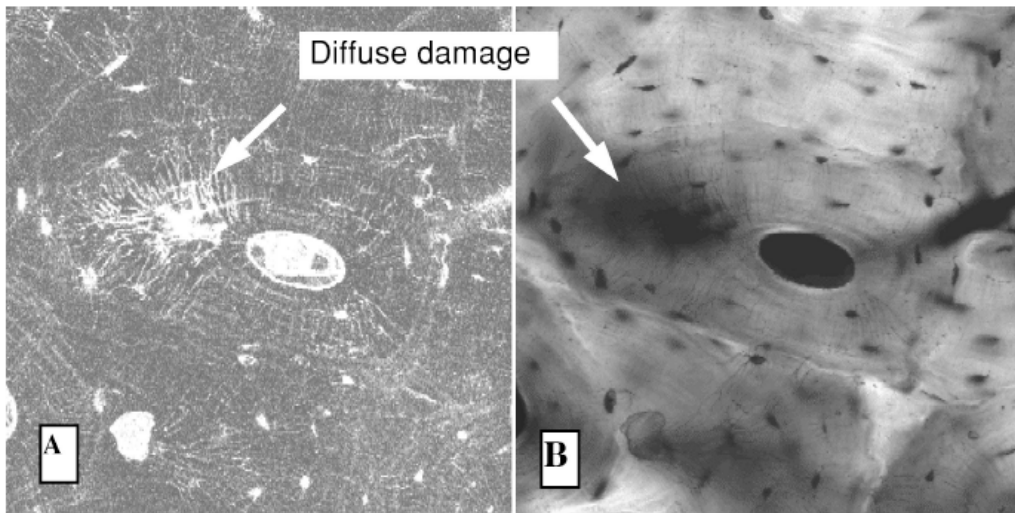
FIG. 12-21 S-N curves for an idealized metal and for cortical bone show a marked difference in fatigue behavior. At stresses below the endurance limit, the metal can be cycled endlessly without experiencing failure. Dead cortical bone, however, has been shown to be susceptible to microdamage and ultimate fatigue failure at small load magnitudes well below the ultimate strength of bone  $\sigma_u$  and therefore is thought not to demonstrate a recognizable endurance limit. (Carter DR: The Fatigue Behavior of Compact Bone. PhD dissertation, Stanford University, 1976)



# Formy poškození kosti

V kosti lze identifikovat tři odlišné formy poškození, které se liší podle jejich morfologie, mechanických a fyziologických rolí a podle způsobu jejich zahojení.

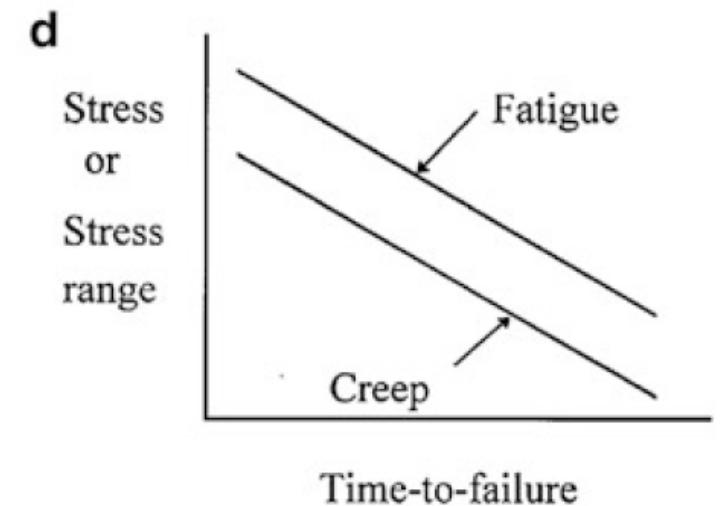
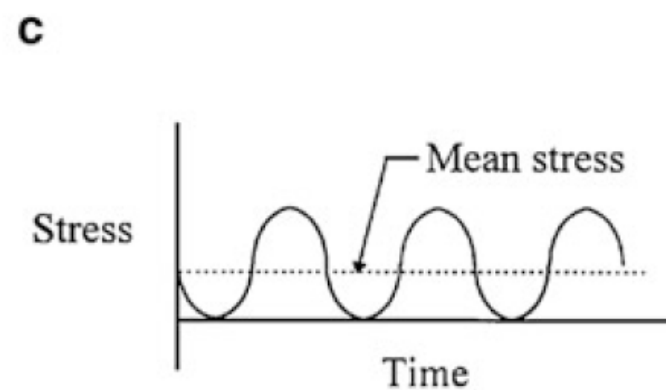
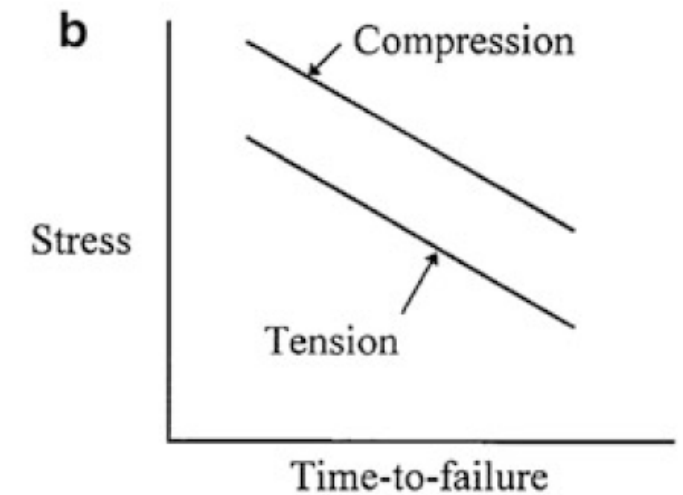
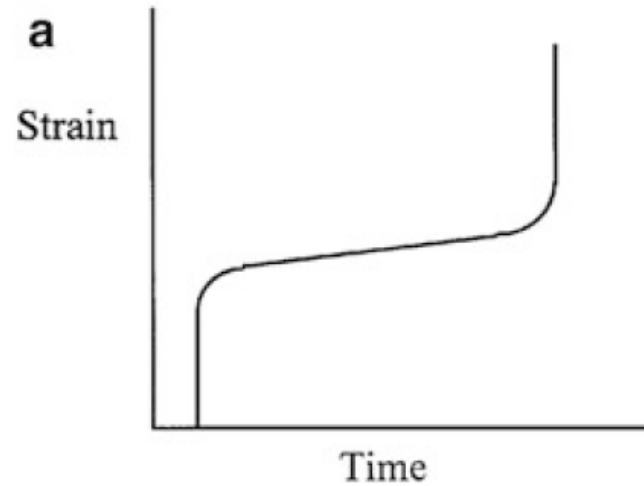
1. Lineární mikrotrhliny
  - 40–100  $\mu\text{m}$  „dlouhé“, 2  $\mu\text{m}$  „široké“
  - Obvykle opraveny procesy kostní remodelace
2. Difúzní poškození (Diffuse damage)
3. Makrotrhliny



# Creepové chování kostí

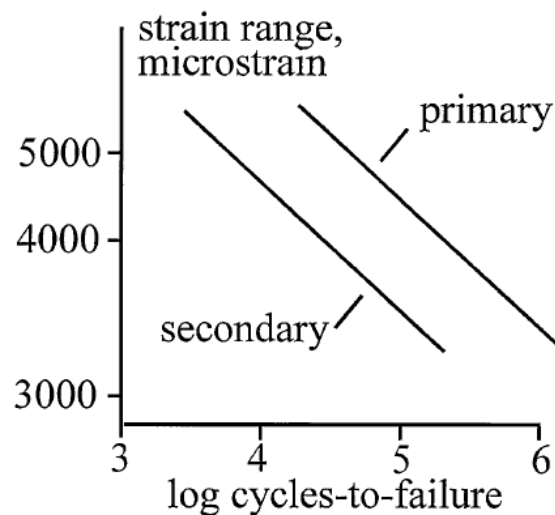
$$t_f = A/\sigma^B$$

- (a) Typical plot of strain vs. time for a cortical bone creep test to failure. The initial elastic response is followed by relatively constant strain during slow damage accumulation, eventually leading to rapid damage accumulation and failure.
- (b) Log-log plot of applied stress vs. creep time-to-failure is linear with different behaviors for compression and tension.
- (c) Cyclic loading from zero to a tensile or compressive stress produces a nonzero mean stress that superimposes creep effects on fatigue behavior.
- (d) Comparison of creep and fatigue responses for human femoral bone.

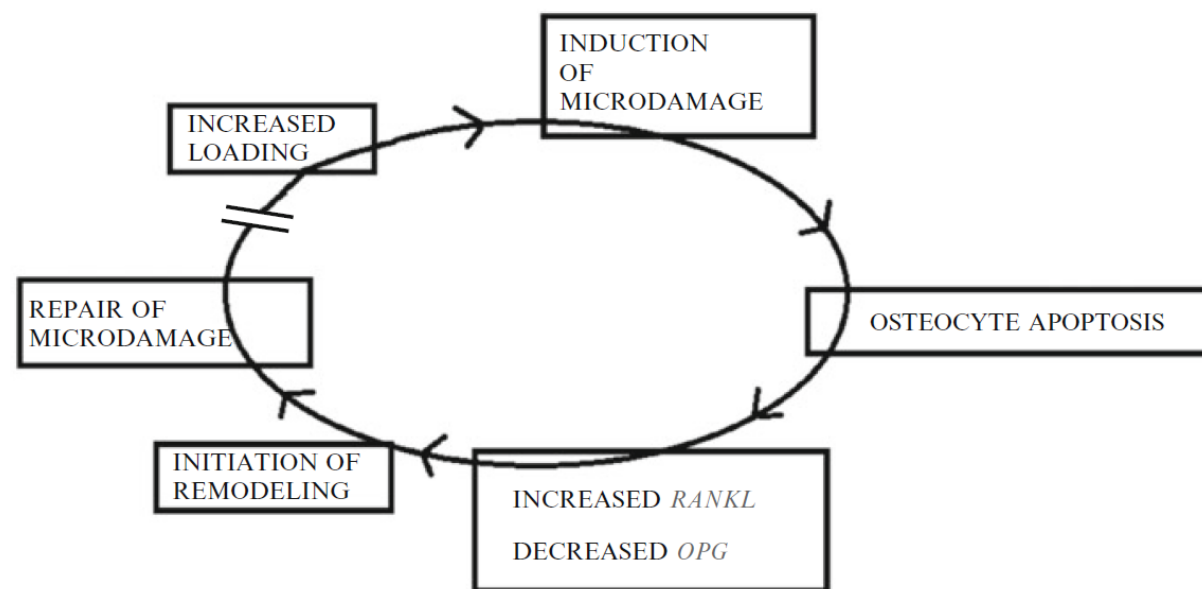


# Role únavy při aktivaci kostní remodelace

- Jednou z hlavních funkcí kostní přestavby je „oprava“ únavového poškození
- Patten et kol.: únavová životnost při maximálním rozmezí deformace 2 000  $\mu\epsilon$  je pro lidský femur 4–10 milionů cyklů



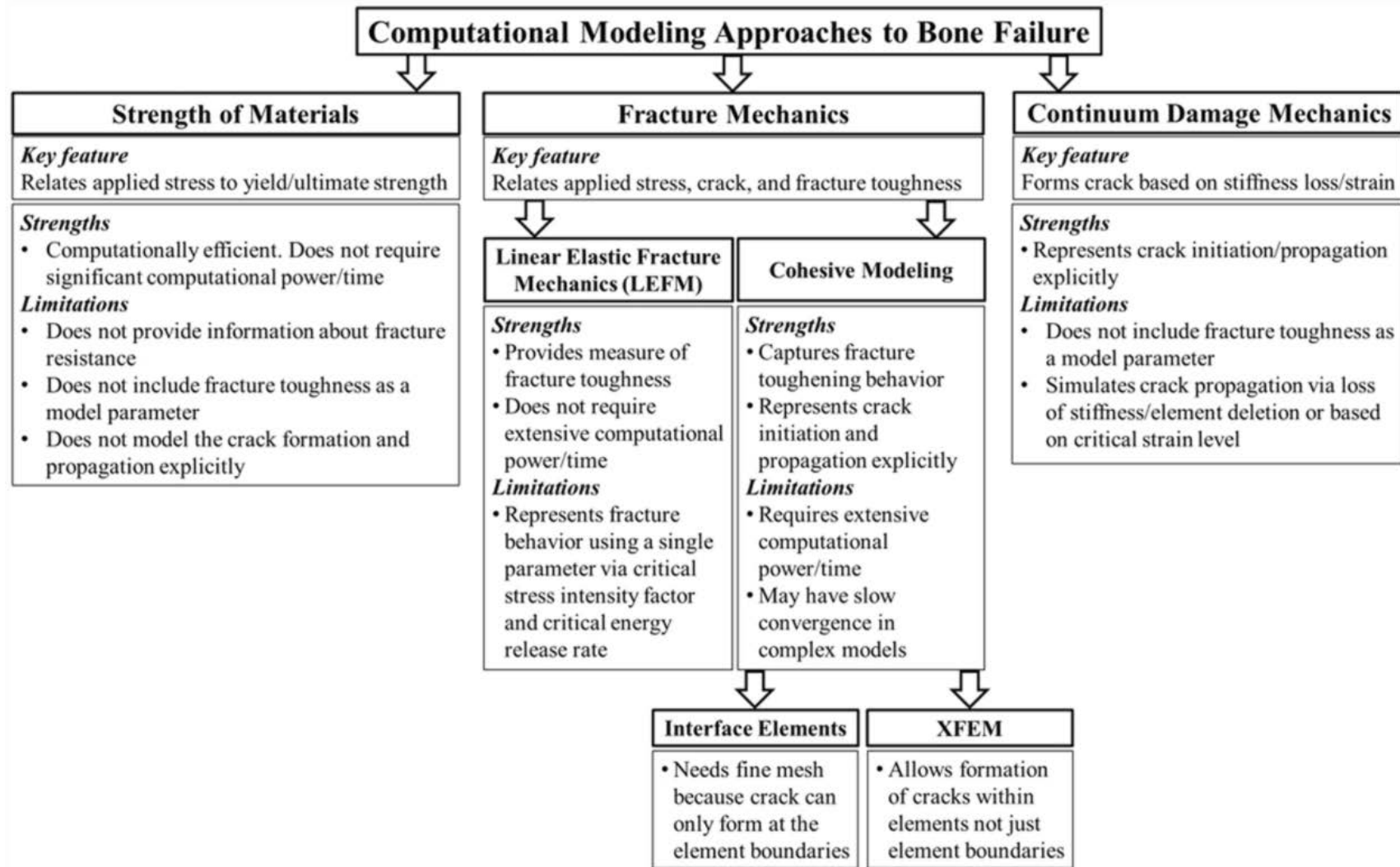
Účinky remodelace na únavovou životnost hovězí kosti. Pro daný rozsah deformace měly vzorky primární kosti delší únavovou životnost než vzorky složené ze sekundární kosti.



Kroky v cílené opravě mikrotrhliny

# Úvod do modelování šíření trhliny v kosti či lomu kosti

# Přístupy pomocí výpočetního modelování



# Kritéria pro kostní zlomeniny

1. Von Mises–Hencky

$$\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \sigma_c$$

→ Failure results when the equivalent Von Mises–Hencky stress equals the ultimate strength of the material

2. Hoffmanovo kritérium pro křehké materiály

$$C_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 = 1$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{2\sigma_t\sigma_c}; C_4 = C_5 = C_6 = \frac{1}{\sigma_t} - \frac{1}{\sigma_c}$$

3. Mohr–Coulomb kritérium

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} = 1$$

4. Tsai–Wu kvadratické kritérium –

$$f(\sigma_k) = F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 \quad \text{for } i, j, k = 1, 2 \dots 6$$

Podmínka platnosti:  $F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0$

# Kritéria pro kostní zlomeniny

5. Cowinovo kritérium – pro porézní materiály a/nebo kompozity – na základě vlastností homogenizované mikrostruktury.

$$f(\mathbf{A}, \sigma, n) = f(Q\mathbf{A}Q^T, Q\sigma Q^T, n) = 1 \quad \forall Q \text{ ortogonální tenzory}$$

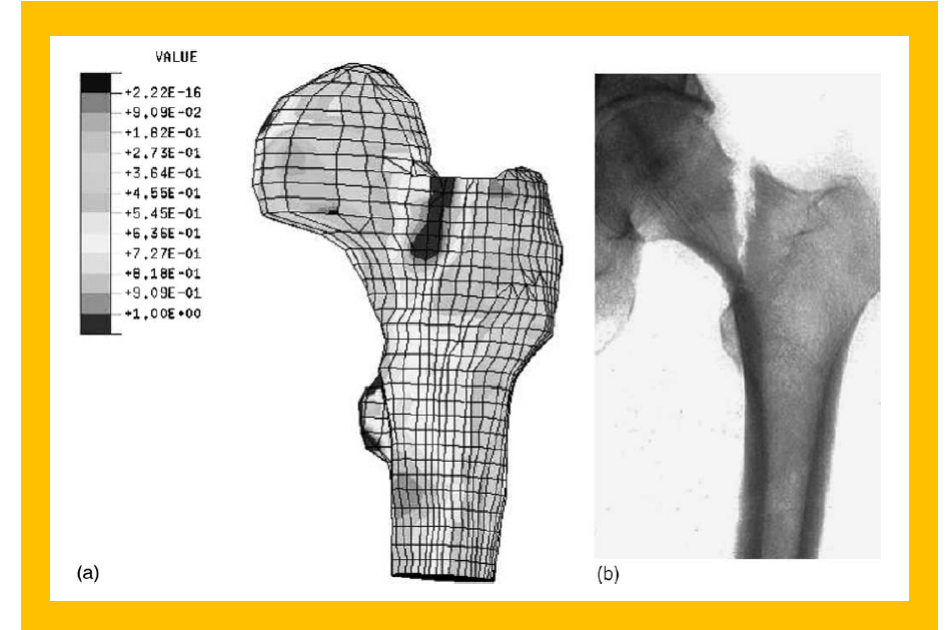
$$G_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1$$

$$G_{ii} = \frac{1}{\sigma_i^+} - \frac{1}{\sigma_i^-} \quad F_{iiii} = \frac{1}{\sigma_i^+ \sigma_i^-}$$

$$F_{iijj} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_i^+ \sigma_i^-} + \frac{1}{\sigma_j^+ \sigma_j^-} - \frac{1}{2\sigma_{ij}^2} \right) - g(\mathbf{A})$$

# Modelování traumatických a patologických zlomenin

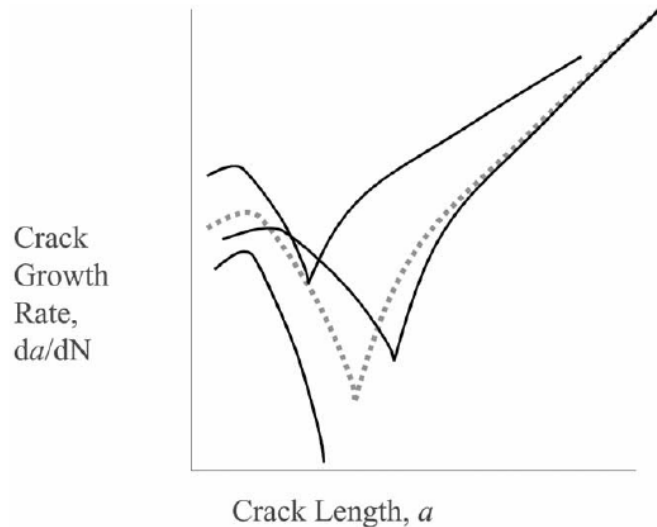
- Vysoká poptávka po vývoji neinvazivních metodách hodnocení rizik zlomenin a jejich prevence
- Metodika obvykle zahrnuje:
  1. dual-energy X-ray absorptiometry (DXA) nebo quantitative computed tomography (QCT)
  2. Metoda konečných prvků (FEA)





# A crack growth model for the simulation of fatigue in bone

D. Taylor <sup>a,\*</sup>, T.C. Lee <sup>a,b</sup>



Schematické znázornění variace rychlosti růstu trhlin s délkou trhlin (logaritmické stupnice). Tečkovaná čára ukazuje průměrné chování, ostatní řádky ilustrují typický rozptyl od jedné trhliny k druhé. Minimální bod v každé křivce nastane, když se délka trhliny  $a$  stane rovnou konstrukčnímu rozměru  $d$ .

$$da/dN = \quad (1)$$

$$C(\Delta K - \Delta K_{th})^{n'} + C'(\Delta K)^{n'}((d-a)/d)^m$$

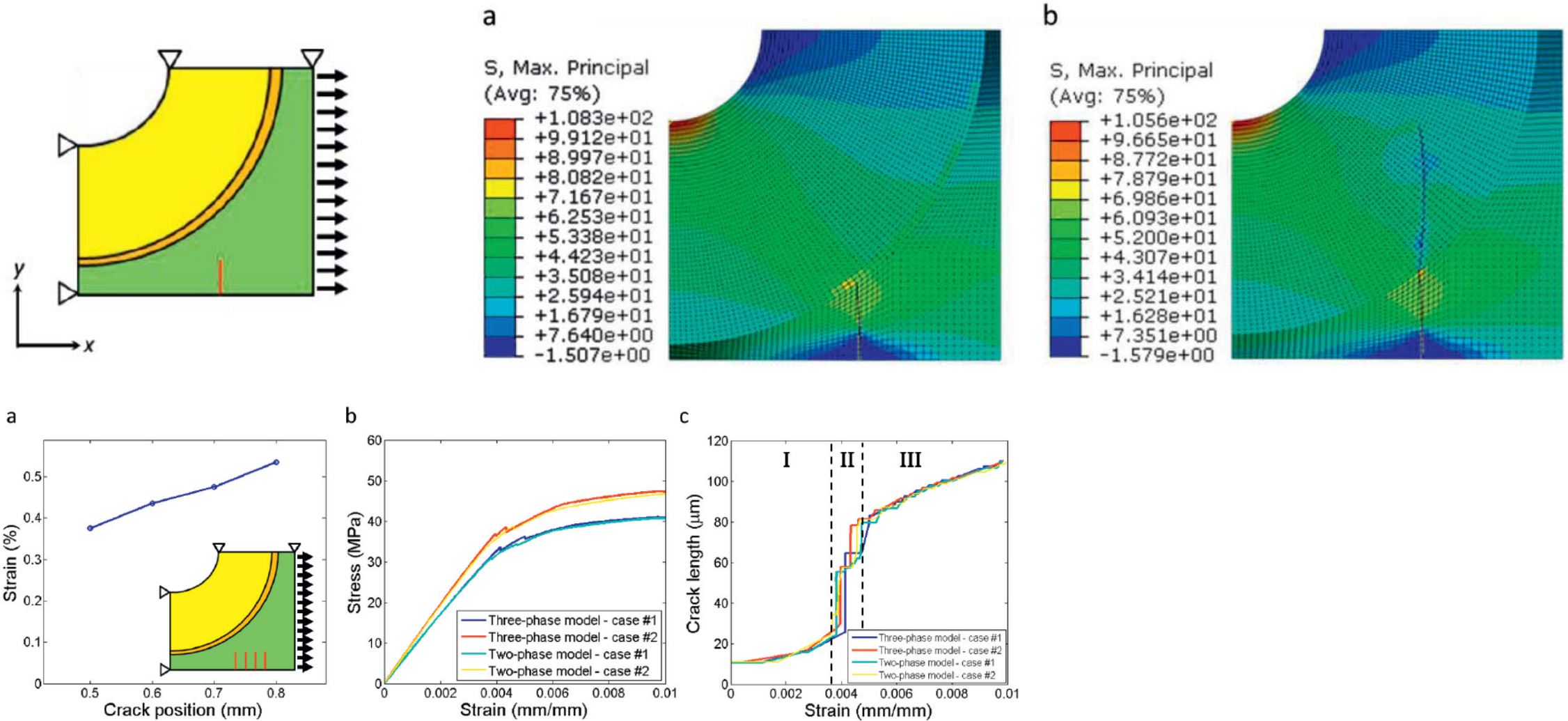
Here  $da/dN$  is the rate of crack growth per cycle and  $\Delta K$  is the stress intensity range which is related to the cyclic stress range,  $\Delta\sigma$  and the crack length,  $2a$ , through the standard fracture mechanics equation:

$$\Delta K = F\Delta\sigma(\pi a)^{1/2} \quad (2)$$

$F$  is a constant which depends on the geometry of the crack. Cracks are known to be elliptical in shape [9]: we assumed a constant aspect ratio  $c/a = 4.5$ . The first term in eqn. 1 describes the growth of the crack when it is relatively long; the second term describes short-crack growth, which decreases as the crack approaches a barrier a distance  $d$  from the initiation point.

# Crack propagation in cortical bone: a numerical study

Laura Vergani<sup>a\*</sup>, Chiara Colombo<sup>a</sup>, Flavia Libonati<sup>a</sup>



# Numerical study of crack initiation and growth in human cortical bone: Effect of micro-morphology

Mayao Wang<sup>a,1</sup>, Simin Li<sup>a,1</sup>, Annika vom Scheidt<sup>b</sup>, Mahan Qwamizadeh<sup>b</sup>,  
Björn Busse<sup>b</sup>, Vadim V. Silberschmidt<sup>a,\*</sup>

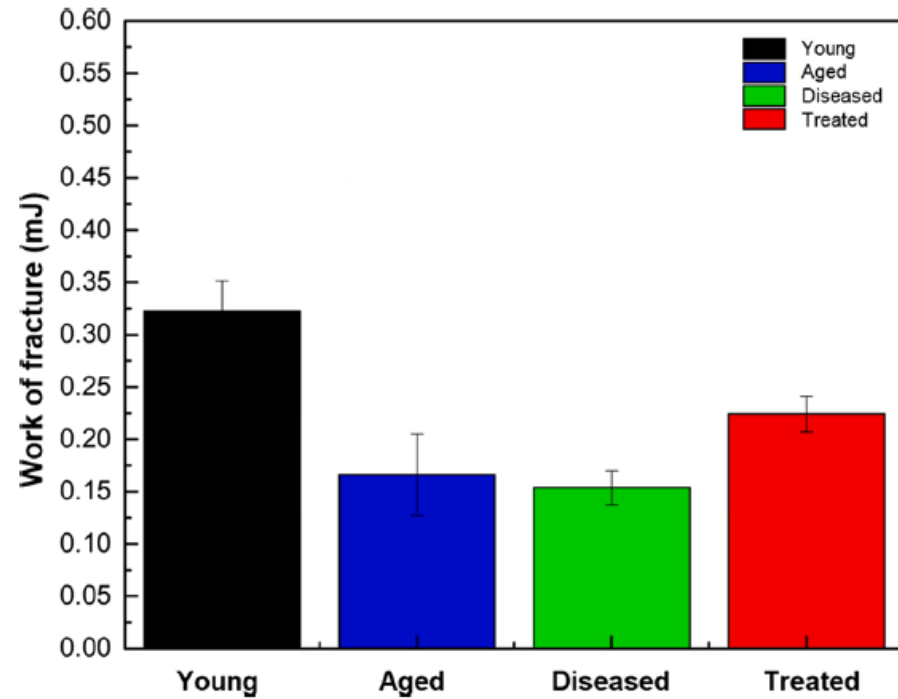


Fig. 13. Work of fracture of four groups of human cortical bone.

