

Modelování a experimentální zjišťování mechanických vlastností nelineárních materiálů

Biomechanika a lékařské přístroje

Projekt II

Lukáš Horný



Laboratoř biomechaniky člověka
Ústavu mechaniky Fakulty strojní
ČVUT v Praze

Cvičná úloha

Axiální mechanická odezva břišní aorty

V laboratoři byl proveden experiment, kdy jsme zjišťovali odezvu vzorku břišní aorty na podélné zatížení. Cílem je stanovit konstitutivní model pro tuto odezvu.

Experiment

■ Vzorek

žena, 20-30 let, 90h post mortem
bez patologických změn

měřeními byly zjištěny tyto rozměry

obvod: 35.94; 34.22; 37.86 mm

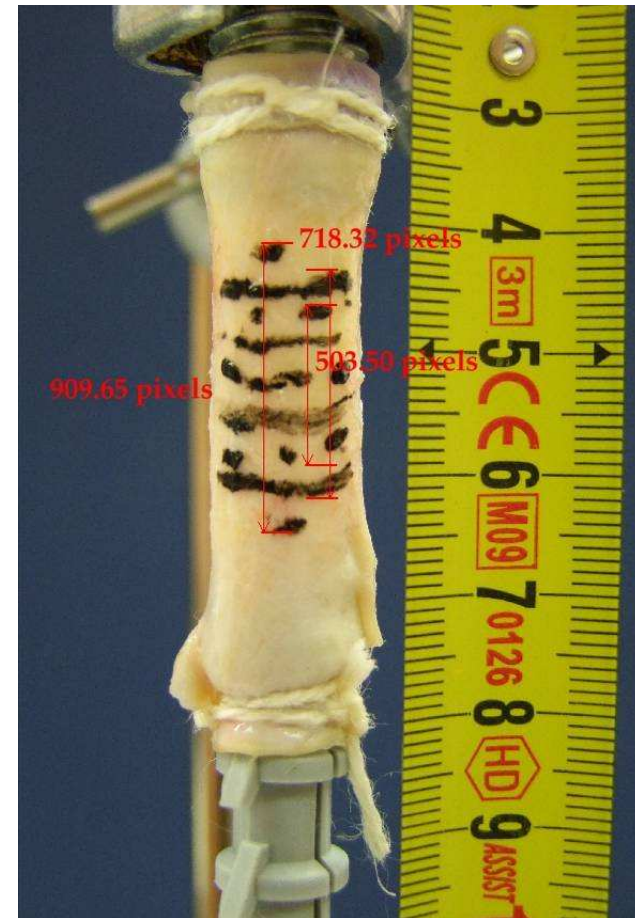
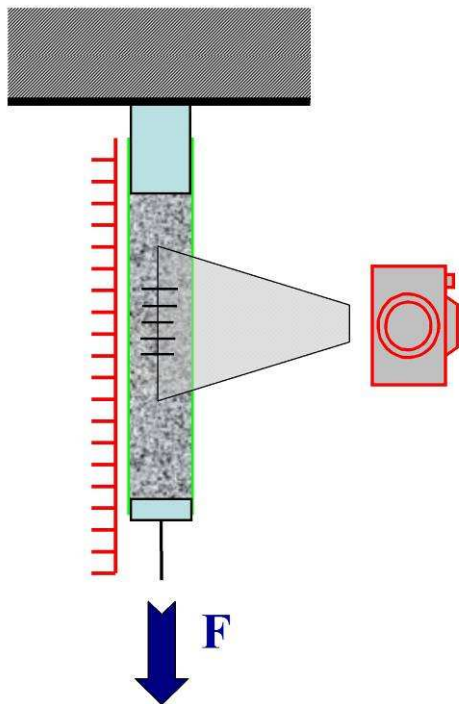
tloušťka stěny: 0.96 (opticky); 1.45; 1.41 mm (posuvkou)



Experiment

■ Tahová zkouška

ELONGATION TEST



Experiment

■ Vektory zjištěných dat

λ [-]	λ SD	F [N]
1.000	0.000	0.000
1.077	0.017	0.132
1.123	0.018	0.236
1.174	0.012	0.338
1.204	0.009	0.442
1.229	0.009	0.545
1.240	0.011	0.650
1.259	0.016	0.753
1.270	0.012	0.855
1.281	0.007	0.960
1.288	0.007	1.175
1.302	0.006	1.385
1.314	0.010	1.594
1.330	0.003	1.812

Výpočtový model

■ Deformace

Tepna se zatížením protahovala, jak se choval poloměr?

(1) Pro vysoký obsah vody, bývají měkké tkáně často modelovány jako „**nestlačitelné**“.

(2) Ačkoliv jsou cévy obecně anisotropní, modelujme ji dnes jako **isotropní** protože:
hlavním zdrojem anisotropie jsou kolagenní vlákna, která jsou (2a) vysoce zvlňená
(2b) orientovány především obvodově.

(3) **Zkosení zanedbejme.**

Výpočtový model

■ Deformace

Ve válcovém souřadném systému z toho plyne

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}$$

0 zkosení

$$\begin{aligned} R &\rightarrow r & r &= \lambda_{\vartheta\Theta} R \\ \text{deformace } \Theta &\rightarrow \vartheta & \vartheta &= \Theta \\ Z &\rightarrow z & z &= \lambda_{zZ} Z \\ h &= \lambda_{rR} H \end{aligned}$$

Isotropie

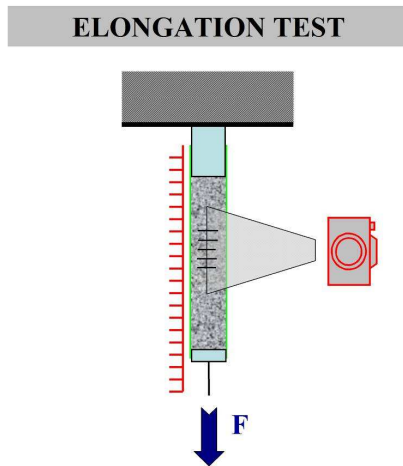
Nestlačitelnost

$$\lambda_{rR} = \lambda_{\vartheta\Theta} \quad \lambda_{rR} \lambda_{\vartheta\Theta} \lambda_{zZ} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\vartheta\Theta} = \frac{1}{\lambda_{zZ}}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}$$

Výpočtový model

- Pozorované napětí σ^{EXP}



Napjatost modelujeme jako jednoosou

$$P_{zz} = \frac{f}{A} \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{f}{a} = \frac{f}{oh}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{f}{oh} = \frac{f}{\lambda_{\vartheta\Theta} O \lambda_{rR} H} = \frac{1}{\lambda_{\vartheta\Theta} \lambda_{rR}} \frac{f}{A} = \lambda_{zZ} \frac{f}{A}$$

$$\sigma_{zz}^{EXP} = \lambda_{zZ} \frac{f}{A}$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

Hyperelastický materiál

Gentův model hustoty deformační energie

$$W = -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_{rR}^2 + \lambda_{\vartheta\Theta}^2 + \lambda_{zZ}^2$$

$$\sigma = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\vartheta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\vartheta} & \sigma_{\vartheta\vartheta} & \sigma_{z\vartheta} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{z\vartheta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\vartheta\Theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\vartheta\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\vartheta\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\vartheta\Theta}} - p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} - p \end{pmatrix}$$

Určení p

Zformulujte nějakou silovou okrajovou podmínku.

Např.: Naše protahovaná céva byla zatížena nulovým transmurním tlakem.

$$\text{Čili } \sigma_{rr} = 0$$

$$\lambda_{rR} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} - p = 0$$

Výpočtový model

- Modelová odezva napětí σ^{MOD}

Nyní dosadíme z kinematických podmínek a je hotovo.

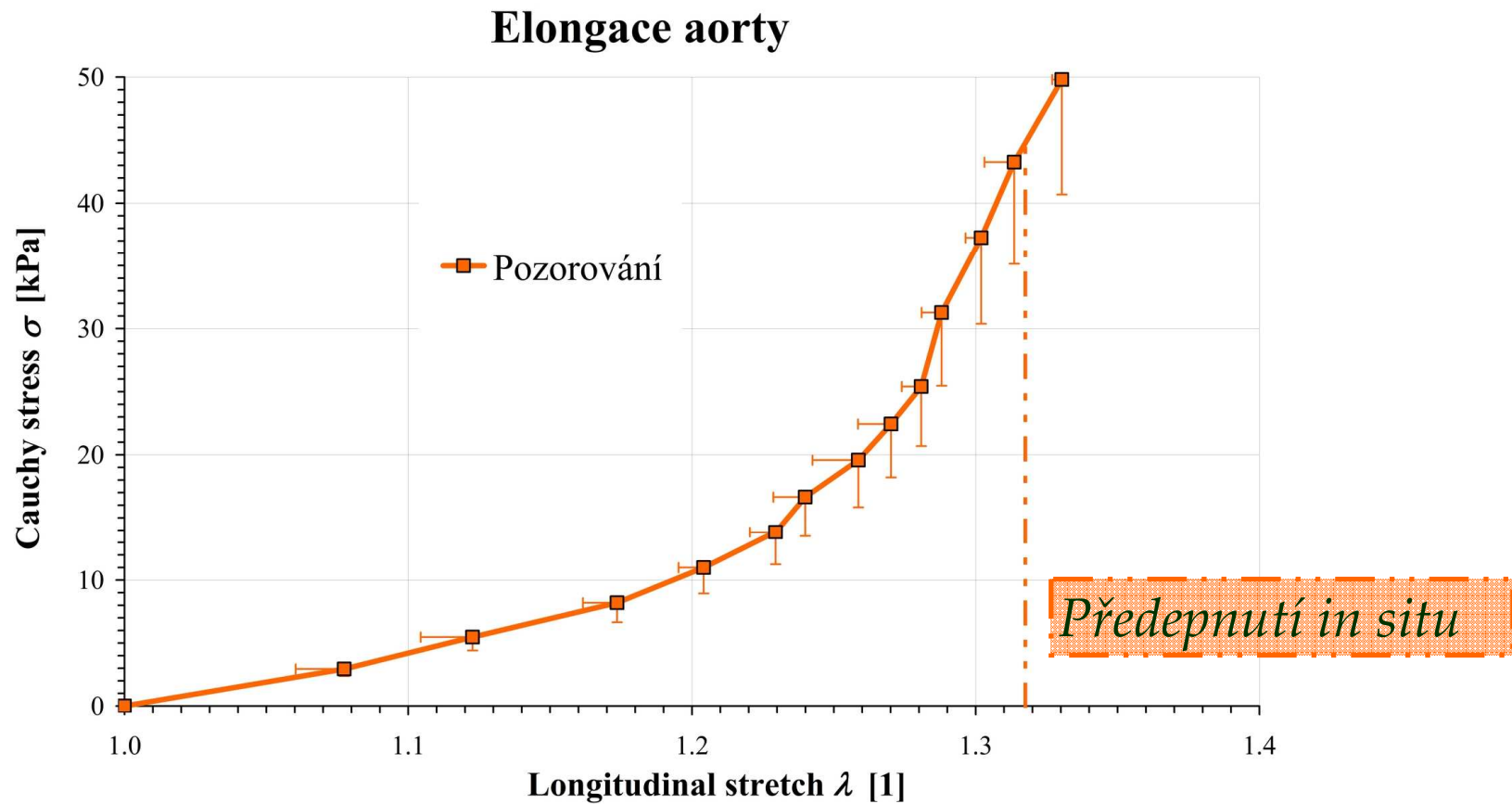
$$\lambda_{rR} = \lambda_{\vartheta\Theta} \quad \lambda_{rR} \lambda_{\vartheta\Theta} \lambda_{zZ} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\vartheta\Theta} = \lambda_{rR} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{zZ}}}$$

$$\sigma_{zz}^{MOD} = ?$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu J_m \left(\lambda_{zZ}^2 - \frac{1}{\lambda_{zZ}} \right)}{J_m - \left(\lambda_{zZ}^2 + \frac{2}{\lambda_{zZ}} - 3 \right)}$$

Vyrovnání naměřených dat

- Jak z pozorování odhadneme μ a J_m ?



Vyrovnání naměřených dat

■ Vyrovnání pozorování modelem – regresní analýza

Nejčastější způsob odhadu neznámých parametrů je pomocí metody nejmenších čtverců.

Postup je takový, že *optimalizujeme* účelovou funkci Q (součet čtverců odchylek modelu a pozorování) tak, abychom získali odhady neznámých parametrů, které minimalizují Q .

Ve světě, kde neexistují *chyby měření* a *podmínky experimentu jsou dokonale kontrolovány*, bychom v případě dokonalého modelu dospěli ke $Q = 0$.

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n \left(f_i^{EXP} - f_i^{MOD}(a_1, a_2, \dots, a_k) \right)^2$$

Vyrovňání naměřených dat

- Vyrovňání pozorování modelem – regresní analýza

Často zavádíme váhové koeficienty w

$$Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^n w_i \left(f_i^{EXP} - f_i^{MOD}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \right)^2$$

Důvodem bývá buď to, že některá pozorování jsou jistější než jiná (jistějším přiřadíme vyšší váhu), nebo skutečnost, že účelová funkce obsahuje veličiny nestejných řádů či fyzikálních rozměrů. V takovém případě slouží váhy k *normalizaci* problému.

Vyrovňání naměřených dat

- Minimum Q můžeme hledat jakkoliv...

třeba metodou pokusu a omylu.

Velice užitečné ale bývá oprášit znalosti matematické analýzy a úlohy o hledání extrému funkce více proměnných.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = 0 \wedge \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = 0 \wedge \dots \wedge \frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad [a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Existuje mnoho metod, od „primitivního pŕlení vícerozměrných intervalů“ až po kombinace analýzy a metod umělé inteligence (expertních systémů). Důležitý je stupeň nelinearity (nelinearita parametrů α_k) a počet parametrů. MATLAB i MAPLE mají pro tyto úlohy předpřipravené příkazy.

Vyrovňání naměřených dat

- Elongace aorty

$$Q(\mu, J_m) = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_{zz,i}^{EXP} - \sigma_{zz,i}^{MOD}(\mu, J_m) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_{zz,i}^{EXP} - \frac{\mu J_m \left(\lambda_{zZ,i}^2 - \frac{1}{\lambda_{zZ,i}} \right)}{J_m - \left(\lambda_{zZ,i}^2 + \frac{2}{\lambda_{zZ,i}} - 3 \right)} \right)^2$$

Jedná se v naší úloze o lineární nebo nelineární problém?

Je zjevné, že úloha je lineární v μ (tak jak je v něm lineární předpis pro W) a nelineární (racionální výrazy) v J_m .

Vyrovnání naměřených dat

■ Elongace aorty

Pokud jste si již sami neurčili, zde je vektor pozorovaných napětí určených ze vztahu: $\lambda_{zz}F/S$, kde $S = \text{obvod} \cdot \text{tloušťka}$

sigma

kPa

0.000

2.938

5.474

8.196

10.996

13.844

16.652

19.582

22.438

25.405

31.268

37.256

43.260

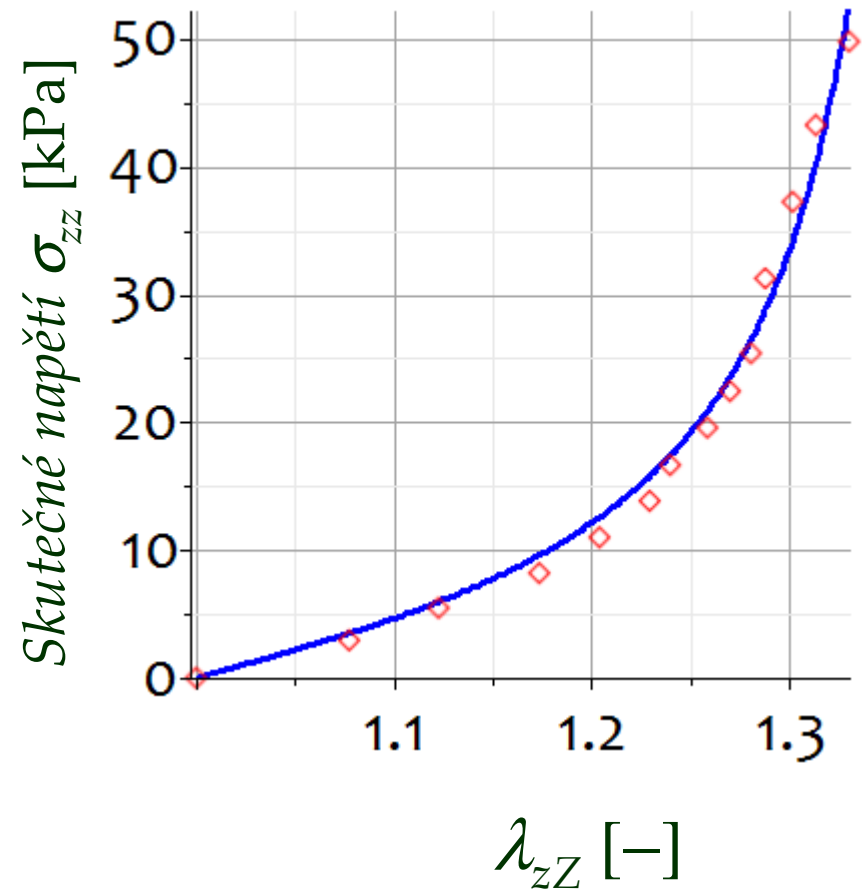
49.806

Vyrovnání naměřených dat

■ Elongace aorty

Sestavením funkce Q a využitím příkazu *NLPSolve* s počátečním odhadem $J_m = 0.5$ a $\mu = 10$ kPa dostaneme (blízké počáteční odhady, zvláště při použití Newtonovy metody, bývají velice užitečné – takové odhady ovšem nelze stanovit bez dobrého fyzikálního porozumění problému):

$$J_m = 0.3778 \text{ a } \mu = 14.30 \text{ kPa}$$



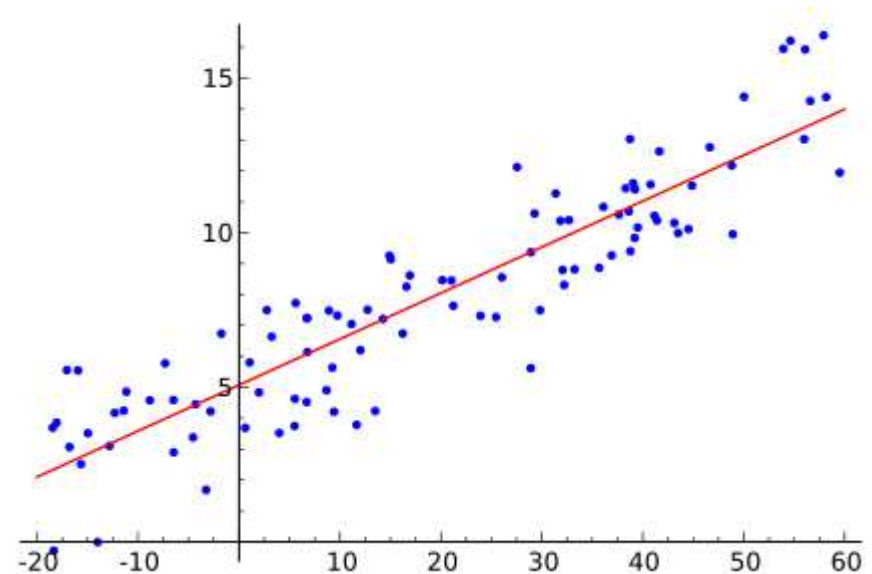
Vyrovnání naměřených dat

■ Ohodnocení úspěšnosti regrese

Jde-li o lineární problém, bývá nejčastěji využíván výběrový lineární koeficient korelace R .

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y}$$

$$R \in [-1; 1]$$



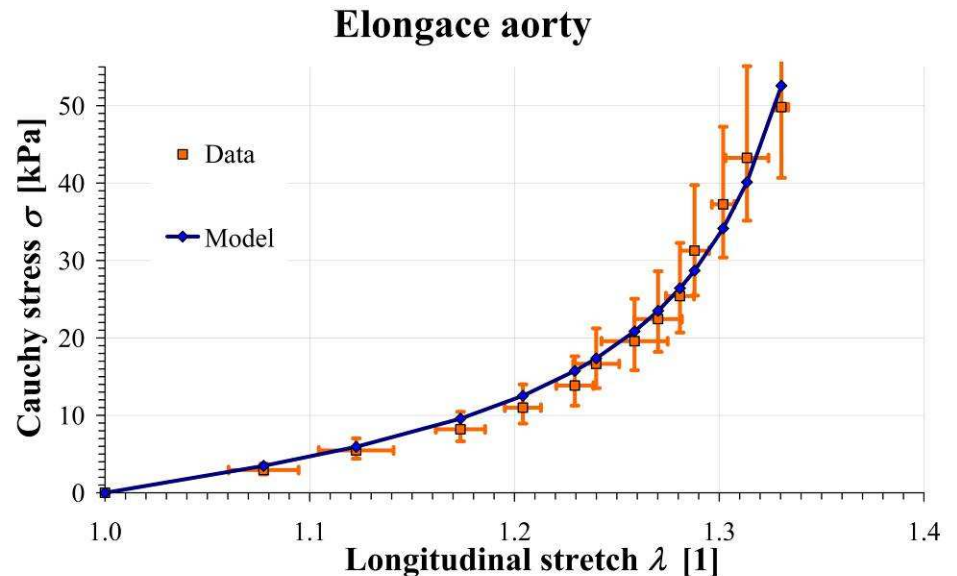
Vyrovnání naměřených dat

■ Ohodnocení úspěšnosti regrese

Pro nelineární problém bývá nejčastěji využíván *koeficient determinace*.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (f_i^{EXP} - f_i^{MOD})^2}{\sum_{i=1}^n (f_i^{EXP} - \bar{f}_i^{EXP})^2}$$

Ten poměruje „modelem nevysvětlený rozptyl“ (residuální součet čtverců) celkovým rozptylem. Kdyby byla všechna variance pozorování vysvětlena modelem, nabyly by hodnoty 1.



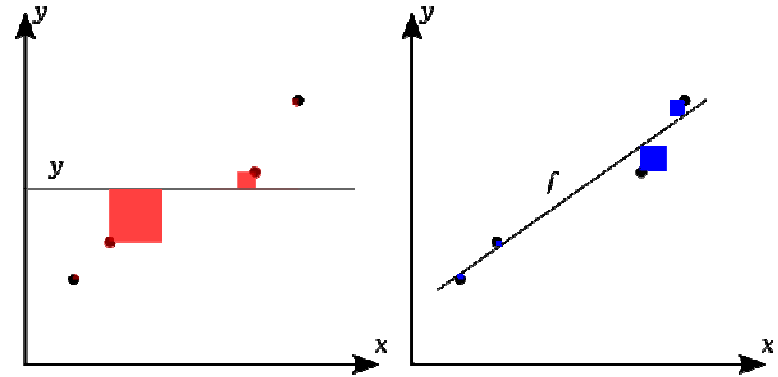
$$R^2 = 0.985$$

Vyrovnání naměřených dat

■ Ohodnocení úspěšnosti regrese

Všechno, co lze o výsledku regrese usuzovat, je obsaženo v datech.

Základem hodnocení je vždy analýza reziduí.



<http://staff.utia.cas.cz/novovic/files/skmain.pdf>

http://most.ujep.cz/~popelka/Statistika2011_7.pptx

http://home.zcu.cz/~sediva/pse/pse_pr12.pdf