PATOBIOMECHANIKA SRDEČNĚCÉVNÍHO SYSTÉMU

I. DÍL

LUKÁŠ HORNÝ

Stejnojmenný studijní text k předmětu Fakulty strojní ČVUT v Praze.

V Praze 2014

Tento studijní text vzniká pro potřeby předmětu **Patobiomechanika srdečněcévního systému** otevřeného na Fakultě strojní ČVUT. Předmět je zaměřen na výklad souvislostí mezi mechanickými vlastnostmi (zejména) krevních cév, interakcí cév s okolím (a to jak mechanickou, tak biochemickou interakci zprostředkovanou látkovou výměnou) a vznikem a vývojem patologických stavů a projevy stárnutí.

Anotace předmětu:

1. Kinematika konečných deformací (obsaženo v tomto dílu)
2. Tenzor napětí v různých popisech (obsaženo v tomto dílu)
3. Konstrukce konstitutivních rovnic (obsaženo v tomto dílu)
4. Anizotropní chování nelineárního materiálu (obsaženo v tomto dílu)
5. Anatomie a fyziologie srdce a cév
6. Mechanické vlastnosti tepen a žil pozorované *in vivo*
7. Mechanické vlastnosti tepen a žil pozorované *ex vivo*
8. Mechanika srdce
9. Mechanobiologie aterosklerózy a jejích důsledků
10. Aneuryzmata z pohledu mechaniky
11. Principy a důsledky stárnutí
12. Mechanobiologie remodelace cév
13. Inženýrské aplikace pro terapii

Předmět je možno si zapsat jako volitelný od akademického roku 2013/2014. Bližší informace u autora.

Studijní materiál bude zveřejňován postupně, po částech tak, jak budou vznikat. Studijní text předpokládá jisté předporozumění. Posluchači by před ním měli projít kurzem matematiky zahrnujícím *diferenciální a integrální počet*, *lineární algebru* a *nauku o vektorových prostorech*. Absolvování předmětu *Pružnost a pevnost I* taktéž usnadní porozumění textu.

Kontakt: Ing. Lukáš Horný, Ph.D., Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Fakulty strojní ČVUT v Praze, Technická 4, 166 07, lukas.horny@fs.cvut.cz Autor bude také vděčný všem za věcné připomínky či upozornění na možné chyby.

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

Lektorsky posoudil a recenzní posudek pro tento text vypracoval prof. Ing. František Maršík, Dr.Sc., za což by autor na tomto místě chtěl poděkovat.

Tento materiál vznikl *pro bono*.

Počet stran: 104
Počet obrázků: 21
Vydavatel: České vysoké učení technické v Praze
ISBN: 978-80-01-05473-4

OBSAH

I. ÚVOD DO MECHANIKY KONTINUA

V této části se budeme zabývat výkladem postupu modelování silové působení v tělese, o němž si představujeme, že zaujímá spojitou, souvislou oblast v nějakém geometrickém prostoru. Odhlédneme při tom od skutečnosti, že stavba hmoty je ve své podstatě diskrétní, čili nespojitá. Měřítko, které používáme, několikanásobně převyšuje atomární a subatomární strukturu. Říkáme, že tato struktura je pod naší rozlišovací úrovní (slovo *naší* zde neznamená, že my o ní nevíme, ale znamená, že náš ***model*** ji nezahrnuje).

Jelikož nám jde o mechanické veličiny, nazývá se tento obor *mechanika kontinua*. Obecně je ovšem třeba říci, že model spojitého prostředí je používán i při zahrnutí dalších fyzikálních interakcí. Je tedy možné setkat se s termodynamikou kontinua, teorií elektromagnetického *pole* a dalšími názvy odkazujícími k modelu spojitého prostředí (pole). Dík vysoké efektivnosti modelu spojitého prostředí, jsou předměty vysokoškolského studia, v nichž jsou tyto nauky vykládány, často chápány jako stěžejní (např. pružnost a pevnost ve strojírenství a stavitelství).

Cílem této kapitoly ale není nahradit přednášku z předmětu „mechanika kontinua." Cílem spíše je zprostředkovat českému čtenáři výklad, který je dnes běžný v moderních, anglicky psaných, učebnicích biomechaniky. **A tak není možné říci, že tato kapitola bezezbytku vystihuje to, co si sám autor představuje pod pojmem „úvod do mechaniky kontinua."** Je-li čtenář v tomto naprosto nepoučen, nebo naopak, bude-li čtením této kapitoly motivován k dalšímu rozšiřování znalostí, bylo by užitečné sáhnout po některé z následujících publikací: *Termodynamika kontinua* (Maršík, 1999), *Mechanika kontinua* (Brdička a kol., 2000); stejně dobře poslouží i libovolná vysokoškolská skripta, jež je dnes možno snadno najít na internetu. Skvěle poslouží i anglicky psané monografie věnované buď mechanice obecně: *Nonlinear solid mechanics* (Holzapfel, 2000), *Nonlinear elastic deformations* (Ogden, 1997). Výhodou těchto dvou knih je zaměření na nelineární chování pružných (a v případě G.A. Holzapfela i nepružných) látek.

Čtenáři se zájmem o nelineární chování anisotropních materiálů charakterizovaných vzhledem (nebo pomocí) krystalografických symetrií a teorie grup mohou sáhnout po specializovaných knihách: *Large elastic deformations* (Green a Adkins, 1960) a *Constitutive equations for anisotropic and isotropic materials* (Smith, 1994).

Matematicky ladění čtenáři naleznou pro ně možná přiléhavější výklad např. v *Mathematical foundations of elasticity* (Marsden a Hughes, 1994) či v *The mechanics and thermodynamics of continuous media* (Šilhavý, 1997). Rozšiřující výklad některých kapitol může čtenář také najít v *Tensor algebra and tensor analysis for engineers* (Itskov, 2007).

Pokud je to ale možné, resp. jsou-li publikace dostupné, nelze než doporučit **přímo mechanice srdečněcévního systému věnované monografie: *Cardiovascular solid mechanics* (Humphrey, 2002), *Nonlinear theory of elasticity* (Taber, 2004), nebo *Biomechanics* (Fung, 1990).**

Hlavní účel kapitoly I nyní shrneme v jedné větě: **zformulovat aparát pro vybudování konstitutivní teorie (která sama je obsahem kapitoly II) vhodné pro popis nelineárního a anisotropního chování při velkých deformacích**. Než k tomu dospějeme, musíme objasnit pojmy: nelineární chování, velké deformace a anisotropie. Dále uvidíme, že konstitutivní rovnice jsou zformulovány pomocí energie, kterou je nutno přivést působením vnějších sil, aby bylo těleso zdeformováno (napjato).

NOMENKLATURNÍ KONVENCE

V tomto textu se setkáme s různými druhy fyzikálních veličin – skaláry, vektory a tenzory 2. a 4. řádu. Pro symbolický zápis těchto veličin přijímáme následující konvenci:

skalární veličiny budeme označovat kurzívou t, s,...
vektory budeme označovat tučnou kurzívou, např. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{M}$,...
tenzory druhého řádu tučně bez kurzívy, např. **F**, **C**, **b**,..
tenzory čtvrtého řádu budeme označovat speciálními znaky, např. $\mathbb{L}$.

Všechny výjimky z tohoto pravidla budou dále výslovně zdůrazněny.

Všechny symbolické zápisy je třeba chápat jako primárně tenzorové. Chceme-li z nich přejít k maticovým, je vektor třeba chápat jako sloupcovou matici. Shoduje-li se pak symbolický tenzorový a maticový zápis, nebývá to zdůrazňováno. Odlišuje-li se symbolický tenzorový zápis od maticového, je to vždy explicitně zdůrazněno.

I.1 KINEMATIKA

I.1.1 POHYB

Naším zájmem je biomechanika krevních cév, ke které samozřejmě patří interakce stěny s proudící krví. Sama krev a její pohyb ale nebudou hlavním předmětem a zmíníme je pouze *ad hoc*, respektive zredukujeme je na silové působení, které vůči cévní stěně (čili tělesu) vyvíjejí.

Když se řekne deformace, představíme si nejčastěji změnu tvaru, nebo změnu objemu, nebo obojí. K takové změně musí dojít pohybem tělesa. To, co pak nazýváme deformací, jsou nějaké kvantitativní míry vyjadřující změny způsobené tímto pohybem. Tyto změny můžeme popsat buď vzhledem ke stavu na počátku (**materiálový popis**, někdy nazývaný lagrangeovský[1]), nebo vzhledem k průběžnému (zdeformovanému) stavu (tzv. aktuální popis, **prostorový popis**, velice často též nazývaný **eulerovský**[2]).

Nicméně ne všechny pohyby tělesa musí vést k jeho deformaci. Těleso se může pohybovat jako tuhý celek a ptáme-li se na deformaci, je třeba informaci o tomto typu pohybu odečíst, abychom pracovali jen se změnou tvaru a objemu.

Pohyb tělesa. Přejděme nyní k matematickému vyjádření. Mějme těleso B, které zaujímá nějakou souvislou část $\Omega(0)$ geometrického prostoru v čase $t = 0$ (termínem geometrický prostor budeme mít vždy namysli eukleidovský třírozměrný prostor[3]). $\Omega(0)$ **nazveme** počáteční (**referenční**) **konfigurací** tělesa B. Těleso se fyzicky skládá z materiálových částic P, Q, R,... (materiálových bodů), které v $\Omega(0)$ zaujímají nějaké pozice, čili leží v geometrických bodech $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$,... Nechť v čase $t = s$ zaujímá těleso B **průběžnou konfiguraci** $\Omega(s)$. Materiálové částice P, Q, R,... nyní zaujímají geometrické polohy $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$,... **Pohyb tělesa definujeme jako vzájemně jednoznačné a vzájemně spojité (homeomorfní) zobrazení** $\kappa(t)$: $\Omega(0) \rightarrow \Omega(s)$, které je spojitě diferencovatelné podle potřeby. Vzájemná jednoznačnost a spojitost zaručuje, že můžeme pomocí κ^{-1} přemístit těleso zpět. Omezíme-li se na materiálovou částici, můžeme psát $\boldsymbol{x} = \kappa(\boldsymbol{X})$ a obráceně $\boldsymbol{X} = \kappa^{-1}(\boldsymbol{x})$. Souřadnice částic tělesa můžeme tedy vyjadřovat jak funkce souřadnic geometrických bodů referenční ale i průběžné konfigurace. Čili

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\left(X_1, X_2, X_3, t\right) \qquad\qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\left(x_1, x_2, x_3, t\right). \tag{I.1-1}$$

V mechanice těles používáme nejčastěji popis pomocí (1a) čili materiálový, naopak v mechanice kapalin je běžný popis eulerovský. K tomu je ale třeba dodat, že mechanika kapalin se odlišuje nejen samotnou volbou $\boldsymbol{x}$. Ve skutečnosti jsou její hodnoty $\boldsymbol{x}$ většinou pevně zvoleny a definují tzv. kontrolní objem. V tomto kontrolním objemu (nebo kontrolní poloze) bývá hledanou veličinou

---

[1] podle francouzského fyzika a matematika J.L. Lagrange (1736 – 1813), jehož jméno je v české terminologii spojeno s velkým množstvím pouček z matematické analýzy a analytické mechaniky.

[2] podobně jako J.L. Lagrange mělo by čtenářům být dobře známo i jméno švýcarského matematika působícího zejména v Petrohradě L. Eulera (1707 – 1783), např. díky komplexním číslům, hydromechanice nebo kombinatorice.

[3] připomeňme, že tím míníme množinu bodů, jejichž poloha je zaměřena vektory, pro něž je definována eukleidovská norma (metrika). Umíme zde tedy měřit vzdálenosti a velikosti úhlů. V tomto prostoru budeme používat všechny známé vlastnosti vektorů... zejména skutečnost, že vektor $\boldsymbol{X}$ se vyjádří v ortonormální bázi jako $\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{E}_1 + X_2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3 = (X_1, X_2, X_3)$.

rychlost, která charakterizuje mechaniku prostředí. Čili většinou se neklade otázka po trajektorii pohybu (to neplatí např. v transportních úlohách). Naopak v mechanice těles se ptáme právě na trajektorii: kudy materiálové body tělesa prochází? Což v důsledku znamená otázku: jak se těleso deformuje?

Z definice je zřejmé, jak podstatnou roli hraje spojitost. Nebudeme zde provádět podrobnou diskuzi tohoto pojmu a spolehneme na intuici a matematické základy čtenáře. Avšak není možné opominout skutečnost, že existují aplikace (ležící ovšem mimo záměr tohoto textu), které ji vyžadují. Jde zejména o rázy v tělesech a šíření trhlin. Taktéž je tento pojem nutné projasnit v případě, že vnitřní struktura materiálu dosahuje úrovně velikosti infinitesimálních elementů dx.

Pole posuvů. **Pro částice tělesa *B* definujeme vektorovou veličinu (I.1-2) a nazýváme ji pole posuvů** (respektive posuv, jde-li o jednu konkrétní částici).

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)-\boldsymbol{X} \qquad\qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t) \tag{I.1-2}$$

Z rovnic je zřejmé, že pole posuvů můžeme vyjádřit jak pomocí průběžných, tak pomocí referenčních souřadnic. Nicméně, má-li jít o objektivní veličinu, musí platit, že $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}$. Připomeňme ale, že tato rovnost předpokládá ztotožnění vektorových prostorů, ze kterých $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{u}$ pocházejí[4].

Derivování podle času. Pomocí první a druhé časové derivace vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{X}$ může zkonstruovat **pole rychlostí** $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{V}$, a **pole zrychlení** $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{A}$. Při tomto postupu je opět třeba rozlišovat v jakém popisu vyjádření provádíme. Podle toho rozlišujeme **materiálovou** a **prostorovou derivaci** pro **materiálové** nebo **prostorové pole**. Rozdíl v derivování vyplývá z chápání derivovaných funkcí jakožto složených funkcí více proměnných (času a prostoru).

Rychlost pohybu materiálových částic získáme jako první derivaci podle času, pro materiálovou rychlost platí $\boldsymbol{V} = \partial\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)/\partial t$, pro prostorovou rychlost $\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$. Pro transformaci mezi oběma rychlostmi platí: $V_K(\boldsymbol{X},t) = -v_i(\boldsymbol{x},t)\partial X_K/\partial x_i$ a $v_i(\boldsymbol{x},t) = - V_K(\boldsymbol{X},t)\partial x_i/\partial X_K$.

V případě zrychlení v materiálovém popisu platí $\boldsymbol{A} = \partial\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)/\partial t$. Hovoříme pak o tzv. **materiálové derivaci materiálového pole**.

Chceme-li získat prostorové pole zrychlení $\boldsymbol{a}(\mathbf{x},t)$ a provedeme-li pouhou derivaci podle času, získáme $\partial\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$. Tento výraz přesně odpovídá časové změně $\boldsymbol{v}$ v poloze $\boldsymbol{x}$. To odpovídá situaci, kdy bychom sledovali pohyb kontrolním objemem, čili nějakým místem prostoru a právě jen tímto místem. **Hovoříme o prostorové časové derivaci prostorového pole**.

Jde ale o veličinu, která neobsahuje žádnou informaci o předchozích polohách a chování částice v nich. Zrychlení ale musí být veličina, kterou lze vypočítat zde sledování průběhu, čili změn poloh, pomocí druhé derivace. Z veličiny $\partial v(x,t)/\partial t$ se ale integrací nelze dostat k trajektorii, neboť je to lokální informace z právě jednoho vybraného místa x, kde se měří časová změna v. Nejde tedy o celkové zrychlení a, nýbrž jen o jeho část (tzv. lokální zrychlení, neboli lokální derivaci).

[4] Je dobré mít na paměti, že $\boldsymbol{U} = U_1\boldsymbol{E}_1 + U_2\boldsymbol{E}_2 + U_3\boldsymbol{E}_3$ a $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$. kde $\{\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3\}$ je ortonormální báze v prostoru vektorů $\boldsymbol{X}$ a $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ v prostoru vektorů $\boldsymbol{x}$. Ačkoliv čtenář by měl z lineární algebry vědět, že všechny n-rozměrné vektorové prostory jsou formálně totožné (tzv. isomorfní). Tato skutečnost se v následujícím objeví ještě mnohokrát.

K tomu abychom získali $\boldsymbol{a}$, musíme k lokální informaci $\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ přidat informaci o tom, jak se rychlost mění v blízkém okolí polohy $\boldsymbol{x}$ (kontrolního objemu). Tu získáme pomocí Taylorova rozvoje $d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, kde se omezíme na první člen $\partial v_i/\partial x_i$, vektorově $(\partial v_1/\partial x_1, \partial v_2/\partial x_2, \partial v_3/\partial x_3)$.

Protože ale každá složka vektoru rychlosti může záviset na každé složce vektoru polohy, máme pro i-tou složku v_i

$$dv_i(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}dt \qquad \text{pro } i = 1,2,3.$$

Algebraicky okamžitě dostáváme, **že v prostorových souřadnicích je celková časová změna rychlosti (čili zrychlení), rovna**

$$a_i(\boldsymbol{x},t) = \frac{dv_i(\boldsymbol{x},t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \qquad \text{pro } i = 1,2,3.$$

Což kompaktně zapisujeme ve formě $a_i = \Sigma_k[\partial v_i/\partial t + v_k(v_i/\partial x_k)]$ pro $i = 1,2,3$.

Ke stejnému výsledku dospějeme i formální cestou, uvážením skutečnosti, že $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ během derivování prováděného pomocí pravidla pro složenou funkci více proměnných:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t) = \dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right|_{\text{když } \boldsymbol{x} = konst} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\text{když } t = konst} \cdot \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right|_{\text{když } \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\boldsymbol{x},t) = konst}$$

Tento způsob časového derivování (odhlédneme-li od toho, že jsme se zabývali rychlostí) prostorového pole nazýváme materiálová (časová) derivace prostorového pole. Označujeme ho tečkou nad veličinou, nebo symbolem $D(\bullet)/Dt$, abychom majuskulí zdůraznili materiálový popis při provádění derivace. Výše jsme sice použili $d(\bullet)/dt$, ale dohodněme se, že to již nikdy neuděláme. Stejným způsobem probíhá i derivace skalárních polí (např. rozložení teploty v prostoru, které také můžeme vyjadřovat vzhledem k počátečnímu nebo průběžnému stavu)[5].

Když to shrneme, dostáváme operaci „zjišťování časové změny veličiny v prostorovém popisu pro materiálové souřadnice chápané v okamžiku derivování jako konstanty", kterou nazýváme materiálová derivace prostorového pole. Operace se řídí, pro skalár $f(\boldsymbol{x},t)$ a vektor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ pravidlem (I.1-3).

$$\dot{f}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} v_k(\boldsymbol{x},t) \qquad \dot{u}_i(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_k} v_k(\boldsymbol{x},t) \quad i = 1,2,3. \qquad \text{(I.1-3)}$$

[5] Skalární veličiny jsou pro vysvětlení celé situace s časovým derivováním názornější než vektory. Mějme tedy teplotu rozloženou v prostoru, např. teplotu řeky, která proudí kolem nepohybujícího se plavce s teploměrem. Jak kolem něj proudí různě teplá voda, tak ačkoliv setrvává v kontrolní poloze, měří časovou změnu teploty. Měří lokální část časové derivace. Pohybuje-li se naopak plavec v nepohybující se vodě, které má v prostoru nehomogenní rozložení teploty, dostává časovou změnu teploty, ačkoliv voda stojí. To je člen vyjádřený pomocí Taylorova rozvoje zohledňující změnu v okolí kontrolní polohy (dostává tzv. gradient teploty v prostoru, ale o něm až později). Ve skutečnosti se ale může pohybovat plavec i kapalina, a tak je časová změna teploty (čili rychlost teploty) dána součtem obou efektů. Obdobně tomu je, chceme-li zjistit časovou změnu rychlosti, čili zrychlení. Rozdíl spočívá jen v tom, že rychlost je vektor, a musíme uvažovat v jeho složkách.

1.2 DEFORMAČNÍ GRADIENT

Představujeme-li si pohyb tělesa jakožto zobrazení mezi jeho konfiguracemi, má smysl ptát se po infinitesimální změně, kterou v prostoru tento pohyb způsobí. Napodobujeme tak vlastně postup matematické analýzy, která v diferenciálním počtu zkoumá lokální vlastnosti funkcí pomocí jejich derivace. Mírou, kterou takto používáme v mechanice kontinua, je deformační gradient. Gradient proto, že se nejedná o funkci (zobrazení) jedné proměnné, nýbrž tří prostorových souřadnic (proměnných). **Deformační gradient F je veličina vystihující lokální důsledky (vlastnosti) pohybu tělesa (I.1-4)**.

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{X},t)=\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial \boldsymbol{X}} \qquad \text{(I.1-4)}$$

Můžeme ho také psát ve formě (I.1-5), což lépe vystihuje jeho smysl jakožto zobrazení, nebo-li operátoru, který převádí liniový diferenciální element referenční konfigurace *dX* na diferenciální element průběžné konfigurace *dx*.

$$d\boldsymbol{x}=\mathbf{F}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X} \qquad \text{(I.1-5)}$$

Ze vztahu (I.1-5) je zjevné, že převádí vektor na vektor. **Jde tedy o lineární transformaci vektorů, která musí být vyjádřena maticí. Tato matice představuje zápis tenzoru**[6] **druhého řádu definovaného nad vektorovými prostory** $\{(dX_1,dX_2,dX_3)\}$ a $\{(dx_1,dx_2,dx_3)\}$ **tak, že F**: $\{(dX_1,dX_2,dX_3)\} \rightarrow \{(dx_1,dx_2,dx_3)\}$. Obdobně bychom mohli psát, že jde o derivaci κ.

K úplnému porozumění bude dobré vyjádřit si deformační gradient ještě ve složkovém (indexovém) zápisu. Je názornější pracovat s abecedními indexy místo číslicovými. Takže mějme κ: $\{(X_A,X_B,X_C)\} \rightarrow \{(x_a,x_b,x_c)\}$, repsektive **F**: $\{(dX_A,dX_B,dX_C)\} \rightarrow \{(dx_a,dx_b,dx_c)\}$. Stručně pak píšeme složky deformačního gradientu pomocí (I.1-6).

$$dx_i = F_{iI}\,dX_I \qquad\qquad F_{iI}=\frac{\partial x_i}{\partial X_I} \qquad \text{(I.1-6)}$$

Za indexy je třeba dosazovat $i = a, b, c$, resp. $I = A, B, C$. V rovnici (I.1-6a) přijímáme na pravé straně konvenci, že **podle opakujících se indexů vždy sčítáme**, čili pro $d\boldsymbol{x} = (dx_a,dx_b,dx_c)$ platí[7]

$$dx_a = F_{aA}dX_A + F_{aB}dX_B + F_{aC}dX_C \quad dx_b = F_{bA}dX_A + F_{bB}dX_B + F_{bC}dX_C \quad dx_c = F_{cA}dX_A + F_{cB}dX_B + F_{cC}dX_C$$

---

[6] V tomto konkrétním případě jde o tenzor 2. řádu, což poznáme podle počtu indexů, které veličina má. **Tenzor je zobrazení**; zde **převádí vektory (veličiny s jedním indexem) na vektory**. Při tomto zobrazení je „spotřebován" jeden index podle pravidel **lineární transformace vektorů**. Tenzorovými veličinami jsou např. tenzory deformace, tenzory napětí (v obou případech jde o tenzory druhého řádu – tenzory deformace převádějí elementární délkové vektory, tenzory napětí převádějí normálový vektor plochy na silový vektor). Tenzorem je i „matice modulů pružnosti" – tzv. tenzor tuhosti neboli elasticity. To je čtyřindexová veličina a převádí dvouindexové tenzory deformace na dvouindexové tenzory napětí, v lineárním případě Hookeova zákona podle pravidla $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (i zde se podle opakujících indexů, *kl*, sčítá). Více o tenzorech v matematickém doplňku.

[7] Explicitně vyjádřený příklad **F***d***X** nám ukazuje, jak konkrétně působí tenzor na vektor. Podle tohoto pravidla se řídí všechny součiny tohoto tvaru. Uvědomme si, že reprezentujeme-li tenzor čtvercovou maticí 3x3 a vektor sloupcovou maticí 3x1, jde vlastně o maticový součin.

Zmiňovaná konvence o sčítání podle opakujícího se indexu nám umožňuje velmi elegantně psát např. skalární součin vektorů **u** a **v** jako u_iv_i, protože $u_iv_i = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Jen prostě vynecháváme symbol Σ.

Rovnice (I.1-6b) nám připomíná skutečnost, že derivováním vektoru podle vektoru, dostáváme veličinu, která má o index více[8].

Příklady

PI-1.1 Uvažujme pohyb tělesa, který je pospán následujícími rovnicemi: $x_1 = \lambda_1 X_1$, $x_2 = \lambda_2 X_2$, $x_3 = \lambda_3 X_3$, kde λ_i jsou kladná reálná čísla. Vypočtěme deformační gradient **F**.
Podle (I.1-6b) musíme provést devět derivací pro permutace indexů *iI*. Takže $F_{11} = \partial x_1/\partial X_1 = \partial(\lambda_1 X_1)/\partial X_1 = \lambda_1$, obdobně $F_{22} = \lambda_2$ a $F_{33} = \lambda_3$. Pro nediagonální indexy dostaneme $F_{12} = \partial x_1/\partial X_2 = \partial(\lambda_1 X_1)/\partial X_2 = 0 = F_{13} = \ldots F_{32}$.
V maticovém a bázovém zápisu dostáváme:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{E}_3 . \qquad \text{(I.1-7)}$$

Rovnice (I.1-7a) nevyžaduje žádný komentář. Jde o matici lineární transformace, jak ji známe z algebry. Pro s tenzorovým počtem neobeznámeného čtenáře je třeba vysvětlit rovnici (I.1-7b), v níž se objevuje pro něj pravděpodobně nový symbol ⊗. Jde o algebraickou operaci definovanou mezi dvěma nebo více vektory, kterou nazýváme tenzorový součin (jde-li o dva vektory též dyadický, čili dvojný). Výsledkem operace je nová entita nazývaná tenzor. Mluvíme o tenzorech druhého, třetího, čtvrtého,... řádu podle toho, kolik vektorů se účastní součinu (v případě dvou někdy též mluvíme o dyadě). Tenzory tvoří vektorové prostory (pro tenzory druhého řádu, kam patří **F**, jde o prosotr všech lineárních transformací). Vektory bývají někdy chápány jako tenzory prvního řádu a skaláry jako tenzory nultého řádu.

Definice ⊗ je podle pravidla (I.1-9): pro dva vektory $\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{E}_1 + X_2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3$ a $\boldsymbol{Y} = Y_1\boldsymbol{E}_1 + Y_2\boldsymbol{E}_2 + Y_3\boldsymbol{E}_3$ platí, že

$$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} = X_1 Y_1 \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 + X_1 Y_2 \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2 + X_1 Y_3 \boldsymbol{E}_1 \otimes \boldsymbol{E}_3 + X_2 Y_1 \boldsymbol{E}_2 \otimes \boldsymbol{E}_1 + \ldots + X_3 Y_3 \boldsymbol{E}_3 \otimes \boldsymbol{E}_3 . \qquad \text{(I.1-9)}$$

Je zřejmé, že tento zápis je možné reprezentovat pomocí matice (I.1-10), kde ovšem ztrácíme informaci vektorových bázích (to platí obecně pro všechny maticové zápisy – v nich musíme vždy z kontextu vědět jaké máme báze).

$$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} X_1Y_1 & X_1Y_2 & X_1Y_3 \\ X_2Y_1 & X_2Y_2 & X_2Y_3 \\ X_3Y_1 & X_3Y_2 & X_3Y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.1-10)}$$

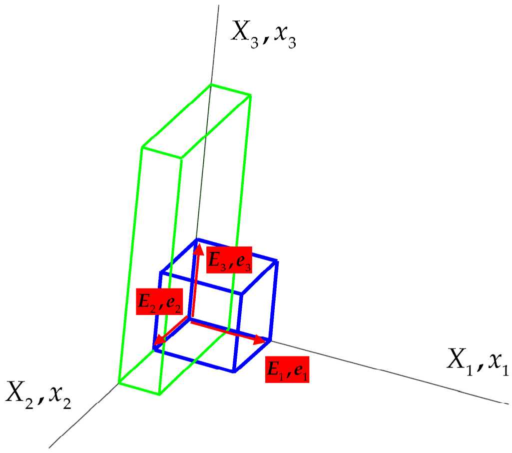
Operace ⊗ je samozřejmě definována i pro tenzory druhého a vyšších řádů. V případě tenzorů druhého řádu **A** a **B** je výsledkem tenzor čtvrtého řádu **C** podle pravidla $C_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$.

Operací, kterou jsme zatím nevysvětlili je sčítání tenzorů **A** + **B**. Jelikož jsou tenzory odvozeny z vektorů (a v případě druhého řádu je reprezentují matice), nemělo by čtenáře překvapit, že když

[8] Toto platí obecně a je dobré si to pamatovat. Například tenzor tuhosti (zobecněním modulu pružnosti), zmíněný v předchozí poznámce, získáme derivací dvojindexového napětí σ_{ab} podle dvojindexového tenzoru deformace ε_{cd}, takže tenzor tuhosti E_{abcd} je tenzor čtvrtého řádu; $E_{abcd} = \partial\sigma_{ab}/\partial\varepsilon_{cd}$.

sčítání vektorů probíhá po složkách, tak i sčítání tenzorů **A** + **B** probíhá jako $A_{ij} + B_{ij}$, čili po složkách.

V rovnici (I.1-7b) máme bázové dyady $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_I$, protože každý z vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{X}$ je definován v jiném vektorovém prostoru (lépe řečeno, prostor je to formálně stejný, ale vytvořený nad jinou konfigurací tělesa).



Obrázek I-1. Ukázka homogenní deformace z **P1.1** pro volbu $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$. Jednotková krychle (modrá) se deformuje na kvádr (zelný) o hranách λ_1, λ_2, λ_3. Platí $\mathbf{F} = 1/2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{E}_3$.

K PI-1.1 dodejme, že výsledný deformační gradient nezávisel na poloze materiálové částice (v **F** se objevily pouze konstantní funkce). V takovém případě hovoříme o **homogenní deformaci**. Pro případ, že $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, jde **o rovnoměrnou dilataci**.

PI-1.2 Napište deformační gradient pro pohyb popsaný rovnicemi: $x_1 = X_1 + kX_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$, kde k je nenulové číslo.

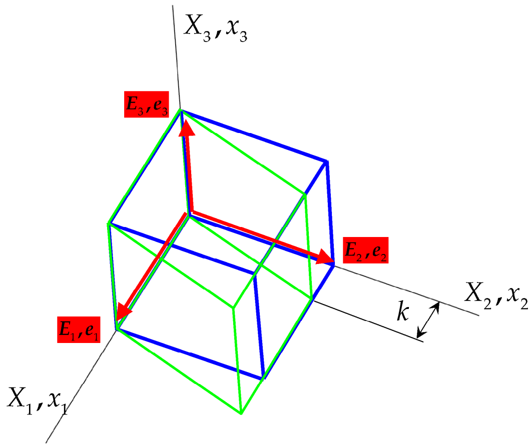
Podle rovnice (6) dostáváme:

$F_{11} = \partial x_1/\partial X_1 = \partial(X_1 + kX_2)/\partial X_1 = 1$
$F_{12} = \partial x_1/\partial X_2 = \partial(X_1 + kX_2)/\partial X_2 = k$
$F_{22} = \partial x_2/\partial X_2 = \partial(X_2)/\ \partial X_2 = 1$
$F_{33} = \partial x_3/\partial X_3 = \partial(X_3)/\ \partial X_3 = 1$
a dále $F_{13} = F_{21} = F_{23} = F_{31} = F_{32} = 0$.

Matice deformačního gradientu tedy je $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pomocí bází můžeme **F** vyjádřit jako $\mathbf{F} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{E}_3 + k\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2 = \mathbf{I} + k\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$, kde poslední výraz je zjednodušen pomocí symbolu pro jednotkový tenzor druhého řádu $\mathbf{I} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{E}_3$ [9].

[9] Tenzor **I** je tedy reprezentován maticí, která má na hlavní diagonále jedničky a jinde nuly, čili **I** = *diag*[1,1,1]. Velice důležitý je indexový zápis, který tradičně využívá řeckého písmene delta, δ_{ij} , kde předepisujeme $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Sybol δ_{ij} bývá většinou nazýván *Kroneckerovo delta* (podle slavného německého matematika Leopolda Kroneckera, 1823 – 1891). Při používání symbolu **I** je ovšem třeba si uvědomit, že nenese informaci o bázích, a až z kontextu je vždy zřejmé, o jaké jde. Obyčejně má totiž dobrý smysl pouze jedna ze čtyř možných voleb $\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J$, $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_J$, $\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$.

V příkladu PI-1.2 použité rovnice popisují tzv. prostý smyk. Všimněme si, že matice jeho deformačního gradientu není symetrická!



Obrázek I-2. Ukázka homogenní deformace z **P1.2** pro volbu $k = 0.3$. Jednotková krychle (modrá) se deformuje na zkosený hranol (zelný). Platí $\mathbf{F} = \mathbf{I} + 0.3\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{E}_2$.

Změna objemu. Důležitou veličinou je determinant deformačního gradientu. V lineární algebře (resp. analytické geometrii) se definuje objem rovnoběžnostěnu daného třemi vektory pomocí tzv. vnějšího součinu, který je právě roven determinantu jejich matice. Představíme-li si **F** jako lineární transformaci vektorů (převádějící vektory $\boldsymbol{X} \in \Omega(0)$ na vektory $\boldsymbol{x} \in \Omega(s)$), čili jako transformační matici (v níž jsou zapsány obrazy vektorů ortonormální báze při této transformaci), zjišťujeme, že determinant deformačního gradientu má význam změny objemu elementu kontinua J[10].

$$\det \mathbf{F} = J \qquad \text{kde} \qquad dv = JdV \tag{I.1-11}$$

Symbolem dv jsme označili objem infinitesimálního elementu po deformaci a dV před deformací. Připomeňme, že jak **F**, tak J by měly být chápány jako funkce $\boldsymbol{X}$ (obecně se jedná nekonstantní veličiny v Ω). **Deformace elastomerů a měkkých tkání bývají velice často modelovány jako isochorické děje**, čili $dv = dV \Leftrightarrow J = \det\mathbf{F} = 1$. O takových materiálech říkáme, že jsou **nestlačitelné**.

***Inverze* F**. Protože jsme všude předpokládaly vzájemnou jednoznačnost a vzájemnou spojitost, můžeme definovat inverzní tenzor $\mathbf{F}^{-1}$ k tenzoru **F**. K jeho konkrétnímu vyjádření dospějeme pomocí postupů lineární algebry pro hledání inverzní matice. Připomeňme, že vzájemná jednoznačnost vylučuje, aby $\det\mathbf{F} = J = 0$. Body kontinua, které existují, nemohou zaniknout. Měl-li element kontinua před deformací nenulový objem, bude ho mít i po deformaci.

Bez důkazu uveďme, že pro referenční plošný element d$\boldsymbol{S}$ a zdeformovaný plošný element d$\boldsymbol{s}$ platí (poučka zvaná v anglosaské literatuře Nansonova věta) (I.1-x12)[11]. Důkaz lze najít např. v Holzapfel (2000) na s. 75.

$$d\boldsymbol{s} = J\mathbf{F}^{-T} d\boldsymbol{S} \tag{I.1-x12}$$

[10] Jde vlastně o jakobián geometrické transformace.
[11] Plošné elementy d$\boldsymbol{s}$ a d$\boldsymbol{S}$ zde chápeme jako orientované (vektory o velikosti dané plochou s orientací vnější normály).

Na závěr poznamenejme, že je-li to pro nás výhodné, můžeme deformační gradient konstruovat pomocí posuvů. Z rovnic (I.1-2) a (I.1-4) je zřejmé, že platí (I.1-12).

$$Grad\boldsymbol{U} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \qquad\qquad grad\boldsymbol{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1} \qquad \text{(I.1-12)}$$

Ke zjednodušení zápisu jsme zde využili operátoru gradientu, což je další způsob vyjádření derivace podle složek souřadnic. Pro $\boldsymbol{U} = U_1\boldsymbol{e}_1 + U_2\boldsymbol{e}_2 + U_3\boldsymbol{e}_3$ a $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{E}_1 + u_2\boldsymbol{E}_2 + u_3\boldsymbol{E}_3$ platí (I.1-13)[12 13].

$$Grad\boldsymbol{U} = \frac{\partial U_i}{\partial X_K}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_K\right) \qquad\qquad grad\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_I}{\partial x_k}\left(\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_k\right) \qquad \text{(I.1-13)}$$

PI.-1.3 V PI.-1.1 jsme vypočetli **F** pro pohyb popsaný rovnicemi : $x_1 = \lambda_1 X_1$, $x_2 = \lambda_2 X_2$, $x_3 = \lambda_3 X_3$, kde λ_i jsou kladná reálná čísla. Vypočtěme nyní **F** pomocí (I.1-13a).

Zřejmě tedy platí $\mathbf{F} = \mathrm{Grad}\boldsymbol{U} + \mathbf{I}$. U určíme pomocí (2), $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}$. Takže $U_1 = x_1 - X_1 = \lambda_1 X_1 - X_1 = X_1(\lambda_1 - 1)$, $U_2 = X_2(\lambda_2 - 1)$ a $U_3 = X_3(\lambda_3 - 1)$. Derivováním dostáváme: $\partial U_1/\partial X_1 = \lambda_1 - 1$, $\partial U_2/\partial X_2 = \lambda_2 - 1$, $\partial U_3/\partial X_3 = \lambda_3 - 1$ a $\partial U_I/\partial X_K = 0$, když $I \neq K$. Takže

$$Grad\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = Grad\boldsymbol{U} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

P1.4 Vypočtěte inverzní deformační gradient k F z P1.1.

V maticovém zápisu musí platit, že $\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$. Je tedy zřejmé, že jde o matici

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix}, \text{ neboť platí } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí bázových dyad píšeme $\mathbf{F}^{-1} = \lambda_1^{-1}\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2^{-1}\boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3^{-1}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{e}_3$ (všimněte si opačného pořadí bázových vektorů, které je dáno tím, že $\mathbf{F}^{-1}$: $\{(\mathrm{d}x_a,\mathrm{d}x_b,\mathrm{d}x_c)\} \rightarrow \{(\mathrm{d}X_A,\mathrm{d}X_B,\mathrm{d}X_C)\}$, narozdíl od **F**: $\{(\mathrm{d}X_1,\mathrm{d}X_2,\mathrm{d}X_3)\} \rightarrow \{(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)\}$.

Předtím, než přistoupíme k výkladu měr deformace pomocí různých deformačních tenzorů, uveďme ještě jeden, alternativní, způsob zavedení deformačního gradientu. Zatímco na úvod kapitoly 1.2 byl **F** zaveden čistě pomocí metod matematické analýzy, následující výklad, který samozřejmě dospěje ke stejnému cíli, je veden více pomocí geometrického názoru, a mohl by tak být pro některé čtenáře vhodným doplňkem, pro zatím relativně abstraktní termín.

---

[12] Gradient je tedy definován jako operátor následujícím způsobem: $Grad(\bullet) = \left(\frac{\partial \bullet}{\partial X_1}E_1, \frac{\partial \bullet}{\partial X_2}E_2, \frac{\partial \bullet}{\partial X_3}E_3\right)$, kde symbol • zastupuje operand, na který operátor působí. Jestliže • zastupuje skalár, je výsledkem vektor. Jestliže • zastupuje vektor, je výsledkem tenzor druhého řádu a bázové vektory jsou nahrazeny bázovými dyadami (např. $E_I \otimes E_K$), protože derivujeme každou složku operandu, podle každé složky operátoru (to je případ rovnice (I.1-13)). Uvedený příklad lze pouhou záměnou převést z materiálového popisu *Grad*(•) do průběžného popisu *grad*(•).

[13] Když teď již víme, co je gradient, můžeme pomocí něj přepsat výrazy v rovnici (I.1-3) pro materiálovou časovou derivaci prostorového pole na: $D(\bullet)/Dt = \partial(\bullet)/\partial t + grad(\bullet)\boldsymbol{v}$, což platí obecně, ať už • zastupuje jakoukoliv veličinu.

Uvažujme situaci podle obrázku I-3. Zde je těleso ve dvou konfiguracích, referenční Ω(0) je vlevo a průběžná Ω(t) vpravo. Polohovým vektorem $\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{E}_1 + X_2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3$ je zaměřena materiálová částice P. V jejím okolí ($\boldsymbol{X}$ + d$\boldsymbol{X}$) leží částice Q. Během pohybu tělesa přejde částice P do polohy $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ a Q na $\boldsymbol{x}$ + d$\boldsymbol{x}$. Pro vektory na obrázku pak můžeme psát:

$$\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) \quad \Rightarrow \quad d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) \quad \Rightarrow \quad d\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}) + d\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X})$$

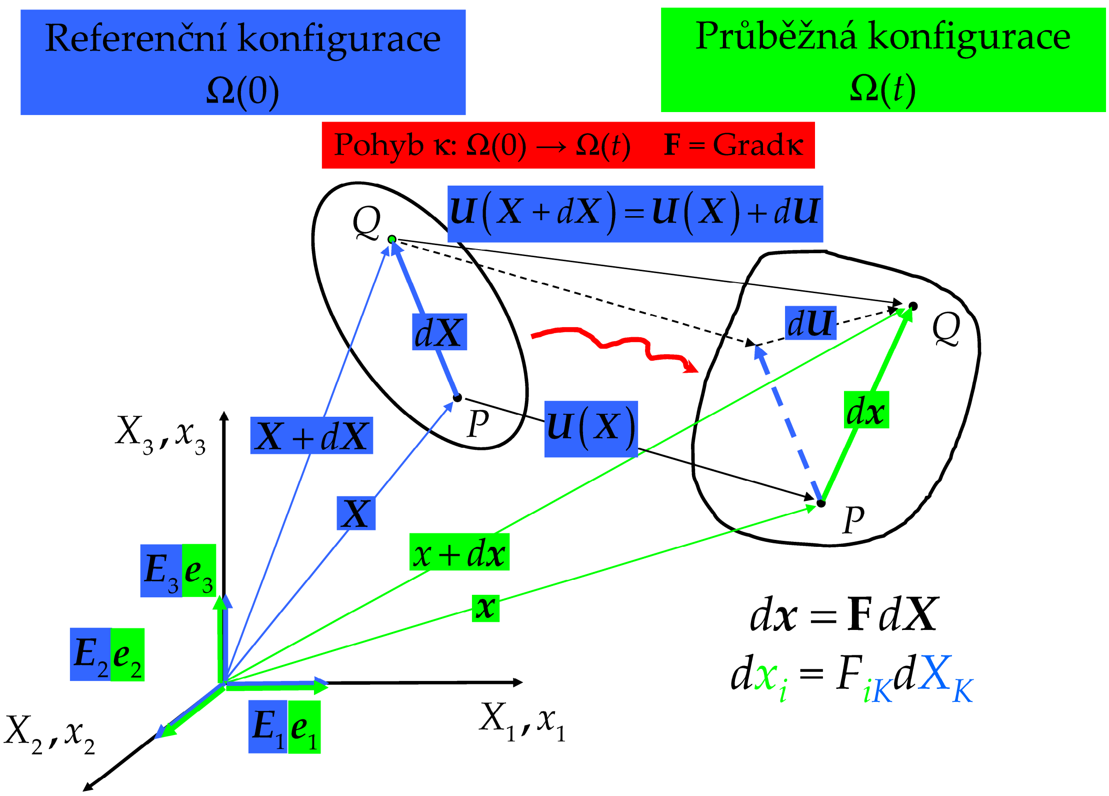
$$\Rightarrow \quad d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{U}$$

Vzhledem k tomu, že naše úvahy probíhají ve spojitém prostředí při spojitých a hladkých posuvech, můžeme v blízkém okolí $\boldsymbol{X}$ rozvinout posuv $\boldsymbol{U}$ do Taylorovy řady tak, že v prvním přiblížení:

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}) + d\boldsymbol{U} \approx \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}) + Grad\,\boldsymbol{U}\,d\boldsymbol{X}$$

Využijeme-li tohoto při zápisu elementárního vektoru d$\boldsymbol{x}$, dostaneme (I.1-14), což jsme chtěli ukázat.

$$d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{U} = d\boldsymbol{X} + Grad\,\boldsymbol{U}\,d\boldsymbol{X} = (\mathbf{I} + Grad\,\boldsymbol{U})\,d\boldsymbol{X} = \mathbf{F}\,d\boldsymbol{X} \tag{I.1-14}$$



Obrázek I-3. Deformace v infinitesimálním okolí částice P.

Shrnutí

Pohyb kontinua popisujeme z **materiálového** (polohové vektory $\boldsymbol{X}$), nebo **průběžného** (polohové vektory $\boldsymbol{x}$) úhlu pohledu. Základní veličinou, kterou používáme je **deformační gradient F**, který reprezentuje geometrickou transformaci **F**: $d\boldsymbol{X} \rightarrow d\boldsymbol{x}$ referenčního liniového elementu na zdeformovaný element. Jde o tenzor druhého řádu, který obecně není symetrický.

$$d\boldsymbol{x} = \mathbf{F}\,d\boldsymbol{X} \qquad F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \qquad d\boldsymbol{X} = \mathbf{F}^{-1}\,d\boldsymbol{x} \qquad F_{Ki}^{-1} = \frac{\partial X_K}{\partial x_i}$$

Pro objem elementu při tom platí $dv = JdV$ a pro elementární plochu $d\boldsymbol{s} = J\,\mathbf{F}^{-T}\,d\boldsymbol{S}$.

1.3 Deformace

Deformační gradient v sobě nese celou informaci o geometrických změnách (čili změnách poloh). V tomto smyslu je **F** prvotní a postačující měrou deformace. Existují ale dva dobré důvody, proč definovat ještě další. Zaprvé, deformační gradient obecně není symetrický. To nás nutí pracovat se všemi devíti složkami, což je v mnoha případech zbytečné. Zadruhé, jak geometricky vyplívá z prvního, **deformační gradient v sobě nese informaci nejen o změně délek elementu kontinua, ale také o jeho natočení. Toto natočení nás ovšem velice často nezajímá, neboť mu většinou nepřisujeme žádnou deformační energii a považujeme ho za projev pohybu elementu jako tuhého (nedeformovaného) celku[14].** Z těchto důvodů definujeme ještě další míry přetvoření tělesa, kterým říkáme **tenzory deformace**. Historicky jich bylo (a stále ad hoc i je) definováno poměrně hodně. Zmíníme se o těch nejběžnějších, se kterými se v současnosti pracuje v biomechanice měkkých tkání.

Nyní už nelze jinak, než vyslovit nějakou definici toho, kdy budeme o tělese říkat, že se deformuje. Využijeme k tomu geometrický názor získaný z obrázku I-3. **O tělese řekneme, že je zdeformované, když existuje alespoň jedna dvojice materiálových bodů** PQ **takových, že** $|d\boldsymbol{x}| \neq |d\boldsymbol{X}|$.

Promysleme si, co z toho plyne. Protože je praktičtější pracovat nikoli s absolutními hodnotami vektorů, ale s jejich druhými mocninami, umocněme tento definiční vztah a upravme pomocí deformačního gradientu.

$$|d\boldsymbol{x}| \neq |d\boldsymbol{X}| \Leftrightarrow (d\boldsymbol{x})^2 \neq (d\boldsymbol{X})^2 \Leftrightarrow d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} \neq d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \Leftrightarrow (\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X})\cdot(\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X}) \neq d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X})\cdot(\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X}) - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \neq 0 \qquad \text{(I.1-15)}$$

[14] Většinou není vždy. Existují teorie spojitého prostředí, které považují natáčení elementu kontinua za projev jeho deformace (která si samozřejmě vyžádá existenci s ní spojených vnitřních sil – momentových normálových napětí). Taková kontinua se nejčastěji nazývají polární a nacházejí uplatnění např. při popisu pohybu tekutých krystalů. Historicky první formulace takové teorie je připisována bratrům F. a G. Cosseratovým (1909). Jejich text (v anglickém překladu) je dnes dostupný na internetu http://www.uni-due.de/~hm0014/Cosserat_files/Cosserat09_eng.pdf. Mechaniku kontinua, jak je vykládána v tomto textu, lze snadno rozšířit o momentová napětí pomocí přístupu navrženého A.J.M. Spencerem (1929 – 2008), vizte např. Spencer AJM, Soldatos KP (2007) Finite Deformations of Fibre-Reinforced Elastic Solids with Fibre Bending Stiffness, *Int J Non-Lin Mech* 42 (2): 355-368; http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.02.015. Dodejme ještě, že A.J.M. Spencer významně přispěl k rozšíření popisu anisotorpního chování materiálů pomocí invariantů isotropních tenzorových funkcí více proměnných, což je přístup, který bude vykládán v tomto textu.

Využijeme-li nyní pro vytvoření skalárního součinu vektorů $(\mathbf{F}d\boldsymbol{X})\cdot(\mathbf{F}d\boldsymbol{X})$ maticového zápisu, transponujeme první $\mathbf{F}d\boldsymbol{X}$ a dostáváme tvar $d\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}d\boldsymbol{X}$, protože pro přípustné matice platí $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

V tenzorovém zápisu symbol pro transpozici vektoru vynecháváme, neboť nemá smysl. Ta totiž probíhá podle pravidla $\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{T}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})$[15]. Takže když (pro větší názornost) explicitně substituujeme do skalárního součinu $(\mathbf{F}d\boldsymbol{X})\cdot(\mathbf{F}d\boldsymbol{X})$ tak, že bude roven $\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{T}\boldsymbol{v})$ – což platí, když $\boldsymbol{u} = \mathbf{F}d\boldsymbol{X}$, $\mathbf{T} = \mathbf{F}$ a $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{X}$ –, dostaneme $\boldsymbol{v}\cdot(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}) = d\boldsymbol{X}\cdot(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}d\boldsymbol{X})$. Pokračujme tedy v ekvivalenci (I.1-15):

$$\left(\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X}\right)\cdot\left(\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X}\right) - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \neq 0 \Leftrightarrow d\boldsymbol{X}\cdot\left(\mathbf{F}^{T}\,\mathbf{F}\,d\boldsymbol{X}\right) - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$d\boldsymbol{X}\cdot\left(\mathbf{F}^{T}\,\mathbf{F}\right)d\boldsymbol{X} - d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} \neq 0 \Leftrightarrow d\boldsymbol{X}\cdot\left(\mathbf{F}^{T}\,\mathbf{F} - \mathbf{I}\right)d\boldsymbol{X} \neq \mathbf{0} \qquad \text{(I.1-16)}$$

Dospíváme k závěru, že těleso se deformuje právě tehdy, když je tenzor $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I} \neq \mathbf{0}$[16]. V tomto výrazu pouze člen $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ závisí na pohybu tělesa. Ve smyslu našeho odvození je to nejpřirozenější míra deformace, kterou nazveme ***pravý Cuachyův–Greenův tenzor deformace* C** (I.1-17).

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{T}\,\mathbf{F} \qquad\qquad C_{IK} = F_{iI}F_{iK} \qquad \text{(I.1-17)}$$

Pracujeme-li v maticovém vyjádření, je symbolický zápis (I.1-17a) jasný. Promysleme si, co vlastně říká složkový zápis (I.1-17b). Opakujícím se indexem je i, a musíme přes něj sčítat. Pro názornost opět použijeme abecední indexy; např. pro volbu $I = K = A$ dostáváme $C_{AA} = F_{aA}F_{aA} + F_{bA}F_{bA} + F_{cA}F_{cA}$. Pro nediagonální člen C_{AB} máme, $C_{AB} = F_{aA}F_{aB} + F_{bA}F_{bB} + F_{cA}F_{cB}$. Uvědomme si, že když násobení dvou matic **M** a **N** probíhá podle pravidla $\mathbf{MN} = \mathbf{T} \Leftrightarrow M_{ij}N_{jk} = T_{ik}$, tak **transpozice jedné z matic vede právě ke skutečnosti, že sčítání probíhá přes nesousední index**.

Pomocí dyad bázových vektorů bychom psali: $\mathbf{C} = C_{11}\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1 + C_{12}\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_2 + \ldots + C_{23}\boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_3 + C_{33}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3$. Sčítání probíhalo přes index příslušný průběžné konfiguraci, a tak je **výsledný tenzor definován čistě nad referenční.**

Tenzor C je szmetrický, protože $C_{AB} = F_{aA}F_{aB} + F_{bA}F_{bB} + F_{cA}F_{cB}$ a $C_{BA} = F_{aB}F_{aA} + F_{bB}F_{bA} + F_{cB}F_{cA}$; $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$.[17]

PI-1.5 Vypočtěte **C** pro pohyby z P1.1 a P1.2.

V P.I-1.1 jsme odvodili, že deformační gradient $\mathbf{F} = \mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]$, což znamená, že $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}$. Pro **C** tudíž platí: $\mathbf{C} = \mathrm{diag}[\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2]$.

V P.I-1.2 je situace zajímavější. Využijeme maticového vyjádření:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Takže } \mathbf{F}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

15 Zde **T** je nějaký tenzor druhého řádu a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou libovolné vektory. Tato situace ukazuje, že ačkoliv je maticový zápis téměř stejný jako tenzorový, rozdíl přeci jen existuje. Ekvivalentně s $\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{T}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})$ můžeme pro definic transpozice také psát, $\mathbf{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$.

16 Symbol pro nulový tenzor, čili všechny složky tenzoru jsou 0.

17 Kromě symetrie má tenzor **C** další významnou matematickou vlastnost, je pozitivně definitní.

Mějme nyní nějaký jednotkový vektor $\boldsymbol{M}$ z $\Omega(0)$ a deformační gradient $\mathbf{F}$ převádějící $\boldsymbol{M}$ na $\boldsymbol{m} = \mathbf{F}\boldsymbol{M}$ v konfiguraci $\Omega(s)$. Označíme-li velikost zdeformovaného vektoru $\boldsymbol{m}$ jako λ, čili $\lambda = |\boldsymbol{m}|$, resp. $\boldsymbol{m} = \lambda \boldsymbol{e}_m$, pak můžeme psát $\lambda^2 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = (\mathbf{F}\boldsymbol{M})\cdot(\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}\cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\cdot\mathbf{C}\boldsymbol{M}$. V úlohách, kde máme rovnou zadaný tenzor $\mathbf{C}$, můžeme tedy snadno vypočíst změnu velikosti vektorů během deformace (uvědomme si, že není možné zpětně z šesti složek tenzoru $\mathbf{C}$ jednoznačně určit devět složek $\mathbf{F}$, abychom získali $\boldsymbol{m}$ pomocí $\mathbf{F}\boldsymbol{M}$).

Rozklad na rotaci a čisté strečování. V úvodu jsme se zmínili, že tenzory deformace zavádíme proto, abychom (1) redukovali počet neznámých skalárních funkcí popisujících deformaci (z 9 na 6) a (2) abychom odstranili nadbytečnou informaci o rotaci elementu kontinua (což má ovšem stejný důsledek jako bod (1)). Měli bychom tedy ukázat, že zavedením $\mathbf{C}$ k tomu došlo.

Vyjdeme z věty o polárním rozkladu matice (resp. lineární transformace). Ta říká, že každou nesingulární matici $\mathbf{F}$ lze rozložit na součin symetrické pozitivně definitní matice a ortogonální matice $\mathbf{R}$ a to jednoznačně až na nutnost rozlišování mezi násobením zprava a zleva[18]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{v}\,\mathbf{R} \tag{I.1-18}$$

Považujeme-li $\mathbf{F}$ za deformační gradient, **definujeme tak nové deformační tenzory, které nazýváme pravý tenzor streču U a levý tenzor streču v**. Protože při násobení dvou tenzorů druhého řádu jde vlastně o skládání zobrazení, hovoříme o $\mathbf{RU}$ jako o **rotaci po strečování** a o $\mathbf{vR}$ jako o **strečování po rotaci**.[19] Místo přívlastků *pravý* a *levý* se také často říká *materiálový* a *prostorový*, což je odvozeno od konfigurace, ke kterým se tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{v}$ vztahují.

Nyní vyjděme z definice $\mathbf{C}$. Platí: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{RU})^T\mathbf{RU} = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{RU}$, uvážíme-li $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$, $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$, tudíž žádné rotace.

P.I-1.6 Ukažte, že při pohybu popsaném rovnicemi: $x_1 = \sqrt{3}X_1 - \frac{1}{4}X_2$, $x_2 = X_1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}X_2$, $x_3 = X_3$, jde o rotaci o $\pi/6$ okolo X_3 po strečování $\mathbf{U} = \mathrm{diag}[2, \frac{1}{2}, 1]$. Nalezněte vyjádření levého tenzoru streču $\mathbf{v}$.

Rotace okolo osy X_3 odpovídá matici ortogonální transformace $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Násobením podle definice (I.1-18) dostáváme $\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

[18] Ortogonální matice $\mathbf{R}$ je taková matice, pro kterou platí $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, což také znamená $\mathbf{RR}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Samozřejmě hovoříme také o ortogonálních tenzorech a transformacích. Z geometrického hlediska takové transformace představují otáčení souřadnicové soustavy okolo počátku.

[19] Pokud čtenáři činí potíže uvažovat o maticích a tenzorech jako o zobrazení, nechť si píše rovnost (I.1-18) jako: $\boldsymbol{x} = \mathbf{F}\boldsymbol{X} = \mathbf{RU}\boldsymbol{X} = \mathbf{vR}\boldsymbol{X}$ platí pro každé $\boldsymbol{X}$.

Derivováním podle (6b) zároveň zjistíme, že matice deformačního gradientu **F** je:

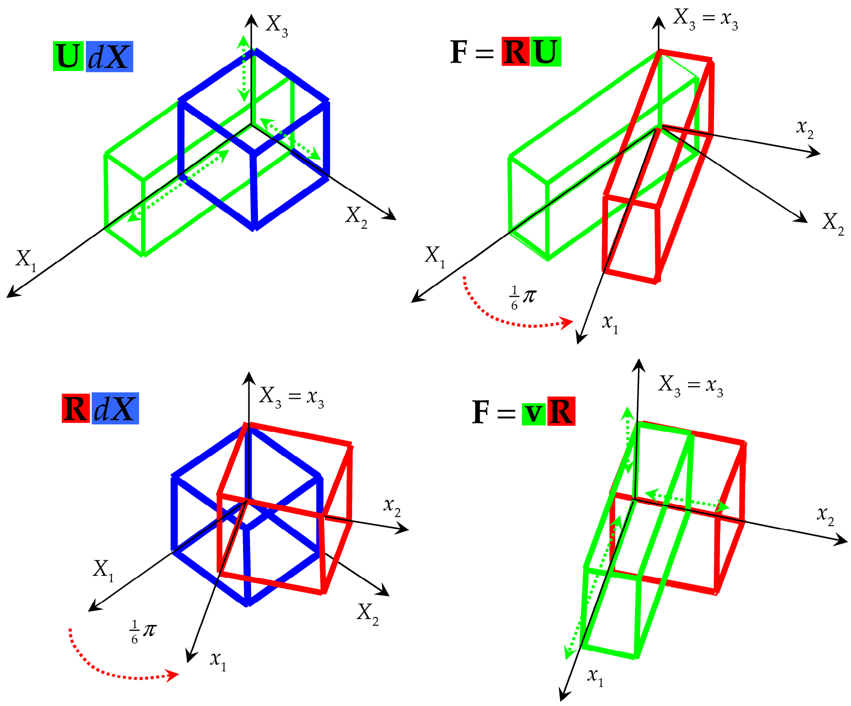
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rovnost obou matic je zjevná.

Po vynásobení identity (18) $\mathbf{R}^{-1}$ (jelikož je **R** ortogonální, tak $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$)

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}\,\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3}{8}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak naznačuje použitý font, je **U** definováno nad bází $\{E_1,E_2,E_3\}$ a **v** nad $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$[20]. Ke změně báze dochází rotací souřadnicové soustavy, a tak tenzory **U**, **v**, **R** vyjadřujeme pomocí dyad bázových vektorů $E_I \otimes E_K$, $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k$, $E_I \otimes \boldsymbol{e}_k$.



Obrázek I.1-4. Deformace elementární krychle z P1.6. Horní pár ukazuje rotaci **R** po strečování **U**, dolní pár strečování **v** po rotaci **R**. V obou případech je výsledkem **F** podle pravidla **F** = **RU** = **vR**. Jak je naznačeno, strečování nemění vektory báze (resp. souřadnicové osy). Referenční konfigurace = modrá, strečování = zelená, rotace = červená.

[20] Čili při rotaci kontinua platí: $d\boldsymbol{x} = \mathbf{R}d\boldsymbol{X}$, $dx_i = R_{iK}dX_K$, jestliže se k tomu navíc deformuje, tak $d\boldsymbol{x} = \mathbf{R}(\mathbf{U}d\boldsymbol{X})$, $dx_i = R_{iK}U_{KL}dX_L$, respektive $d\boldsymbol{x} = \mathbf{v}(\mathbf{R}d\boldsymbol{X})$, $dx_i = v_{ij}R_{jK}dX_K$.

Dalšími tenzory deformace, které se v literatuře obvykle zavádějí, jsou: ***levý Cauchyův–Greenův*** tenzor **b**, ***Greenův–Lagrangeův*** tenzor **E**, **Eulerův–Almansiův** tenzor **e**, logaritmický tenzor deformace ln**U** nebo ln**V** a Hillovy zobecněné tenzory deformace. Následující tabulka shrnuje jejich definice pomocí deformačního gradientu.

Přehled vybraných tenzorů deformace (terminologie ovšem kolísá jak v české, tak zahraniční literatuře).

	Název	Definice	Složky	Symetrie
F	*deformační gradient*	$\mathbf{F} = d\mathbf{x}/d\mathbf{X}$	F_{iK}	NE
U	*pravý tenzor strečů*	$\mathbf{F} = \mathbf{RU}$	U_{IK}	ANO
v	*levý tenzor strečů*	$\mathbf{F} = \mathbf{vR}$	v_{ik}	ANO
C	*pravý Cauchyův–Greenův tenzor deformace*	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$	C_{IK}	ANO
b	*levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace (též Fingerův*[21]*)*	$\mathbf{b} = \mathbf{FF}^T$	b_{ik}	ANO
E	*(Greenův–)Lagrangeův tenzor deformace*	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$	E_{IK}	ANO
e	*Eulerův (–Almansiův) tenzor deformace*	$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$	e_{ik}	ANO
ln**U**	*(materiálový) logaritmický tenzor deformace* (též *Henckyho*)	$\ln\mathbf{U}$	$\ln U_{IK}$	ANO
ln**v**	*(prostorový) logaritmický tenzor deformace* (též *Henckyho*)	$\ln\mathbf{v}$	$\ln v_{ik}$	ANO
B	*Piolův tenzore deformace*	$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$	B_{IK}	ANO
	Hillovy zobecněné tenzory deformace $1/n(\mathbf{U}^n - \mathbf{I})$ a $1/n(\mathbf{v}^n - \mathbf{I})$ pro $n \neq 0$			

SHRNUTÍ

K deformačnímu gradientu **F** jsme nadefinovali další **symetrické** a pozitivně definitní tenzory, tzv. ***tenzory deformace***. Nejdůležitější z nich, se kterými budeme dále pracovat, jsou **U**, **v**, **C**, **b**, **E** a **e**. Definice jsou uvedeny v tabulce výše. Důvodem jejich zavedení byl především úmysl omezit se na šest nezávislých složek, což nastalo „odstraněním" rotací elementu kontinua z **F**.

1.4 DALŠÍ VLASTNOSTI TENZORŮ DEFORMACE

Jak bylo řečeno, poskytuje tento text pouze úvodník do mechaniky kontinua nezbytný pro biomechaniku krevních cév. A tak následující vlastnosti budou uvedeny výčtem bez důkazů. Spoléháme se při tom, na čtenářskou znalost lineární algebry a analytické geometrie kvadratických útvarů. Všechny níže uvedené vlastnosti byly v těchto předmětech probírány (studenti strojních a stavebních fakult se s nimi navíc setkali i v teorii pružnosti a pevnosti).

Z dalších vlastností jsou velmi užitečné především skutečnosti, že:

- tenzory deformace definují **kvadratickou formu** (hovoříme o kvadratické formě příslušné tenzoru druhého řádu) a tím i nějakou kvadriku (kvadratickou plochu)
- pro tenzory deformace (jakožto tenzory druhého řádu) definujeme **vlastní čísla** (skalární invarianty) a **vlastní vektory**, čehož často využíváme při jejich reprezentaci

[21] V zemi České koruny narozený rakouský fyzik Josef Finger (1841–1925), 1890 až 1891 rektor vídeňské techniky.

Deformační kvadrika. **Kvadratická forma** $f(d\boldsymbol{X})$ **určená tenzorem** (např.) **C** se získá jako $f(d\boldsymbol{X}) = d\boldsymbol{X}\cdot(\mathbf{C}d\boldsymbol{X})$ a příslušná deformační kvadrika je dána rovnicí $f(d\boldsymbol{X}) = 0$. Deformační kvadrika představuje geometrické místo bodů z hranice blízkého okolí bodu $\boldsymbol{X}$, tj. $\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$ (připomeňte si obrázek I-3). Před deformací jde samozřejmě o kouli se středem $\boldsymbol{X}$. Po deformaci popsané tenzorem **C** je to stále plocha, na které leží všechny materiálové částice Q, které byly vektorem $d\boldsymbol{X}$ zaměřeny, nicméně, pokud se těleso deformuje, již nejde o kouli ale o obecný elipsoid (pokud nemá defromace lokálně charakter homogenní dilatace/komprese).

Vlastní čísla a vektory. Tenzorům druhého řádu, se kterými zde pracujeme, rozumíme jako zobrazením (transformacím) vektorových prostorů. Při těchto zobrazeních hrají velmi užitečnou roli **vektory, které si při transformaci zachovávají svou orientaci**. **Takové vektory nazýváme vlastní** a zmíněnou vlastnost můžeme zformulovat takto: jestliže **T** je nějaký tenzor druhého řádu a $\boldsymbol{n}$ je vektor z definičního oboru **T**, pak **pro vlastní vektor** $\boldsymbol{n}$ **platí** $\mathbf{T}\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n}$, kde λ je reálné číslo. Tuto rovnici můžeme přepsat na tvar $\mathbf{T}\boldsymbol{n} - \lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ a dále na $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$. Jde tedy o soustavu tří lineárních rovnic pro neurčitou $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)$ s parametrem λ. Taková soustava má netriviální řešení, když matice soustavy je singulární, čili $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Rozvinutím dostaneme **charakteristickou rovnici T** ve tvaru (I.1-19).

$$\lambda^3 - I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda - I_3(\mathbf{T}) = 0 \tag{I.1-19}$$

Reálná čísla $I_1(\mathbf{T})$, $I_2(\mathbf{T})$, $I_3(\mathbf{T})$ nazýváme **hlavní invarianty**[22] **tenzoru T** (resp. příslušné matice a kvadratické formy). **Kořeny (I.1-19)** λ_1, λ_2, a λ_3 **nazýváme vlastní čísla T** (tenzoru, matice, formy). Vlastní vektory tvoří ortonormální bázi a určují směry hlavních os příslušné deformační kvadriky. Hlavní invarianty symetrického pozitivně definitního tenzoru je možno určit podle následujících pravidel (kde λ_i označuje právě vlastní čísla)

$$I_1(\mathbf{T}) = tr(\mathbf{T}) = \mathbf{T}:\mathbf{I} = T_{ij}\delta_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{I.1-20}$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \tfrac{1}{2}\left(tr^2(\mathbf{T}) - tr(\mathbf{T}^2)\right) = \tfrac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ji}T_{ij}\right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \tag{I.1-21}$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \mathbf{det}(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{I.1-22}$$

V rovnicích (I.1-20) se objevují hned dvě nové operace. První, označená symbolem $tr(\bullet)$ označuje **stopu tenzoru** (matice) a probíhá podle výrazů (I.1-20$_4$), resp. (I.1-20$_5$). Řečeno slovy, jde o součet prvků na hlavní diagonále[23]. Druhá je označena dvojtečkou a říkáme jí prostě **dvojtečkový (vnitřní) součin**. Jak je zjevné z (I.1-20$_4$), provádíme ji jako součet součinů odpovídajících složek (obdobně jako **skalární součin** eukleidovských vektorů). V tomto konkrétním případě tedy $\mathbf{T}:\mathbf{I} = T_{ij}\delta_{ij} = T_{11}\cdot 1 + T_{22}\cdot 1 + T_{33}\cdot 1$, protože $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ a současně $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{31} = \delta_{13} = 0$. Obě operace jsou komutativní[24]. Vlastní čísla **T** jsou samozřejmě také invarianty **T**.

---

[22] Invarianty vzhledem k ortogonální transformaci, čili rotaci souřadnicových os.

[23] Upozorňujeme čtenáře, že tato definice platí jen tehdy, pracujeme-li s vyjádřením vzhledem k ortonormální bázi. V obecné bázi je nutno definovat tzv. metrický tenzor a použít ho místo **I**.

[24] Tzn. platí: $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ a $\mathbf{A}:\mathbf{B} = \mathbf{B}:\mathbf{A}$ a navíc $\mathbf{A}:\mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = tr(\mathbf{AB}^T) = tr(\mathbf{BA}^T) = \mathbf{B}:\mathbf{A}$. Operace stopy je navíc lineární, tj. $tr(s\mathbf{A} + s\mathbf{B}) = s\cdot tr(\mathbf{A}) + s\cdot \mathrm{tr}(\mathbf{B})$.

Pomocí dvojtečkového součinu definujeme normu tenzoru **T** jako číslo $|\mathbf{T}|$ rovné kladné odmocnině z **T**:**T**.

V bázi definované pomocí svých vlastních vektorů může být každý symetrický tenzor psán v diagonálním tvaru, kde na hlavní diagonále jsou právě vlastní čísla tenzoru; $\mathbf{T} = \lambda_1 \boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3$. Tento zápis se nazývá spektrální, převod na něj **spektrální rozklad**.

O dvou tenzorech říkáme, že jsou **koaxiální**, jestliže mají stejné vlastní vektory. Dvojice tenzorů **U** a **C**, resp. **v** a **b**, jsou koaxiální[25]. Nicméně vlastní čísla jsou různá, avšak platí, že $\lambda_{iC} = \lambda_{iU}^2$, $i = 1,2,3$. Navíc platí, že vlastní čísla dvojic tenzorů **U** a **v** a **C** a **b** jsou shodná, čili $\lambda_{iU} = \lambda_{iv}$, $\lambda_{iC} = \lambda_{ib}$. Vlastní čísla tenzorů **U** a **v** nazýváme **hlavní streče**. Pro vlastní vektory **U** a **v** platí vztah $\boldsymbol{n}_i = \mathbf{R}\boldsymbol{N}_i$, čili prostorové vlastní vektory $\boldsymbol{n}_i$ získáme rotací materiálových vlastních vektorů $\boldsymbol{N}_i$, když pro **R** platí **F** = **RU**.

Inženýrský (infinitesimální) tenzor deformace ε. V (lineární) teorii pružnosti, se kterou se seznamují studenti strojních a stavebních fakult, bývá tenzor deformace definován poněkud jinak. To vyplývá z očekávané aplikace získaných kompetencí na stavy inženýrských konstrukcí před dosažením mezního stavu plasticity, čili v oblasti, kde se většina materiálů chová lineárně a deformace/posuvy jsou obvykle velmi malé (připomeňme smluvní mez kluzu definovanou často jako napětí, při kterém bylo dosaženo poměrného prodloužení 0.002 při jednoosé napjatosti). Inženýrský tenzor deformace je definován pomocí vektoru posuvů $\boldsymbol{U}$ jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(Grad\boldsymbol{U} + \left(Grad\boldsymbol{U}\right)^T\right) \qquad \varepsilon_{IK} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I}\right) \qquad \text{(I.1-23)}$$

Uvědomíme-li si, že Greenův–Lagrageův tenzor **E** můžeme pomocí vektoru posuvů $\boldsymbol{U}$ psát jako

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(Grad\boldsymbol{U} + \left(Grad\boldsymbol{U}\right)^T + \left(Grad\boldsymbol{U}\right)^T Grad\boldsymbol{U}\right) \qquad E_{IK} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U_I}{\partial X_K} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I}\frac{\partial U_J}{\partial X_K}\right) \qquad \text{(I.1-24)}$$

je zjevný vzájemný vztah mezi **E** a **ε**.[26] Tenzor inženýrských deformací je linearizací tenzoru **E**. Při linearizaci se vychází z předpokladu, že posuvy a deformace jsou malé, tudíž člen $\partial U_J/\partial X_I \cdot \partial U_J/\partial X_K$ (sčítáme přes index J!), který má kvadratický charakter, se zanedbává. Ke stejnému výsledku bychom dospěli porovnáním **ε** s Eulerovým–Almansiovým tenzorem deformace **e** (vztaženým k průběžné konfiguraci). **V pružnosti infinitesimálních deformací (narozdíl od pružnosti konečných, nebol-li velkých, deformací, tak vůbec nezáleží na tom, zda-li deformaci vztahujeme ke stavu na počátku, nebo ke stavu v průběhu deformace**.

Doporučujeme čtenáři, aby si jako cvičení sám dokázal, že vyjde-li ze vztahu **F** = *Grad*$\boldsymbol{U}$ + **I** (PI-1.3) a aplikuje definici **E** = ½(**C** – **I**), dospěje skutečně k rovnicím (24)!

---

[25] Připomeňme si, že platí: $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ a $\mathbf{b} = \mathbf{v}^2$.

[26] Pro procvičení si raději rozepišme složky ε_{11}, ε_{12}, E_{11} a E_{12} detailně: $\varepsilon_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)$, $\varepsilon_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right)$, $E_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\frac{\partial U_3}{\partial X_1}\right)$ a $E_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\frac{\partial U_3}{\partial X_2}\right)$. Dodejme, že nediagonální složky tenzoru **ε** velmi často označujeme γ_{ij} a hovoříme o nich jako o zkosech, kdežto o diagonálních složkách jako o poměrných prodlouženích.

Nyní si ukažme kvantitativní rozdíly mezi jednotlivými tenzory deformace při popisu jednoosého tahu.

PI-1.7 Ukažte, jak se číselně liší hodnoty složek T_{11} tenzorů **F**, **C**, **E**, **U**, **v**, **b**, **e**, **lnU** a **ε** při uniformním protahování kvádru nějakou silou působící ve směru 1 tak, že $x_1 = \lambda X_1$.

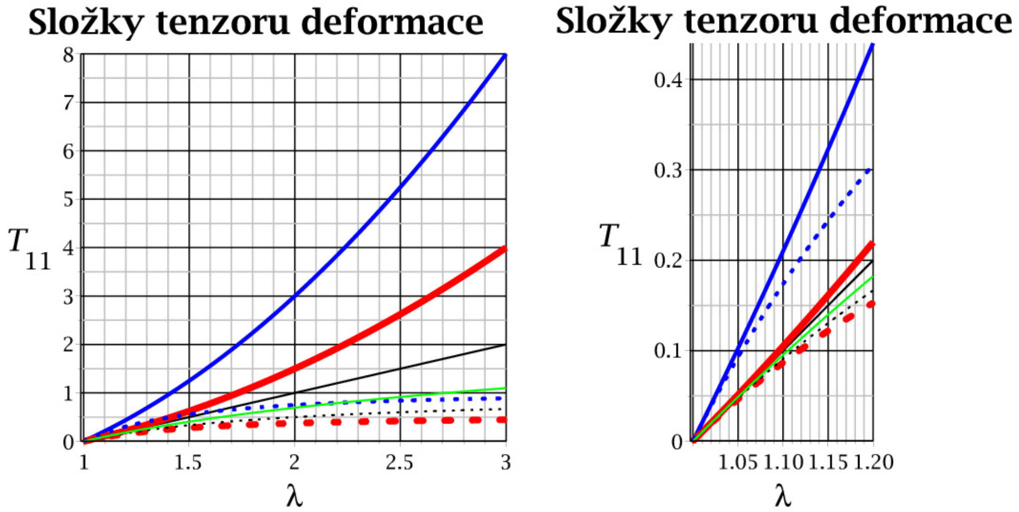
Je zřejmé, že $F_{11} = \lambda$. A tak

$$U_{11} = F_{11} = \lambda \qquad C_{11} = U_{11}^2 = \lambda^2 \qquad v_{11} = F_{11} = \lambda \qquad b_{11} = v_{11}^2 = \lambda^2$$

$$E_{11} = \tfrac{1}{2}\left(C_{11} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) \qquad e_{11} = \tfrac{1}{2}\left(1 - b_{11}^{-1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda^{-2}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \lambda - 1$$

$$\mathbf{ln}\, U_{11} = \mathbf{ln}\, v_{11} = \mathbf{ln}\, \lambda$$

Obrázek 5 ukazuje hodnoty složek T_{11} pro jednotlivé tenzory deformace.



Obrázek I.-5. Číselné hodnoty složky T_{11} pro jednotlivé tenzory deformace; vpravo je detail pro hodnoty „při malých" deformacích. Protože $F_{11} = U_{11} = v_{11} = \lambda$ a $C_{11} = b_{11} = \lambda^2$ neprocházejí bodem [0,1], jsou místo nich prezentovány $\lambda - 1$ a $\lambda^2 - 1$, aby byly číselné hodnoty složek lépe porovnatelné. Na obrázku jsou složky materiálových tenzorů plně a prostorových přerušovaně. Konkrétně: $\lambda - 1$, $\lambda^2 - 1$, $\tfrac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$, $\tfrac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$, $1 - \lambda^{-2}$, $1 - \lambda^{-1}$, $\ln\lambda$. Z detailu vpravo je dobře patrné, že při daném měřítku os a rozlišení tiskárny jsou složky E_{11}, e_{11}, $\varepsilon_{11} = F_{11} - 1$ a $\mathbf{ln}U_{11} = \mathbf{ln}v_{11}$ pro $\lambda < 1.05$ téměř stejné. Lépe řečeno pro $\lambda \to 1^+$ jsou shodné.

SHRNUTÍ

Tenzory deformace definované v 1.3 jsou symetrické a pozitivně definitní. S výhodou využíváme pro jejich reprezentaci spektrálního rozkladu a skutečnosti že jejich vlastní čísla jsou invariantní vůči natočení souřadnicové soustavy. V budoucích částech toho textu bude formulace konstitutivní teorie (závislost mezi kinematickou kontinua a intenzitou vnitřních sil) založena na hlavních invariantech tenzoru deformace **T**:

$$I_1\left(\mathbf{T}\right) = tr\left(\mathbf{T}\right) = \mathbf{T} : \mathbf{I} = T_{ij}\delta_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2\left(\mathbf{T}\right) = \tfrac{1}{2}\left(tr^2\left(\mathbf{T}\right) - tr\left(\mathbf{T}^2\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ji}T_{ij}\right) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

$$I_3\left(\mathbf{T}\right) = \mathbf{det}\left(\mathbf{T}\right) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Pro malé deformace platí, že tenzory **E**, **e**, ln**U** a ln**v** je možno nahradit tenzorem inženýrských deformací $\varepsilon_{IK} = \tfrac{1}{2}(\partial U_I/\partial X_K + \partial U_K/\partial X_I)$.

1.5 RYCHLOST DEFORMACE

Většina měkkých tkání vykazuje závislost odezvy na rychlosti zatěžování, proto bude dobré zamyslet se, kromě způsobu kvantifikace deformace samotné, nad způsobem jak popsat její rychlost. Intuitivně by se mohlo zdát, že prostě zderivujeme výše odvozené tenzory podle času. Jak uvidíme, cesta k těmto derivacím není úplně snadná.

Veličina, ze které se obvykle vychází, je tzv. **prostorový** (čili k průběžné konfiguraci vztažený) **gradient l rychlosti** $\boldsymbol{v}$ (zde $\boldsymbol{v}$ je funkcí $\boldsymbol{x}$, čili průběžných souřadnic). Protože je to gradient vektoru, jde opět o tenzor druhého řádu (I.1-25).

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}} = grad\boldsymbol{v} \qquad l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{I.1-25}$$

Tenzor rychlosti deformace d zavádíme jako **symetrickou část l**.[27] Antisymetrickou část **l** nazýváme **tenzor spinu Ω**[28] (někdy též rotace nebo vířivosti) a oba je z **l** získáme pomocí (26).

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{l}+\mathbf{l}^T\right) \qquad \boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}^T\right) \tag{I.1-26}$$

Ačkoliv by se podle názvů mohlo zdát, že se rozkladem na symetrickou a antisymetrickou část podařilo (stejně jako jsme se o to snažili v rozkladu **F** = **RU** = **vR**) oddělit rotaci od streču, není tomu tak, neboť platí: $\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}+\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right)\mathbf{R}^T$ a $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}+\tfrac{1}{2}\mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right)\mathbf{R}^T$.[29]

Nyní odvoďme vztahy pro časové derivace tenzorů **C**, **E**, **e** a **b**.

Vyjdeme z rozepsání definice **l**. Protože $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ a protože fyzikálně musí být vektor rychlosti při popisu v prostorových i materiálových souřadnicích stejný, čili $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)$, můžeme psát

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}\right)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)}{\partial \boldsymbol{X}}\right)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^{-1} \tag{I.1-27}$$

Dík předpokládané spojitosti jsme zaměnili pořadí derivací podle času a $\boldsymbol{X}$, když před tím jsme původní závislost na $\boldsymbol{x}$, transformovali na $\boldsymbol{X}$. Veličinu $\dot{\mathbf{F}} = \partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})/\partial \boldsymbol{X} = Grad\boldsymbol{V}$, která se zde objevila, nazýváme **materiálový gradient rychlosti**.

Derivování výrazu $\mathbf{E} = ½(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})$ dostaneme $\dot{\mathbf{E}} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}+\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\right)$, když aplikujeme pravidlo o derivaci součinu a uvědomíme si, že **I** nezávisí na čase. Podle (27) platí $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \Rightarrow \mathbf{l}\mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}}$, což

[27] Každý tenzor druhého řádu (matici, resp. bilineární formu) lze aditivně rozložit na symetrickou a antisymetrickou část a to jednoznačně. Připomeňme, že pro symetrický tenzor **T** platí $T_{ij} = T_{ji}$, kdežto pro antisymetrický $T_{ij} = -T_{ji}$, což si vždy vynucuje 0 na hlavní diagonále antisymetrického tenzoru.

[28] Upozorňujeme výslovně, že označením **Ω** se odchylujeme od konvence, že verzálky jsou vyhrazeny veličinám definovaným vzhledem k referenční konfiguraci. Symbol **Ω** pro prostorový tenzor rychlosti rotace je ale obvyklý.

[29] Symbolem tečky zde vždy označujeme tzv. materiálovou derivaci, čili časovou derivaci funkcí, které byly pro účely derivace transformovány do materiálových souřadnic. Někdy též používáme symbol $\frac{D}{Dt}$. Důkaz uvedených tvrzení čtenář nalezne v Holzapfel (2000) s. 99.

dosadíme do výrazu pro $\dot{\mathbf{E}}$ a získáme $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left((\mathbf{lF})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T\mathbf{lF}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{l}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T\mathbf{lF}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{F}^T\left(\mathbf{l}^T + \mathbf{l}\right)\mathbf{F}$. Dosadíme-li z rovnice (I.1-26) dostáváme finální vztah pro rychlost Greenova–Lagrangeova tenzoru deformace (I.1-28).

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{dF} \tag{I.1-28}$$

Pokud jde o další materiálový tenzor deformace **C**, tak uvědomíme-li si, že $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ a $D(\mathbf{I})/Dt = 0$, je zřejmé, že $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}}$.

Pro levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace **b**, při vědomí $\mathbf{b} = \mathbf{FF}^T$, dostaneme $\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{lFF}^T + \mathbf{FF}^T\mathbf{l}^T = \mathbf{lb} + \mathbf{bl}^T$. Bez důkazu uveďme, že materiálová derivace Eulerova–Almansiova tenzoru deformace **e** platí: $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \mathbf{l}^T\mathbf{e} - \mathbf{el}$.[30]

PI-1.8 Odvoďte vztahy pro složky T_{11} tenzorů $\dot{\mathbf{F}}, \mathbf{l}, \mathbf{d}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{C}}, \dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{e}}$ při zatížení bloku materiálu délky L silou ve směru 1 v jeho čele, která způsobuje vzdalování se rychlostí c od protějšího čela, kde je v tomto směru zamezeno posuvu. Situace tedy odpovídá jednoose tahové zkoušce ve směru 1. Předpokládejte stav homogenní dilatace (čili na prostoru nezávislou deformaci, která nevede k žádným zkosům), nestlačitelný materiál a isotropní chování[31].

Podle příkladu PI-1.1 je pohyb odpovídající homogenní dilataci popsán rovnicemi $x_1 = \lambda_1 X_1$, $x_2 = \lambda_2 X_2$, $x_3 = \lambda_3 X_3$ a deformační gradient **F** je dán jako $\mathbf{F} = \mathrm{diag}[F_{11}, F_{22}, F_{33}] = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$.

Jelikož je materiál isotropní, pro příčnou kontrakci bude platit $\lambda_2 = \lambda_3$. Materiál je navíc nestlačitelný, čili nedochází ke změně objemu během deformace, takže $\det\mathbf{F} = 1 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Substituujeme-li $\lambda_2 = \lambda_3$, získáváme $\lambda_1\lambda_2^2 = 1$. A odtud nakonec $\lambda_2 = \lambda_1^{-1/2}$. Takže výsledný deformační gradient můžeme psát jako

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix}$$

Pro body zatíženého čela, čili $X_1 = L$, platí: $x_1 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 X_1 = X_1 + \Delta X_1 \quad \Rightarrow \lambda_1 X_1 = X_1 + ct \quad \Rightarrow \lambda_1 L = L + ct$.
Což umožňuje vyjádřit $\lambda_1(t) = \frac{ct}{L} + 1$, resp. $\varepsilon_{11}(t) = \frac{ct}{L}$.

Pro **F** tedy máme $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct}{L} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{L}{ct+L}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{L}{ct+L}} \end{pmatrix}$

Vzhledem k tomu, že **F** je vyjádřeno v materiálových souřadnicích, získáme (materiálovou) derivaci podle času $\dot{\mathbf{F}}$ prostým derivováním

[30] Pro důkaz vizte Holzapfel (2000) s. 102.

[31] Termín isotropní chování materiálu znamená, že v materiálu neexistuje žádný preferovaný směr. Jinými slovy rotací souřadnicové soustavy (čili aplikací ortogonální transformace), nebo rotací materiálu v pevné soustavě (to je totéž), a následným zatížením, získáme odezvu nezávislou na této rotaci. Tímto termínem mírně předbíháme výklad, na druhou stranu tento studijní text je primárně určen studentům navazujícího magisterského studia, a tak by s ním čtenář již měl být obeznámen. V následujících kapitolách bude termín isotropie ještě dále precizován.

$$\dot{\mathbf{F}}=\begin{pmatrix}\frac{D}{Dt}(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ct}{L}+1\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\frac{L}{ct+L}}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\frac{L}{ct+L}}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c}{L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že když $\varepsilon_{11} = F_{11} - 1$, pak $\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{F}_{11} = \dot{\lambda}_1 = c / L$.

Pokud jde o prostorový gradient rychlosti **l**, tak vyjdeme-li ze vztahu $\mathbf{l}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ a současně si uvědomíme, že pro náš $\mathbf{F} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, platí $\mathbf{F}^{-1} = \mathrm{diag}[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}]$, dostaneme

$$\mathbf{l}=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}_1 & 0 & 0\\ 0 & \dot{\lambda}_2 & 0\\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1} & 0\\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c}{L}\lambda_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\lambda_1} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\lambda_1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{c}{ct+L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c}{ct+L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{ct+L} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{ct+L}\end{pmatrix}$$

Pro určení tenzoru **l** můžeme vyjít i z definice $\mathbf{l} = \partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)/\partial \boldsymbol{x}$. Ačkoliv to není přímo potřeba, bude užitečné si to vyzkoušet. Uvidíme tak totiž rozdíl mezi vyjádřením pohybu v materiálových X_I a prostorových souřadnicích x_i.

Abychom mohli provádět derivace podle $\boldsymbol{x}$, musíme mít nejprve naše veličiny vyjádřené jako funkce $\boldsymbol{x}$. Z pohybových rovnic dostaneme materiálový vektor rychlosti $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t) = (\partial x_1/\partial t, \partial x_2/\partial t, \partial x_3/\partial t) =$

$$=\left(\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_1 X_1),\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_2 X_2),\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_3 X_3)\right)=\left(\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_1 X_1),\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_1^{-1/2} X_2),\tfrac{\partial}{\partial t}(\lambda_1^{-1/2} X_3)\right)=\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{ct+L}{L}X_1\right),\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\tfrac{L}{ct+L}}X_2\right),\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\tfrac{L}{ct+L}}X_3\right)\right)=\left(\tfrac{c}{L}X_1,-\tfrac{1}{2}\tfrac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}X_2,-\tfrac{1}{2}\tfrac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}X_3\right)$$

Materiálový vektor rychlosti $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)$ převedeme na prostorový $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, dosazením z pohybových rovnic, když platí: $X_1 = 1/\lambda_1 \cdot x_1$, $X_2 = 1/\lambda_2 \cdot x_2$, $X_3 = 1/\lambda_3 \cdot x_3$.

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{c}{L}\frac{x_1}{\lambda_1},-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{x_2}{\lambda_2},-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{x_3}{\lambda_3}\right)=\left(\frac{c}{L}\frac{x_1}{\frac{ct+L}{L}},-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{x_2}{\sqrt{\frac{L}{ct+L}}},-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{x_3}{\sqrt{\frac{L}{ct+L}}}\right)=\left(\frac{c}{ct+L}x_1,-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)}x_2,-\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)}x_3\right)$$

A nyní derivujeme

$$\mathbf{l}=\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial \boldsymbol{x}}==\begin{pmatrix}\frac{c}{ct+L} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)}\end{pmatrix}$$

Máme-li **l**, můžeme pro získání tenzoru rychlosti deformace **d** využít definice, čili $\mathbf{d} = ½(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$. Zjistíme, že v našem konkrétním případě, kdy tenzor **l** je symetrický (protože již **F** je symetrický), platí $\mathbf{d} = \mathbf{l}$.

Časová derivace Greenova–Lagrangeova tenzoru deformace $\dot{\mathbf{E}}$ je podle definice rovna $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{T}\mathbf{dF}$, takže

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{T}\,\mathbf{dF} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{L}\frac{ct+L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{L}{ct+L}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{c}{L\left(\frac{ct}{L}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{L}{ct+L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c^2t+Lc}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{cL}{(ct+L)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{cL}{(ct+L)^2} \end{pmatrix}$$

Dále dostáváme $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}}$, který ale neuvádíme, neboť se prostě předchozí vynásobí dvěma.
Levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace $\mathbf{b}$ získáme jako $\mathbf{b} = \mathbf{FF}^{T} = \mathrm{diag}[\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2] = \mathrm{diag}[\lambda_1^2, 1/\lambda_1, 1/\lambda_1]$.

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{l}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{l}^{T} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$2\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\lambda_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{c^2t+Lc}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{cL}{(ct+L)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{cL}{(ct+L)^2} \end{pmatrix}$$

Zjišťujeme, že složky $2\dot{b}_{ij}$ jsou formálně totožné s $\dot{E}_{IK}$, jinak řečeno totožné jsou složky $\dot{b}_{ij}$ a $\dot{C}_{IK}$. To by nás nemělo překvapit, když víme, jak je to s tenzory **b** a **C**, pokud jsou psány ve formě hlavních čísel (diagonální vyjádření). Nicméně pozor na báze, ve kterých jsou definovány. Jednou zde máme tenzor v prostorovém popisu, a podruhé v materiálovém!

Zbývá nám ještě Eulerův–Almansiův tenzor **e**, pro který platí $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \mathbf{l}^{T}\mathbf{e} - \mathbf{el}$, když $\mathbf{e} = ½(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$. Pro $\mathbf{b}^{-1}$ dostáváme $\mathbf{b}^{-1} = \mathrm{diag}[\lambda_1^{-2}, \lambda_1, \lambda_1]$, takže $\mathbf{e} = ½\mathrm{diag}[1 - \lambda_1^{-2}, 1 - \lambda_1, 1 - \lambda_1]$.

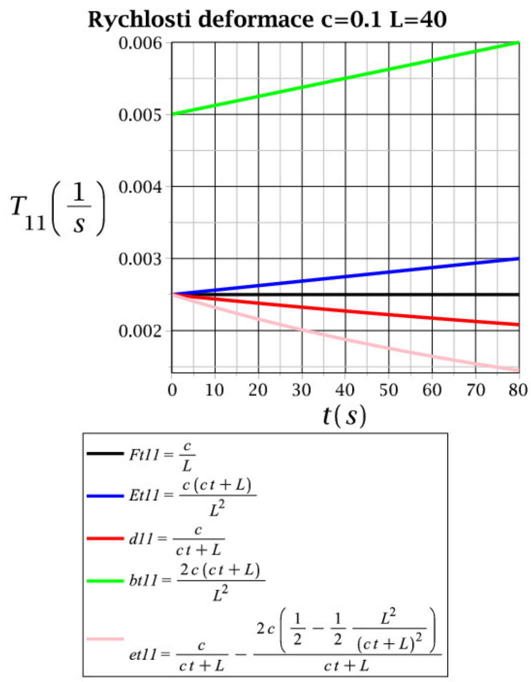
$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \mathbf{l}^{T}\mathbf{e} - \mathbf{el} = \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1\lambda_1^{-1}\left(1-\lambda_1^{-2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_2\sqrt{\lambda_1}\left(1-\lambda_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_3\sqrt{\lambda_1}\left(1-\lambda_1\right) \end{pmatrix} = \mathbf{d}\left(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\right)$$

$$\dot{e}_{11} = \frac{cL^2}{(ct+L)^3}$$

Odvodili jsme tedy tvary pro složky T_{11} zvolených tenzorů. Na obrázku I.1-6 je znázorněna závislost těchto složek na čase pro rychlost čela (posuvu příčníku trhacího stroje) c = 0.1 mm/s a počáteční délku vzorku po upnutí (vzdálenost mezi čely) L = 40 mm. V čase t = 80 bude $F_{11} = \lambda_1 = 1.2$. Je zřejmé, že v takto definované úloze (homogenní deformace a konstantní rychlost zatěžování) je rychlost deformace nekonstantní, přestože rychlost deformačního gradientu i inženýrského tenzoru deformace konstantní jsou: $\dot{F}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11} = c / L = 0.0025\ 1/s$.



Obrázek I.1-6. Číselné hodnoty složek T_{11} pro jednotlivé rychlosti tenzorů deformace v úloze o rovnoměrně se vzdalujícím čele bloku isotropního a nestlačitelného materiálu (model pro tahovou zkoušku) při předpokladu homogenní dilatace materiálu. Legendu čtěte v tomto smyslu „*Ft11* = $\dot{F}_{11}$." Výraz pro $\dot{e}_{11}$ je po algebraickém zjednodušení samozřejmě roven $\dot{e}_{11} = \frac{cL^2}{(ct+L)^3}$.

Nekonstantnost rychlosti deformace při rovnoměrném prodlužování (jak byla ukázána v PI-1.8) je způsobena tím, že tenzor rychlosti deformace **d** je úměrný rychlostnímu gradientu **l**, který ovšem závisí na časové derivaci ale i na aktuální hodnotě „deformace" ($\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$). Povšimněte si vlivu zvoleného popisu (materiálový vs. prostorový) na tvar křivek. Zatímco materiálový tenzor $\dot{\mathbf{E}}$ (měří aktuální konfiguraci vzhledem k počáteční) ve své složce ve směru prodlužování roste, prostorový tenzor (poměřuje počáteční konfiguraci vzhledem k aktuální) **d** ve složce 11 klesá. Charakter obou těchto závislostí je nelineární, ačkoliv to z obrázku nemusí být patrné (to je věc měřítka). Nelinearita spočívá v těchto vztazích $\dot{E}_{11} = \lambda_1 \dot{\lambda}_1$ a $d_{11} = \dot{\lambda}_1 / \lambda_1$. Zřejmě má smysl otázka, jak by se dalo zajistit, aby během tahové zkoušky byla rychlost deformace konstantní, když konstantní rychlost příčníku k tomu nevede?

P1.9 Jaká musí být rychlost c vzdalování se čela bloku, aby platilo, že rychlost Greenova–Lagrangeova tenzoru deformace je během tahové zkoušky konstantní? (Užijte předpoklady homogenní dilatace, nestlačitelnosti a isotropie jako v P1.8).

Takže chce se po nás, abychom navrhli $c = c(t)$ tak, aby platilo $\dot{E}_{11} \neq \dot{E}_{11}(t)$. Mějme tedy rychlost deformace ve směru 11 $\dot{E}_{11} \in \mathbb{R}^{+}$. Podle (28) platí $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{T}\mathbf{dF}$, což nás v předchozím (P1.8) přivedlo k vyjádření $\dot{E}_{11} = \dot{\lambda}_1 \lambda_1$. Protože všechny veličiny se v této (jakož i předchozí úloze), dají vyjádřit jako funkce složek do směru 1, přejděme k vyjádření bez indexů. Máme tedy vlastně diferenciální rovnici

$$\dot{E} = \dot{\lambda}\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{E} = \lambda \frac{d\lambda}{dt},$$

kterou budeme řešit separací proměnných (připomeňme že $\dot{E} \in \mathbb{R}^{+}$)

$$\dot{E} = \lambda \frac{d\lambda}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{E}dt = \lambda d\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \dot{E}dt + C = \int \lambda d\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{E}t + C = \tfrac{1}{2}\lambda^2$$

Počáteční podmínku pro určení integrační konstanty C dostaneme, když si uvědomíme, že v čase $t = 0$ musí být materiál nestrečovaný, čili $\lambda(t = 0) = 1$. Takže

$$\dot{E}0 + C = \tfrac{1}{2}1^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \frac{1}{2}$$

Finální výraz pro $\lambda(t)$ tedy je $\lambda(t) = \sqrt{2\dot{E}t + 1}$. Nyní již můžeme přejít k hledání výrazu pro $c(t)$. Vyjdeme z pohybových rovnic. Bez indexů můžeme nyní rovnici pro pohyb ve směru síly psát:

$$x = \lambda X \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{2\dot{E}t + 1}X$$

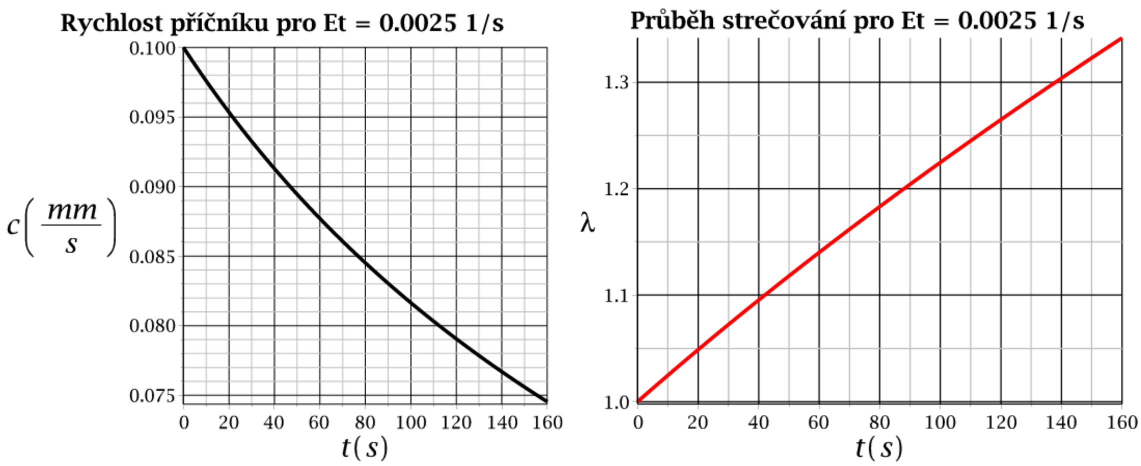
Derivováním podle času získáme hledaný výraz pro rychlost $V(X,t)$ (jedná se stále jen o složku do směru 1, takže V, x a X nejsou vektory, ale jejich složky).

$$V(X,t) = \frac{dx(X,t)}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{2\dot{E}}{\sqrt{2\dot{E}t+1}}X = \frac{\dot{E}}{\sqrt{2\dot{E}t+1}}X$$

Předpis pro rychlost $c(t)$ získáme dosazením $X = L$, $c(t) = \dfrac{\dot{E}L}{\sqrt{2\dot{E}t+1}}$.

Na obrázku I-7 je vykreslen průběh rychlosti $c(t)$ (vlevo) a tímto pohybem generovaný streč $\lambda(t)$ (vpravo). Vše je pro rychlost deformace $\dot{E} = 0.0025$ s^{-1}, což odpovídá počáteční hodnotě při testu s c = 0.1 mm/s a L = 40 mm. Zřejmě aby byla rychlost deformace, tak jak je vidět vzhledem k počáteční konfiguraci, konstantní, je třeba zpomalovat během zatěžování. (Promyslete si, jak by se na tomto závěru projevila formulace vzhledem k aktuální konfiguraci, čili pomocí tenzoru **d**!).

Praktická otázka je, jak moc velké chyby se dopustíme, zanedbáme-li efekt nekonstantní rychlosti deformace při konstantní rychlosti posuvu příčníku. Toto rozhodnutí je vždy na experimentátorovi. Z obrázku 6 je zjevné, že pro c = 0.1 mm/s, dosáhne $\dot{E}$ = 0.003 s^{-1} oproti počáteční $\dot{E}$ = 0.0025 s^{-1}, což dává poměr 0.003/0.0025 = 1.2. Nelze ale paušálně říci, že 20% odchylky je velká chyba. Vše závisí na vlastnostech materiálu, jak moc je na rychlost deformace citlivý.



Obrázek I-7. Průběh rychlosti příčníku při jednoosé tahové zkoušce bloku isotropního a nestlačitelného materiálu, který zajistí, aby při předpokladu homogenní dilatace, byla konstantní rychlost Greenov–Lagrangeova tenzoru deformace = 0.0025 s^{-1} (vlevo). Průběh strečování za stejných podmínek jako vlevo (vpravo). Výslovně upozorňujeme, že pro větší názornost, jsme oproti Obr. 6 prodloužili čas na 160, a dosáhli tak téměř dvojnásobného streče.

Na závěr odstavce o rychlosti deformace uveďme bez důkazů několik důležitých vztahů pro časové derivace změn délek, velikostí ploch a objemů[32].

Vzájemný vztah mezi materiálovým popisem a prostorovým popisem je samozřejmě založen na fyzikální objektivitě, neboť platí, že oba dva musí dát rychlost změny délky elementárního polohového vektoru v kontinuu (29).

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(d\boldsymbol{x}^2 - d\boldsymbol{X}^2\right) = d\boldsymbol{X}\cdot\left(\dot{\mathbf{E}}\,d\boldsymbol{X}\right) = d\boldsymbol{x}\cdot\left(\mathbf{d}\,d\boldsymbol{x}\right) \tag{I.1-29}$$

Taktéž lze psát, že

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(d\boldsymbol{x}\right) = \dot{\mathbf{F}}\,d\boldsymbol{X} = \mathbf{l}\,d\boldsymbol{x} \tag{I.1-30}$$

Pro časovou změnu objemového poměru *J* platí následující vztahy[33]:

$$\dot{J} = J\,\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = J\cdot div\left(\boldsymbol{v}\right) = J\,\mathbf{I} : grad\left(\boldsymbol{v}\right) = J tr\left(\mathbf{d}\right) \tag{I.1-31}$$

Použitím předpisů pro časovou změnu relativního objemu a Nansonovy věty ($d\boldsymbol{s} = J\mathbf{F}^{-T}d\boldsymbol{S}$) lze ukázat, že pro časovou změnu velikostí ploch platí (I.1-32).

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(d\boldsymbol{s}\right) = tr\left(\mathbf{l}\right)d\boldsymbol{s} - \mathbf{l}^{T}\,d\boldsymbol{s} \tag{I.1-32}$$

[32] Důkazy je možno najít např. v Ogden (1997) s. 121 – 130 nebo Holzapfel (2000) s. 102 – 106.
[33] Pokud je materiál nestlačitelný, což je u měkkých tkání často předpokládáno, platí $J = dv/dV = \det\mathbf{F} = 1$. Z toho plyne, že pro takový materiál platí: $\dot{J} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad div\left(\boldsymbol{v}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tr\left(\mathbf{d}\right) = 0$.

SHRNUTÍ

Jelikož většina měkkých tkání vykazuje závislost mechanického chování na rychlosti zatěžování, má smysl definovat míry proměnlivosti deformace v čase, čili tenzory rychlosti deformování. Pro každý tenzor deformace tak existuje jeho *tenzor rychlosti deformace*. Sousloví **tenzor rychlosti deformace** bývá ovšem vyhrazeno pro veličinu **d**, $d_{ij} = ½(l_{ij} + l_{ji})$, kde l_{ij} je tzv. **prostorový gradient rychlosti** v definovaný jako $\mathbf{l} = \partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)/\partial \boldsymbol{x}$. Materiálové časové derivace tenzorů rychlosti označujeme většinou tečkou nad symbolem. Platí:

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{l}+\mathbf{l}^T\right) \qquad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T\mathbf{d}\mathbf{F} \qquad \dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} \qquad \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{l}\,\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathbf{l}^T$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d}-\mathbf{l}^T\,\mathbf{e}-\mathbf{e}\mathbf{l}$$

Rychlost deformace v materiálovém popisu je úměrná výrazu $\dot{\lambda}\lambda$ a v prostorovém $\dot{\lambda}/\lambda$. Závisí tedy nejen na časové proměnlivosti streče, ale i na jeho aktuální hodnotě, a tak, chceme-li dodržet podmínky konstantní rychlosti deformace, musíme v materiálovém popisu zpomalovat posuv a v prostorovém popisu zrychlovat posuv, který materiál podstupuje.

1.6 INFLACE A EXTENZE VÁLCOVÉ TRUBICE

Nyní uvedeme v kontextu krevních cév nesmírně důležitý příklad deformace a sice nafukování a protahování válcové trubice. Úlohu zformulujeme ve **válcových souřadnicích** $\boldsymbol{X} = (R,\Theta,Z)$, **které se ke kartézským** $\boldsymbol{X} = (X_1,X_2,X_3)$ **mají takto:**

$$\left(X_1,X_2,X_3\right) = \left(R\cos(\Theta),R\sin(\Theta),Z\right) \qquad \text{resp.} \qquad \left(R,\Theta,Z\right) = \left(\sqrt{X_1^2+X_2^2},\operatorname{arctg}\left(\frac{X_2}{X_1}\right),x_3\right) \qquad \text{(I.1-33)}$$

za podmínek: $R \in \mathbb{R}^+$ $\quad 0 < \Theta < 2\pi \quad$ $Z \in \mathbb{R}$

Pracovat při tom budeme v ortorormální bázi s vektory $\boldsymbol{E}_R$, $\boldsymbol{E}_\Theta$ a $\boldsymbol{E}_Z$. Pro polohový vektor $\boldsymbol{X}$ tudíž platí (34).

$$\boldsymbol{X} = R\cos\Theta\boldsymbol{E}_1 + R\sin\Theta\boldsymbol{E}_2 + Z\boldsymbol{E}_3 = R\boldsymbol{E}_R(\Theta) + Z\boldsymbol{E}_Z \qquad \text{(I.1-34)}$$

kde **vztah mezi bázovými vektory je dán** (I.1-35).

$$\boldsymbol{E}_R = \cos\Theta\boldsymbol{E}_1 + \sin\Theta\boldsymbol{E}_2 \qquad \boldsymbol{E}_\Theta = -\sin\Theta\boldsymbol{E}_1 + \cos\Theta\boldsymbol{E}_2 \qquad \boldsymbol{E}_Z = \boldsymbol{E}_3 \qquad \text{(I.1-35)}$$

Narozdíl od kartézských souřadnic **jsou ve válcových souřadnicích bázové vektory funkcemi polohy** (I.1-34,35). **Kromě toho v sobě kombinují veličiny, které – ačkoliv matematicky stále reálná čísla – ve fyzikální interpretaci nabývají jiný rozměr** (délkové souřadnice R a Z vs. úhlová souřadnice Θ). To se projeví v definici deformačního gradientu, jenž – přestože symbolicky stejný jako v kartézských souřadnicích – musí zohledňovat „nesoulad" těchto vektorů (fyzikálních rozměrů). Připomínáme, že se držíme konvence pro označení pomocí majuskule (referenční konfigurace ve válcových souřadnicích) a minuskule (průběžná konfigurace taktéž zaměřena ve válcových souřadnicích).

Pro **F** bude tedy stále platit $\mathbf{F} = \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{X}$ jako v (I.1-4). Nesoulad bázových vektoru se ale projeví v konkrétním způsobu výpočtu, který se řídí podle pravidla (I.1-36).

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K}\left(\left| \boldsymbol{g}_i \right| \boldsymbol{e}_i \otimes \frac{1}{\left| \boldsymbol{G}_K \right|} \boldsymbol{E}_K \right) = \frac{\left| \boldsymbol{g}_i \right|}{\left| \boldsymbol{G}_K \right|} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_K \right) = F_{iK} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_K \qquad \text{(I.1-36)}$$

V rovnici (I.1-36) za x_i postupně dosazujeme funkce r, θ a z a za X_K dosazujeme R, Θ a Z, až dostaneme všech devět možných variací. Nezapomínejme, že obecně platí $r = r(R,\Theta,Z)$, $\theta = \theta(R,\Theta,Z)$, $z = z(R,\Theta,Z)$. Symboly $|\boldsymbol{g}_i|$ a $|\boldsymbol{G}_K|$ v (I.1-36) mají význam normalizačních koeficientů pro složky tenzoru **F**, který by bez nich jinak nabýval fyzikálně nekonzistentních rozměrů (např. složka $F_{\theta R}$ by jinak odpovídala „$1/m$", kdežto složka $F_{rR} \sim$ „m/m").[34]

Přesně řečeno jsou $|\boldsymbol{g}_i|$ a $|\boldsymbol{G}_K|$ velikosti tzv. **přirozených bázových vektorů** $\boldsymbol{g}_i$ ($i = r, \theta, z$ pro průběžnou konfiguraci) a $\boldsymbol{G}_K$ ($K = R$, Θ a Z pro referenční konfiguraci), které jsou dány vztahy $\boldsymbol{g}_i = \partial x_j/\partial \xi_i \boldsymbol{e}_j$ a $\boldsymbol{G}_K = \partial X_J/\partial \Xi_K \boldsymbol{E}_J$. Symbolem ξ_i a Ξ_K jsou zde označeny válcové souřadnice. To proto, abychom mohli využít indexové notace. Uvážením rovnice (I.1-33), dostaneme pro vektory $\boldsymbol{g}_i$ a $\boldsymbol{G}_K$ následující vyjádření.[35]

$$\boldsymbol{g}_r = \frac{\partial x_1}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial r}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial r}\boldsymbol{e}_3 = \left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right) \qquad \text{(I.1-37)}$$

$$\boldsymbol{g}_\theta = \frac{\partial x_1}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_3 = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0\right) \qquad \text{(I.1-38)}$$

---

[34] O takto upravených tenzorech říkáme, že jsou vyjádřeny ve svých **fyzikálních složkách**.

[35] Pro úplnost je třeba říci, že bázové vektory $\boldsymbol{g}_i$ a $\boldsymbol{G}_K$ tvoří ve svých prostorech tzv. **kovariantní báze**, a složky vektorů v nich vyjádřených se naopak nazývají **kontravariantní**. Skalární součiny těchto vektorů (např. $\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = g_{ij}$) představují ij složky tzv. **metrického tenzoru g** a říkáme jim **metrické koeficienty**. Termín metrický tenzor je odvozen od **metriky**, čili způsobu měření vzdáleností, který je v eukleidovských prostorech založen na odmocnině ze skalárního součinu vektoru sama se sebou (jde o metriku indukovanou skalárním součinem). Skalární součin vektoru sama se sebou se pak nazývá **metrická forma**: $ds^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = (d\xi^i \boldsymbol{g}_i)\cdot(d\xi^j \boldsymbol{g}_j) = (d\xi^1 \boldsymbol{g}_1 + d\xi^2 \boldsymbol{g}_2 + d\xi^3 \boldsymbol{g}_3)\cdot (d\xi^1 \boldsymbol{g}_1 + d\xi^2 \boldsymbol{g}_2 + d\xi^3 \boldsymbol{g}_3) = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$, která jakožto rovnice pro konkrétní číselnou hodnotu ds představuje geometrické místo bodů konstantní vzdálenosti (ds) od počátku soustavy souřadnic.

Ke každé kovariantní bázi $\boldsymbol{g}_i$ **existuje recipročně tzv. kontravariantní báze** $\boldsymbol{g}^j$, jejíž hledání se řídí předpisem ortonormality $\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$. Při pojmenovávání dbáme na rozdíl v umístění indexů – máme nyní vektory a složky s indexy dole nebo nahoře, což nám právě říká, zda jde o kovariantní (dole), nebo kontravariantní (nahoře). Výraz pro vektor $\boldsymbol{u}$ typu $u_i \boldsymbol{g}_i$ nemá žádný smysl! Buď $u^i \boldsymbol{g}_i$, nebo $u_i \boldsymbol{g}^i$. Připomínáme, že tyto termíny má smysl zavádět jen pro křivočaré souřadnice, v kartézských kovariatní a kontravariantní splývá. K tomu dojdeme, když si rozmyslíme geometrickou interpretaci kovariance a kontravariance: **jako kovariantní označujeme bázové vektory, které lokálně (v každém místě prostoru) mají směr tečen k (zakřiveným) souřadnicovým osám, kdežto kontravariantní jsou bázové vektory, které mají směr normál (zakřivených) souřadnicových ploch.**

Metrický tenzor, mimo jiné, slouží k vzájemnému převodu mezi kovariantními a kontravariantními složkami vektorů. Čili když pro $\boldsymbol{u}$ platí $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{g}^i = u^j \boldsymbol{g}_j$, pak $u^i = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}^i \cdot (u_j \boldsymbol{g}^j) = g^{ij} \cdot u_j$ a samozřejmě také $u_i = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_i \cdot (u^j \boldsymbol{g}_j) = g_{ij} \cdot u^j$. Tuto transformaci nazýváme zvyšování (snižování) indexu.

Jak bylo řečeno v předchozím, metrický tenzor g hraje v křivočarých souřadnicích roli jednotkového tenzoru **I** (čili tenzor který splňuje $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}$). Platí totiž $\mathbf{I} = \delta^i_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j = \delta^i_j \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}_i$. O tenzorech, které jsou vyjádřeny v dyadách složených z vektorů kovariantní a kontravariantní báze, říkáme, že jsou vyjádřeny ve svých smíšených složkách. Co je nejpodstatnější a proč to vykládáme, operace stopy $tr(\mathbf{T})$ tenzoru **T** je pak definována jen pro toto vyjádření! Platí: $tr(\mathbf{T}) = tr(T^i_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) = T^i_j (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = T^i_j \delta_i^j$.

Přestože to vše vypadá poněkud složitě (tedy možná složitě), **ve válcovém souřadnicovém systému (stejně jako v kartézském) nakonec kovariantní báze splyne s kontravariantní, protože splývají tečny souřadnicových křivek a normály souřadnicových ploch (promyslete si!). To vede mnoho autorů k tomu (a budeme to dělat i zde), že nerozlišují horní a dolní polohu indexů. Je to dáno ortonormalitou báze**. Tzn. místo abychom komplikovaně psali $F^i{}_K$, budeme psát F_{iK} (vizte dále). Abychom skutečně museli rozlišovat kovariantní a kontravariantí, museli bychom pracovat s neortonormálními bázemi.

$$\boldsymbol{g}_z = \frac{\partial x_1}{\partial z}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial z}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z}\left(r\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 = \left(0,0,1\right) \qquad \text{(I.1-39)}$$

Ve shodě s předcházejícím pro přirozené bázové vektory ve válcových souřadnicích v prostoru referenční konfigurace dostaneme:

$$\boldsymbol{G}_R = \left(\cos\Theta, \sin\Theta, 0\right) \qquad \boldsymbol{G}_\Theta = \left(-R\sin\Theta, R\cos\Theta, 0\right) \qquad \boldsymbol{G}_Z = \left(0,0,1\right) \qquad \text{(I.1-40)}$$

Takže pro velikosti vektorů přirozených bází $\boldsymbol{g}_i$ a $\boldsymbol{G}_K$ platí: $|\boldsymbol{g}_i| = 1, r, 1$ pro $i = r, \theta, z$; a $|\boldsymbol{G}_K| = 1, R, 1$ pro $K = R$, Θ a Z. Tím jsme poskytli úplný návod, jak vypočíst **F**. Pro jednotlivé složky tedy dostaneme:

$$F_{rR} = \frac{\partial r}{\partial R} \qquad F_{r\Theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} \qquad F_{rZ} = \frac{\partial r}{\partial Z} \qquad \text{(I.1-41)}$$

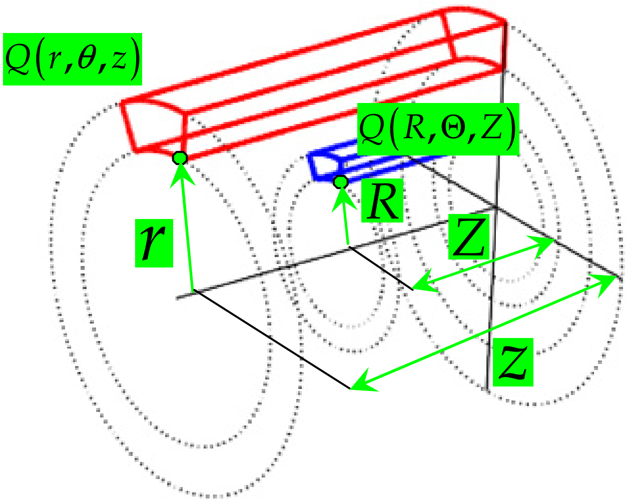
$$F_{\theta R} = r\frac{\partial \theta}{\partial R} \qquad F_{\theta\Theta} = \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \qquad F_{\theta Z} = r\frac{\partial \theta}{\partial Z} \qquad \text{(I.1-42)}$$

$$F_{zR} = \frac{\partial z}{\partial R} \qquad F_{z\Theta} = \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \Theta} \qquad F_{zZ} = \frac{\partial z}{\partial Z} \qquad \text{(I.1-43)}$$

Pomocí bázových dyad můžeme psát (44).[36]

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = {} & F_{rR}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{E}_R + F_{r\Theta}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{E}_\Theta + F_{rZ}\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{E}_Z + F_{\theta R}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{E}_R + F_{\theta\Theta}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{E}_\Theta + F_{\theta Z}\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{E}_Z \\ & + F_{zR}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{E}_R + F_{z\Theta}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{E}_\Theta + F_{zZ}\boldsymbol{e}_z \otimes \boldsymbol{E}_Z\end{aligned} \qquad (44)$$

Práce se všemi devíti složkami při naprosto obecné deformaci (tj. v situaci kdy $r = r(R,\Theta,Z)$, $\theta = \theta(R,\Theta,Z)$ a $z = z(R,\Theta,Z)$) pro nás ale není zcela užitečná. **V analytickém modelování většinou postupujeme tak, že pracujeme jen s předem definovanými způsoby deformace, předem vybranými typy geometrií (resp. posuvů) tak, abychom měli šanci získat analytické řešení, které obecně nemusí existovat. My sami jsme pomocí mechaniky kontinua tvůrci modelu reality. Je naše věc, co je a co není důležité – jaká bude rozlišovací úroveň modelu**. Modely mohou být velice detailní, pak ovšem často bývá řešení komplikované. A naopak, mohou byt velmi elementární, zjednodušující, ale získané řešení má jen omezenou platnost.



Obrázek 8. Nafukování a protahování trubice. Materiálová částice Q přechází z (R,Θ,Z) na (r,θ,z).

[36] V úlohách, kde $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{vR}$ a současně $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, často místo F_{iK} píšeme λ_{iK}.

Interpretujme nyní složky deformačního gradientu, abychom se mohli kvalifikovaně rozhodnout, jak zjednodušit popis kinematiky kontinua.

$F_{rR} = \partial r/\partial R$ – zjevně popisuje diferenciální změnu zdeformovaného poloměru vůči diferenciální změně referenčního poloměru, čili jde o gradient tloušťky během zatěžování.
$F_{r\Theta} = 1/R \cdot \partial r/\partial\Theta$ – popisuje jak deformací dochází ke změně poloměru r vůči původní úhlové souřadnici Θ. Aby tato složka měla pro nás smysl, muselo by při zatěžování trubky docházet k tomu, že zdeformovaný poloměr je funkcí úhlu, na kterém tento poloměr měříme ⇒ různé poloměry podél obvodu. To ale znamená ztrátu rotační symetrie poloměru.

$F_{rZ} = \partial r/\partial Z$ – složka je nenulová, když zdeformovaný poloměr závisí na axiální souřadnici; $r = r(Z)$. U dostatečně dlouhých úseků tepen samozřejmě platí, že $R = R(Z)$ (u tepen referenční poloměr směrem od srdce klesá, u žil směrem k srdci roste). Lze tak očekávat, že i pro zdeformovaný poloměr bude platit $r = r(Z)$. Naopak ale, bude-li modelovaný úsek tepny dostatečně krátký, pak zanedbání $r = r(Z)$ nemusí mít významný vliv.

$F_{\theta R} = r \cdot \partial\theta/\partial R$ – přírůstek úhlové souřadnice s přírůstkem počátečního poloměru; nenulovost tohoto členu by vedla k tomu, že řezy stěny trubice, které měly za svou normálu obvodový vektor, se odklonily/sklopily, čili $\theta = \theta(R)$.

$F_{\theta\Theta} = (r/R) \cdot \partial\theta/\partial\Theta$ – tento člen poměřuje délky obvodů vůči sobě (r/R); derivace $\partial\theta/\partial\Theta$ by k němu navíc dokázala přičíst efekt nerovnoměrnosti prodloužení obvodu podél úhlové souřadnice.

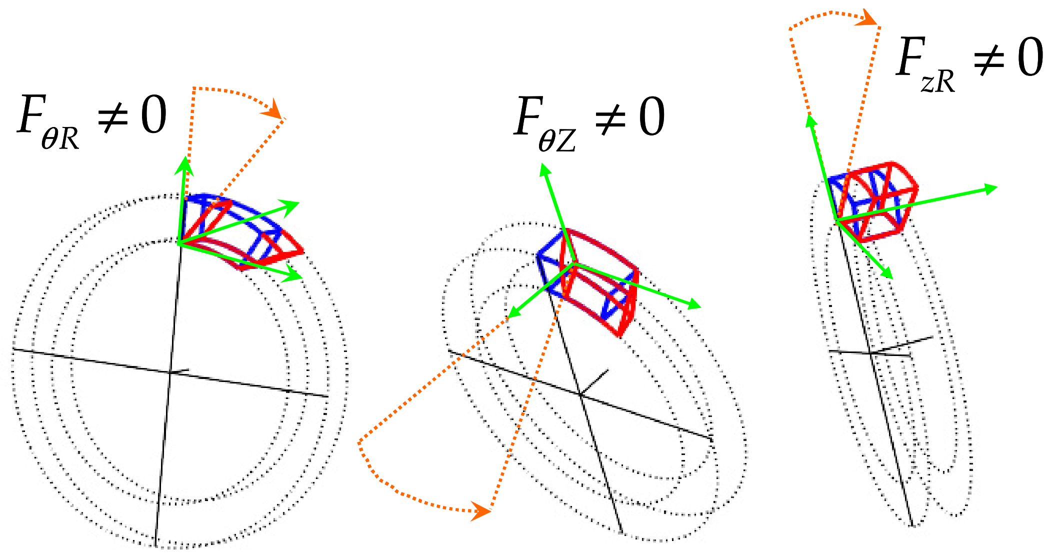
$F_{\theta Z} = r\partial\theta/\partial Z$ – zdeformovaná úhlová souřadnice by v případě nenulovosti této složky závisela na počáteční podélné souřadnici; to se děje např. tehdy, když se průřezy vůči sobě natáčí – podélné zkrucování.

$F_{zR} = \partial z/\partial R$ – gradient zdeformované délkové souřadnice vzhledem k počátečnímu poloměru. Aby byl tento člen nenulový, muselo by podélné protažení elementárních válcových vrstev trubky (tj. např. sousedních ploch r = konst. a $r + dr$ = konst) záviset na poloměru, čili docházelo by k posuvům jako u teleskopu. Tento pohyb by mohlo teoreticky způsobit tření krve v axiálním směru.[37]

$F_{z\Theta} = 1/R \cdot \partial z/\partial\Theta$ – aby byla složka nenulová, musela by se zdeformovaná axiální souřadnice měnit podél obvodu; to si můžeme představit třeba tak, že trubici chytíme na každém konci nikoliv podél celého obvodu, ale lokálně za např. jen dva body a natahujeme. Bodová aplikace sil jistě povede k tomu, že protažení bude na obvodu maximální v místech uchycení, kdežto v neuchycených místech se protáhne trubka méně.

$F_{zZ} = \partial z/\partial Z$ – měří axiální strečování trubky.

[37] Mějme se ale na pozoru. Ačkoliv čekáme, že hlavní směr pohybu materiálových částic krve se bude shodovat s podélnou osou cévy, tato osa je v krevním řečišti často zakřivená. Navíc pohyb částic mohou ovlivňovat: silová interakce se stěnou (deformovatelnost stěny), lokální překážky proudění – aterosklerotické pláty a tromby. K tomu všemu je přirozený charakter proudění nestacionární. Výsledkem může být, že krev lokálně víří nebo přechází do turbulence, a tak i tření krve o stěnu může vytvářet sílu působící zcela jiným směrem.



Obrázek I-9. Geometrická interpretace pro vybrané nediagonální složky **F**. Referenční konfigurace je modře, prostorová červeně.

Nikoli všech devět složek **F** pro nás bude mít význam. Omezme se v našem modelu na to, že trubice představující tepnu se (1) nafukuje $R \to r$, (2) protahuje $Z \to z$, (3) zkrucuje $\Theta \to \theta(Z)$ a (4) axiálně (teleskopicky) kosí, tj. $z = z(R)$.

Výše uvedenou situaci budeme modelovat následujícími rovnicemi pro přechod materiálové částice zamřené polohovým vektorem $\boldsymbol{X} = (R,\Theta,Z)$ v referenční konfiguraci do polohy $\boldsymbol{x} = (r,\theta,z)$ v průběžné konfiguraci:

$$r = r(R,t) \qquad \theta = \Theta + \vartheta(t)Z \qquad z = \delta(t)\Lambda Z + w(R,t) \tag{I.1-45}$$

v definičním oboru pro $\boldsymbol{X}$: $R_i \leq R \leq R_o \quad \wedge \quad 0 \leq \Theta < 2\pi \quad \wedge \quad 0 \leq Z \leq L$, kde R_i, R_o, $L \in \measuredangle$.

Rovnice (I.1-45a) že průběžný poloměr r je (zatím nespecifikovanou) funkcí původního poloměru R (a obecně i času). Od této rovnice si slibujeme, že dokáže popsat inflaci a deflaci trubice.

Z rovnice (I.1-45b) čteme, že aktuální úhlová souřadnice je rovna počáteční plus pootočení o časově proměnný koeficient ϑ, který interpretujeme jako měrný (tj. k počáteční délce trubky vztažený) úhel zkroucení, krát počáteční axiální poloha.

Zdeformovaná axiální souřadnice z bude podle (I.1-45c) záviset na počáteční axiální souřadnici Z lineárně s konstantou úměrnosti Λ, který interpretujeme jako počáteční (homogenní) předpětí na které jsou naneseny časově poměné streče $\delta(t)$, které jsou opět v každém okamžiku konstantní podél trubice. Výsledná axiální poloha z se ovšem bude v jednotlivých Z lišit podle toho, jaké bylo R, dík příspěvku funkce w. Tento člen má simulovat vliv tření krve do délky trubky.
Deformační gradient **F** pak aplikací pravidla (I.1-36), resp. (I.1-41-43), nabude tvaru (I.1-46).

$$\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial r}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{\partial Z} \\ r\dfrac{\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r}{R}\dfrac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\dfrac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial z}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r(R)}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{r}{R} & r\vartheta \\ \dfrac{\partial w(R)}{\partial R} & 0 & \delta\Lambda \end{pmatrix} \tag{I.1-46}$$

V rovnici (I.1-46) jsme pro jednoduchost vynechali explicitní vyjádření závislosti na čase. Máme-li deformační gradient, můžeme zkonstruovat materiálové i prostorové tenzory deformace. Takže např. pro pravý a levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace platí (I.1-47) a (I.1-48).

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w(R)}{\partial R}\right)^2 & 0 & \dfrac{\partial w(R)}{\partial R}\delta\Lambda \\ 0 & \dfrac{r^2}{R^2} & \dfrac{r^2\vartheta}{R} \\ \dfrac{\partial w(R)}{\partial R}\delta\Lambda & \dfrac{r^2\vartheta}{R} & r^2\vartheta^2+\delta^2\Lambda^2 \end{pmatrix} \tag{I.1-47}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T=\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2 & 0 & \dfrac{\partial r(R)}{\partial R}\dfrac{\partial w(R)}{\partial R} \\ 0 & \dfrac{r^2}{R^2}+r^2\vartheta^2 & r\vartheta\delta\Lambda \\ \dfrac{\partial r(R)}{\partial R}\dfrac{\partial w(R)}{\partial R} & r\vartheta\delta\Lambda & \left(\dfrac{\partial w(R)}{\partial R}\right)^2+\delta^2\Lambda^2 \end{pmatrix} \tag{I.1-48}$$

Pro hlavní invarianty I_i (i = 1,2,3) tenzorů **C** a **b** bude platit:

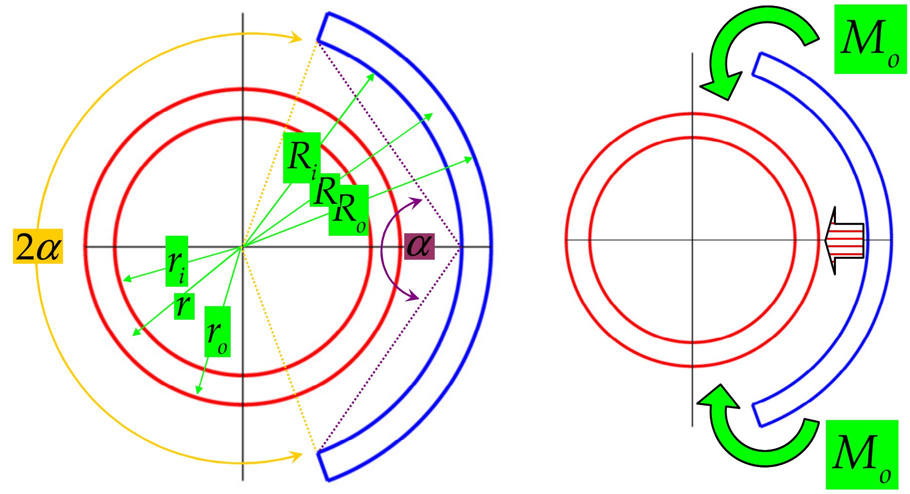
$$I_1=\left(\frac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial w(R)}{\partial R}\right)^2+\frac{r^2}{R^2}+r^2\vartheta^2+\delta^2\Lambda^2$$

$$I_2=r^2\vartheta^2\left(\frac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2+r^2\vartheta^2\left(\frac{\partial w(R)}{\partial R}\right)^2+\delta^2\Lambda^2\frac{r^2}{R^2}+\delta^2\Lambda^2\left(\frac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{\partial w(R)}{\partial R}\right)^2$$

$$I_3=\frac{r^2}{R^2}\delta^2\Lambda^2\left(\frac{\partial r(R)}{\partial R}\right)^2$$

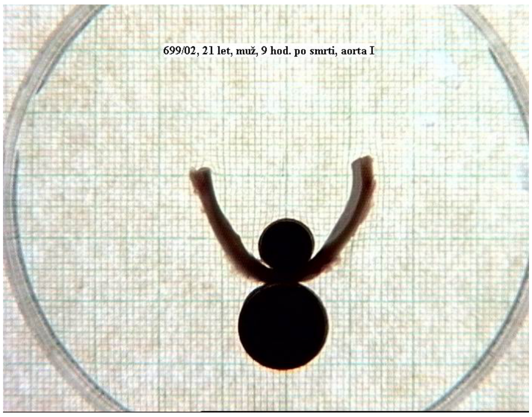
Jelikož měkké tkáně obsahují velké množství vody, bývají často považovány za nestlačitelné, čili $dv/dV = J = \sqrt{I_{C3}} = r/R\cdot\delta\cdot\Lambda\cdot(\partial r/\partial R) = 1$. Tato rovnice by nám zjednodušila hledání řešení úlohy pružnosti (tj. určení napjatosti a deformace při zadaných okrajových podmínkách, geometrii a konstitutivní rovnici).

Ačkoliv by se výše uvedená formulace pohybu mohla jevit ne příliš komplikovaná, opak je pravdou. Nelineární a anisotropní vlastnosti cév jsou toho druhu, že pro analytická řešení bývá kinematika pohybu cév ještě více zjednodušována. J.D. Humphrey a L. A. Taber ve svých monografiích (Humphrey, 2002; Taber, 2004) poskytují výklad (s ukázkami řešení konkrétních zadání) pro úlohy, kde $w = 0$ a $\upsilon \neq 0$. To znamená, že uvažují nafukování, protahování a podélné zkrucování trubice, která modeluje cévu. Úlohu s axiálním (teleskopickým) zkosem řešili J.D. Humphrey a S. Na (Humphrey a Na, 2002). Inflaci a extenzi se zkrutem lze též nalézt ve velmi inspirativní publikaci G.A. Holzapfela, T.C. Gassera a R.W. Ogdena (Holzapfel et al., 2000) a to pro vícevrstvou trubici (vícevrstvé řešení je možné také najít např. v Maltzahn et al. (1981)). Naprostá většina (ze stovek dostupných publikací obsahujících analytická řešení úloh pružnosti týkajících se cév) autorů se ale omezuje na situaci, kdy pro pohyb platí: $r = r(R)$, $\theta = k\Theta$, $z = \lambda Z$, kde λ je konstanta (čili protažení je po délce trubky homogenní) a k je buď 1 nebo $\pi/(\pi - \alpha)$.[38] Při formulaci $w = 0$ a $\upsilon = 0$ se stane $\mathbf{F}$ diagonálním ve tvaru $\mathbf{F} = \mathrm{diag}[\partial r/\partial R, kr/R, \lambda]$. Pokud jde o zahrnutí kuželovitosti od srdce vzdalujících se tepen, tato úloha je analyticky řešena např. v Maltzahn (1982) použitím sférických souřadnic.



Obrázek I-10. **Vlevo** – kinematika deformace s referenčním stavem v rozevřené konfiguraci po uvolnění zbytkového napětí přestřižením obvodu tepny. Njejednodušší model kinematiky předpokládá, že před rozstřižením i po rozstřižení je geometrie tepny válcová, čili modrý (referenční) útvar ve svém nárysu tvoří kruhovou výseč. Podle věty o středovém a obvodovém úhlu dojdeme k tomu, že úhel oblouku v referenční konfiguraci je $2\pi - 2\alpha$. Poměr délek obvodů ve zdeformované (červená) a referenční (modrá) konfiguraci je tedy $2\pi r/[(2\pi - 2\alpha)R] = \pi r/[(\pi - \alpha)R]$, což píšeme jako $kr/R = F_{\Theta\Theta}$. **Vpravo** – základní představa o vlivu zbytkových napětí: k dosažení uzavřené konfigurace je třeba působit ohybovým momentem M_o, který vede k tomu, že vnitřní strana oblouku je stlačována a vnější natahována. Dochází tak k předepjetí materiálu, které snižuje špičku obvodového napětí nalézající se u silnostěnné nádoby na vnitřním poloměru (tlakové předpětí vs. špička tahových obvodových napětí v trubce).

[38] Číslo α zde představuje tzv. úhel rozevření. Výkladu tohoto fenoménu se budeme věnovat v kapitole o mechanických vlastnostech cév a řešení okrajových úloh. Zde tak jen ve zkratce: cévní stěna se skládá z biopolymerů. Jedním z nejdůležitějších je tzv. elastin, který je zodpovědný za pružné chování (nejen cév, ale např. i pokožky, plic ad.). Elastin ve stěně tepny vytváří fenestrované zvlněné membrány koncentricky uložené podél osy trubice. Za fyziologických podmínek je předepjat, aby byla efektivněji využita jeho mechanická kapacita. Jistou míru předpětí vykazují i další biopolymerní struktury uvnitř stěn cév. Nicméně každá složka, aby byla optimalizována její funkce, je předepjata jinak. To vede k tomu že, když odejmeme všechno vnější zatížení, není materiál stěny jako celek ve stavu bez napětí (hovoříme o tzv. zbytkové napjatosti). Materiál je napjatý ale bez zatížení, čili porušíme-li jeho integritu, zdeformuje se tak, aby uvolnil tato zbytková napětí. To pozorujeme např. tehdy, máme-li vystřižený kruhový prstýnek tepny a rozřízneme ho. Prstýnek se pak sám od sebe rozevře. To je nejběžnější (ovšem ne zcela přesný) způsob charakterizace zbytkových napětí uvnitř cévní stěny (u kostí je to pro změnu tzv. odvrtávací metoda; vyvrtáme-li do kosti otvor, ten se po vyjmutí vrtáku zdeformuje). Úhel, pod kterým se prstýnek tepny rozevře, nazýváme **úhel rozevření** α.



Obrázek 11. Fotografie rozevřeného kroužku tepny vyjmutého při pitvě z oblouku aorty.

SHRNUTÍ

Analytické modely cévních stěn při konečných deformacích jsou většinou založeny na představě nafukující se a protahující se trubice, kde materiálové částice ve válcových souřadnicích přecházejí z polohy $\boldsymbol{X} = (R,\Theta,Z)$ v referenční konfiguraci do polohy $\boldsymbol{x} = (r,\theta,z)$. Obecný deformační gradient má při tom tvar:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial r}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{\partial Z} \\ r\dfrac{\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r}{R}\dfrac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\dfrac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial z}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

Zjednodušením na nafukování a protahování (při zachování možnosti, aby referenční geometrií byl rozevřený válec podle obrázku 10) máme $r = r(R)$, $\theta = k\Theta$, $z = \lambda Z$, kde λ je konstanta (čili protažení je po délce trubky homogenní) a k je buď 1 nebo $\pi/(\pi - \alpha)$. Pro tenzory **F**, **C**, **b**, **E** a **e** pak platí:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & k\dfrac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^2 \end{pmatrix} \text{ v bázi } \boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_K$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^2 \end{pmatrix} \text{ v bázi } \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_{rR}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \lambda_{rR}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_{\theta\Theta}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_{zZ}^{-2} \end{pmatrix}$$

Protože jde o diagonální tenzory, jsou vlastní čísla rovna právě diagonálním složkám.

ZDROJE

Brdička M., Samek L., Sopko B. (2000) *Mechanika kontinua*. Academia, Praha.

Green A.E., Adkins J.E. (1960) *Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford.

Itskov M. (2007) Tensor algebra and tensor analysis for engineers. Springer, Berlin.

Fung Y.C. (1990) *Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth*. Springer-Verlag, New York.

Holzapfel G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley and Sons, Chichester.

Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. (2000) A new constitutive framework for artereial mechanics and comparative study of material models. *J Elast* 68:1-48.

Humphrey J.D. (2002) *Cardiovascular Solid Mechanics: Cells, Tissues, and Organs*. Springer, New York.

Humphrey J.D., Na S. (2002) Elastodynamics and arerial wall stress. *Ann Biomed Eng* 30:509-523.

Maltzahn W.W., Besdo D., Wiemer W. (1981) Elastic properties of arteries: Two-layer cylidrical model. *J Biomech* 14:389-397.

Maltzahn W.W. (1982) Stress and strains in the cone-shaped carotid sinus and their efects on baroreceptor functions. *J Biomech* 15:757-762.

Marsden J.E., Hughes T.J.R. (1994) Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, New York.

Maršík F. (1999) *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha.

Ogden R.W. (1997) *Nonlinear elastic deformations*. Dover Publications, Mineaola.

Šilhavý M. (1997) *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer, Berlin.

Smith G.F. (1994) Constitutive equations for anistropis and isotorpic materials. North–Holland, Amsterdam.

Taber L.A. (2004) *Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics*. World Scientific, New Jersey.

I.2 NAPĚTÍ

I.2.1 TENZOR NAPĚTÍ

Uvažujme těleso B, které se v čase t nachází v konfiguraci $\Omega(t)$, kde je vystaveno nějakému vnějšímu silovému působení, při němž jsou na tělese splněny podmínky statické rovnováhy. Veďme myšlený řez pomocí nějaké roviny, která rozdělí těleso na dvě části (Obrázek I.2-1). Jestliže bylo těleso v rovnováze, rozdělením ztrácíme část silového působení, a tak i rovnováhu, pokud nepřipojíme silové působení do plochy řezu tak, aby jeho výsledný účinek nahradil oddělenou část tělesa.

Soustřeďme se nyní na libovolný konkrétní bod $\boldsymbol{x}$ roviny řezu, která má vnější normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Do $\boldsymbol{x}$ vložíme infinitesimální silovou výslednici vnitřních sil $d\boldsymbol{f}$, abychom zajistili statickou rovnováhu po myšleném odříznutí části tělesa[1]. K silovému vektoru $d\boldsymbol{f}$ zavádíme **vektor** (plošné) **intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$** tak, aby v elementární plošce ds myšleného řezu (čili plošném okolí bodu $\boldsymbol{x}$) vytvářel staticky ekvivalentní sílové působení (tzn. $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}ds$). Vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$ budeme nazývat **Cauchyův** (nebo **skutečný**; Obr. I.2-1 *B*).[2]

Jestliže se těleso během pohybu κ deformovalo do konfigurace $\Omega(t)$, existuje deformační gradient $\mathbf{F}$, který je tímto pohybem určen. Inverzní pohyb κ^{-1} (který generuje $\mathbf{F}^{-1}$) převede $\boldsymbol{x}$ na počáteční $\boldsymbol{X}$, tak že sleduje konkrétní materiálovou částici, která se v $\boldsymbol{x}$ v čase t nachází. V bodě $\boldsymbol{X}$ vedeme opět řez, tentokrát s normálovým vektorem $\boldsymbol{N}$, a definujeme plošné okolí dS (bodu $\boldsymbol{X}$). Umístěme nyní $d\boldsymbol{f}$ do referenční konfigurace $\Omega(0)$; Obrázek I.2-1 *C*. To nás přivede k (plošné) intenzitě vnitřních sil definované pro referenční konfiguraci $\boldsymbol{T}$. Vektor $\boldsymbol{T}$ nazýváme **nominální** (též první Piolův–Kirchhoffův).

Protože jsme k této operaci použili $d\boldsymbol{f}$, můžeme psát: $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}ds = \boldsymbol{T}dS$. Omezme při tom libovůli vektorů $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{T}$ tak, aby platilo (I.2-1).

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, t, \boldsymbol{N}) \tag{I.2-1}$$

Tyto rovnice říkají, že (podle našeho předpokladu) vektory intenzity vnitřních sil závisí pouze na poloze, čase a vnější normále řezu.

Klíčová je otázka, jak konkrétně by $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{T}$ měly na $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{N}$ záviset.

---

[1] Ačkoliv by se zdálo přirozené připojit kromě $d\boldsymbol{f}$ ještě $d\boldsymbol{m}$, čili **elementární momentový vektor**, **neučiníme tak**. O takovém kontinuu říkáme, že je **nepolární** (a naopak, kontinua uvažující spojité rozložení výsledných momentových dvojic v řezu se nazývají polární). Existují aplikace, kde se polárního spojitého prostředí využívá – představte si např. elektrické dipóly, které mají poloměry srovnatelné s dx. Protože se tyto dipóly budou při působení elektromagnetického pole natáčet, jistě vytvoří nějakou silovou interakci se svým okolím. Takové prostředí by také mohlo vzniknout např. jako koloidní roztok, který by pak působením elektromagnetického pole měnil své vlastnosti. Z pohledu pružnosti a pevnosti toto zahrnutí rozložených momentů v řezu vede k možnosti definovat skutečnou momentovou (ohybovou) tuhost. Celá teorie polárního kontinua je ovšem mnohem komplikovanější než pro nepolární prostředí. Například dojde ke ztrátě symetrie tenzoru skutečných napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a k nutnosti rozkládat ho na symetrickou a antisymetrickou část. Zájemcům o tuto problematiku je možno – ve shodě s poznámkou 14 (kapitola I.1.3) – doporučit práci A.J.M. Spencera a K.P. Soldatose *Finite deformations of fibre-reinforced elastic solids with fibre bending stiffness*, http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.02.015..

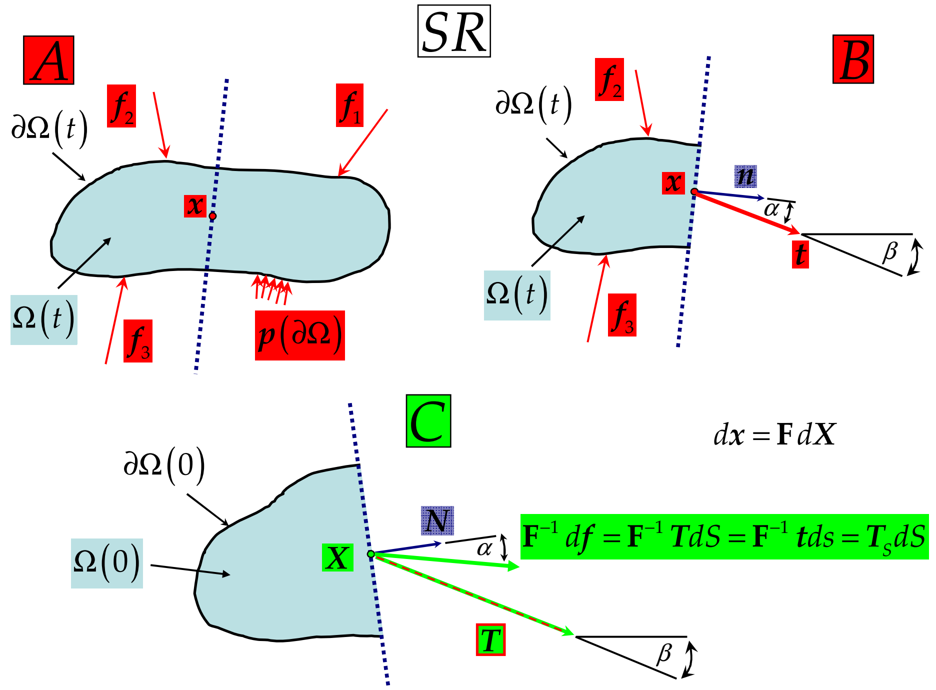
[2] V angličtině se používá termín *traction vector*.

Definice tenzorů napětí. Nechť platí (I.2-2), čili nechť vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{T}$) získáme lineární transformací $\boldsymbol{\sigma}$ (**P**) normálového vektoru $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{N}$). **V takovém případě nazýváme lineární transformaci $\boldsymbol{\sigma}$ jako tenzor Cuachyova (skutečného) napětí a transformaci P jako tenzor nominálního (smluvního, též prvního Piolova–Kirchhoffova) napětí.**[3]

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{N})=\mathbf{P}(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} \qquad \text{(I.2-2)}$$

To, že se v případě napětí musí jednat o tenzor druhého řádu, nám ukáže složkový zápis (I.2-3). Prostě, v součinech na pravé straně rovnic (I.2-3) se musí přes jeden index sčítat a současně musí jeden index zbýt, aby výsledkem byl vektor levé strany.

$$t_i=\sigma_{ij}n_j \qquad T_i=P_{iJ}N_J \qquad \text{(I.2-3)}$$



Obrázek I.2-1. Metoda řezu na tělese ve statické rovnováze (SR) a vektory intenzity vnitřních sil. *A* – zdeformovaná konfigurace $\Omega(t)$ a její hranice $\partial\Omega(t)$ s naznačeným silovým působením a myšleným řezem obsahujícím bod $\boldsymbol{x}$. *B* – při uvolnění části tělesa ve zdeformované konfiguraci musíme doplnit (skutečný) vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$, který zajistí rovnováhu; pro výslednici vnitřních sil $d\boldsymbol{f}$ a vektor intenzity $\boldsymbol{t}$ platí $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}ds$, kde ds je plocha elementárního okolí bodu $\boldsymbol{x}$ v řezu. C – do referenční konfigurace můžeme přenést rovnovážnou výslednici $d\boldsymbol{f}$ dvěma způsoby: (1) buď přeneseme $\boldsymbol{t}$ tak, jak je (beze změny), a získáme (smluvní) **první Piolův–Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{T}$** podle statické ekvivalence $\boldsymbol{T}dS = \boldsymbol{t}ds = d\boldsymbol{f}$; nebo (2) podrobíme $d\boldsymbol{f}$ inverzní (výstižně by se též dalo říkat *zpětné*) transformaci $\mathbf{F}^{-1}$ k deformaci $\mathbf{F}$, která vedla do průběžné konfigurace. Tímto způsobem získáme tzv. **druhý Piolův–Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{T}_s$** určený rovnostmi $d\boldsymbol{f} = \mathbf{F}d\boldsymbol{F} = \mathbf{F}\boldsymbol{T}_s dS = \boldsymbol{T}dS = \boldsymbol{t}ds \Rightarrow \boldsymbol{T}_s = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{T}$.

[3] Tato definiční vlastnost, lineární závislost vektoru intenzity vnitřních sil na vektoru vnější normály, se v anglosaské literatuře nazývá *Cauchyova věta*. Poznamenejme, že způsob zavedení tenzoru napětí, který jsme zde provedli, je pouze jedním z možných způsobů. V monografiích věnovaných mechanice kontinua je tenzor napětí většinou zaváděn z bilance hybnosti (vizte dále), kde se podle Gaussovy věty dojde k existenci objemové hustoty plošných sil. Námi zvolený způsob výkladu ale dobře koresponduje s výkladem posluchačům známým z *pružnosti a pevnosti*.

Tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ je zřejmě definován ve zdeformované konfiguraci (oba indexy jsou malé), kdežto $\mathbf{P}$ je definován nad dvěma konfiguracemi (jde tedy o dvoubodový tenzor stejně jako v případě deformačního gradientu $\mathbf{F}$)[4].

Je důležité zdůraznit, že jsme nikde nepředpokládali, že by $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{N}$ musely být orientovány ve směru $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{T}$. $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{T}$ jsou orientovány ve směru $d\boldsymbol{f}$, ale rovina řezu může být orientována libovolně. Pro různě orientované roviny procházející bodem $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{X}$) samozřejmě obdržíme různá číselná/složková vyjádření tenzorů $\boldsymbol{\sigma}$ a $\mathbf{P}$.

Ze statické ekvivalence vektorů $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{T}$ s $d\boldsymbol{f}$, čili rovnosti $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}ds = \boldsymbol{T}dS$, dosazením z (I.2-2) získáme (I.2-4).

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}ds = \mathbf{P}\,\boldsymbol{N}dS \tag{I.2-4}$$

Dosazením z Nansonovy věty, která vyjadřuje změnu elementárního plošného vektoru $d\boldsymbol{S}$ na $d\boldsymbol{s}$ při deformaci popsané $\mathbf{F}$ ($d\boldsymbol{s} = J\mathbf{F}^{-T}d\boldsymbol{S}$, rovnice I.1-12)[5] získáme přímý vztah mezi oběma tenzory (I.2-5).

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} && \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\,\mathbf{P}\,\mathbf{F}^{T} \\ &P_{iK} = J\sigma_{ij}F_{Kj}^{-1} && \sigma_{ij} = J^{-1}P_{iK}F_{jK} \end{aligned} \tag{I.2-5}$$

Uvažme nyní výraz $(\mathbf{P}\mathbf{F}^T)^T$. Zřejmě jde o $J\boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{F}$. Ve složkách píšeme $P_{iK}F_{jK}$ a sčítáme přes nesousední index (který se opakuje), což v symbolickém zápisu zajišťuje právě trasnposzice. Zjevně jde ovšem o složky $J\boldsymbol{\sigma}$. Odtud plyne, že **Cauchyův tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je symetrický**, čili

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \tag{I.2-6}$$

Naopak **tenzor smluvních napětí P symetrický není**. Ačkoliv sluší se dodat, že **být ani nemůže** (stejně jako $\mathbf{F}$), protože je definován nad dvěma různými konfiguracemi, čili různými vektorovými prostory, a tak otázka symetrie nedává ani dobrý smysl (nesmyslnost otázky po symetrii u dvoubodového tenzoru $\mathbf{F}$ byla podrobně demonstrována v kapitole I.1.6, kde byly diskutovány

---

[4] Kdybychom rozlišovali kovariantní a kontravariantní složky (což je ovšem nutné jen v neortogonálních souřadnicových soustavách), řekli bychom, že tenzory napětí (v obvyklém vyjádření) jsou dvakrát kontravariantní, čili s indexy nahoře jako např. $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$. To vyplývá ze skutečnosti, že k jejich definici používáme normálový vektor $\boldsymbol{n}$, který obvykle definujeme v kovariantních složkách (čili v kontravaraintní bázi), $n_i\boldsymbol{e}^i$. Připomeňme si, o co jde (prostudujte si znovu poznámku 35 v kap. I.1).

Souřadnicovou soustavu obvykle zavádíme pomocí vektorů kovariantní báze $\boldsymbol{e}_i$, čili bázové vektory mají směr tečen k souřadnicovým osám. Polohový vektor $\boldsymbol{x}$ pak vyjadřujeme jako $\boldsymbol{x} = x^i e_i = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$. Z vyjádření $\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$ dospějeme ke smíšenému tenzoru (1x kovariantní, 1x kontravariantní – čili jeden index dole a jeden nahoře) deformačního gradientu $F^i{}_K = \partial x^i \partial X^K$. Z něho definujeme deformační tenzory, obvykle jako kovariantní (např. $C_{AB} = F^i{}_A F^j{}_B g_{ij}$ a $2E_{AB} = C_{AB} - G_{AB}$, pomocí dyad $\mathbf{C} = F^i{}_A F^j{}_B g_{ij}\ \boldsymbol{G}_A \otimes \boldsymbol{G}_B$, kde $\boldsymbol{G}_I$ jsou vektory obecné (čili nemusí být kolmé a normované) kovariantní báze v referenční konfiguraci ($\boldsymbol{G}_I = \partial X_J/\partial \Xi_I \boldsymbol{E}_J$, vizte kap. I.1-6), $\boldsymbol{g}_i$ jsou obecné kovariantní bázové vektory zdeformované konfigurace ($\boldsymbol{g}_i = \partial x_j/\partial\xi_i \boldsymbol{e}_j$) a g_{ij} jsou složky metrického tenzoru zdeformované konfigurace ($g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$).

Naopak kontravariantní bázové vektory volíme tak, aby byly kolmé ke kovariantním (takže polohový vektor $\boldsymbol{x}$ v kontravariantní bázi je $x_i\boldsymbol{e}^i = x_1\boldsymbol{e}^1 + x_2\boldsymbol{e}^2 + x_3\boldsymbol{e}^3$). Obecně platí, že kontravariantní bázové vektory mají směr normál k souřadnicovým plochám. Uvědomíme-li si, že intenzitu vnitřních sil definujeme jako sílu vztaženou právě na infinitesimální velikost souřadnicové plochy v bodě $\boldsymbol{x}$ a že jsme se rozhodli pro lineární závislost mezi vektory $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{n}$, tak dostáváme, že $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}ds = \boldsymbol{g}^i ds_i$ ($\boldsymbol{g}^i$ je obecný – nenormovaný – kontravariantí bázový vektor) a $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}$, ve složkách $t^i = \sigma^{ij}n_j$.

[5] zde platí $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}ds$ a $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}dS$.

jednotlivé složky tohoto tenzoru **F** – aby mohl být symetrický, museli bychom např. složku F_{rZ} interpretovat stejně jako F_{zR}).

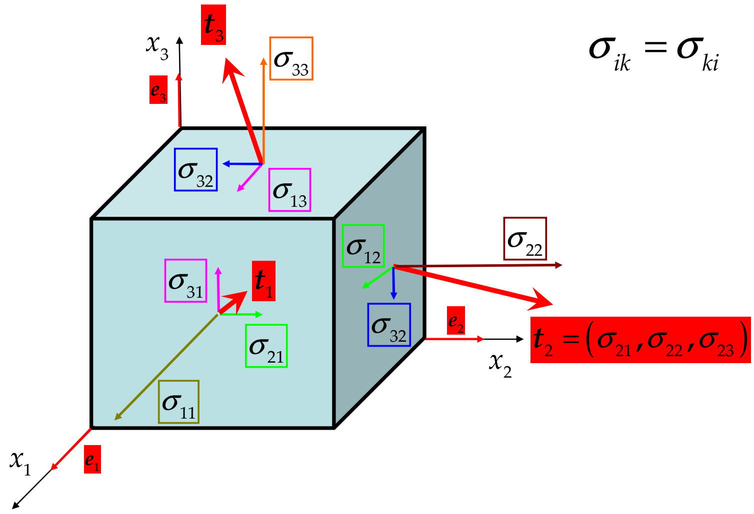
Složky (např.) tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$ získáme projekcí podél bázových vektorů $\boldsymbol{e}_i$. Platí totiž, že vektor průmětu intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$ do směru $\boldsymbol{e}_i$, čili vektor $\boldsymbol{t}_i = (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$, zároveň můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_i$. Kombinací dostaneme $\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{e}_j\cdot(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_i) = \sigma_{ji}$. Dostaneme tak následující vyjádření:

$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{t}_2 = \sigma_{12}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{t}_3 = \sigma_{13}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3.$$

Rozložení složek tenzoru napětí a vektorů skutečné intenzity vnitřních sil o infinitesimálním elementu je na obrázku I.2-2.

Diagonální složky σ_{ii} (i = 1,2,3) nazýváme normálová napětí a mimodiagonální složky (σ_{ij} pro $i \neq j$) smyková napětí.

$$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3) = \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3 = (\sigma_{11} + \sigma_{21} + \sigma_{31}, \sigma_{12} + \sigma_{22} + \sigma_{32}, \sigma_{13} + \sigma_{23} + \sigma_{33})$$



Obrázek I.2-2. Normálové (diagonální) a smykové (mimodiagonální) složky tenzoru s a vektory skutečné intenzity vnitřních sil (Pozor na značení $\boldsymbol{t}_i \neq t_i$) .

Indexová konvence. **V české literatuře převládá následující interpretace složek tenzorů napětí podle jejich indexů: pro tenzor σ_{ij} označuje první index (*i*) normálový směr roviny, ve které působí, a druhý index (*j*) označuje směr ve kterém působí. Na obrázku I.2-2 je ale označení složek tenzoru napětí právě opačné! Čili – první index směr, druhý index normála plochy.** Je to proto, že dáváme při volbě označení přednost shodě s transformací jednotkového vektoru na napěťový vektor pomocí tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_i$). Významná část světové odborné komunity používá právě tuto (vůči české literatuře opačnou) konvenci (Holzapfel 2000, Ogden 1997). Jsou-li ovšem fyzikální problémy formulovány pomocí symetrických tenzorů napětí, není tato neshoda naštěstí podstatná.

Druhý Piolův–Kirchhoffův tenzor napětí. Ačkoliv by se mohlo zdát, že tenzor skutečných napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je „nejpřirozenější“ vyjádření intenzity vnitřních sil („aktuální síla na aktuální plochu“), má jednu velikou „vadu.“ A sice, operuje nad konfigurací, kterou ve většině úloh teorie pružnosti neznáme – ve zdeformované konfiguraci, kterou nejčastěji máme teprve nalézt. Tenzor smluvních napětí $\mathbf{P}$ jsme sice získali přenesením infinitesimální silové výslednice $d\boldsymbol{f}$ do (obvykle známé) referenční konfigurace, nicméně tato operace vede ke ztrátě symetrie výsledného tenzoru. Mít šest místo devíti neznámých funkcí „má svou cenu.“ Cena, kterou za redukci složitosti problému zaplatíme spočívá v „komplikovanosti“ definice nové tenzorové veličiny pro napětí.[6]

Nyní **vytvoříme tenzor napětí, který bude definován v referenční konfiguraci (bude mít oba indexy velké) a který bude symetrický**. Získáme ho přenesením vektoru $d\boldsymbol{f}$ do referenční konfigurace způsobem, který odpovídá zpětné geometrické transformaci z průběžné do referenční konfigurace. Čili, jestliže se okolí bodu $\boldsymbol{X}$ deformovalo tak, že $d\boldsymbol{x} = \mathbf{F}d\boldsymbol{X}$, pak zpětně platí $d\boldsymbol{X} = \mathbf{F}^{-1}d\boldsymbol{x}$ (jak jsme si ukázali v kapitole o kinematice kontinua). Zavádíme referenční infinitesimální výslednici vnitřních sil $d\boldsymbol{F}$ jako $d\boldsymbol{F} = \mathbf{F}^{-1}d\boldsymbol{f}$. Pomocí této veličiny získáme nový, tzv. **druhý Piolův–Kirchhoffův, vektor intenzity vnitřních sil** $\boldsymbol{T}_S$ (vizte Obr. I.2-1). Pro něj platí rovnice (I.2-7).

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}ds = \boldsymbol{T}dS = \mathbf{F}\,d\boldsymbol{F} = \mathbf{F}\,\boldsymbol{T}_S dS \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{T}_S = \mathbf{F}^{-1}\,\boldsymbol{T} \tag{I.2-7}$$

Druhý Piolův–Krichhoffův tenzor napětí $\mathbf{S}$ získáme opět předpokladem lineární závislosti vektoru $\boldsymbol{T}_S$ na vektoru vnější normály (v referenční konfiguraci) $\boldsymbol{N}$.[7]

$$\boldsymbol{T}_S = \mathbf{S}\,\boldsymbol{N} \qquad\qquad T_{SI} = S_{IK}N_K \tag{I.2-8}$$

Mezi třemi zavedenými tenzory napětí tedy platí $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}ds = \mathbf{P}\boldsymbol{N}dS = \mathbf{F}\mathbf{S}\boldsymbol{N}dS$. Užitím Nansonovy věty ($d\boldsymbol{s} = J\mathbf{F}^{-T}d\boldsymbol{S}$ kde $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}ds$ a $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}dS$) dostaneme následující rovnosti.

$$J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\,d\boldsymbol{S} = \mathbf{F}\,\mathbf{S}\,d\boldsymbol{S} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\,\mathbf{F}\,\mathbf{S}\,\mathbf{F}^{T} \quad \wedge \quad \mathbf{S} = J\,\mathbf{F}^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{F}^{-T} \tag{I.2-9}$$

$$\mathbf{P}\,d\boldsymbol{S} = \mathbf{F}\mathbf{S}\,d\boldsymbol{S} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad \wedge \quad \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{P} \tag{I.2-10}$$

Složkově dostáváme $S_{AB} = JF_{Ai}^{-1}F_{Bj}^{-1}\sigma_{ij}$, $\sigma_{ij} = J^{-1}F_{iA}F_{jB}S_{AB}$, $P_{iK} = F_{iJ}S_{JK}$, a $S_{KL} = F_{Ki}^{-1}P_{iL}$.

Odborná literatura, která se mechanice kontinua věnuje ve větších podrobnostech než my zde, rozeznává ještě další tenzory napětí (např. *Krichhoffův* $J\boldsymbol{\sigma}$, *Biotův* $\mathbf{US}$ [kde $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$], nebo Madelův $\mathbf{CS}$ [kde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$]). My je ale v dalším výkladu nebudeme potřebovat.

Vlastní čísla, vektory a invarianty. Stejně jako pro symetrické tenzory deformace, tak i pro tenzory napětí můžeme řešit úlohu o vlastních číslech ($\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} - \lambda\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$), vektorech, invariantech a spektrálním rozkladu. Tj. tenzory $\boldsymbol{\sigma}$ a $\mathbf{S}$ můžeme převést do diagonálního tvaru (spektrální rozklad), čili

---

[6] Tak to prostě je. Čím abstraktnější pojmy definujeme, tím jednodušší formulace vztahů mezi skutečnostmi dostáváme. To je příjemný zisk, za který ovšem platíme cenu vyjádřitelnou v hodinách či dnech investovaných do toho, abychom vůbec pochopili, o čem je řeč. Velmi dobrým příkladem, který se týká tématu, je infinitesimální počet vykládaný v abstraktních prostorech, kterým říkáme *variety*. Pomocí této teorie lze ukázat, že dobře známé věty integrálního počtu (Stokesova, Greenova, Gaussova), které již brzy použijeme při bilancování mechanických veličin, jsou ve skutečnosti jen různé interpretace téhož.

[7] Pozor na složkové vyjádření rovnice (I.2-8), zde S není index ale součást symbolu T_S.

pracovat pouze s normálovými napětími, která pak nazýváme hlavní. Vlastní vektory jsou normálovými vektory rovin, na která tato hlavní napětí působí. Invarianty opět obdržíme z rovnic (I.1-20 až 22).

Infinitesimální deformace. V kapitole o deformaci jsme se zmínili o tom, že **jsou-li posuvy a deformace malé**, nemusíme rozlišovat mezi referenční a průběžnou konfigurací a tenzory $\boldsymbol{\varepsilon}$, **E** a **e** jsou si ve svých složkách přibližně rovny. Uvážíme-li rovnost $\boldsymbol{\sigma n}ds = \mathbf{P}\boldsymbol{N}dS = \mathbf{FS}\boldsymbol{N}dS$ za podmínek malých posuvů, deformací a rotací (tj. $\boldsymbol{n}ds \approx \boldsymbol{N}dS$ a $\mathbf{F} \approx \mathbf{I}$, kde **I** je jednotkový tenzor), vidíme, že přejde v přibližnou rovnost $\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$.

Příklady

I.2-P1 Odvoďte vzájemný vztah mezi skutečným, smluvním a druhým Piola–Krichhoffovým napětím při jednoosé tahové zkoušce a inflačním extenzním testu nestlačitelného materiálu.

Jednoosý tah. Vyjděme z představy, že známe skutečné napětí σ (=σ_{11}). To můžeme určit z experimentálně změřených veličin (f – zatěžující síla, λ – streč ve směru této síly) takto: $\sigma = f/s$, kde aktuální průřez s určíme z podmínky zachování objemu během deformace $v = V \Rightarrow ls = LS \Rightarrow s = LS/l = \lambda^{-1}S$ (l a L zde označují průběžnou a referenční délku tělesa). Souhrnem tedy pro skutečné napětí (za jednoosého tahu, když deformace je rozložená konstantně podél nestlačitelného vzorku) $\sigma = \lambda f/S$.

Podle rovnic (I.2-5, 9 a 10) platí: $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$ a $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$. Protože jde o jednoosý tah, tak podle předpokladu se $\boldsymbol{\sigma}$ redukuje na $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 = \sigma\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1$. Deformační gradient jsme odvodili již dříve ve formě $\mathbf{F} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ a pro nestlačitelný materiál platí $J = 1$. takže maticově můžeme psát

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ve složce 11 tedy máme $P = \sigma\lambda^{-1} = \lambda f/S\lambda^{-1} = f/S$, což odpovídá naší představě, že smluvní napětí je aktuální síla na počáteční průřez.

Pro druhé Piola–Kirchhoffovo napětí **S** dostaneme

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Takže ve složce 11 máme $S = \sigma\lambda^{-2} = \lambda f/S\lambda^{-2} = f/(S\lambda)$.

Inflační-extenzní test. Jak jsme ukázali v kapitole I.1.6, je deformace během inflačního testu nejčastěji modelována deformačním gradientem ve tvaru $\mathbf{F} = [\lambda_{rR}, \lambda_{\theta\Theta}, \lambda_{zZ}]$. Předpokládejme, že tato deformace je doprovázena vznikem napjatosti odpovídající $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr}\boldsymbol{e}_r\otimes\boldsymbol{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\boldsymbol{e}_\theta\otimes\boldsymbol{e}_\theta + \sigma_{zz}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z$, jde tedy o trojosou napjatost. Maticově tedy můžeme psát:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}\lambda_{rR}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}\lambda_{\theta\Theta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}\lambda_{zZ}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{rR}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}\lambda_{rR}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}\lambda_{\theta\Theta}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}\lambda_{zZ}^{-2} \end{pmatrix}$$

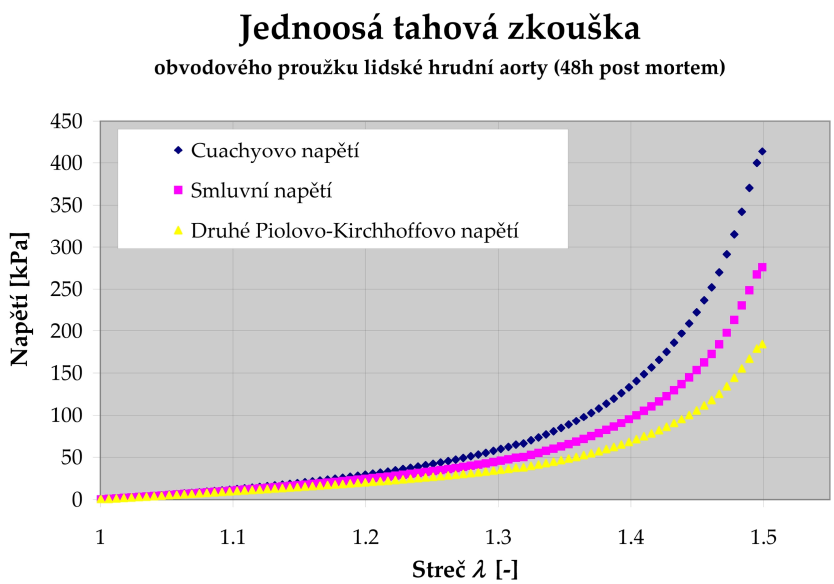
Protože obvykle bývá nejsložitější experimentálně určit geometrické změny ve směru r (čili změnu tloušťky), využíváme nestlačitelnost většinou tak, že F_{rR} vyjádříme jako $\lambda_{rR} = 1/(\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ})$.

Na závěr si promysleme, jak můžeme zapsat okrajovou silovou podmínku danou vnitřním tlakem kapaliny během experimentu. Označme tento tlak jako P. Tlak kapaliny má vždy směr normály ke zdeformovanému povrchu plochy na kterou působí, a tak představuje skutečné napětí v radiálním složce. Protože normála povrchu je orientována proti směru působní tlaku a tlak uvažujeme jako kladný skalár musíme psát, že

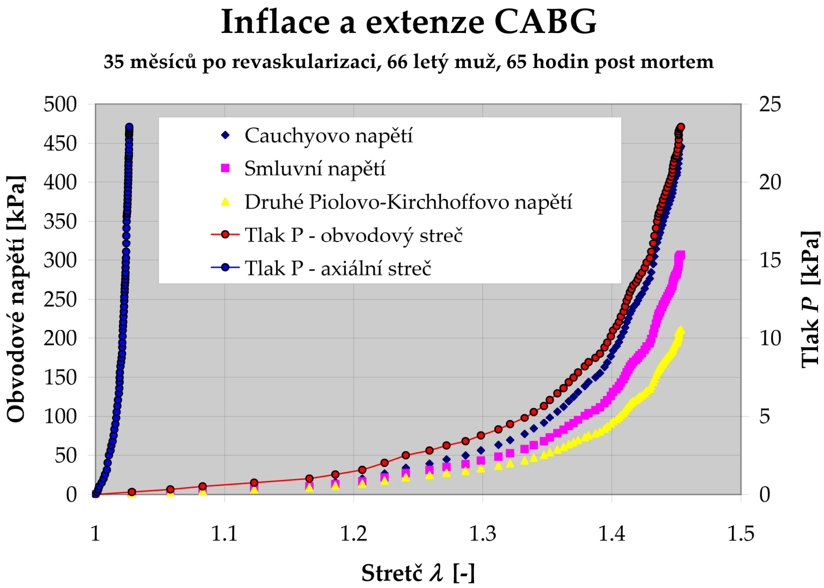
$$d\boldsymbol{f} = -(\,P ds)\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma n} = -\,P\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{rr} = -P \quad \text{pro polohu } r = r_i.$$

Transformujeme-li napětí ze skutečného na smluvní a druhé Piola–Kirchhoffovo, musíme, abychom zachovali ekvivalenci výrazů, provádět tytéž operace i na levé straně rovnice, takže obdržíme výrazy:

$$P_{rR} = \sigma_{rr}\lambda_{rR}^{-1} = \sigma_{rr}\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ} = -P\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ} \qquad S_{RR} = \sigma_{rr}\lambda_{rR}^{-2} = \sigma_{rr}(\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ})^2 = -P(\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ})^2$$



Obrázek I.2-3. Experimentální data z jednoosé tahové zkoušky s obvodově orientovaným proužkem lidské hrudní aorty demonstrující kvantitativní rozdíly mezi jednotlivými tenzory napětí (Upraveno podle Horný et al., 2010). Experimentálně zjištěná síla f, streč λ a počáteční průřez S jsou doplněny předpokladem o nestlačitelnosti materiálu. Existence napětí je modelována vztahy z příkladu výše ($\sigma = \lambda f/S$).



Obrázek I.2-4. Experimentální data z inflace a extenze žilního štěpu pro aorto-koronární bypass odebraného při pitvě. (Upraveno podle Horný et al., 2009). Skutečné napětí $\sigma_{\theta\theta}$ bylo vypočteno z tenkostěnné aproximace ($\sigma_{\theta\theta} \approx Pr/h = P\lambda_{\Theta\Theta}{}^2\lambda_{ZZ}/H$ – kde r je střední zdeformovaný poloměr a H počáteční tloušťka stěny cévy – za předpokladu nestlačitelného materiálu). Kromě napětí graf ukazuje i vztah mezi tlakem P a obvodovým $\lambda_{\Theta\Theta}$ a axiálním strečem λ_{ZZ}. Žilní štep (cca 10 cm dlouhý úsek velké kryté žíly) byl arterializována přibližně po dobu 35 měsíců.

Shrnutí

Z předpokladu rovnováhy dospíváme k nutnosti zavést po myšleném řezu do tělesa vnitřní síly (infinitesimální vektor výslednice vnitřních sil je $d\boldsymbol{f}$). Jejich plošnou intenzitu nazýváme napětí (napěťový vektor $\boldsymbol{t}ds = d\boldsymbol{f}$). Podle způsobu zavedení vektoru intenzity vnitřních sil dospíváme k různým vyjádřením tenzoru napětí. Vždy ale platí následující:

tenzor napětí zavádíme jako lineární transformaci vektoru vnější normály plochy řezu na vektor intenzity vnitřních sil.

Tenzor **Cauchyova** (skutečného) **napětí $\boldsymbol{\sigma}$** (σ_{ij}) **působí v průběžné konfiguraci** a převádí normálu $\boldsymbol{n}$ řezu po deformaci na skutečný vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$ tak, že $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma n}$. Platí $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

Tenzor **smluvního** (nominálního, prvního Piolova–Kirchhoffova) napětí **P** (P_{iK}) **působí v referenční konfiguraci, kde ale pracuje se skutečnou výslednicí vnitřních sil** $d\boldsymbol{f}$ (ta přísluší zdeformované konfiguraci, $\boldsymbol{T}dS = d\boldsymbol{f}$). Jde o dvoubodový tenzor (nad dvěma konfiguracemi) – indexy i a K. **P** převádí normálu $\boldsymbol{N}$ řezu před deformací na tzv. smluvní vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{T}$ tak, že $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Pn}$.

Tenzor **druhého Piolova–Kirchhoffova napětí S** (S_{IK}) působí v referenční konfiguraci. Zde pracuje se referenční výslednicí vnitřních sil $d\boldsymbol{F}$. Tu získáme aplikací zpětné geometrické transformace popisující deformaci, čili $d\boldsymbol{F} = \mathbf{F}^{-1}d\boldsymbol{f}$ (resp. $d\boldsymbol{f} = \mathbf{F}d\boldsymbol{F}$). **S** převádí normálu $\boldsymbol{N}$ řezu před deformací na tzv. druhý Piolův–Kirchhoffův vektor intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{T}_S$ tak, že $\boldsymbol{T}_S = \mathbf{S}\boldsymbol{N}$. Platí $\boldsymbol{T} = \mathbf{F}\boldsymbol{T}_S$ a dále $S_{IK} = S_{KI}$.

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \qquad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\,\mathbf{P}\,\mathbf{F}^{T}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\,\mathbf{F}\,\mathbf{S}\,\mathbf{F}^{T} \qquad \mathbf{S} = J\,\mathbf{F}^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{F}^{-T}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} \qquad \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{P}$$

ZDROJE

Itskov M. (2007) Tensor algebra and tensor analysis for engineers. Springer, Berlin.

Fung Y.C. (1990) *Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth*. Springer-Verlag, New York.

Holzapfel G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley and Sons, Chichester.

Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. (2000) A new constitutive framework for artereial mechanics and comparative study of material models. *J Elast* 68:1-48.

References

Horny L, Chlup H, Zitny R, Konvickova S, Adamek T. (2009). Constitutive behavior of coronary artery bypass graft. Paper presented at the *IFMBE Proceedings, 25*(4) 181-184.

Horny L, Gultova E, Chlup H, Sedlacek R, Kronek J, Vesely J, Zitny R. (2010) Mullins effect in an aorta and limiting extensibility evolution. Bull Appl Mechan 6:1-5.

Humphrey J.D. (2002) *Cardiovascular Solid Mechanics: Cells, Tissues, and Organs*. Springer, New York.

Marsden J.E., Hughes T.J.R. (1994) Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, New York.

Maršík F. (1999) *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha.

Ogden R.W. (1997) *Nonlinear elastic deformations*. Dover Publications, Mineaola.

Taber L.A. (2004) *Nonlinear Theory of Elasticity: Applications in Biomechanics*. World Scientific, New Jersey.

I.3 BILANČNÍ ROVNICE A NEROVNICE

Jak bylo řečeno na začátku, tento studijní text není úplným úvodem do mechaniky kontinua. Konstrukce konstitutivních rovnic bývá vykládá po podrobném probrání zákonů bilance (rovnice bilance mechanických veličin[1]). My se zde omezíme pouze na jejich stručný (nezbytný) popis, neboť pro nás nejsou cílem, nýbrž prostředkem.

I.3.1 OBECNÉ POJMY

Abychom mohli nějaké fyzikální veličiny bilancovat, je třeba alespoň stručně popsat, kde tak činíme. Takže podle druhu interakce s okolím rozeznáváme:

- ***izolovaný systém*** – tj. takový, který nevyměňuje s okolím (čili přechodem přes hranici systému, která ho definuje v prostoru a čase) žádnou hmotu ani žádnou energii (v libovolné její formě, takže tím zahrnujeme i konání práce)
- ***uzavřený systém*** – tj. takový, který s okolím nevyměňuje žádnou hmotu, avšak energie vyměňovat může
- ***otevřený systém*** – tj. systém, který může s okolím vyměňovat hmotu i energii.

Výměnou máme namysli přijímání a předávání (hmoty, energie). Systém, Ω, je definován v geometrickém prostoru našeho kontinua a obsahuje alespoň jeden materiálový bod. Budeme se zabývat pouze souvislými, plnými systémy s hranicí $\partial\Omega$, která je spojitá a její hladkost je porušena pouze konečném počtu křivek konečné délky.[2]

Předpokládáme (v principu), že každému systému lze v každém okamžiku přiřadit nějakou hmotnost m (kladné reálné číslo).

O uzavřeném systému Ω mluvíme taktéž jako o kontrolní hmotě a je pro nás modelem reálných těles. Poloha hranice $\partial\Omega$ uzavřeného systému závisí na čase t.

Otevřený systém je základním modelem používaným v mechanice kapalin a volíme ho často tak, aby měl v čase konstantní objem (kontrolní objem).

I.3.2 BILANCE

Takže podle definice pro **uzavřený systém** platí (I.3-1) – **hmotnost se během pohybu zachovává** (nevzniká ani nezaniká).

---

[1] Jmenovitě jde o: bilanci hmoty (vedoucí k rovnici kontinuity), bilanci hybnosti (nazývanou často rovnice rovnováhy), bilanci momentu hybnosti (v nepolárním kontinuu prostě konstatující, že Cauchyův tenzor napětí je symetrický), první a druhou větu termodynamiky (u úloh řešených přímo ve složkách tenzoru deformace bychom ke zjištění poloh museli ještě zahrnout rovnice kompatibility, což je ovšem pouze speciální formulace požadavku na hladkost pole tenzoru deformace). Tyto rovnice, po rozšíření o konstitutivní rovnice materiálu kontinua, tvoří systém rovnic mechaniky a jejich řešením získáme popis pohybu, popř. dokážeme vyloučit/potvrdit, že nějaké okrajové podmínky mohou k nějakému konkrétnímu pohybu (resp. mechanickému stavu) vést. V souhrnu tyto rovnice tvoří analogii k principům mechaniky hmotných bodů a těles (II. Newtonův zákon, Lagrangeovy rovnice II. druhu, Hamiltoneův princip), ze kterých určujeme pohyb bodů a těles.

[2] hladkost = spojitost první derivace, porušení hladkosti = např. ostrá hrana kvádru; plná = bez kavit (dutin) – poznamenejme, že kavitace je běžným jevem v kapalinách, když lokální termodynamické podmínky vedou k fázové transformaci, taktéž u elastomerů může za určitého stavu napjatosti docházet ke kavitaci.

$$\frac{Dm\left(\Omega\left(0\right)\right)}{Dt}=\frac{Dm\left(\Omega\left(t\right)\right)}{Dt}=0 \tag{I.3-1}$$

Rovnice (I.3-1) předpokládá, že je smysluplné mluvit o diferenciálním elementu hmotnosti dm a protože hmota nezaniká/nevzniká, tak $dm(\boldsymbol{X}) = dm(\boldsymbol{x},t)$. Protože je m diferencovatelné, je nutné spojité. Takže můžeme v našem systému definovat spojité materiálové pole $\rho_0 = \rho_0(\boldsymbol{X})$ a prostorové pole $\rho = \rho(\boldsymbol{x},t)$, která nazýváme **hustota hmotnosti** (v materiálové a prostorovém popisu). Platí pro ně (I.3-2)[3].

$$\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)=\lim_{\Delta V\left(\Omega(0)\right)\to 0}\frac{\Delta m\left(\Omega\left(0\right)\right)}{\Delta V\left(\Omega\left(0\right)\right)} \qquad \rho\left(\boldsymbol{x},t\right)=\lim_{\Delta v\left(\Omega(t)\right)\to 0}\frac{\Delta m\left(\Omega\left(t\right)\right)}{\Delta v\left(\Omega\left(t\right)\right)} \tag{I.3-2}$$

V diferenciálním tvaru píšeme (I.3-3).

$$dm\left(\boldsymbol{X}\right)=\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)dV \qquad dm\left(\boldsymbol{x},t\right)=\rho\left(\boldsymbol{x},t\right)dv \tag{I.3-3}$$

Nyní můžeme zapsat **bilanci hmoty** (I.3-4), která pro uzavřený systém znamená **„zákon zachování hmoty“**, ve dvou tvarech – v tzv. ***lokálním***, diferenciální rovnice která musí být splněna ve všech bodech tělesa, a v tzv. ***globálním***, kde se integruje přes celý objem tělesa.

$$dm=\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)dV=\rho\left(\boldsymbol{x},t\right)dv>0 \qquad m=\int_{\Omega(0)}\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)dV=\int_{\Omega(t)}\rho\left(\boldsymbol{x},t\right)dv>0 \tag{I.3-4}$$

Bilance hmoty bývá velice často používána ve tvaru tzv. **rovnice kontinuity (hmoty)**. Vyjdeme-li z (I.3-4b), napíšeme oba integrály na levou stranu a zaměníme integrační proměnné (včetně mezí)[4], získáme (I.3-5).

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(0)}\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)dV-\int_{\Omega(t)}\rho\left(\boldsymbol{x},t\right)dv&=\int_{\Omega(0)}\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)dV-\int_{\Omega(0)}\rho\left(\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{X},t\right),t\right)J\left(\boldsymbol{X},t\right)dV=\\&=\int_{\Omega(0)}\left(\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)-\rho\left(\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{X},t\right),t\right)J\left(\boldsymbol{X},t\right)\right)dV=0\end{aligned} \tag{I.3-5}$$

Předpokladem, že V můžeme volit libovolně, dospíváme k závěru, že pro splnění (I.3-5c) je třeba, aby nule byl nule roven integrand (I.3-6), což je hledaný tvar rovnice kontinuity.

$$\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)=\rho\left(\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{X},t\right),t\right)J\left(\boldsymbol{X},t\right) \tag{I.3-6}$$

Bilanční rovnice bývají formulovány pro časové změny (rychlosti) bilancovaných veličin. Takže derivováním (I.3-6a) podle času a uvážením, že referenční hustota na čase nezávisí, pro materiálový popis dostaneme (I.3-7).

$$\frac{\partial\rho_0\left(\boldsymbol{X}\right)}{\partial t}=0 \tag{I.3-7}$$

---

[3] V realitě samozřejmě ΔV a Δv nemohou konvergovat k nule, protože strukturu hmoty od jisté úrovně měřítka nelze efektivně modelovat jako spojitou. Tato skutečnost vytváří meze smysluplného použití kontinua jakožto modelu reality. Náš element objemu, který považujeme za diferenciální, musí v reálném měřítku vždy být o několik řádů větší než je úroveň, na které bychom museli rozlišovat částice hmoty.

[4] Podle předpokladů $dv = J(\boldsymbol{X},t)dV$, kde $J = \det(\mathbf{F})$, $d\boldsymbol{x} = \mathbf{F}d\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ při existenci inverzní transformace, podle (I.1-1, 4, 11).

V prostorovém popisu je vyjádření složitější. Je třeba provést materiálovou časovou derivaci, která opět bude rovna 0. $D(\rho J)/Dt = 0$. Výsledek ve tvaru (I.3-8) získáme: (1) uvážením pravidla o derivaci součinu $D(\rho J)/Dt = D(\rho)/Dt{\cdot}J + \rho \cdot D(J)/Dt$, (2) $D(J)/Dt = J{\cdot}div(\boldsymbol{v})$ podle (I.1-31), (3) získanou rovnici, která je tvaru $J(D(\rho)/Dt + \rho \cdot div(\boldsymbol{v})) = 0$, zjednodušíme podělením J, protože $J > 0$. Na závěr vyjádříme materiálovou derivaci $\rho(\boldsymbol{x},t)$ jako: $D\rho(\boldsymbol{x},t)/Dt = \partial\rho(\boldsymbol{x},t)/\partial t + \mathrm{grad}(\rho)\cdot\boldsymbol{v}$ podle (I.1-3). Takže platí rovnice kontinuity hmoty v prostorovém popisu v lokální formě (I.3-8). Ekvivalentně ji lze vyjádřit jako (I.3-9 a 10).

$$\dot{\rho}(\boldsymbol{x},t)+\rho(\boldsymbol{x},t)\,div\left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\right)=0 \tag{I.3-8}$$

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+grad\left(\rho(\boldsymbol{x},t)\right)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\rho(\boldsymbol{x},t)\,div\left(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\right)=0 \tag{I.3-9}$$

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+div\left(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\right)=0 \tag{I.3-10}$$

Než zformulujeme bilanci hmoty pro otevřený systém, musíme připomenout několik známých tvrzení z (vektorové) matematické analýzy. Jde o tzv. **integrální věty, které udávají vzájemný vztah mezi integrací vektorových (tenzorových) polí po křivkách, plochách a v objemech. Jde o tzv. divergenční větu (též Gaussovu nebo Gaussovu–Ostrogradského) a Stokesovu, resp. Geenovu větu.** Tvrzení uvedeme bez důkazů.

Předpokládejme, že jsou dány hladké funkce $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ a $\mathbf{t}(\boldsymbol{x})$ – vektorové a tenzorové pole – nad nějakou konvexní oblastí Ω třírozměrného geometrického prostoru (diferenciálním elementem dv), která je uzavřena hraniční plochou $\partial\Omega$ (s diferenciálním elementem ds). Na této ploše je v každém bodě definován vnější normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Pak pro $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ a $\mathbf{t}(\boldsymbol{x})$ platí (I.3-11) a (I.3-12), které nazýváme **divergenční věta** (vlevo symbolicky, vpravo ve složkách).

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds=\int_{\Omega}div(\boldsymbol{u})\,dv \qquad \int_{\partial\Omega}u_i n_i ds=\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}dv \tag{I.3-11}$$

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{t}\,\boldsymbol{n}ds=\int_{\Omega}div(\mathbf{t})\,dv \qquad \int_{\partial\Omega}t_{ij}n_j ds=\int_{\Omega}\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}dv \tag{I.3-12}$$

Integrál $\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds$ nazýváme celkovým **tokem přes hranici a věta říká, že je roven součtu (produkce) zřídel (zdrojů) a nor (propadů, míst zániku) v hranicí obepnutém objemu.**

Důsledkem divergenční věty je tzv. **Greenova věta** (I.3-13). Zde f je nějaká skalární funkce (pole skalární veličiny).

$$\int_{\partial\Omega}f\boldsymbol{n}ds=\int_{\Omega}grad(f)\,dv \qquad \int_{\partial\Omega}fn_i ds=\int_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_i}dv \tag{I.3-13}$$

Stokesova věta převádí integrál vektorového pole $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ na uzavřené křivce Γ (tento integrál nazýváme cirkulace vektoru $\boldsymbol{u}$) na integrál ***rotace*** vektorového pole nad **otevřenou** souvislou **plochou** s (ta je souvislou částí hranice $\partial\Omega$ konvexní oblasti Ω), za podmínky, že křivka Γ je souhlasně orientována vůči *s*. Čili platí (I.3-14)[5].

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_s rot(\boldsymbol{u})\cdot \boldsymbol{n} ds \qquad \oint_\Gamma u_i dx_i = \int_s \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} n_i ds \qquad \text{(I.3-14)}$$

V případě, že půjde o uzavřenou plochu (čili celou hranici $\partial\Omega$), bude cirkulace vektoru u rovna nule.

Jestliže **uvažujeme otevřený systém** a zároveň skutečnost, že hmota nevzniká ani nezaniká, **musí bilance hmoty** v takovém systému (charakterizovaném časově nezávislým kontrolním objemem Ωc) **vyjadřovat skutečnost, že časový přírůstek hmotnosti je roven** (nikoliv nule jako v uzavřeném systému ale) **celkovému přítoku hmoty přes hranici systému**. Čili jde o kombinaci rovnice (I.3-10) v globální formě (integrál přes Ωc) a (I.3-13), kde místo *f* dosadíme $\rho(\boldsymbol{x},t)$.

---

[5] K integrálním větám se sluší explicitně připomenout definice operátorů *div* a *rot* (ačkoliv – zjevně plynou z indexového zápisu integrandů). Tyto operátory jsou úzce spjaty s gradientem, o kterém jsme již mluvili, a vlastně jde jen o jeho speciální způsoby aplikace (podle toho pomocí které algebraické operace operátor gradientu aplikujeme – skalární součin, vektorový součin, tenzorový součin). Uvažujme geometrický prostor (konfiguraci) s kartézskou bází $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$. Detailnější výklad je možno najít v Holzapfel (2000) s. 40-54.

- **Gradient skalárního pole** *f* je označována jako *grad*(*f*) a platí

  $$grad(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

  Zde ∇ používáme alternativně ke *grad* a čteme „nabla".

- **Gradient vektorového pole** $\boldsymbol{u}$ jsme již zavedli: $grad(\boldsymbol{u}) = \nabla\otimes\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_j$.

- **Gradient tenzorového pole t**: $grad(\mathbf{t}) = \nabla\otimes\mathbf{t} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$ - čili jde o tenzor třetího řádu.

- **Divergence vektorového pole** $\boldsymbol{u}$: $div(\boldsymbol{u}) = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ (v posledním výrazu sčítáme přes opakující se index).

- **Rotace vektorového pole** $\boldsymbol{u}$: $rot(\boldsymbol{u}) = \nabla\times\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3},\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1},\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$. Zde tenzor ε_{ijk} nabývá dosazováním čísel 1,2,3 za indexy *i*, *j*, *k* hodnot 1 pro sudou permutaci indexů, -1 pro lichou a v případě opakování libovolného indexu je 0 (jde o tzv. alternační tenzor, též Levi-Civitův tenzor – pozor, jde o jednu osobu italského matematika T. Levi-Civitu).

- **Divergence tenzorového pole t**: $div(\mathbf{t}) = \nabla\cdot\mathbf{t} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i$.

Zabývejme se nyní bilancí hybnosti a jejího momentu.

V mechanice hmotných bodů a tuhých těles je hybnost definována jako $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ a v mechanice kontinua ji zavedeme tak, aby v limitě (bod $\boldsymbol{x}$ s koncentrovanou hmotou) byly ekvivalentní. Takže pro uzavřený systém Ω (těleso *B*), který se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ podle předpisu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ a má hustotu hmotnosti $\rho(\boldsymbol{x},t)$ definujeme jeho hybnost $\boldsymbol{p}(t)$ podle (I.3-15).

$$\boldsymbol{p}(t) = \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,dv = \int_{\Omega(0)} \rho_0(\boldsymbol{X})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)\,dV \tag{I.3-15}$$

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k bodu $\boldsymbol{x}_0$ je samozřejmě také definován konzistentně s mechanikou hmotných bodů a tuhých těles (I.3-16). Zde $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t) - \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{X}_0)$.

$$\boldsymbol{L}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{r}\times\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,dv = \int_{\Omega(0)} \boldsymbol{r}\times\rho_0(\boldsymbol{X})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)\,dV \tag{I.3-16}$$

Protože v (I.3-15) a (I.3-16) integrujeme přes objem, integrandy v těchto vztazích zřejmě definují hustoty – **hustotu hybnosti a hustotu momentu hybnosti**.

Bilanci hybnosti a momentu hybnosti na tělese Ω formulujeme jako (I.3-17) a (I.3-18), což je kontinuální vyjádření, které známe z mechaniky hmotných bodů a tuhých těles jako I. a II. impulsovou větu (resp. zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti)[6]. **Takže tvrdíme, že časová změna hybnosti *Dp/Dt* v Ω je rovna výslednici sil *F*(*t*) na Ω působících a časová změna momentu hybnosti *DL/Dt* je rovna celkovému momentu sil *M*(*t*) působícímu na Ω.**[7]

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \rho\boldsymbol{v}\,dv = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(0)} \rho_0\boldsymbol{V}\,dV = \boldsymbol{F}(t) \tag{I.3-17}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}}(t) = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v}\,dv = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{r}\times\rho_0\boldsymbol{V}\,dV = \boldsymbol{M}(t) \tag{I.3-18}$$

Abychom se dostali k soustavě pohybových rovnic kontinua, je třeba specifikovat, jak si představujeme (je třeba modelovat) vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{M}$. Vyjadřují silové působení na Ω, které může probíhat v jeho objemu a na jeho hranici. **Hovoříme pak o objemových silách (které si představujeme jako síly dalekého dosahu – např. síly gravitačního pole) a plošných silách (síly krátkého dosahu vznikající bezprostřední interakcí s okolím přes hranici).** Tomu odpovídají integrály (I.3-19) a (I.3-20), kde vektory $\boldsymbol{t}$ a $\boldsymbol{b}$ reprezentují právě **hustotu plošných sil** a **hustotu objemových sil**.

$$\boldsymbol{F}(t) = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\,ds + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)\,dv \tag{I.3-19}$$

$$\boldsymbol{M}(t) = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\,ds + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)\,dv \tag{I.3-20}$$

[6] Tvrzení jsou taktéž ekvivalentní kombinaci I. a II. Newtonova zákona. Všechny formy těchto tvrzení nazýváme *principy mechaniky*.

[7] Zde opět zápis *D*(-)/*Dt* a tečkování nad symbolem znamenají operátor materiálové derivace (I.1-3).

Když nyní uvážíme definici tenzoru skutečných napětí (I.2-2), $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}$, a divergenční větu, dostaneme výraz nahrazující plošné síly pomocí napětí (I.3-21).

$$\int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\,ds = \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}\,ds = \int_{\Omega(t)} div\left(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)\right)dv \qquad \text{(I.3-21)}$$

Což dosadíme do (I.3-19) a posléze do (I.3-17). **Výsledkem je globální tvar rovnováhy** (I.3-22) **v prostorovém popisu**. Lokálně v prostorovém popisu píšeme rovnice rovnováhy jako (I.3-23) nebo někdy též (I.3-24)[8].

$$\int_{\Omega}\left(div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b} - \rho\dot{\boldsymbol{v}}\right)dv = \boldsymbol{0} \qquad \text{(I.3-22)}$$

$$div(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b} = \rho\dot{\boldsymbol{v}} \qquad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho v_i \qquad \text{(I.3-23)}$$

$$div(\boldsymbol{\sigma} - \rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{b} = \rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} \qquad \text{(I.3-24)}$$

Je-li pravá strana rovnic rovnováhy rovna 0 (nepůsobí zrychlení), hovoříme o statickém zatížení, jinak hovoříme o dynamickém. Výslovně také upozorňujeme, že jde o soustavu tří rovnic pro složky vektorů i = 1, 2, a 3 a přes index j, jelikož se opakuje (I.3-23b), se sčítá.

Využitím tzv. **Piolovy rovnosti**, která říká, že $Div(J\mathbf{F}^{-T}) = \boldsymbol{0}$, a vztahu $div(\boldsymbol{\sigma}) = Div(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{F}^{-T}$, lze dospět k (I.2-25)[9]. Což umožňuje přejít od prostorového popisu k materiálovému, ve kterém lokální tvar rovnic rovnováhy vystihuje (I.3-26).

$$Div(\mathbf{P}) = J\,div(\boldsymbol{\sigma}) \qquad \frac{\partial P_{iK}}{\partial X_K} = J\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(I.3-25)}$$

[8] Výslovně upozorňujeme, že derivaci podle času v (I.3-24) narozdíl od (I.3-22) a (I.3-23) provádíme jako prostou parciální derivaci, nikoliv jako materiálovou. Konvektivní člen je totiž již zahrnutý v argumentu operátoru divergence pomocí $-\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$. Tenzor $\boldsymbol{\sigma} - \rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$ nazýváme zobecněné napětí.

[9] Bez důkazů uveďme, některé rovnosti týkající se gradientu a divergence a transformace mezi materiálovým a prostorovým popisem. Rovnosti jsou převzaty z Holzapfel (2000) s. 51, 74 a 76. Níže f je libovolné hladké skalární pole, $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou hladká vektorová, $\mathbf{t}$ a $\mathbf{s}$ jsou hladká tenzorová pole v tomtéž popisu.

$$div(f\boldsymbol{u}) = f\,div(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\cdot grad(f) \qquad div(f\,\mathbf{t}) = f\,div(\mathbf{t}) + \mathbf{t}\,grad(f)$$
$$div(\mathbf{ts}) = grad(\mathbf{t}):\mathbf{s} + \mathbf{t}\,div(\mathbf{s}) \qquad div(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = (grad(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\,div(\boldsymbol{v})$$
$$grad(f\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\otimes grad(f) + f\,grad(\boldsymbol{u}) \qquad grad(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (grad(\boldsymbol{u}))^T\boldsymbol{v} + (grad(\boldsymbol{v}))^T\boldsymbol{u}$$

Pro úplnost uveďme, že ve výrazu $grad(\mathbf{t}):\mathbf{s}$ je třeba provést dvojtečkový součin mezi tenzorem třetího a druhého řádu, což probíhá podle pravidla: $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\otimes):(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}$.

Nechť $grad$, div a $Grad$ a Div jsou operátory vzhledem k obvyklým konfiguracím. Platí následující.

$$grad(f) = \mathbf{F}^{-T}Grad(f) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = F^{-1}_{Ki}\frac{\partial f}{\partial X_K} \qquad grad(\boldsymbol{u}) = Grad(\boldsymbol{u})\mathbf{F}^{-1} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_K}F^{-1}_{Kj}$$
$$grad(\mathbf{t}) = Grad(\mathbf{t})\mathbf{F}^{-1} \qquad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial X_L}F^{-1}_{Lk} \qquad div(\mathbf{t}) = Div(\mathbf{t})\mathbf{F}^{-T} \qquad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial X_L}F^{-1}_{Li}$$

$$Div(\mathbf{P})+\boldsymbol{B}=\rho_0\dot{\boldsymbol{V}} \qquad \frac{\partial P_{iK}}{\partial X_K}+B_i=\rho_0\dot{V}_i \tag{I.3-26}$$

Připomeňme, že **P** je tenzor smluvních napětí a $\boldsymbol{B}$ je hustota objemových sil v materiálovém popisu ($\boldsymbol{B} = J\boldsymbol{b}$). Dosazením $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$, může psát pomocí druhého Piolova-Kirchhoffova napětí (I.3-27).

$$Div(\mathbf{FS})+\boldsymbol{B}=\rho_0\dot{\boldsymbol{V}} \qquad \frac{\partial(F_{iL}S_{LK})}{\partial X_K}+B_i=\rho_0\dot{V}_i \tag{I.3-27}$$

Pokud jde o časovou změnu momentu hybnosti, kombinací (I.3-18) a (I.3-20) dostaneme (I.3-28).

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(0)}\boldsymbol{r}\times\rho_0\boldsymbol{V}dV=\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)ds+\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)dv \tag{I.3-28}$$

Pomocí divergenční věty lze pro plošné síly psát (I.3-29). Což nás přivede ke globálnímu vyjádření rovnováhy ve tvaru (I.3-30).

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}ds=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma n}ds=\int_{\Omega}\left(\boldsymbol{r}\times div(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}^T\right)dv \tag{I.3-29}$$

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{r}\times\left(\rho\dot{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{b}-div(\boldsymbol{\sigma})\right)dv=\int_{\Omega}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}^T dv \tag{I.3-30}$$

Upozorňujeme, že $\boldsymbol{\varepsilon}$ zde hraje roli alternačního tenzoru (Levi-Civitova). Čili platí $\varepsilon_{ijk} = 1$ pro sudou permutaci indexů *ijk* (po dosazení 1, 2 3), $\varepsilon_{ijk} = -1$ pro lichou permutaci a $\varepsilon_{ijk} = 0$, když se libovoné číslo dosazené za index opakuje. Permutace se označuje za sudou, jestliže obsahuje sudý počet inverzí, tj. situací, porušujících uspořádání přirozených čísel (např. 312 je sudá permutace, protože obsahuje 2 inverze = 3 stojí před 1 a 3 stojí před 2, naopak 321 je lichá permutace – proč?).

Rovnice (I.3-30) vede k podmínce (I.3-31). Z čehož plyne, že musí být splněno $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. **To znamená, že tenzor Cauchyova napětí je symetrický**. Připomeňme, že to platí jen proto, že jsme neuvažovali spojitě rozložené momentové dvojice jako formu intenzity vnitřních sil.

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}^T=\boldsymbol{0} \qquad \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}=0 \tag{I.3-31}$$

Bilance mechanické energie v uzavřeném systému. Jestliže uvažujeme pouze energii, která se týká mechanických veličin (polohy, rychlosti a silového působení na těleso, které způsobuje tento pohyb) idealizace empirického pozorování (čili zanedbání všech forem ztrát energie), vede při bilancování k závěru, že mechanická energie se zachovává. Energie vnějšího silového působení musí tedy být v rovnováze s kinetickou energií pohybu částí kontinua a energií vnitřních sil v kontinuu působících. Toto tvrzení v kontinuu zformulujeme ve výkonech, čili v rychlostech změny energie, což vyjadřuje rovnice (I.3-32), resp. (I.3-33).

$$\frac{D}{Dt}T(t)+P_{\mathbf{int}}(t)=P_{ext}(t) \tag{I.3-31}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)dv+\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t):\mathbf{d}(\boldsymbol{x},t)dv=\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)ds+\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)dv$$

(I.3-32)

V rovnici výše (I.3-32) tedy integrály postupně zleva doprava vyjadřují (1) kinetickou energii T, výkon vnitřních sil P_{int} a výkon vnějších sil P_{ext}, na kterém se podílejí jak plošné tak objemové síly. Výkon vnitřních sil můžeme také psát podle (I.3-33).

$$\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(x,t):\mathbf{d}(x,t)\,dv = \int_{\Omega(t)} tr\left(\boldsymbol{\sigma}^T(x,t)\,\mathbf{d}(x,t)\right)dv \qquad \int_{\Omega(t)} \sigma_{ij} d_{ij}\,dv \tag{I.3-33}$$

Bez důkazu uvedeme následující zásadní tvrzení o hustotě výkonu vnitřních sil w_{int} (I.3-34). O hustotě výkonu mluvíme proto, že výkon dostaneme až integrací přes objem, jako v rovnici (I.3-33).

$$w_{\text{int}}(t) = J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} = \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}} \tag{I.3-34}$$

Páry tenzorů napětí a rychlosti deformace, které splňují tuto rovnost nazýváme (energeticky) konjugované.

I.3.3 TERMODYNAMICKÉ ROZŠÍŘENÍ

Pro termodynamické úvahy bývá zaváděna nová stavová veličina, tzv. **vnitřní energie *U*, která zahrnuje všechny mikroskopické formy energie (čili energie plynoucí mikroskopické stavby tělesa: teplené kmity na úrovni atomární struktury, energie chemických vazeb,...). V součtu s kinetickou energií, kterou má těleso jako celek, pak hovoříme o tzv. celkové (totální) energii.** Jestliže se těleso deformuje a neuvažujeme jiné formy energie, projeví se práce vnějších sil právě změnou vnitřní energie a nabytím kinetické energie.

Toto tvrzení platí, neukáže-li zkušenost něco jiného. Pozorujeme-li **mechanické chování** (bez fázových transformací) pružných kovů, obyčejně si vystačíme se stavovými veličinami doposud zavedenými (napětí, deformace). K jinému závěru dospějeme, budeme-li sledovat mechanické chování elastomerů. **Zjistíme, že mechanická odezva materiálu (např. pryže) na působení vnějších sil je doprovázena měřitelnými změnami teploty – nemechanické veličiny**! Pro jisté typy dějů (zejména vzhledem k rychlosti změny mechanických veličin) lze sestavit úspěšné modely mechanického chování pryží i při zanedbání této skutečnosti – čistě mechanická teorie. Obecně je ale pro tyto materiály třeba vytvořit koncept nikoliv mechaniky kontinua ale **termodynamiky kontinua**. Zavedeme tedy dvě nové stavové veličiny – **teplotu** a **entropii** – a doplníme je do bilančních rovnic (společně s **tepelným a entropickým tokem** a **zdroji/norami tepla a entropie**). Zahrnutím entropie do systému veličin popisujících stav a vývoj prostředí vede k nové bilanční „rovnici“, **II. zákonu termodynamiky**. Uvozovky jsem použili proto, jelikož ve skutečnosti experimenty ukazují, že nejde o rovnici nýbrž o nerovnici.

Teplota. Zaveďme tedy novou (nemechanickou) skalární veličinou nazvanou **termodynamická teplota** T, o níž předpokládáme, že ji umíme měřit v každém místě našeho prostředí (sytému) a která je v každém místě prostředí nezáporná. Zřejmě $\mathsf{T}(\boldsymbol{X},t) = \mathsf{T}(\boldsymbol{x},t)$, neboť jde o pole skalární veličiny.

Dále uvažujme skalární veličinou zvanou ***teplo*** definovanou jako součet tepelného toku přes hranici sytému a produkce z tepelných zdrojů v systému. V materiálovém popisu označujeme **vektor tepelného toku** $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},t)$, v prostorovém $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$. **Zdroje tepla** tvoří skalární pole označované $R_q(\boldsymbol{X},t)$ a $r_q(\boldsymbol{x},t)$.

Podle tzv. Stokesovy věty předpokládáme (obdobně jako pro tenzor napětí u Cauchyovy věty), že skalární tepelný tok q_n (Q_N) je lineární funkcí vektoru vnější normály hranice systému.

Stokesova věta o tepleném toku

$$q_n(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n} \qquad q_n = -q_i n_i \qquad Q_N(\boldsymbol{X},t,\boldsymbol{N}) = -\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{N} \qquad Q_N = -Q_I N_I \tag{I.3-35}$$

Prostorový vektor $\boldsymbol{q}$ bývá nazýván ***Cauchyův vektor tepelného toku*** a ***materiálový vektor Q Piolův-Kirchhoffův***. Pro materiálový a prostorový popis navzájem samozřejmě platí:

$$\int_{\partial\Omega} q_n ds + \int_{\Omega} r_q dv = \int_{\partial\Omega(0)} Q_N dS + \int_{\Omega(0)} R_q dV \tag{I.3-36}$$

Ačkoliv předchozí definice hovoří o tepelných tocích a zdrojích, je třeba říci, že ve skutečnosti představují tyto veličiny **hustoty toků** a **hustoty produkce zdrojů**! Že jde o hustoty, je zřejmé z integrace přes plochy a objemy v (I.3-36). Pokud jde o toky q_n a Q_N není třeba asi zdůrazňovat, že představují „rychlost změny“ (čili časovou derivaci nějaké veličiny), neboť tak je tomu např. hydromechanice, mluvíme-li o (prů)toku. Fyzikálně konzistentně s tímto českým územ i r a R představují teplo generované/přeměněné v jednotce objemu za čas, čili ***produkci tepla***. Nicméně tato skutečnost nebývá vždy názvoslovím reflektována (vizte např. Holzapfel 2000, s. 162). Ve smyslu této poznámky je pak možno levou a pravou stranu rovnosti (I.3-36) interpretovat jako ***tepelný výkon***. Záporné znaménko v (I.3-35) reflektuje rozpor mezi směrem vektoru vnější normály hranice $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{N}$) a skutečností, že **tepelný tok chápeme jako kladný, vstupuje-li z okolí do systému**.

Bez důkazu uveďme, že pro převod mezi materiálovým a prostorovým vektorem tepelného toku platí (I.3-37)[10].

$$\boldsymbol{Q} = J\,\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{q} \qquad Q_I = JF_{Ii}^{-1}q_i \tag{I.3-37}$$

Zahrneme-li tepelný výkon, P_Q, do bilance energie, bude platit: $P_{\text{int}}(t) = \dfrac{DU(t)}{Dt} - P_Q(t)$.

Čili výkon vnitřních sil (napětí) je roven časové změně vnitřní energie zmenšené o tepelný výkon. To můžeme dosadit do bilance (I.3-31) a psát (I.3-38).

$$\frac{D}{Dt}T(t) + \frac{DU(t)}{Dt} = P_{ext}(t) + P_Q(t) \tag{I.3-38}$$

[10] Důkaz je možno najít v Holzapfel (2000) s. 163.

(I.3-38) je forma ***I. zákona termodynamiky* zapsaného pomocí výkonu** (změny za jednotku času) a říká, že **časová změna celkové energie** (levá strana = kinetická + vnitřní) **se musí v uzavřeném systému rovnat součtu výkonu vnějšího silového působení a tepelného výkonu.**[11]

Označíme-li prostorovou ***hustotu vnitřní energie*** $e(\boldsymbol{x},t)$, $U = \int e(\boldsymbol{x},t)dv$, můžeme I. zákon termodynamiky psát jako (I.3-39).

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}+e\right)dv = \int_{\partial\Omega(t)}\left(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}+q^{n}\right)ds+\int_{\Omega(t)}\left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+r_{q}\right)dv \tag{I.3-39}$$

Použitím Stokesovy věty o tepelném toku, divergenční věty a výkonu vnitřních sil dostaneme bilanci výkonu v jednodušší formě. To zachycují následující rovnice, (I.3-40) v prostorovém popisu a (I.3-41) v materiálovém popisu, vyjádřené v lokálním tvaru – čili bez integrace přes objem. E vyjadřuje hustotu vnitřní energie v materiálovém popisu, $e = J^{-1}E$.

$$\frac{D}{Dt}e = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d} - div\left(\boldsymbol{q}\right)+r_{q} \tag{I.3-40}$$

$$\frac{D}{Dt}E = \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}} - Div\left(\boldsymbol{Q}\right)+R_{q} \tag{I.3-41}$$

II. zákon termodynamiky. Zaveďme další termodynamickou stavovou veličinu entropii. Nebudeme se zde zabývat jejími interpretacemi, vystačíme si pouze s uvědoměním, že přestavuje veličinu řídící vratnost a nevratnost procesů. Pracovat budeme opět spíše s její hustotou, v materiálovém popisu $H(\boldsymbol{X},t)$, v prostorovém $\eta(\boldsymbol{x},t)$. Celková entropie je pak dána integrací přes objem. I pro entropii samozřejmě platí $\eta = J^{-1}H$.[12] Obdobně jako v případě tepla definujeme ***hustotu toku entropie*** ($\boldsymbol{h}$ v prostorovém a $\boldsymbol{H}$ v materiálovém popisu) přes hranici systému a ***hustotu produkce zdrojů entropie*** v systému (r_η a R_η). Připomeňme že jak tok, tak produkce jsou definovány za jednotku času.

II. zákon termodynamiky představuje bilanční nerovnici, která říká, že celková produkce entropie Γ systému, tj. rozdíl mezi časovou změnou celkové entropie a jejím přítokem do systému a produkcí uvnitř systému, je v každém okamžiku nezáporná. Toto (empirické) tvrzení lze matematicky zformulovat jako nerovnici (I.3-42).

$$\Gamma\left(t\right)=\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\eta\left(\boldsymbol{x},t\right)dv+\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x},t\right)\cdot\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{x},t\right)ds-\int_{\Omega(t)}r_{\eta}\left(\boldsymbol{x},t\right)dv\geq 0 \tag{I.3-42}$$

Procesy, při kterých platí rovnost (I.3-42) nazýváme vratné (reverzibilní). V případě nerovnosti hovoříme o nevratných (ireverzibilních) procesech.

V úlohách termoelasticity (čili bez transportu hmoty), bývá užitečné modelovat toky ($\boldsymbol{h}$,$\boldsymbol{H}$) a zdroje (r_η,R_η) entropie úměrné tokům ($\boldsymbol{q}$,$\boldsymbol{Q}$) a zdrojům (r_q,R_q) tepla podle rovnic (I.3-43).

[11] Připomeňme, že tepelný výkon je kladný, když do systému vnějšku vstupuje teplený tok.
[12] V případě H jde o majuskuli ke znaku η ze znakové sady fontu *Symbol*.

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{T}\boldsymbol{q} \qquad r_\eta = \frac{1}{T} r_q \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{T}\boldsymbol{Q} \qquad R_\eta = \frac{1}{T} R_q \tag{I.3-43}$$

Dosazením do (I.3-42) a využitím (I.40 a 1) dospějeme k vyjádření II. zákona termodynamiky, které bývá nazýváno **Clausiova–Duhemova** nerovnost (I.3-44 a 5).

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{e} + T\dot{\eta} - \frac{1}{T}\boldsymbol{q} \cdot grad(T) \geq 0 \tag{I.3-44}$$

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{E} + T\dot{H} - \frac{1}{T}\boldsymbol{Q} \cdot Grad(T) \geq 0 \tag{I.3-45}$$

Skalární součin gradientu teploty a tepelného toku normovaný teplotou, čili poslední člen na levé straně v nerovnicích (I.3-44 a 5), představuje produkci entropie danou nerovnoměrným rozložením teploty v systému (termodynamický stav) a v čase (jako termodynamický proces) odpovídá vedení tepla z míst o vyšší teplotě do míst o nižší teplotě. Jde tedy o tok proti kladnému směru gradientu teploty. Tzn. že tento člen, $\boldsymbol{q} \cdot grad(T)$, je vždy záporný.

Neuvažujeme-li vedení tepla, čili vypustíme-li zmiňovaný člen, dostaneme tvrzení známé jako **Clausiova–Planckova** nerovnost (I.3-46).

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{e} + T\dot{\eta} \geq 0 \qquad \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{E} + T\dot{H} \geq 0 \tag{I.3-46}$$

Levou stranu těchto nerovností často označujeme jako lokální produkci entropie nebo jako ***vnitřní disipaci*** D_{int}.

Na závěr zavedeme termodynamickou veličinu, která hraje klíčovou roli v konstitutivním modelování materiálů, vstupují-li do hry termodynamické děje. **Jde o termodynamické zobecnění deformační energie** W z oblasti elasticity, které nazýváme ***volná*** **(též *Helmholtzova*)** ***energie*** ψ. Volnou energii definujeme jako rozdíl mezi vnitřní energií a součinem termodynamické teploty a entropie (I.3-47 jakožto hustota).

$$\psi = E - TH \tag{I.3-47}$$

Pomocí volné energie píšeme disipaci (Clausiovu–Planckovou nerovnost) jako (I.3-48).

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\psi} - \dot{T}H \geq 0 \tag{I.3-48}$$

ZDROJE

Holzapfel G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley and Sons, Chichester.

Marsden J.E., Hughes T.J.R. (1994) Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, New York. http://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf

Maršík F. (1999) *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha.

Ogden R.W. (1997) *Nonlinear elastic deformations*. Dover Publications, Mineaola.

Šilhavý M. (1997) *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer, Berlin.

SHRNUTÍ

Pro mechanické veličiny *hmotnost*, *hybnost*, *moment hybnosti* a *energie* lze podle typu systému (izolovaný – nevyměňuje ani hmotu ani energie, uzavřený – vyměňuje energie, otevřený – vyměňuje s okolím hmotu a energie) sestavit rovnice popisující bilanci těchto veličin. Obecně se vždy skládají z produkce uvnitř systému a toku přes hranici systému – platí pro uzavřený a otevřený systém. V izolovaném systému se pak tyto veličiny v čase zachovávají.

Bilance hmotnosti (rovnice kontinuity)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+grad(\rho)\cdot \boldsymbol{v}+\rho div(\boldsymbol{v})=0 \qquad \frac{\partial \rho_0}{\partial t}=0$$

Bilance hybnosti (rovnice rovnováhy)

$$div(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{b}=\rho\dot{\boldsymbol{v}} \qquad Div(\mathbf{P})+\boldsymbol{B}=\rho_0\dot{\boldsymbol{V}}$$

Bilance momentu hybnosti (symetrie tenzorů napětí)

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^T$$

Bilance mechanické energie

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}dv+\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\,dv=\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}ds+\int_{\Omega(t)}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}dv$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(0)}\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}dV+\int_{\Omega(0)}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}\,dV=\int_{\partial\Omega(0)}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}dS+\int_{\Omega(0)}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{V}dV$$

Při rozšíření na termodynamiku píšeme v lokální formě pomocí vnitřní energie výkonovou bilanci (I. zákon termodynamiky) jako:

$$\frac{D}{Dt}e=\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}-div(\boldsymbol{q})+r_q \qquad \frac{D}{Dt}E=\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-Div(\boldsymbol{Q})+R_q$$

II. zákon termodynamiky v obecné podobě

$$\Gamma(t)=\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(t)}\eta dv+\int_{\partial\Omega(t)}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}ds-\int_{\Omega(t)}r_\eta dv=\frac{D}{Dt}\int_{\Omega(0)}HdV+\int_{\partial\Omega(0)}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{N}dS-\int_{\Omega(0)}R_\eta dV=\geq 0$$

Nebo ve speciálních tvarech

Clausiova–Duhemova nerovnost

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}-\dot{e}+T\dot{\eta}-\frac{1}{T}\boldsymbol{q}\cdot grad(T)\geq 0 \qquad \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{E}+T\dot{H}-\frac{1}{T}\boldsymbol{Q}\cdot Grad(T)\geq 0$$

Clausiova–Planckova nerovnost

$$\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}-\dot{e}+T\dot{\eta}\geq 0 \qquad \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{E}+T\dot{H}\geq 0$$

II. KONSTITUTIVNÍ TEORIE

II.1 OBECNÉ POZNÁMKY

Po výkladu popisu mechanických dějů nyní **přejdeme k výkladu mechanických vlastností materiálu**. Tato partie bývá nazývána různě v závislosti na tom, v jaké komunitě se autor pohybuje. Takže je možné setkat se s termíny: konstitutivní modelování, reologie, materiálové vlastnosti… V každém případě se jedná o formulaci vzájemných závislostí mezi veličinami popisujícími stav materiálu/prostředí. **V případě pružných (elastických) materiálů jde o tenzory deformace a napětí**, v případě vazkopružných (**viskoelastických**) materiálů jde o vztah mezi **tenzorem deformace nebo rychlosti deformace** – s možností uvažovat i závislost na čase skrze **historie deformace** a historie rychlosti deformace – a **tenzory napětí popřípadě rychlosti napětí**. V termodynamickém rozšíření je možno matematizovat relaci mezi deformací, rychlostí deformace, jejich historií a teplotou vůči napětí. **Tyto relace mají většinou formu rovnic, které pak nazýváme konstitutivní rovnice**. **Vystupují v nich parametry, které ovšem mohou mít formu funkcí stavových proměnných, jenž je nutno určit experimentálně. Nikdy v nich nevystupují veličiny vyjadřující příčiny stavů (sílová působení apod.), vždy jen stavové proměnné.** Kdyby tomu bylo naopak, nejednalo by se o popis vlastností materiálu, ale o popis interakce materiálu s vnějším okolím, který ale zajišťují bilanční rovnice (s okrajovými podmínkami).

Kromě konstitutivních rovnic existuje celá řada **konstitutivních nerovnic**. Ty většinou matematizují naše očekávání, která jsou příliš slabá na to, aby tvořila základ matematického popisu materiálové odezvy, na druhou stranu mají racionální fundament. Příkladem může být např. očekávání, že hydrostatická tlaková napjatost vede ke zmenšení objemu a hydrostatická tahová napjatost k jeho zvětšení, nebo že tahové napětí musí být doprovázeno kladným poměrným prodloužením. Dalším příkladem může být tvrzení, že tenzor tuhosti má být pozitivně definitní – jinak by totiž nebyla zaručena existence a jednoznačnost řešení vlnových problémů infinitesimální teorie.

Protože konstitutivní rovnice vyjadřují vztahy mezi stavovými proměnnými, bývají někdy nazývány **stavovými rovnicemi**.

Konstitutivní rovnice, ve své podstatě, zajišťují řešitelnost matematických úloh[1] mechaniky kontinua. V nich se hledají neznámé funkce, které splňují rovnice bilance a konkrétní počáteční a okrajové podmínky. Počet rovnic je ale menší než počet neznámých funkcí. Je tedy třeba zavést další rovnice, které zajišťují vazbu mezi stavovými veličinami, aby byly úlohy mechaniky vůbec smysluplné.

Bylo by skvělé, kdybychom mohli zformulovat takový popis materiálu, který bude univerzální pro skutečně všechny možné situace, které materiál může zažít, čili pro všechny jeho možné stavy. Realita je ale taková, že nelinearity a disipace energie způsobují tak významné komplikace pro prediktivní schopnosti modelů, že validita extrapolací mimo oblast fázového prostoru, kde byl model experimentálně charakterizován, bývá omezená.

[1] Okrajových a okrajově-počátečních úloh pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic plynoucích z bilančních rovnic.

Formulace konstitutivních rovnic je založena na matematickém vyjádření předpokladů, které vystihují očekávané (resp. experimentálně pozorované) vlastnosti materiálu/prostředí. Někdy o nich hovoříme jako o axiomech konstitutivní teorie[2] nebo jako o principech.

II.2 Předpoklady konstitutivní teorie

I. Princip kauzality
II. Princip determinismu
III. Princip ekvipresence
IV. Princip lokality
V. Princip objektivity
VI. Princip přípustnosti
VII. Princip paměti

Princip příčinnosti respektujeme při sestavování konstitutivních rovnic tím, že vůbec očekáváme jejich vzájemnou vazbu. Čili mění-li se např. stav deformace, očekáváme i změnu stavu napjatosti, nevydedukuje-li ovšem z jiných principů, že nastat nemůže.

Princip determinismu vyjadřuje předpoklad, že závislé stavové proměnné v konstitutivních rovnicích jsou určeny **historií (až do současnosti včetně) nezávislých stavových proměnných**. Historií se míní průběh termodynamických procesů, které materiál/prostředí zažívá, zažíval/o. Například viskoelastické materiály, které jsou z podstaty nekonzervativní – disipují energii během procesu deformace –, vykazují závislost na historii deformace, neboť disipovaná energie je závislá nejen na počátečním a koncovém stavu materiálu ale i na cestě[3], kterou materiál procházel mezi těmito stavy.

Princip ekvipresence znamená **počáteční rovnocennost všech stavových proměnných**. Tj. konstitutivní model (rovnici) navrhujeme jako relace pro všechny stavové proměnné, dokud dodatečnými předpoklady nevyloučíme možnost, že na některých proměnných model nezávisí. Dodatečné předpoklady samozřejmě činíme v závislosti na pozorování.

---

[2] V minulosti se někteří autoři pokusili o axiomatizaci mechaniky a konstitutivní teorie po vzoru teorie množin, aritmetiky nebo třeba eukleidovské geometrie. Pozoruhodné na tom je, že to bylo autoři, které rozhodně lze charakterizovat spíše jako matematiky než inženýry, a tak si jistě byli vědomi skutečnosti, že jejich snažení má pouze omezené šance na úspěch. Tyto snahy byly pravděpodobně vedeny šestým z Hilbertových problémů přednesených na druhém matematickém kongresu v Paříži roku 1900. David Hilbert, jeden z nejvěhlasnější matematiků všech dob, tehdy formuloval dvacet tři problémů, na které by se matematici měli ve dvacátém století zaměřit (dokonce se domníval, že budou vyřešeny ještě během jeho života). Nestalo se. Velká část byla vyřešena, část ztratila smysl. Některé ale zůstávají nevyřešeny. Šestý z nich říká: Axiomatizujme fyziku. Zajímavé na tom je, že kdyby se to povedlo, stejně by to neznamenalo, že fyziků již není zapotřebí, neboť takto utvořený deduktivní systém by zřejmě nebyl úplný (nebylo by možno dokázat všechny pravdivé věty teorie pomocí teorie). A tak by zůstal prostor pro pozorování. Naštěstí je materiální svět rozmanitější (a to i v disciplíně zabývající se pohybem), než se v roce 1900 asi zdálo.

[3] Míní se samozřejmě cesta ve fázovém prostoru stavových proměnných. Historií nějaké stavové veličiny $s(t)$ se míní právě tato cesta, nebo-li trajektorie ve fázovém prosotoru.

Princip lokality říká, že chování materiálu v libovolném pevně zvoleném bodě nezávisí významně na hodnotách nezávislých stavových proměnných mimo okolí[4] tohoto bodu.

Princip objektivity říká, že chování materiálu nezávisí na změně pozorovatele, čili že je indiferentní vůči vztažné soustavě[5], ve které materiál pozorujeme. Tento předpoklad má fundamentální a velmi praktické důsledky, které nyní zformulujeme. Dopad je dvojího druhu. Zaprvé na použité veličiny, čili stavové proměnné vhodné k formulaci konstitutivních rovnic; zadruhé na samu formu konstitutivních rovnic.

Objektivní veličiny. **Jako objektivní nazveme takové veličiny, které budou respektovat transformační vztahy pro daný typ veličin (skalárů, vektorů a tenzorů).** V celém následujícím výkladu budeme považovat všechny rychlosti za malé ve srovnání s rychlostí světla.

Uvažujme dva pozorovatele, které ztotožníme s polohou počátků O a Ô souřadnicových soustav na obrázku II-1. Počátek vztažné soustavy O se (časově proměnlivě) posouvá vzhledem k Ô o polohový vektor $\boldsymbol{c}$ a těleso, ve kterém je modrý souřadný systém O zafixován, zároveň z pohledu Ô (časově proměnlivě) rotuje, což je vyjádřeno maticí vlastní ortogonální transformace $\mathbf{Q}$. Oba pozorovatelé vidí úsečku *PQ* definovanou jako $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ pro O a současně $\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}_0$ pro Ô.

Vektorové fyzikální veličiny považujeme za objektivní, jestliže je při přechodu od vztažné soustavy O k Ô transformujeme podle pravidla (II.1). Zde $\boldsymbol{u}$ a $\hat{\boldsymbol{u}}$ jsou vektory vyjádřené ve vztažných systémech **O** a **Ô** a $\mathbf{A}$ je matice lineární transformace[6].

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{u} \tag{II.1}$$

Dokažme, že polohové vektory zaměřující body v tělese jsou objektivní. Tzn. musíme ukázat, že vektor *PQ* na obrázku II.1 zaměřený z O se do Ô bude transformovat podle (II.1). Jde tedy o to, aby platilo (II.2).

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}_0 = \mathbf{A}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right) \tag{II.2}$$

Uvážíme-li situaci na obrázku II.1, pro libovolný polohový vektor zřejmě platí (II.3). Transformace typu (II.3) nazýváme **eukleidovské**.

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \tag{II.3}$$

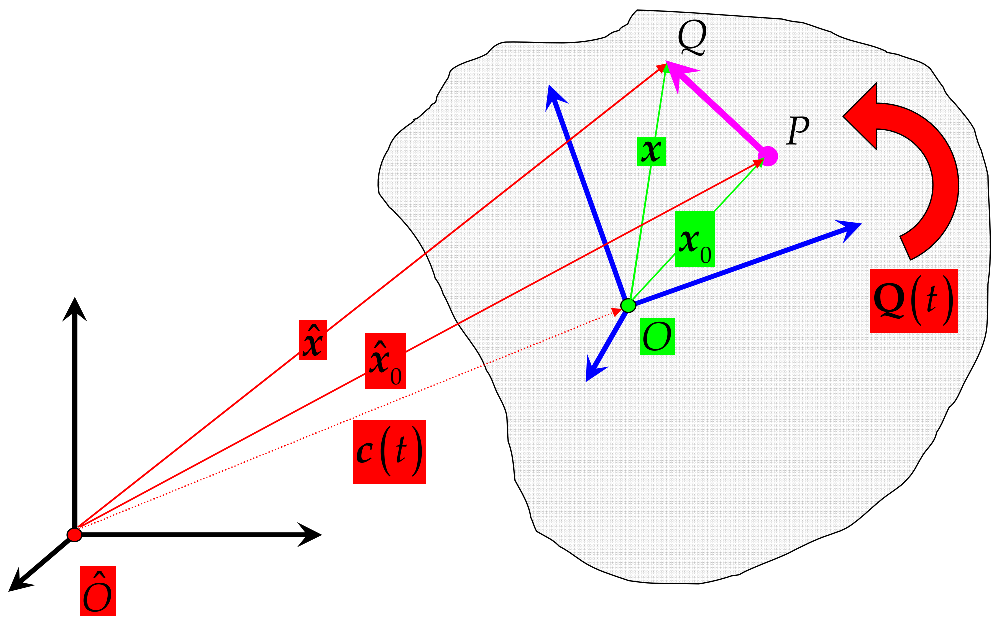
---

[4] Má se namysli okolí ve smyslu matematické analýzy, které jsme použili při definic deformace. Okolí bodu $\boldsymbol{X}$ tedy tvoří body $\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$. Připomeňte si obrázek 3 v kapitole I Kinematika. Kdybychom se tedy chtěli zabývat materiály s nelokální odezvou, museli bychom buď zcela přeformulovat definici deformace tak, aby tenzory deformace „věděly" o chování mimo toto okolí, anebo bychom museli přeformulovat závislost na materiálové souřadnici již v geometrických úvahách. Jak ale uvidíme dále, existuje i jiný způsob, jak nelokální vlastnosti mohou ovlivnit materiálovou odezvu v bodě. A sice pomocí neurčitého Lagrangeova multiplikátoru v teorii nestlačitelného materiálu.

[5] V angličtině se ujal termín *Principle of Material Frame Indifference* (čili že „materiál je sosutavově indiferentní"). Tento termín vymysleli C. Truesdell a W. Noll, kteří se v padesátých letech 20. století intenzivně zabývali studiem důsledků požadavku objektivity. Autor tohoto textu si na tento termín stále ne a ne zvyknout. Připadá mu jako umělá konstrukce. Ve známé knize, *Non-linear Field Theories of Mehcanics*, zmiňovaných autorů se lze dočíst, proč se jednoduše nepodrželi termínu *objektivita*. Ve zkratce, byly znechuceni tehdejší diskuzí o roli *objektivity* ve společenských vědách, která podle nich vedla k inflaci jazykového úzu tohoto slova. Ještě dodejme, že změna vztažné soustavy, čili pozorovatele, není totéž jako změna soustavy souřadnic!

[6] Všechny veličiny studované v této kapitole jsou samozřejmě funkcemi času. Tento argument bude ale velice často vynechávat.

Když rozepíšeme levou stranu (II.2) pomocí (II.3) dostáváme: $\hat{x} - \hat{x}_0 = \mathbf{Q}x + c - \mathbf{Q}x_0 - c = \mathbf{Q}(x - x_0)$. Což je zřejmě tvrzení, které jsme chtěli dokázat. Zjistili jsme, že transformační matice je právě **Q**, čili matice ortogonální transformace popisující rotaci O vzhledem k Ô. Takže vektor *PQ* se jeví objektivně vzhledem ke vztažným soustavám.



Obrázek II.1 Transformace mezi vztažnými soustavami. Soustava O pevně spojená s tělesem, které se od Ô vzdálilo o $c(t) = \hat{x}_0 - \mathbf{Q}(t)x_0$ a rotuje vzhledem k Ô podle **Q**(*t*). Kromě relativního ohybu uvažujeme ještě časový posun mezi vztažnými soustavami definovaný jako rozdíl na časomírách Ô a O $\alpha = \hat{t}_0 - t_0$ pro jednu současnou událost. Tento rozdíl zaznamenáme v soustavě spojené se stálicemi.

Skalární veličiny považujeme za objektivní, jestliže se při změně pozorovatele nezmění. Toto tvrzení odpovídá naší intuitivní představě, že např. teplota nebude transformací (II.3) vůbec dotčena. Ukažme si, jak je to s délkovými a úhlovými měrami pro polohu vektorů. Takže: změní se délka vektoru *PQ*, budeme-li ji pozorovat v O nebo Ô?

Vyjděme z její druhé mocniny $|PQ|^2$ viděné ve vztažné soustavě Ô. Platí: $|PQ|^2 = (\hat{x} - \hat{x}_0)\cdot(\hat{x} - \hat{x}_0) = \mathbf{Q}(x - x_0)\cdot(\mathbf{Q}(x - x_0)) = ((x - x_0)\mathbf{Q}^T)(\mathbf{Q}(x - x_0)) = (x - x_0)\cdot((\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})(x - x_0)) = (x - x_0)\cdot(\mathbf{I}(x - x_0)) = (x - x_0)\cdot(x - x_0) = |PQ|^2$.[7] **Takže ve vztažné soustavě O je viděn vektor** ***PQ*** **o stejné délce jako v Ô. Obdobný výsledek bychom dostali i pro úhel svíraný libovolnými dvěma vektory, které jsou zafixovány v O.** Opět bychom vyšli ze skalárního součinu, který vystupuje ve vzorci pro kosinus odchylky dvou vektorů. Jde o přímý důsledek objektivnosti polohových vektorů.

[7] Při dokazování jsme využili vlastnosti ortogonálních transformací, pro které platí: $\mathbf{Q}(t)^T\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}$, tj. $\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{Q}(t)^{-1}$. Pro všechny ortogonální transformace platí $det(\mathbf{Q}) = \pm 1$; ortogonální transformaci nazýváme vlastní, když $det(\mathbf{Q}) = 1$.

To, co platí pro polohové vektory, neplatí pro rychlosti. Dokažme to. Uvědomme si ale při tom, že nám jde o prostorovou rychlost podle pravidla (II.4).[8]

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t} \qquad \hat{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{t}) = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} \tag{II.4}$$

Kde časová souřadnice $\hat{t}$ zohledňuje je časový posun α mezi pozorovateli O a Ô, $\hat{t} = t + \alpha$.

Derivováním (II.3), $\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{t}) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}(t)$, dostaneme výraz (II.5).

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{t}) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\boldsymbol{x}(t) + \dot{\boldsymbol{c}}(t) \tag{II.5}$$

Zjevně tedy neodpovídá požadavku (II.1), a tak prostorové pole rychlosti $\boldsymbol{v}$ není objektivní veličinou. Výraz (II.5) můžeme ještě upravit dále pomocí $\boldsymbol{x} = \mathbf{Q}^T(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c})$, což jiná forma (II.3), na formu, která pozorovateli Ô umožní nemuset zjišťovat vektor $\boldsymbol{x}$: $\hat{\boldsymbol{v}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{v} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}) + \dot{\boldsymbol{c}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{v} + \mathbf{\Omega}(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}) + \dot{\boldsymbol{c}}$. Zde $\mathbf{\Omega}$ představuje antisymetrický tenzor odpovídající axiálnímu vektoru rychlosti rotace (úhlové rychlosti) soustavy O vzhledem k Ô.[9]

Bez důkazu uveďme, že **pro zrychlení bychom taktéž zjistili neobjektivnost**, neboť se transformuje podle vztahu (II.6).[10]

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{a} + \ddot{\boldsymbol{c}} + \left(\dot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Omega}^2\right)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}) + 2\mathbf{\Omega}(\hat{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{c}}) \tag{II.6}$$

Jestliže by platilo $\ddot{\boldsymbol{c}} + (\dot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Omega}^2)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c}) + 2\mathbf{\Omega}(\hat{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{c}}) = 0$, pak by zrychlení bylo objektivní. Znamenalo by to, že se přechod od pozorovatele O k Ô probíhá podle pravidla $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t)$, kde $\mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}(t)$ (tj. $\dot{\mathbf{Q}}(t) = 0$) a současně $\ddot{\boldsymbol{c}} = 0$ (tj. $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{c}_0$, kde $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{c}_0$ jsou na čase nezávislé). Změna vztažné soustavy probíhající za těchto podmínek je nazývána ***galileovská transformace***.

O tenzoru n-tého řádu $\mathbf{T} = \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{u}_2 \otimes .. \otimes \boldsymbol{u}_n$ říkáme, že je objektivní, jestliže se při změně pozorovatele z O na Ô T transformuje na $\hat{\mathbf{T}}$ podle pravidla (II.7).

$$\hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_1) \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_2) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_n) \tag{II.7}$$

V nejčastějším případě tenzoru druhého řádu to znamená (II.8).

$$\hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_1) \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_2) = (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_1) \otimes (\boldsymbol{u}_2 \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{u}_2)\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \tag{II.8}$$

---

[8] Abychom dospěli k rychlosti, používáme všude tzv. materiálovou časovou derivaci D/Dt vyloženou v kapitole Kinematika (I.1-3). K vyznačení budeme většinou ale používat tečku nad symbolem, čili pro libovolnou veličinu g platí: $Dg/Dt = \dot{g}$.

[9] Platí $\mathbf{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^T = -\mathbf{\Omega}(t)^T$. A také: $\mathbf{\Omega}(t)^2 = -\dot{\mathbf{Q}}(t)\dot{\mathbf{Q}}^T(t)$.

[10] Důkaz je možno najít např. v Holzapfel (2000) na s. 184, nebo na internetu http://en.wikipedia.org/wiki/Objectivity_%28frame_invariance%29 . Člen $\dot{\mathbf{\Omega}}(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c})$ v rovnic (II.6) nazýváme Eulerovo zrychlení, $-\mathbf{\Omega}^2(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{c})$ představuje dostředivé zrychelní a $2\mathbf{\Omega}(\hat{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{c}})$ nazýváme Coriolisovo zrychlení.

V rovnicích (II.7) a (II.8) jsme pro jednoduchost zápisu opět vynechali vyznačení argumentů funkcí, mějme ale stále namysli, že $\mathbf{Q}(t)$ a $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$.

Nyní se podívejme, jak je to s objektivitou v předchozích kapitolách odvozených měr deformace, její rychlosti a napětí.

Začněme s deformačním gradientem **F**. Pamatujeme si, že jde o zvláštní případ tenzoru, který je definován nad dvěma konfiguracemi, F_{iK}. Podle (I.1-4) platí $\mathbf{F} = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{X}$ je polohový vektor v nějaké pevně zvolené referenční konfiguraci. A právě slovo *pevně* je klíčové. V takovém případě totiž platí $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}$ a tato relace je nezávislá na čase. $\boldsymbol{X}$ je *zmraženo v čase*, tudíž inertní vůči vzájemnému pohybu soustav. Dva pozorovatelé O a Ô tedy vidí deformační gradient **F** a $\hat{\mathbf{F}}$ podle pravidel: $\hat{\mathbf{F}} = \partial\hat{\boldsymbol{x}}/\partial\boldsymbol{X}$ a $\mathbf{F} = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$. Protože pro $\hat{\boldsymbol{x}}$ platí (II.1) dostáváme (II.9).

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{X}} = \mathbf{Q}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{X}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{F} \qquad \hat{F}_{iK} = \frac{\partial\hat{x}_i}{\partial\mathbf{X}_K} = Q_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial\mathbf{X}_K} = Q_{ij}F_{jK} \tag{II.9}$$

Deformační gradient, jakožto tenzor druhého řádu, se při přechodu od O k Ô ve své zmražené (materiálové) složce vůbec netransformuje a v prostorové složce se transformuje jako objektivní vektor. Z toho usuzujeme, že **F je objektivní**. Jde o to, že rovnici (II.8) jsme vlastně splnili, neboť ta se v této situaci redukuje na nutnost transformovat pouze část vyplývající z prostorové (zdeformované) konfigurace.

Zjevným **důsledkem objektivnosti F** jsou následující relace pro **poměrnou změnu objemu** J, **pravý Cuachyův–Greenův tenzor deformace C**, **pravý tenzor strečů U**, **tenzor rotace R** vystupující v polárním rozkladu **F** = **RU** = **vR** (**R** je opět dvoubodový tenzor jako **F**)[11], **levý tenzor strečů v** a **levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace b**, které ukazují, že **jde o objektivní veličiny**.

$$\hat{J} = det\left(\hat{\mathbf{F}}\right) = det\left(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\right) = det\left(\mathbf{Q}\right)det\left(\mathbf{F}\right) = 1J = J \tag{II.10}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \left(\hat{\mathbf{F}}\right)^T \hat{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\right)^T \mathbf{Q}\,\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{I}\,\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{F} = \mathbf{C} \tag{II.11}$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \sqrt{\hat{\mathbf{C}}} = \sqrt{\mathbf{C}} = \mathbf{U} \tag{II.12}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{F}}\left(\hat{\mathbf{U}}\right)^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{R} \tag{II.13}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{F}}\left(\hat{\mathbf{F}}\right)^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\right)^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}\,\mathbf{F}^T\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{b}\,\mathbf{Q}^T \tag{II.14}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{F}}\left(\hat{\mathbf{R}}\right)^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}\,\mathbf{R}\right)^{-1} = \mathbf{Q}\,\mathbf{F}\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{v}\,\mathbf{Q}^T \tag{II.15}$$

Pro tenzory deformace **E**, **e** a ln**U** a ln**v** bychom dospěli k témuž závěru. Přejděme nyní k tenzorům napětí. Ukážeme že **první Piolovo–Krichhoffovo napětí P** a **Cuachyovo napětí** $\boldsymbol{\sigma}$ **jsou objektivní** tenzory. Totéž samozřejmě platí pro **druhé Piolovo–Kirchhoffovo napětí S**, které je ale vyjádřeno v materiálovém popisu (v referenční konfiguraci) a již by mělo být zjevné, že je objektivní ze své podstaty.

---

[11] **F** je dvoubodové právě dík **R**; je to **R**, které zprostředkovává vazbu mezi konfiguracemi, neboť platí: $F_{iK} = v_{ij}R_{jK} = R_{iL}U_{LK}$.

Vyjděme z představy, že (a) vektor plošné intenzity vnitřních sil $\boldsymbol{t}$ je objektivní, a (2) objektivní je i vektor vnější normály $\boldsymbol{n}$. První přijímáme proto, že $\boldsymbol{t}$ je zaveden nezávisle na pohybu. Druhé je důsledek objektivity polohových vektorů. Platí tedy: $\hat{\boldsymbol{t}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{t}$ a $\hat{\boldsymbol{n}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{n}$.

Pak podle vztahu (I.2-2), $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma n}$, bude plošná intenzita vnitřních sil v prostorové konfiguraci pro pozorovatele Ô $\hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}}$. Když nyní dosadíme transformovanou intenzitu a normálový vektor pozorovatele O, dostáváme: $\hat{\boldsymbol{t}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{n}} \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma n} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma n} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{Q} \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$.[12]

Objektivnost tenzoru $\mathbf{P}$ si uvědomíme, když si vzpomeneme na jeho relaci k tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$, (I.2-5) $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$. Takže můžeme psát (II.16).

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{J}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\mathbf{F}}^{-T} = J\,\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T(\mathbf{QF})^{-T} = J\,\mathbf{Q}\,J^{-1}\,\mathbf{P}\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T(\mathbf{QF})^{-T} = JJ^{-1}\,\mathbf{QP}(\mathbf{QF})^T(\mathbf{QF})^{-T} = \mathbf{QP} \tag{II.16}$$

Největší potíž je samozřejmě s objektivitou rychlostí. A to ani ne toliko rychlostí deformace, jako s časovými derivacemi napětí.

Ukážeme, že **prostorový gradient rychlosti l = ∂*v*/∂*x* objektivním tenzorem není** a naopak že jeho symetrická část, **prostorový tenzor rychlosti deformace d = ½(l + l^T), objektivní je**.[13]

Pro důkaz neobjektivnosti $\mathbf{l}$ využijeme vlastnost (I.1-27) $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ a součinového pravidla pro derivování. Mějme tedy $\hat{\mathbf{l}}$ viděné pozorovatelem Ô a $\mathbf{l}$ viděné O.

$$\hat{\mathbf{l}} = \dot{\hat{\mathbf{F}}}\hat{\mathbf{F}}^{-1} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{QF})(\mathbf{QF})^{-1} = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^{-1} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T \tag{II.17}$$

Zřejmě tedy $\hat{\mathbf{l}} \neq \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T$, jak by vyžadovala objektivnost. Naopak ale platí (II.18), takže $\mathbf{d}$ objektivní je.

$$2\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{l}}^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T)^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + \boldsymbol{\Omega}^T + (\mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T)^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{Q}^T)^T(\mathbf{Q}\mathbf{l})^T =$$
$$= \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{l}^T\mathbf{Q}^T \tag{II.18}$$

Při dokazování jsme využili vlastnosti $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^T = -\boldsymbol{\Omega}(t)^T$ z poznámky 7 a asociativnosti transpozice. Podobně jako není objektivní $\mathbf{l}$, lze ukázat že objektivní není ani jeho antisymetrická část nazývaná tenzor spinu (rychlosti úhlové rotace) I.1-26. O tom ale až později.

Materiálové rychlosti deformace $\dot{\mathbf{E}}$ a $\dot{\mathbf{C}}$ jsou samozřejmě objektivní. Ukažme, jak se to má s $\dot{\mathbf{E}}$ definovaným v (I.1-28) jako $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T\mathbf{dF}$. Přímým důsledkem je objektivita $\dot{\mathbf{C}}$, protože $\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}}$.

$$\dot{\hat{\mathbf{E}}} = \hat{\mathbf{F}}^T\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{F}} = (\mathbf{QF})^T\mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^T\mathbf{QF} = \mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{d}\mathbf{Q}^T\mathbf{QF} = \mathbf{F}^T\mathbf{I}\mathbf{d}\mathbf{I}\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{dF} \tag{II.19}$$

[12] Během dokazování jsme využili vlastnosti $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

[13] Jde o tenzory zavedené v rovnicích (I.1-25) a (I.1-26) v kapitole Kinematika.

Objektivní rychlost (objektivní materiálová derivace podle času). Celá potíž s objektivností materiálových derivací při přechodu mezi dvěma pozorovateli spočívá v tom, že při provádění derivace výrazů (II.1) a (II.8) musíme na pravé straně použít pravidlo součinu.

$$\dot{\hat{u}} = \dot{\mathbf{Q}}\,u + \mathbf{Q}\,\dot{u} \qquad \dot{\hat{\mathrm{T}}} = \dot{\mathbf{Q}}\,\mathbf{T}\,\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\,\dot{\mathbf{T}}\,\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\,\mathbf{T}\,\dot{\mathbf{Q}}^T \tag{II.20}$$

Výsledek neodpovídá transformačním pravidlům objektivních veličin: $\hat{a} = \mathbf{Q}\,a$, $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Q}^T$. **Nyní popíšeme způsob konstrukce veličiny, která (1) bude vyjadřovat časovou změnu a (2) bude objektivní. Takových konstrukcí bylo ovšem vymyšleno od začátku 20. století několik.**

Vyjdeme z výrazů (II.20) a budeme hledat, zda v nich není nějaká část, kterou by bylo možno přepsat do formy pro objektivní transformaci veličin.

Nejprve ale dovoďme způsob transformace **tenzoru spinu w** (úhlové deformační rychlosti), čili antisymetrické části prostorového gradientu rychlosti **l** (**w** = ½(**l** – **l**^{T}))[14].

$$\begin{aligned} 2\,\hat{\mathbf{w}} &= \hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{l}}^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \left(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T\right)^T = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \boldsymbol{\Omega}^T - \left(\mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T\right)^T = 2\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \left(\mathbf{Q}^T\right)^T\left(\mathbf{Q}\mathbf{l}\right)^T = \\ &= 2\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{l}^T\mathbf{Q}^T = 2\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\left(\mathbf{l} - 2\,\mathbf{w}\right)\mathbf{Q}^T = 2\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{l}\mathbf{Q}^T + 2\,\mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T = \\ &= 2\boldsymbol{\Omega} + 2\,\mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T \Leftrightarrow \hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T \end{aligned} \tag{II.21}$$

Ve výrazech (II.20) figuruje $\dot{\mathbf{Q}}$. Pokusíme se ho vyjádřit právě pomocí (II.21) Vynásobíme-li zprava finální výraz $\hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T$ pomocí $\mathbf{Q}$ a užijeme-li vlastnosti $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$, dostaneme $\hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\,\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\,\mathbf{w} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}\,\mathbf{w} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\,\mathbf{w}$. Transpozicí a uvědoměním antisymetričnosti, **w** = - **w**^{T}, získáme také výraz pro derivaci **Q**^{T}. Obojí je shrnuto v (II.22).

$$\dot{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\,\mathbf{w} \qquad \dot{\mathbf{Q}}^T = -\mathbf{Q}^T\,\hat{\mathbf{w}} + \mathbf{w}\,\mathbf{Q}^T \tag{II.22}$$

A nyní přichází slíbená konstrukce objektivní veličiny. Dosaďme do $\dot{\hat{u}} = \dot{\mathbf{Q}}\,u + \mathbf{Q}\,\dot{u}$ z (II.22a).

$\dot{\hat{u}} = \dot{\mathbf{Q}}\,u + \mathbf{Q}\,\dot{u} \Leftrightarrow \dot{\hat{u}} = \left(\hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\right)u + \mathbf{Q}\,\dot{u} \Leftrightarrow \dot{\hat{u}} = \hat{\mathbf{w}}\,\mathbf{Q}\,u - \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,u + \mathbf{Q}\,\dot{u} \Leftrightarrow \dot{\hat{u}} = \hat{\mathbf{w}}\,\hat{u} - \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,u + \mathbf{Q}\,\dot{u}$ a odtud se již dostaneme k finálnímu výrazu pro objektivní vektor obsahující časovou derivaci (II.23).

$$\dot{\hat{u}} - \hat{\mathbf{w}}\,\hat{u} = \mathbf{Q}\,\dot{u} - \mathbf{Q}\,\mathbf{w}\,u \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\hat{u}} - \hat{\mathbf{w}}\,\hat{u} = \mathbf{Q}\left(\dot{u} - \mathbf{w}\,u\right) \tag{II.23}$$

Slibovaná objektivní vektorová veličina obsahující materiálovou derivaci podle času, čili objektivní rychlost vektoru *u*, **má tvar:** $\dot{u} - \mathbf{w}\,u$. **Bývá nazývána, kvůli výskytu tenzoru spinu, *ko-rotační rychlost*** (II.24).

$$Co - rot\left(u\right) = \dot{u} - \mathbf{w}\,u \tag{II.24}$$

[14] Tenzor spinu byl zaveden v kapitole Kinematika vy výraze (I.1-26). Pozor na změnu značení. Nyní je označen **w**, protože symbol **Ω** je použit pro výraz $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}(t)^T = -\boldsymbol{\Omega}(t)^T$. Symbol podle (I.1-26) odpovídá nomenklatuře použité v Taber (2003). Na druhou stranu použití w odpovídá Holzapfel (2000), ke kterému se autor v budoucích úpravách kapitoly I uchýlí. Prozatím tedy promiňte tuto nekonzistenci. Ještě jednou, tenzor spinu **w** = ½(**l** – **l**^{T}).

Aplikací stejného postupu na $\dot{\hat{\mathbf{T}}} = \dot{\mathbf{Q}}\,\mathbf{T}\,\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\,\dot{\mathbf{T}}\,\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\,\mathbf{T}\,\dot{\mathbf{Q}}^T$ (čili substitucí $\dot{\mathbf{Q}}$ a $\dot{\mathbf{Q}}^T$ z (II.22)) dospějeme k tzv. **Jaumannově–Zarembově rychlosti tenzoru druhého řádu** *Jaumann*(**T**) (II.25), která splňuje podmínku objektivity $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{T}\,\mathbf{Q}^T$.[15]

$$Jaumann(\mathbf{T}) = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{w}\,\mathbf{T} + \mathbf{T}\,\mathbf{w} \tag{II.25}$$

Dalším způsobem jak zkonstruovat objektivní vektory a tenzory obsahující časovou derivaci je tzv. ***convected rate***. Toto je originální termín používaný v angličtině. Znamená tedy že tažená/vedená… Jiný používaný termín je **Cotterova–Rivlinova rychlost** a pro vektory a tenzory druhého řádu je definována pomocí (II.26)[16].

$$Cott-Riv(\boldsymbol{u}) = \dot{\boldsymbol{u}} + \mathbf{l}^T\,\boldsymbol{u} \qquad\qquad Cott-Riv(\mathbf{T}) = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{l}^T\,\mathbf{T} + \mathbf{T}\,\mathbf{l} \tag{II.26}$$

Všechny takto zkonstruované rychlosti tenzorů druhého řádu lze aplikovat na tenzory napětí a získat tak **objektivní tenzory rychlosti napětí**. Kromě výše zmíněných bývají pro Cuachyův tenzor napětí často definovány tzv. **Oldroydova** *Oldr*($\boldsymbol{\sigma}$), **Greenova–Naghdiho** *GN*($\boldsymbol{\sigma}$) a **Truesdellova** *Trues*($\boldsymbol{\sigma}$) rychlost napětí.[17]

$$Oldr(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}\,\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l}^T \quad GN(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\,\dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T \quad Trues(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l}\,\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l}^T + \boldsymbol{\sigma}\,tr(\mathbf{d}) \tag{II.27}$$

Ukázali jsme, které mechanické veličiny, s nimiž jsme se dosud seznámili, lze považovat za objektivní, a tudíž jsou vhodné pro konstrukci konstitutivních rovnic. Princip objektivity má samozřejmě své důsledky i pro samotný návrh, samu matematickou formu, konstitutivních rovnic. O tom se ale zmíníme až později.

PRINCIP PŘÍPUSTNOSTI respektujeme tím, že navrhujeme konstitutivní rovnice pouze tak, aby jimi predikované závislosti mezi stavovými veličinami nebyly v rozporu s jinými fyzikálními zákony. V mechanice (resp. termodynamice) kontinua jde především o bilanční rovnice a II. zákon termodynamiky. Jako příklad uveďme skutečnost, že když jsme z bilance momentu hybnosti zjistili, že Cauchyův tenzor napětí je symetrický, musí tuto relaci, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, splňovat i konstitutivní rovnice.

PRINCIP PAMĚTI je tvrzení, které je obdobou principu lokality avšak převedeného do časové domény. Takže jestliže princip lokality říká, že chování materiálu v nějakém pevně zvoleném bodě jen málo závisí na stavových proměnných mimo okolí tohoto bodu, tak princip paměti říká, že historicky

[15] Gustav Jaumann (1863–1924) byl rakouský fyzik působící na Německém Vysokém Učení Technickém v Brně v letech 1901 až 1924. Žák Ernsta Macha. Stanislaw Zaremba (1863–1942) byl polský matematik (doktorát obhájil na Sorboně pod vedením G. Darbouxe a C.E. Picarda).

[16] R.S. Rivlin (1915–2005) byl britsko-americký fyzik a matematik věnující se studiu matematického popisu mechaniky eleastomerů ale nejen jich (dále např. ne-newtonských kapalin). Významně přispěl k rozkvětu nelineární mechaniky kontinua ve dvacátém století. Pokud je autorovi známo, nikdy nenapsal žádnou soubornou monografii. Nedávno ale Springer vydal souborně jeho časopisecké příspěvky, což čítá téměř tři tisíce stran. Byl laureátem Binghamovy, Timošenkovy, von Karmanovy, a Goodyearovy medaile! Na rozdíl od R.S. Rivlina, o jeho spoluautorce Barbaře A. Cotterové se autorovi nepodařilo zjistit téměř nic.

[17] J.G. Oldroyd (nar. 1921) je britský matematik věnující se studiu nelineární mechaniky zejména s aplikacemi na viskoelastické kapaliny. P.M. Naghdi (1924 – 1994) byl persko-americký fyzik a inženýr. Laureát Timošekovy medaile. A.E. Green (1912–1999) byl britský matematik zabývající se nelineární elasticitou anizotropních materiálů. Neplést s jiným Britem téhož příjmení, Georgem Greenem (1793 – 1841), po němž jsou pojmenovány Greenova věta a Greenův–Lagrangeův tenzor deformace. A na závěr přichází jméno C. Truesdella (1919–2000)

vzdálené události (hodnoty stavových proměnných v jiných časových okamžicích než je současnost), ovlivňují aktuální stav materiálu méně, než historicky blízké události.

Tento princip vedl k formulaci základních tří typů materiálů:

> **materiály bez paměti** – odezva nezávisí na historii vůbec, čili závisí pouze na současnosti (např. pružné materiály),
> **materiály s hladkou pamětí** – odezva závisí na časových derivacích stavových proměnných (např. na rychlosti deformace, napětí nebo teploty...)[18],
> **materiály s vyhasínající pamětí** – jako konstitutivní vlastnost je zformulován způsob vyhasínání paměti, čili je navržen nějaký konkrétní matematický výraz vystihující zapomínání. Tyto výrazy mívají nejčastěji formu integrálů, a tak se hovoří i o materiál **integrálního typu**.[19]

II.3 ZPŮSOB FORMULACE KONSTITUTIVNÍ ROVNICE

Vztahy mezi stavovými veličinami mohou být **explicitní nebo implicitní** funkcionální rovnice typu (II.28).

$$\underset{Y\in B,\tau\le t}{F}\left(\rho(\boldsymbol{Y},\tau),\mathrm{T}(\boldsymbol{Y},\tau),\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y},\tau),\boldsymbol{q}(\boldsymbol{Y},\tau),\psi(\boldsymbol{Y},\tau),\eta(\boldsymbol{Y},\tau),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Y},\tau),\boldsymbol{X}\right)=0 \qquad \text{(II.28)}$$

(II.28) říká, že pro všechny materiálové body $\boldsymbol{X}$ tělesa B existuje nějaký vztah mezi hustotou objemu ρ, teplotou T, hustotou tepelného toku $\boldsymbol{q}$, zdeformovanou polohou $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Y})$ ostatních bodů tělesa, hustotou volné energie ψ, hustotou entropie η, napětím $\boldsymbol{\sigma}$ a polohou jednotlivých materiálových bodů $\boldsymbol{X}$, který závisí na celé historii termodynamických procesů, čili na časech τ až do současnosti t. Formálně stejnou rovnici bychom mohli napsat i v materiálovém popisu.

Implicitní konstitutivní vztah není nepraktičtější způsob vyjádření konstitutivní rovnice. V mnoha případech lze rovnici (II.28) upravit do explicitního vyjádření funkčních závislostí stavových veličin, které podle předpokladů budeme považovat za závisle proměnné, na stavových veličinách, které budeme považovat za nezávisle proměnné. To je varianta, kterou dobře známe z pružnosti a pevnosti pro napětí a deformaci. Abychom mohli dospět do tohoto stavu, musíme ale aplikovat předpoklady o časové lokalitě (paměti) a prostorové lokalitě (deformaci).

Takže podle předpokladu o prostorové lokalitě (o prostorovém omezení) interakcí uvnitř tělesa převedeme závislost na $\mathbf{x}(\boldsymbol{Y})$ do formy gradientu, $Grad(\boldsymbol{x}) = \mathbf{F}$.[20] O takových materiálech hovoříme jako o ***jednoduchých materiálech***. Jestliže uvažujeme gradienty vyšších řádů, např. ${}^2Grad(\boldsymbol{x}) = {}^2\mathbf{F} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}$, mluvíme o ***jednoduchém materiálu druhého řádu***.[21] Stejný postup aplikujeme i pro T. Zavedeme tak závislost na $Grad(\mathrm{T})$,...

---

[18] Truesdell a Noll (1965) hovoří o materiálech rychlostního typu (*rate type*). Maršík (1999) používá zde uvedený termín, který je odvozen od konstrukce paměťového (časového) okolí současnosti pomocí nultého (funkční hodnoty ve středu, čili současnosti) a prvního (funkční hodnoty první derivace podle času) člene Taylorova rozvoje v proměnné t.

[19] Funkce zapomínání bývá většinou typu e^{-at}. Konkrétní ukázku uvedeme později.

[20] Gradient zde vyjadřuje do jaké vzdálenosti od bodu $\boldsymbol{X}$ sahá vliv okolí (čili vliv bodu $\boldsymbol{Y}$). Tato metodo je opět odvozena z představy hladkého okolí, čili aproximace pomocí Taylorova rozvoje: $\mathbf{x}(Y) = \boldsymbol{x}(X) + \partial\boldsymbol{x}(X)/\partial\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} + \ldots$ V takovém případě jde o jednoduchý materíl prvního řádu.

[21] Takže ${}^2F_{iJK} = \partial^2 x_i/(\partial X_J \partial X_K)$, ${}^3F_{iJKL} = \partial^3 x_i/(\partial X_J \partial X_K \partial X_L)$ atd. až do požadovaného $n \in \mathbb{N}$. Pro možnost záměny pořadí derivací je nutno předpokládat spojitou diferencovatelnsot až do n. Jde tedy o postup, který zapojuje vyšší členy Taylorova rozvoje podle předcházející poznámky.

Přijetím předpokladu o časové lokalitě vlivu historie, např. ve formě hladké paměti, převedeme závislost na τ v (II.28) na závislosti typu $D\mathbf{F}/Dt$, $D\mathrm{T}/Dt$, $D\rho/Dt$,... Opět můžeme hladké časové okolí orzšířit i na vyšší řád uvažováním vyšších derivací: $D^2\mathbf{F}/Dt^2$, $D^3\mathbf{F}/Dt^3$,...

Za těchto (nebo obdobných – např. pro paměť) předpokladů jsme často schopni dospět k explicitní formě konstitutivní rovnice. **Kromě výše zmíněného eliminujeme ještě závislost na X tím, že předpokládáme materiálovou homogenitu tělesa**.

Nebudeme zde podrobně rozebírat velmi bohatou škálu možností plynoucí z výše uvedeného postupu. Omezíme se pouze na některé speciální varianty, které pro nás budou nejpraktičtější. Úvahy ještě zjednodušíme tím, že se nebudeme snažit dospět k univerzálním rovnicím, platným pro všechny přípustné termodynamické děje, ale vybereme si pouze některé.

SHRNUTÍ

Konstitutivní rovnice jsou ve skutečnosti stavové rovnice. Bez těchto rovnic bychom nebyli schopni řešit počátečně okrajové úlohy mechaniky, neboť počet neznámých funkcí by byl vyšší než počet použitelných rovnic. **Konstitutivní teorie bývá budována matematicky z fyzikálně racionálních předpokladů: I. princip kauzality, II. princip determinismu, III. princip ekvipresence, IV. princip lokality, V. princip objektivity, VI. princip přípustnosti, VII. princip paměti.**

Technicky nejdůležitější jsou princip lokality, který určuje míru ovlivnění chování v bodě procesy probíhajícími v ostatních bodech, princip paměti, který do jaké míry současný stav závisí na termodynamické minulosti, konečně princip objektivity, který stanovuje podmínky za jakých lze veličinu považovat za užitečnou vzhledem k vzájemně se pohybujícím pozorovatelům.

Skalární, vektorovou a tenzorovou veličinu s, $\boldsymbol{u}$ a $\mathbf{T} = \boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{u}_2 \otimes .. \otimes \boldsymbol{u}_n$ zaznamenanou pozorovatelem O považujeme za objektivní, jestliže pozorovatel Ô, který je vůči O v pohybu popsaném $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t)$, pozoruje tyto veličiny transformované podle následujících pravidel:

$$\hat{s} = s \qquad \hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{u} \qquad \hat{\mathbf{T}} = (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_1) \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_2) \otimes ... \otimes (\mathbf{Q}\boldsymbol{u}_n).$$

Nejdůležitějším výsledkem předchozí kapitoly je, že tenzorové veličiny zformulované v materiálovém popisu jsou vždy objektivní.

II.4 ELASTICITA – MATERIÁL BEZ PAMĚTI PRO ADIABATICKÝ, IZOTERMÁLNÍ DĚJ

Děj nazveme adiabatickým, jestliže nedochází k výměně tepla s okolím. Děj nazveme izotermální, jestliže nedochází ke změně teploty. Zdůrazněme, že jde o model reality. Jelikož náš materiál nebude mít žádnou paměť, bude materiálová odezva záviset pouze na současném stavu, nikoliv na historii. V této současnosti nebudou deformační procesy produkovat teplo a materiál ani žádné teplo z okolí nepřijme (do okolí neodevzdá).[22] **V takovém materiálu nebude docházek k disipaci energie a všechny procesy budou vratné. Nazveme ho *elastický materiál*.**

Za těchto okolností nemá smysl dále uvažovat veličiny T, η, $\boldsymbol{q}$, t. Z volné energie nám zbude pouze e, čili hustota vnitřní energie.[23]

II.4.1 CAUCHYOVSKÁ ELASTICITA

Jestliže chování materiálu popíšeme explicitní stavovou rovnicí (II.29), hovoříme o tzv. ***Cauchyově elastickém materiálu***.[24]

$$\boldsymbol{\sigma} = f\left(\mathbf{F}\right) \tag{II.29}$$

Pro hustotu vnitřní energie a hustotu objemu žádné další konstitutivní rovnice nezavádíme, neboť jsou jednoznačně určeny bilančními rovnicemi, ve kterých vystupují $\boldsymbol{\sigma}$ a $\mathbf{F}$.

Princip objektivity na takovou rovnici klade podmínku, aby pozorovatelé O a Ô zaznamenali napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, která jsou navzájem ve vztahu pro transformaci tenzorů druhého řádu (II.30).

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{Q}^T \tag{II.30}$$

Protože $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = f\left(\hat{\mathbf{F}}\right) = f\left(\mathbf{QF}\right)$, musí pro konstitutivní funkci f platit (II.31), kde $\mathbf{Q}$ je libovolná vlastní ortogonální transformace a $\mathbf{F}$ je libovolný deformační gradient (čili nesingulární tenzor 2. řádu).

$$f\left(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\right) = \mathbf{Q}\,f\left(\mathbf{F}\right)\mathbf{Q}^T \tag{II.31}$$

Pouze konstitutivní funkce f splňující (II.31) lze označit za přípustné.

---

[22] Jde nám pouze o mechanické děje. Abychom byly úplně přesní, musíme ještě vyloučit existenci vnitřních zdrojů tepla indukovaných např. elektromagnetickým zářením mimo infračervenou oblast ala mikrovlnná trouba.

[23] Volnou energii v materiálovém popisu jsme zavedli v (I.3-47) jako $\psi = E - TH$.

[24] Též cauchyovské elasticitě.

Samozřejmě není žádný důvod omezovat se na popis kinematiky okolí pomocí **F** a napětí pomocí $\boldsymbol{\sigma}$. Můžeme použít např. deformační tenzory **U**, **C**, **E**, **b**, **e** a napěťové tenzory **S** či **P**. Dostaneme tak, další způsoby vyjádření (II.29). Takže pro konstitutivní vztahy **P** = g(**F**), **S** = h(**C**), **S** = i(**E**), $\boldsymbol{\sigma}$ = j(**b**),... použitím předpokladu objektivity získáme podmínky, které musí funkce g, h, i, j splňovat (II.32).

$$g(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\,g(\mathbf{F}) \qquad \mathbf{S} = h(\mathbf{C}) \qquad \mathbf{S} = i(\mathbf{E}) \qquad \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = j(\mathbf{Q}\,\mathbf{b}\,\mathbf{Q}^T) \tag{II.32}$$

Jak vidno, konstitutivní rovnice v materiálovém popisu nechává předpoklad objektivity beze změny. Jde o to, že materiálové tenzory **S**, **C** a **E** nejsou ovlivněny relativním eukleidovským pohybem vztažných soustav. To je nezastupitelná **výhoda materiálového popisu**.

Uveďme nakonec jedu z nepřípustných voleb konstitutivní rovnice ve tvaru $\boldsymbol{\sigma}$ = l(**E**). Tato volba nutně musí selhat, protože při transformaci pozorovatele budeme mít: $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ a současně $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$. Takže by současně mělo platit $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = l(\mathbf{E})$ i definiční $\boldsymbol{\sigma}$ = l(**E**). To je možné splnit pouze tehdy, když **Q** = **I**. Takže takovou rovnici není možné objektivně transformovat a jde o nepřípustnou volbu.

II.4.2 Izotropní Cauchyovsky elastický materiál

Přímá relace mezi tenzorem napětí a deformace, která je podstatou Cauchyova přístupu k pružnosti, znamená, že máme k dispozici nějakou funkci j, o které říkáme, že **jde o tenzorovou funkci jedné tenzorové proměnné.**[25]

O funkci j řekneme, že je izotropní, jestliže splňuje (II.33)**, kde Q je libovolná vlastní ortogonální transformace** (čili libovolná rotace vztažné soustavy).[26]

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = j(\mathbf{Q}\,\mathbf{b}\,\mathbf{Q}^T) \tag{II.33}$$

Důsledkem této definice je skutečnost, že (prostorový) levý Cauchyův–Greenův tenzor deformace **b** v konstitutivní rovnici můžeme použít pouze pro charakterizaci izotropních materiálů, jinak bychom dospěli k rozporu s objektivitou našeho popisu materiálu (srovnejte II.33 a II.32d).

Ve čtyřicátých a padesátých letech 20. století byla věnována velká pozornost tomu, jak matematicky reprezentovat přímé konstitutivní rovnice vyjádřené explicitně (čili rovnice typu **P** = g(**F**), **S** = h(**C**), **S** = i(**E**), $\boldsymbol{\sigma}$ = j(**b**)). **Přístup první volby je**, obdobně jako např. při reprezentaci analytických funkcí, **pomocí polynomů v proměnných F**, **C**, **E** nebo **b**.

Pro následující explicitní vyjádření se vžil název **Rivlinova–Ericksenova věta o reprezentaci**, (II.34).[27][28]

$$\boldsymbol{\sigma} = j(\mathbf{b}) = \alpha_0\,\mathbf{I} + \alpha_1\,\mathbf{b} + \alpha_2\,\mathbf{b}^2 \tag{II.34}$$

[25] Měli bychom dodávat, že jde o symetrické tenzory druhého řádu.
[26] Rotace vztažné soustavy je zřejmě ekvivalentní rotaci tělesa jako tuhého celku!
[27] Zde samozřejmě klademe **I** = $\mathbf{b}^0$. O R. S. Rivlinovi již byla řeč. Jerald LaVerne Ericksen (1924) je americký matematik, nositel Timošenkovy a Binghamovy medaile. Během své aktivní kariéry se zabýval např. anizotropními kapalinami (tekuté krystaly).
[28] Tato formule bývá někdy užívána v alternativní formě: $\boldsymbol{\sigma} = j(\mathbf{b}) = \beta_0\,\mathbf{I} + \beta_1\,\mathbf{b} + \beta_{-1}\,\mathbf{b}^{-1}$. Protože $\mathbf{b}^2 = I_1(\mathbf{b})\mathbf{b} - I_2(\mathbf{b})\mathbf{I} - I_3(\mathbf{b})\,\mathbf{b}^{-1}$.

V tomto vyjádření považujeme skalární koeficienty α_i (i = 0,1,2) za funkce invariantů tenzoru **b**; $\alpha_i = \alpha_i(I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b}), I_3(\mathbf{b}))$. Připomeňme si, že platí:

$$I_1(\mathbf{b}) = tr(\mathbf{b}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \qquad I_2(\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\left(tr^2(\mathbf{b}) - tr(\mathbf{b}^2)\right) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \qquad I_3(\mathbf{b}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \tag{II.35}$$

Zde λ_i^2 (i = 1,2,3) jsou vlastní čísla tenzoru **b**. Z rovnice (II.34) je tak zjevné, že vlastní směry **b** a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou stejné, čili $\boldsymbol{\sigma}$ a **b** jsou koaxiální tenzory. Taktéž platí, že λ_i (i = 1,2,3) jsou vlastní čísla tenzorů **U** a **v** z polárního rozkladu deformačního gradientu **F** = **RU** = **vR**.

Na závěr poznamenejme, že k rovnici (II.34) existuje analogie pracující místo s tenzorem deformace **b**, s tenzorem rychlosti deformace **d** (I.26), $\mathbf{d} = ½(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$, kde $\mathbf{l} = \partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)/\partial \boldsymbol{x}$ je prostorový gradient rychlosti. V takovém případě hovoříme o **Reiner–Rivlinově kapalině** (prvního řádu).[29]

II.4.3 HYPERELASTICITA – GREENOVA ELASTICITA

Cuachyova metoda charakterizace materiálu je dobře známá z lineární pružnosti infinitesimálních deformací, kde se tímto způsobem zavádí zobecněný Hookeův zákon – čili přímá relace $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Tento školský postup budí falešný dojem, že jde o metodu první volby při hledání konstitutivní rovnice. Nejde. V nelineární pružnosti, která se snaží vyrovnat s vlastnostmi elastomerů, jenž jsou běžně schopny vykazovat deformace v řádu jednotek metru na metr (jen si například představte, jak velké jsou asi deformace při nafukování pouťového balónku...), se tato, ve skutečnosti velmi složitá, metoda příliš neuplatnila. Najít šest nelineárních rovnic, které mezi sebou spojí šest nezávislých složek tenzorů deformace a napětí, tak aby vyhověly nelinearitám (a popřípadě anizotropii) z experimentálního pozorování, není snadné.

V současnosti je většina nelineárně pružných materiálů při konečných deformacích charakterizována pomocí tzv. Greenova přístupu, který se dnes běžně nazývá **hyperelasticita**. Tento přístup je založen na existenci potenciálové funkce, **elastický potenciál**, kterou chápeme jako volnou (respektive vnitřní) energii. Ještě přesněji řečeno, jde o přírůstek hustoty vnitřní energie dík deformaci materiálu – čili o **hustotu deformační energie**. **Tato energie je potenciálovou funkcí pro napětí**, pro intenzitu vnitřních sil. Jde o skalární funkci jedné tenzorové proměnné (tenzor deformace), ze které složky tenzoru napětí získáme derivováním právě podle tenzoru deformace. **Analogií v lineární (infinitesimální) pružnosti by bylo, kdybychom řekli, že hookeovský materiál je takový, jehož hustota deformační energie je tvaru** $W = ½C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$.[30] **Složky tenzoru** σ_{ij} **jsou pak určeny jako** $\sigma_{ij} = \partial W/\partial \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$.[31] **Samozřejmě, že rovnice** $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ **představuje zobecněný Hookeův zákon. Nicméně nevycházíme z něho, nýbrž z předpokladu existence potenciálu** W **pro** σ_{ij}.

Hyperelastický materiál. Takže mějme materiál, který je (1) elastický[32] a (2) nesdílí a negeneruje se vněm teplo. Zažívá tedy čistě mechanické děje, které jsou vratné. Potom je přírůstek materiálové hustoty jeho volné energie $\Delta\psi$ (hustota je tedy definována vzhledem k jednotkovému

[29] Jde tedy o vazkou kapalinu, neboť napětí je závislé na rychlosti deformace a to nelineárně (ne-newtonsky). Markus Reiner (1886 – 1976) byl židovský inženýr narozený v Rakousku–Uhersku (Bukovina). Po rozpadu monarchie odešel do Palestiny (Izraele), kde působil na technologickém institutu v Haifě. Zabýval se reologií kapalin a byl jedním z propagátorů tohoto termínu.

[30] Tj. hustota deformační energie je kvadratická forma složek tenzoru deformace.

[31] Nezapomeňme, že přes opakující se indexy je třeba sčítat.

[32] Čili nic si nepamatuje.

nezdeformovanému objemu) během mechanického děje dán pouze přírůstkem vnitřní energie pocházející z práce vnitřních sil, jejíž hustota výkonu je dána jako $\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}$. Jelikož všechny uvažované děje jsou vratné, pak podle Clausiovy–Planckovy nerovnosti musí platit (I.3-48, $\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{\psi}-\dot{T}H\geq 0$) tvrzení (II.36)[33].

$$\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{\psi}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\mathbf{P}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}\right):\dot{\mathbf{F}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{P}=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}} \qquad \text{(II.36)}$$

Poslední ekvivalence vyplývá ze skutečnosti, že $\dot{\mathbf{F}}$ je nenulové, tudíž rovnost nule nastane právě tehdy, když bude $\mathbf{P}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}=0$.

Výše vymezený materiál nazýváme hyperelastický. Místo o volné energii ψ většinou hovoříme o deformační energii W. $\Delta\psi = \Delta E = W$, tj. přírůstek volné energie je skrze přírůstek vnitřní energie a ten je právě dík deformační energii. Pro funkci hustoty deformační energie $W(\mathbf{F})$ v referenční (nezdeformované) konfiguraci klademe $W(\mathbf{F}=\mathbf{I})=0$.

W samozřejmě můžeme vyjádřit i jako funkci tenzorů $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{b}$,... a dostaneme s nimi konjugované tenzory napětí podle (I.3-34 $J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}=\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}$).

Uvážíme-li výše zmíněnou konstitutivní rovnici Cauchyovského materiálu $g(\mathbf{F})$, můžeme tedy psát:

$$\mathbf{P}=g(\mathbf{F})=\frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}} \qquad P_{iK}=\frac{\partial W}{\partial F_{iK}} \qquad \text{(II.37)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=J^{-1}g(\mathbf{F})\mathbf{F}^T=J^{-1}\frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T=J^{-1}\mathbf{F}\left(\frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\right)^T \quad \sigma_{ij}=J^{-1}F_{iK}\frac{\partial W}{\partial F_{jK}} \qquad \text{(II.38)}$$

Protože je hustota energie skalár, je její objektivita splněna, jestliže pozorovatelé O a Ô zaznamenají stejnou hodnotu hustoty energie.[34] Čili objektivní konstitutivní rovnice musí splňovat podmínku, že $W(\mathbf{F})=W(\hat{\mathbf{F}})=W(\mathbf{QF})$ pro všechny vlastní ortogonální transformace $\mathbf{Q}$.

Bez nutnosti cokoliv ověřovat se ocitneme tehdy, jestliže budeme uvažovat W v materiálovém popisu, čili funkce $W(\mathbf{E}) = W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{U})$. Navíc ale platí, že $\mathbf{Q}$ si můžeme představit jako $\mathbf{R}^T$, kde $\mathbf{R}$ splňuje $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$. Potom ale podmínka objektivnosti říká, že $W(\mathbf{F})=W(\hat{\mathbf{F}})=W(\mathbf{QF})=W(\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U})=W(\mathbf{IU})=W(\mathbf{U})$. Důsledkem je skutečnost, že uložená deformační energie vůbec nezávisí na rotaci tělesa jako tuhého celku po jeho deformaci.

---

[33] Po delší době se zde objevuje operace dvojtečkového součinu, kterou si můžeme představit jako zobecněný skalární součin (čili součet součinů po složkách) na prostoru reálných šestic (pro symetrické tenzory) nebo devític u nesymetrických (představa se skalárním součinem je samozřejmě smysluplná jen tehdy, když se násobí vektory ze stejného prostoru). Připomeňme si, že platí: $\frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}\Leftrightarrow\frac{\partial W}{\partial F_{iK}}:\dot{F}_{iK}=\frac{\partial W}{\partial F_{11}}\dot{F}_{11}+\frac{\partial W}{\partial F_{12}}\dot{F}_{12}+\ldots+\frac{\partial W}{\partial F_{32}}\dot{F}_{32}+\frac{\partial W}{\partial F_{33}}\dot{F}_{33}$. Zjevně výraz $\frac{\partial W}{\partial\mathbf{F}}$ definuje nějaký tenzor druhého řádu s jedním indexem malým a jedním velkým.

[34] Je třeba ale rozlišovat mezi hustotou energie v materiálovém popisu (vzhledem k jednotce nezdeformovaného objemu) a hustotou energie v prostorovém popisu (vzhledem ke zdeformovanému objemu). Z bilance hmotnosti v uzavřeném systému plyne, že je třeba transformovat pomocí J^{-1}, kde $J = v/V$, protože $dm_0 = dm \Leftrightarrow \rho_0 V = \rho v \Leftrightarrow \rho = V/v\cdot\rho_0 = J^{-1}\cdot\rho_0$. Toto platí pro všechny objemové hustoty. Takže například pro hustotu vnitřní energie máme $e = J^{-1}E$.

Dík vzájemným relacím mezi tenzory **E**, **C** a **U** (**E** = ½(**C** − **I**), **C** = $\mathbf{U}^2$) a transformačním vztahům pro napětí (**P** = **FS**, $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{FSF}^T$), můžeme psát následující výrazy.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \qquad S_{AB} = \frac{\partial W}{\partial E_{AB}} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{AB}} \tag{II.39}$$

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F}\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \qquad P_{iB} = 2F_{iA}\frac{\partial W}{\partial C_{AB}} \tag{II.40}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}\mathbf{F}^T \qquad \sigma_{ij} = J^{-1}F_{iA}\frac{\partial W}{\partial E_{AB}}F_{jB} \tag{II.41}$$

Pokud jde o prostorové tenzory deformace, nebývá formulace pomocí nich příliš obvyklá. Například pro tenzor **b** jako proměnnou v materiálové (čili definované přes jednotkový objem v referenční konfiguraci!) hustotě deformační energie *W* platí (II.42). Důkaz tohoto tvrzení lze najít v Bonet a Wood (1997) na s. 8 kapitoly 5.4.2.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\mathbf{b}\frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \qquad \sigma_{ij} = 2J^{-1}b_{ik}\frac{\partial W}{\partial b_{kj}} \tag{II.42}$$

Důkaz je založen na těchto faktech: (1) $\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^T = \mathbf{l}\mathbf{F}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{l}^T = \mathbf{l}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{l}^T$, (2) $\dot{W} = \left(\partial\psi(\mathbf{b})/\partial\mathbf{b}\right) : \dot{\mathbf{b}} = 2\left(\left(\partial\psi(\mathbf{b})/\partial\mathbf{b}\right)\mathbf{b}\right) : \mathbf{l}$, a (3) $\boldsymbol{\sigma}$ a **l** tvoří konjugoavný pár vzhledem k prostorové hustotě výkonu. Čili materiálově pak platí $J^{-1}\dot{W} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{l}$.

II.4.4 IZOTROPNÍ HYPERELASTIKCÝ MATERIÁL

Již z pružnosti a pevnosti je nám známo, že materiály rozdělujeme podle jejich odezvy na izotropní a anizotropní. První o materiálu říkáme, jestliže jeho chování (zaznamenané napětí při nějakém stavu deformace) nezávisí na orientaci souřadnicového systému. Čili pootočení materiálu (nebo pootočení souřadnicového systému) před experimentem vede ke změně tenzoru napětí přesně podle transformačního pravidla pro otočení souřadnicového systému. Jestliže **Q** je matice ortogonální transformace znamenající natočení souřadnicové soustavy O do soustavy O′, pak tenzory napětí v těchto soustavách jsou ve vztahu $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$.

Máme-li ale chování materiálu založeno na skalární funkci tenzorové proměnné *W*(**C**), projeví se izotropie materiálu tím, že se rotací předcházející deformaci *W* vůbec nezmění, W′ = W. Říkáme, že u izotropního materiálu je *W* invariantní vůči rotaci souřadnicového systému.

Zcela obecně říkáme, že nějaká skalární funkce tenzorové proměnné C je izotropní, právě když při rotaci souřadnicového systému platí *W′* = *W*, čili (II.43) **pro všechny přípustné C a pro všechny rotace Q**.

$$W(\mathbf{C}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T\right) \tag{II.43}$$

Jestliže máme rotovaný souřadnicový systém O′, dospějeme v něm rotací **Q** k $\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T$.[35] Pro hustotu deformační energie založenou na **C** máme $W' = W(\mathbf{C}') = W(\mathbf{F}'^T\mathbf{F}') = W((\mathbf{F}\mathbf{Q}^T)^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = W(\mathbf{Q}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T)$. Nyní je tedy zřejmé, že rovnice (II.43) vyjadřuje rovnost $W' = W$. Platnost tohoto vztahu bude samozřejmě záviset na konkrétní matematické formě výrazu pro *W*.

O materiálech, pro které existuje vlastní ortogonální transformace Q taková, že $W' \neq W$, říkáme, že jsou anizotropní.

Že neobdržíme vždy stejnou energii, by mělo být zjevné z této úvahy. Představujme si kvádr z materiálu vyztuženého vlákny tak jemnými a tak hustě rozloženými, že můžeme matrici i výztuhu v každém bodě považovat za homogenní. Pak půjde o dokonale homogenizovaný kompozit, kde v každém bodě kompozitu je matrice i vlákno. Vlákna ať vedou jedním směrem. Vlákno je tužší než matrice, a táhneme-li tento materiál ve směru vláken, musíme jistě vynaložit víc práce (čili uložit do materiálu větší deformační energii) pro dosažení nějakého konkrétního prodloužení, než když to samé prodloužení vyvodíme tahem napříč ke směru vláken. Táhnout jednou ve směru vláken a podruhé napříč směru vláken znamená kvádr před deformací natočit, tj. aplikovat **Q**. Takový materiál bude zřejmě anizotropní.

Odbočme nyní trochu do algebry. Uvažujme **množinu všech vlastních ortogonálních transformací** $\mathrm{Orth}^+ = \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin}^3;\ det(\mathbf{Q}) = 1 \wedge \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}\}$.[36] Tato množina **s operací skládání zobrazení tvoří grupu**, kterou pro jednoduchost označujeme stejným symbolem jako množinu samu. **Grupa je algebraická struktura vytvořená na množině, kde je zadána binární operace**. Termínem binární operace míníme zobrazení $\mathrm{Orth}^+ \times \mathrm{Orth}^+ \rightarrow \mathrm{Orth}^+$ (tj. **operace je uzavřená**, výsledkem je vždy prvek z té samé množiny). Operace musí mít tyto vlastnosti: (1) být **asociativní**, (2) musí existovat **neutrální prvek**, (3) ke každému prvku musí existovat **inverzní prvek**. Uvažujeme-li o množině všech vlastních ortogonálních transformací a operaci skládání zobrazení, dostáváme při maticové reprezentaci operaci násobení matic.

(1) násobení matic je asociativní, čili nezávislé na uzávorkování (tj. $(\mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_3(\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)$ platí pro libovolné $\mathbf{Q}_i \in \mathrm{Orth}^+$ $i = 1,2,3$). (2) neutrálním prvkem je jednotková matice **I**, protože $\mathbf{QI} = \mathbf{IQ} = \mathbf{Q}$. Inverzním prvkem ke každé **Q** je $\mathbf{Q}^T$ a to již z definice ortogonální transformace. Takže definiční vlastnosti grupy jsou v Orth^+ skutečně splněny.

Každý hyperleastický materiál lze charakterizovat podle nějaké grupy shodných zobrazení, která vedou ke splnění (II.43). **Mluvíme potom o grupě symetrií** (čili shodností) příslušné pro referenční konfiguraci daného materiálu. Jestliže je materiál izotropní pevná látka, je jeho grupa symetrií (grupa izotorpie) právě Orth^+. Každý pevný materiál má nějakou grupu symetrií, která je podgrupou grupy Orth^+.[37]

---

[35] Uvědommě si, že je zásadní rozdíl, zda-li rotujeme po deformaci (v napjatém stavu) tj. **QF** nebo před deformací, čili v referenčním stavu, $\mathbf{F}\mathbf{Q}^T$. Násobení matic a tenzorů není obecně komutativní! Pořadí vyjadřuje skládání zobrazení, tenzor, který je nalevo je superponován na tenzor, který je napravo. Je dobré číst zleva doprava stylem **Q** po **F** (= **QF**) a **F** po $\mathbf{Q}^T$ ($=\mathbf{F}\mathbf{Q}^T$).

[36] Tato množina neobsahuje ortogonální transformace, pro které platí $det(\mathbf{Q}) = -1$, čili neobsahuje zrcadlení. Symbolem Lin^3 míníme množinu všech lineárních transformací v $\mathbf{E}^3$, čili množinu všech reálných matic 3x3.

[37] Podgrupa je podmnožina v grupě, kde restrikce grupové operace na danou podmnožinu splňuje definici grupy. Grupa všech vlastních ortogonálních transformací, čili $\mathrm{Orth}+ = \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin}^3;\ \det(\mathbf{Q}) = 1 \wedge \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}\} = SO(3)$, je podgrupou v grupě všech ortogonálních transformací $O(3) = \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin}^3;\ det(\mathbf{Q}) = \pm 1 \wedge \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}\}$, která je opět podgrupou vlastní unimodulární grupy $SL(3) = \{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin}^3;\ det(\mathbf{Q}) = 1\}$ a ta je konečně podgrupou v unimoduálnrní grupě $\{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin}^3;\ det(\mathbf{Q}) = \pm 1\}$. Zde stojí za zmínku, že elastické kapaliny bývají většinou zaváděny jako materiály, jejichž grupa symetrií odpovídá SL(3). Nejobecnější grupou

Podrobněji se o tom zmíníme později, ale dodejme, že materiál, který **má jeden preferovaný směr** (čili materiál z předcházejícího příkladu) nazýváme **transverzálně izotropní**. To proto, že v rovině kolmé na preferovaný směr (směr vláken) jde vlastně o izotropii. Grupa symetrií takového materiálu je {$\mathbf{Q} \in$ Orth+; $\mathbf{Q}\boldsymbol{M} = \pm \boldsymbol{M}$}, když $\boldsymbol{M}$ je jednotkový vektor preferovaného směru. Tato grupa se skládá ze všech rotací okolo $\boldsymbol{M}$ a rotací okolo vektorů z roviny kolmé na $\boldsymbol{M}$, které $\boldsymbol{M}$ právě převrátí.

Vraťme se ale k izotropnímu hyperelastickému materiálu. Jestliže je W izotropní funkcí $\mathbf{C}$, znamená to, že W je vlastně sama o sobě skalárním invariantem tenzoru $\mathbf{C}$. Lze ji tedy reprezentovat jako funkci hlavních invariantů $\mathbf{C}$ nebo vlastních čísel $\mathbf{C}$. Vzhledem k tomu, že pro hlavní invarianty $\mathbf{C}$ a $\mathbf{b}$ platí: $I_1(\mathbf{C}) = I_1(\mathbf{b}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2(\mathbf{C}) = I_2(\mathbf{b}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$, $I_3(\mathbf{C}) = I_3(\mathbf{b}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$, lze W taktéž vyjádřit ve formě funkce vlastních čísel – druhých mocnin hlavních strečů.[38]

Čtenáři s hlubším zájmem o mechaniku lze rozhodně doporučit výklad teorie reprezentace pomocí invariantů, který najde např. v knihách Truesdell a Noll (1965) s. 20 – 35, Itskov (2007) kap. 6.

Jestliže uvažujeme derivaci $W(\mathbf{C})$ podle $\mathbf{C}$, můžeme ji psát jako (II.44).

$$\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \tag{II.44}$$

Kromě specifikace konkrétního způsobu závislosti na invariantech ($W = W(I_1,I_2,I_3)$), o čemž se zmíníme později, je třeba odvodit derivace $\partial I_i/\partial \mathbf{C}$ pro $i = 1,2,3$.

Víme ovšem, že $I_1 = tr(\mathbf{C}) = \mathbf{I}:\mathbf{C}$ (I.1-20). Derivuje se tedy $C_{IK}\delta_{IK}$ podle C_{IK}. Takže platí (II.45).

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \qquad \frac{\partial I_1}{\partial C_{IK}} = \delta_{IK} \tag{II.45}$$

Dále platí, že $I_2 = ½(tr^2(\mathbf{C}) - tr(\mathbf{C}^2))$. Což nás vede k (II.46). Během odvozování je třeba si uvědomit, že pro symetrický tenzor $\mathbf{C}$ platí, že stopa jeho druhé mocniny je $tr(\mathbf{C}^2) = C_{11}^2 + C_{22}^2 + C_{33}^2 + 2C_{12}^2 + 2C_{23}^2 + 2C_{31}^2$. Derivováním podle složek C_{IK} tedy dostaneme $2\mathbf{C}$. Pokud vás matou dvojky u nediagonálních členů, tak nezapomeňte, že je třeba každou tuto složku rozdělit na IK a KI.

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}}\left(tr^2(\mathbf{C}) - tr(\mathbf{C}^2)\right) = \frac{1}{2}2tr(\mathbf{C})\frac{\partial tr(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{2}\frac{\partial tr(\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}} = tr(\mathbf{C})\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{I}:\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}} = tr(\mathbf{C})\mathbf{I} - \frac{1}{2}2\mathbf{C} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{IK}} = I_1\delta_{IK} - C_{IK} \tag{II.46}$$

Konečně pro $\partial I_3/\partial \mathbf{C}$ platí (II.47), což uvádíme bez důkazu. Ten je možno najít např. v Holzapfel (2000) na s.41.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial det(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = I_3\mathbf{C}^{-1} \qquad \frac{\partial I_3}{\partial C_{IK}} = I_3 C_{IK}^{-1} \tag{II.47}$$

v diskutovaném kontextu je GL(3), *general linear*, to je grupa všech invertibilních matic 3x3. Zde již samozřejmě nejde o symetrie (nejsou zachovány délky a velikosti úhlů, tj. determinant příslušných matic již nemusí být ±1).

[38] Myšlenka reprezentace pomocí invariantů pochází od již několikrát zmíněného R.S. Rivlina.

Užitím těchto výsledků přejde konstitutivní rovnice vyjádřená pomocí invariantů do tvaru (II.48).

$$\mathbf{S}=2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}=2\left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{I}-\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}+I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{II.48}$$

Obdobné úvahy můžeme samozřejmě provést i pro Cauchyovo napětí a tenzor **b**. Získáme tak výrazy (II.49) a (II.50). Všechna tři vyjádření tvoří konkrétní formu Rivlinovy–Ericksenovy reprezentace uvedené v (II.34). Dlužno ještě dodat, že mezi $\mathbf{b}^2$ a $\mathbf{b}^{-1}$ je možno transformovat výrazem: $\mathbf{b}^2 = I_1\mathbf{b} - I_2\mathbf{b} + I_3\mathbf{b}^{-1}$.

$$\boldsymbol{\sigma}=2J^{-1}\,\mathbf{b}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}=2J^{-1}\left(I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{I}+\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{b}-\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{b}^2\right) \tag{II.49}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=2J^{-1}\,\mathbf{b}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}=2J^{-1}\left(\left(I_2\frac{\partial W}{\partial I_2}+I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)\mathbf{I}+\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{b}-I_3\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{b}^{-1}\right) \tag{II.50}$$

Hustotu deformační energie je také možno vyjádřit jako funkci hlavních strečů λ_1, λ_2 a λ_3, což jsou vlastní čísla tenzorů $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{b}^{1/2}$. Podmínka izotropie se zde projeví symetričností funkce W, $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2) = W(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \ldots$ přes všechna pořadí.

Výrazy pro složky hlavních napětí jsou dány rovnicemi (II.51).

$$\sigma_i=\lambda_i\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\qquad S_i=\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\qquad P_i=\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\quad \text{pro i = 1, 2 a 3 (zde nesčítáme!)} \tag{II.51}$$

Pro tenzorový zápis je vždy zapotřebí doplnit báze podle pravidla $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i$, $\mathbf{S} = S_i \boldsymbol{N}_i \otimes \boldsymbol{N}_i$ a $\mathbf{P} = P_i \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{N}_i$. V těchto výrazech samozřejmě sčítáme přes opakující se index, který nabývá hodnot 1, 2 a 3. $\boldsymbol{n}_i$ a $\boldsymbol{N}_i$ jsou vlastní vektory ve zdeformované a referenční konfiguraci.

II.4.5 NESTLAČITELNÝ HYPERELASTIKCÝ MATERIÁL

Z experimentů je známo, že eleastomery v určité oblasti mechanické odezvy ukazují téměř nestlačitelné[39] chování – tj. mechanické děje probíhají isochoricky. Obdobná vlastnost je často přisuzována měkkým biologickým tkáním (pro velký obsah vody). Implementujeme-li tuto skutečnost do výpočtového modelu, může dojít k jeho významnému zjednodušení, neboť se tím omezí přípustné kinematiky (trajektorie ve fázovém prostoru deformací), které materiál může zažít. Tím pádem se sníží počet nezávisle proměnných složek tenzoru deformace. O takovém chování hovoříme jako o „omezeném“, v angl. *materials with internal constraint*. Dalším příkladem materiálu s kinematickým omezením je neprůtažný materiál (*inextensible*).

Vždy je ale třeba volbu takového omezení řádně ospravedlnit na základě pozorování.

[39] V angličtině se v tomto kontextu používá termín *incompressible* častěji než *isovolumic* nebo *isochoric.* A tak i zde hovoříme o nestlačitelných materiálech, ačkoliv jde o konstantní objem i za podmínek tahové napjatosti.

Jestliže materiál nemění svůj objem a my určujeme složky tenzoru napětí z derivací hustoty deformační energie W, pak je třeba si uvědomit, že složky hydrostatické napjatosti, která by se jinak podílela na změně objemu materiálu, nelze z W *vyderivovat*, neboť se na nich žádná práce nekoná, a tak ve W vůbec nejsou.

Tuto skutečnost obcházíme úpravou výrazu pro hustotu deformační energie o člen vystihující dané omezení, který je ovšem zpočátku neurčitý. Jeho konkrétní hodnota je určena až během řešení okrajové úlohy kombinací rovnic rovnováhy a okrajových podmínek. Metoda, kterou s ním v konstitutivní rovnici pracujeme při určování napjatosti, odpovídá metodě neurčitého Lagrangeova multiplikátoru.

Uvažujeme nyní hustotu deformační energie v modifikovaném tvaru (II.52).

$$W = W(\mathbf{F}) - p(J-1) \qquad \textit{když} \quad J = 1 \tag{II.52}$$

Aplikací $\mathbf{P} = \partial W/\partial \mathbf{F}$ dostaneme (II.53)[40].

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}}(J-1) = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - pJ\,\mathbf{F}^{-T} \tag{II.53}$$

Během derivování jsme p považovali za konstantu, tak jako v Lagrangeově metodě. Když dosadíme za J, máme (II.54).

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\,\mathbf{F}^{-T} \tag{II.54}$$

Transformací proměnných deformačních tenzorů mezi sebou a aplikací deformačního gradientu podle (I.2-5 a I.2-9) dospějeme k následujícím relacím.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - p(2\mathbf{E}+\mathbf{I})^{-1} = 2\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\,\mathbf{C}^{-1} \tag{II.55}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^{T} - p\,\mathbf{I} = 2\,\mathbf{b}\frac{\partial W(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} - p\,\mathbf{I} \tag{II.56}$$

Pro úplnost uveďme analogie k (II.54 – 56) ve formě hlavních strečů a napětí.

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \qquad P_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \frac{p}{\lambda_i} \qquad P_i = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \frac{p}{\lambda_i^2} \qquad \textit{pro } i = 1,2,3 \quad \text{(nesčítat přes } i\text{)} \tag{II.57}$$

Podmínku nestlačitelnosti pak píšeme ve tvaru $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

[40] Protože $J = det(\mathbf{F})$, opět se zde objeví výraz typu $\partial det(\mathbf{A})/\partial \mathbf{A}$. Připomínáme, že platí $\partial det(\mathbf{A})/\partial \mathbf{A} = det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}$ pro všechna nesingulární $\mathbf{A}$.

Tvar konstitutivní rovnice pro nestlačitelný materiál je možno odvodit i z jiné úvahy. Vraťme se nyní k bilanci výkonu z Clausiovy–Planckovy nerovnosti (v tomto případě ovšem rovnosti, I.3-48, $\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{\psi}-\dot{T}H\geq 0$, resp. tvrzení II.36).

$$\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\dot{\psi}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}=0 \tag{II.58}$$

Přípustné jsou ale pouze kinematiky splňující J = 1. Materiálovou časovou derivací této podmínky dostaneme (II.59), tvrzení (I.1-31).

$$\dot{J}=J\,\mathbf{F}^{-T}:\dot{\mathbf{F}}=0 \tag{II.59}$$

Porovnáním obou těchto výrazů dostaneme (II.60).

$$\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}=J\,\mathbf{F}^{-T}:\dot{\mathbf{F}} \qquad\qquad \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{F}}:\dot{\mathbf{F}}-J\,\mathbf{F}^{-T}:\dot{\mathbf{F}}=0 \tag{II.60}$$

Nyní by se chtělo vytknout $\dot{\mathbf{F}}$ na pravou stranu a získat výraz typu $(\qquad):\dot{\mathbf{F}}=0$. Jenže to není možné, neboť bychom v závorce obdrželi fyzikálně nekonzistentní výraz porovnávající napětí a deformace, $\mathbf{P}-\partial\psi/\partial\mathbf{F}-J\mathbf{F}^{-T}$. Takže zavedení p můžeme interpretovat jako konstantu úměrnosti zajišťující, aby po (formálním) matematickém vytknutí nabyl výraz i fyzikálního smyslu.

Celou věc si dokonce můžeme představit ještě dalším způsobem. Jestliže interpretujeme dvojtečkový součin jako skalární součin na uspořádaných devíticích (kdybychom uvažovali symetrické trezory, pak šesticích), tak zjišťujeme, že zde máme dva vektory, $\mathbf{P}-\partial\psi/\partial\mathbf{F}$ a $J\mathbf{F}^{-T}$, které jsou oba „kolmé" k $\dot{\mathbf{F}}$ (přesněji řečeno k nadrovině přípustných $\dot{\mathbf{F}}$), neboť platí (II.58 a 59). Kdyby byly oba ze stejného vektorového prostoru, řekli bychom, že jsou to rovnoběžné vektory. Takto se omezíme na konstatování, že musí být sobě navzájem úměrné. p hraje opět roli konstanty úměrnosti s tím, že pro konzistenci s předchozím uvažujeme $-1\cdot p$:

$$\mathbf{P}-\partial\psi/\partial\mathbf{F}-\left(-1p\right)J\,\mathbf{F}^{-T}=0\,.$$

Nakonec dosadíme J = 1 a získáme stejný výraz jako v (II.54).

II.4.5 MODELY PRO IZOTROPNÍ *W*

Za posledních sedmdesát let byla navržena celá řada konkrétních matematických výrazů, které jsou více či méně vhodnými modely *W*. Zmíníme se zde jen o několika nejběžnějších. Lze je rozdělit, ačkoliv ne zcela přesně a ne zcela disjunktně, do čtyř základních skupin:

(a) polynomiální funkce invariantů tenzoru deformace
(b) modely založené na strečích
(c) modely odvoditelné ze statistické mechaniky polymerů
(d) modely s transcendentními funkcemi.

Nejednodušším modelem pro oblast konečných deformací je tzv. **Saint-Venantův–Kirchhoffův materiál** popsaný hustotou deformační energie (II.61a) a z ní odvozenou konstitutivní rovnicí (II.61b). Jde o přímé rozšíření představ lineární odezvy z oblasti infinitesimálních deformací na konečné deformace.

$$W = \frac{\lambda}{2} tr^2(\mathbf{E}) + \mu tr(\mathbf{E}^2) \qquad \mathbf{S} = \lambda tr(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \qquad \text{(II.61)}$$

Parametry λ a μ nazýváme Laméovy konstanty a lze je vyjádřit pomocí Youngova modulu pružnosti E_Y a Poissonova čísla ν jako: $\lambda = E_Y\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ a $\mu = E_Y/[2(1 + \nu)]$. Žel tento model nevystihuje materiálovou odezvu v tlakové oblasti napjatosti tak, jak by ji bylo racionální očekávat. Produkuje existenci lokálního minima při stlačování přímého prizmatického prutu (když je pohyb popsán předpisem $x = \lambda_1 X$, pak kritická je hodnota $\lambda_1 = \sqrt{(1/3)}$). Navíc ve stejné úloze pro $\lambda_1 \to 0^+$ se napětí v ose bude blížit 0. Přesvědčte se sami o této závadě. Tuto závadu lze odstranit modifikací na tvar závislosti: $W = \kappa/2(ln(J)^2) + \mu tr(\mathbf{E}^2)$, kde κ je materiálový parametr.

Základním modelem založeným na invariantech je tzv. **neo–hookeovský materiál** popsaný pomocí (II.62).

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \qquad \text{(II.62)}$$

Jeho výhodou je, že ačkoliv forma (II.62) budí dojem čisté fenomenologie, je odvoditelný ze představy o entropickém chování[41] polymerních řetězců za předpokladu gaussovského rozdělení hustoty pravděpodobnosti poloh koncových bodů řetězců při jejich deformaci. Čili lze ho odvodit z – byť elementárních, a tak nedokonalých – představ o chování hmoty s uvažováním její struktury.

Proč se v rovnici (II.62) odečítá trojka je zřejmé, když uvážíme fakt, že v referenční konfiguraci jsou hlavní streče rovny 1, a tak $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3$. Parametr μ má rozměr hustoty energie, čili *Pa*, a interpretujeme ho jako počáteční (míní se v oblasti infinitesimálních deformací) smykový modul – obdobně jako μ (II.61).

Je třeba upozornit, že tento model je až příliš primitivní, a tak jeho předpovědi mimo rozsah infinitesimálních deformací nebývají většinou ve shodě s pozorováním.

Zobecněním W na funkci I_1 a I_2 a použitím polynomiálního rozvoje dostaneme **hustoty energie tzv. rivlinovského typu**, které můžeme psát ve formě (II.63).

[41] Nebudeme na tomto místě zabíhat do detailů, ale základní představa o entropické elasticitě je založena na intuitivním faktu, že deformací dochází ke snižování entropie, čili ke zvyšování míry uspořádání vnitřní struktury materiálu. Převážně na tomto fenoménu je založena elastická odezva eleastomerů. Toto chování je v protikladu k energetické elasticitě známé z nauky o kovech, kde podstatou je nutnost vynaložit energii na překonání soudržných sil vazeb krystalové mříže. Mostem mezi těmito deformačními mechanizmy je **volná energie**, do které přispívají jak vnitřní energie (deformační energie přijatá vychýlením se z rovnovážných poloh daných vazbami krystalové mříže), tak entropie (pocházející ze změny charakteru uspořádání). Ačkoliv se ani eleastomery nedeformují čistě entropicky, příspěvek od vnitřní energie je často možné zanedbat proti příspěvku od změny entropie. Jako základní poučení lze doporučit kap. 7 v Holzapfel (2000). Zvídavějšího čtenáře je ale nutno odkázat ke klasické monografii L.R.G. Treloara (2005) *The physics of rubber elasticity*.

$$W = \sum_{i=1,k=1}^{n} C_{ik} \left(I_1 - 3\right)^i \left(I_2 - 3\right)^k + \sum_{q=1}^{m} D_q \left(J - 1\right)^{2m} \qquad m, n \in \mathbb{N} \tag{II.63}$$

V rovnici (II.63) jsou C_{ik} a D_q materiálové parametry, kde D_q vystihují objemovou stlačitelnost. Speciální variantou (II.63) je tzv. **Mooneyův–Rivlinův model** (II.64, uvedeno bez členu pro objemovou změnu).[42]

$$W = C_{10} \left(I_1 - 3\right) + C_{01} \left(I_2 - 3\right) \tag{II.64}$$

Jestliže uvažujeme v (II.63) závislost pouze na I_1 bývá tento model nazýván **Yeohův**.

Blatzův a Koův (Blatz a Ko, 1962) model je příkladem nepolynomiálního tvaru *W* (II.65).

$$W = \frac{\mu}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \tag{II.65}$$

Valanis a Landel (1967) navrhli modelovat *W* přímo **jako funkci** (hlavních) **strečů**, $W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_2)$. Tuto myšlenku v roce 1972 zobecnil R.W. Ogden[43] (**Ogdenův model**) ve svém, velmi úspěšném, modelu (II.66); α_p a μ_p jsou materiálové parametry. Ten totiž jako svůj speciální případ pokrývá neo-hookevoský ($N = 1$, $\alpha = 2$) a Mooney–Rivlinův ($N = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$) model.

$$W = \sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left(\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} \right) \tag{II.66}$$

Charakteristickým rysem mechanické odezvy makromolekulárních materiálů je, že od určité úrovně protažení vykazují významné kinematické zpevnění (v angličtině se hovoří o *large strain stiffening*). Z představ o ne-gaussovském rozložení poloh koncových bodů polymerních řetězců při deformaci pak jsou odvozovány modely, jež bývají souhrnně označovány jako *modely s omezenou* (někdy též *limitovanou* nebo *konečnou*) *protažitelností řetězce* – ***limiting chain extensibility***. Jedním z nejznámější je model **Arrudaové a Boyceové** (1998)[44]. V rovnici (II.67) uvádíme jeho **fenomenologickou aproximaci**. Dalším často používaným představitelem je **Gentův model**[45] (1996), rovnice (II.68).

Arruda–Boyce

$$W = C_1 \left[\frac{1}{2}\left(I_1 - 3\right) + \frac{1}{20\lambda_m^2}\left(I_1^2 - 9\right) + \frac{11}{1050\lambda_m^4}\left(I_1^3 - 27\right) + \frac{19}{7000\lambda_m^6}\left(I_1^4 - 81\right) + \frac{519}{673750\lambda_m^8}\left(I_1^5 - 243\right) \right] \tag{II.67}$$

[42] Navržený v roce 1940 Melvinem Mooneyem a později (1948) R.S. Rivlinem. M. Mooney (1893–1968) byl americký fyzik a reolog, první nositel Binghamovy medaile.
[43] R.W. Ogden je profesorem University of Glasgow, http://www.maths.gla.ac.uk/~rwo/ http://scholar.google.com/citations?user=vEq5LKUAAAAJ&hl=en
[44] Ellen M. Arruda je profesorkou University of Michigan v Ann Arboru, http://sitemaker.umich.edu/arruda/home https://me-web2.engin.umich.edu/pub/directory/bio?uniqname=arruda. Mary C. Boyce je profesorkou a v současnosti ředitelkou Ústavu strojního inženýrství na Massachusetts Institute of Technology, http://meche.mit.edu/people/?id=11, http://web.mit.edu/pie/commission/boyce.html.
[45] Alan Neville Gent (1927–2012) byl britský inženýr zabývající se fyzikou polymerů. V posledních letech působil na University of Akron v Ohiu. http://www.legacy.com/obituaries/ohio/obituary.aspx?pid=160176152#fbLoggedOut

Gent

$$W = -\frac{\mu J_m}{2}\ln\left(1-\frac{I_1-3}{J_m}\right) \tag{II.68}$$

V rovnici (II.67) je C_1 parametr s rozměrem hustoty energie a λ_m je parametr vyjadřující maximální streč. V Gentově modelu je μ počáteční smykový modul (napěťový parametr) a J_m je opět parametr maximální průtažnosti. Pokud $J_m \to \infty$ pak $W_{Gent} = \mu/2\cdot(I_1 - 3)$ čili $W_{neo\text{-}Hooke}$.

Posledním příkladem, který uvedeme, je **hustota deformační energie fungovského typu**. Y.C. Fung[46], bez nadsázky otec moderní biomechaniky, v šedesátých letech dvacátého století z tahových experimentů na kůži (a dalších tkáních) odvodil, že modul pružnosti by měl být lineárně úměrný mechanickému napětí – $E_Y = a\sigma + b$. Což ho přivedlo k diferenciální rovnici typu $d\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon = a\sigma(\varepsilon) + b$. Obecné řešení této rovnice bude mít exponenciální tvar závislosti mezi napětím a deformací. To dalo vzniknout celé rodině elastických potenciálů, které uvažují exponenciální závislost. Pro izotropní případ pak můžeme psát (II.69). Tato konkrétní forma byla navržena v roce 1972 H. Demirayem[47].

$$W = \frac{\mu}{2\alpha}\left(e^{\alpha(I_1-3)}-1\right) \tag{II.69}$$

Zde μ je napěťový parametr (hustota energie) a α je kladné reálné číslo.

II.4.5 PŘEDPOVĚDI HYPERELASTICKÝCH IZOTROPNÍCH MODELŮ

Nyní si na příkladu ukážeme, jaké chování vlastně výše zmíněné modely předpovídají. Budeme simulovat jednoosý tah (P.I.1.7). Využijeme k tomu popis kinematiky, který jsme odvodili již dříve v příkladech kapitoly I.1.

Příklady.

PII.1 Porovnejme mezi sebou předpovědi pro (homogenní) jednoosou tahovou napjatost modelů (II.62, 64, 68 a 69).

Takže budeme předpokládat, že materiál je (1) izotropní, (2) nestlačitelný, (3) hyperelastický. Kinematika nechť odpovídá situaci v P.I.1.7, resp. P.I.1.1 tj.:

$$x_1 = \lambda_1 X_1 \qquad x_2 = \lambda_2 X_2 \qquad x_3 = \lambda_3 X_3 .$$

Konstitutivní rovnici budeme podle (II.56) psát ve tvaru:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}.$$

[46] Yuan–Cheng Fung (1919) je jedním ze zakladatelů moderního bioinženýrství, emeritní profesor University of California San Diego. Je autorem několika významných monografií na téma biomechaniky. http://www.jacobsschool.ucsd.edu/faculty/faculty_bios/index.sfe?fmp_recid=21

[47] Hilmi Demiray (1942) je turecký matematik, který se mj. zabývá šířením mechanických vln v krevních cévách. http://www.isikun.edu.tr/i/cv/fen-edebiyat-fakultesi/hilmi-demiray/hilmi-demiray-eng.pdf

Rozepsání do složek dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{12}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{13}} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_{21}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{23}} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_{31}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{32}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deformační gradient **F** (**F** = ∂***x***/∂***X***) bude mít tvar:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Dosazením do konstitutivní rovnice dojde ke zjednodušení na:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{12}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{13}} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_{21}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{23}} \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda_{31}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{32}} & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, což ve složkách rozepíšeme jako:

$$\sigma_{11} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_{11}} - p \qquad \sigma_{22} = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_{22}} - p \qquad \sigma_{33} = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_{33}} - p \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0\,.$$

Zjevně ale platí, že nenulové streče jsou právě hlavní a bude-li v nich vyjádřeno i *W*, upravíme tak i zápis konstitutivní rovnice. Navíc nenulová jsou pouze normálová napětí, tudíž i ta budou hlavní. A tak nakonec píšeme rovnice v tomto tvaru:

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p \qquad \sigma_2 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p \qquad \sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - p\,.$$

Nyní dosadíme do výrazů pro *W* hlavní streče:

$$W_{neo-Hooke} = \frac{\mu}{2}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right) \qquad W_{Mooney-Rivlin} = C_{10}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right) + C_{01}\left(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 - 3\right)$$

$$W_{Gent} = -\frac{\mu J_m}{2}\mathbf{ln}\left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m}\right) \qquad W_{Demiray} = \frac{\mu}{2\alpha}\left(e^{\alpha\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right)} - 1\right).$$

Derivacemi obdržíme napětí:

neo-Hooke: $\sigma_1 = \mu\lambda_1^2 - p \qquad \sigma_2 = \mu\lambda_2^2 - p \qquad \sigma_3 = \mu\lambda_3^2 - p$

Mooney-Rivlin:

$$\sigma_1 = 2C_{10}\lambda_1^2 + 2C_{01}\lambda_1^2\left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) - p \qquad \sigma_2 = 2C_{10}\lambda_2^2 + 2C_{01}\lambda_2^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right) - p \qquad \sigma_3 = 2C_{10}\lambda_3^2 + 2C_{01}\lambda_3^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) - p$$

Gent: $\sigma_1 = \dfrac{\mu J_m \lambda_1^2}{J_m - (I_1 - 3)} - p \qquad \sigma_2 = \dfrac{\mu J_m \lambda_2^2}{J_m - (I_1 - 3)} - p \qquad \sigma_3 = \dfrac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m - (I_1 - 3)} - p$

Demiray: $\sigma_1 = \mu \lambda_1^2 e^{\alpha(I_1 - 3)} - p \qquad \sigma_2 = \mu \lambda_2^2 e^{\alpha(I_1 - 3)} - p \qquad \sigma_3 = \mu \lambda_3^2 e^{\alpha(I_1 - 3)} - p$

Multiplikátor p je třeba určit z okrajové podmínky pro každý konstitutivní model zvlášť! Jestliže jsme v situaci jednoosé napjatosti, můžeme použít např. $\sigma_3 = 0$.

neo-Hooke: $p = \mu \lambda_3^2$,

Mooney-Rivlin: $p = 2C_{10}\lambda_3^2 + 2C_{01}\lambda_3^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)$,

Gent: $p = \dfrac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m - (I_1 - 3)}$,

Demiray: $p = \mu \lambda_3^2 e^{\alpha(I_1 - 3)}$.

Konstitutivní rovnice nabudou tvar:

neo-Hooke: $\sigma_1 = \mu\lambda_1^2 - \mu\lambda_3^2 \qquad \sigma_2 = \mu\lambda_2^2 - \mu\lambda_3^2 \qquad \sigma_3 = 0$

Mooney-Rivlin:

$$\sigma_1 = 2C_{10}\lambda_1^2 + 2C_{01}\lambda_1^2\left(\lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) - 2C_{10}\lambda_3^2 - 2C_{01}\lambda_3^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \quad \sigma_2 = 2C_{10}\lambda_2^2 + 2C_{01}\lambda_2^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right) - 2C_{10}\lambda_3^2 - 2C_{01}\lambda_3^2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) \quad \sigma_2 = 0$$

Gent: $\sigma_1 = \dfrac{\mu J_m \lambda_1^2}{J_m - (I_1 - 3)} - \dfrac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m - (I_1 - 3)} \qquad \sigma_2 = \dfrac{\mu J_m \lambda_2^2}{J_m - (I_1 - 3)} - \dfrac{\mu J_m \lambda_3^2}{J_m - (I_1 - 3)} \qquad \sigma_3 = 0$

Demiray: $\sigma_1 = \mu\lambda_1^2 e^{\alpha(I_1-3)} - \mu\lambda_3^2 e^{\alpha(I_1-3)} \qquad \sigma_2 = \mu\lambda_2^2 e^{\alpha(I_1-3)} - \mu\lambda_3^2 e^{\alpha(I_1-3)} \qquad \sigma_3 = 0$.

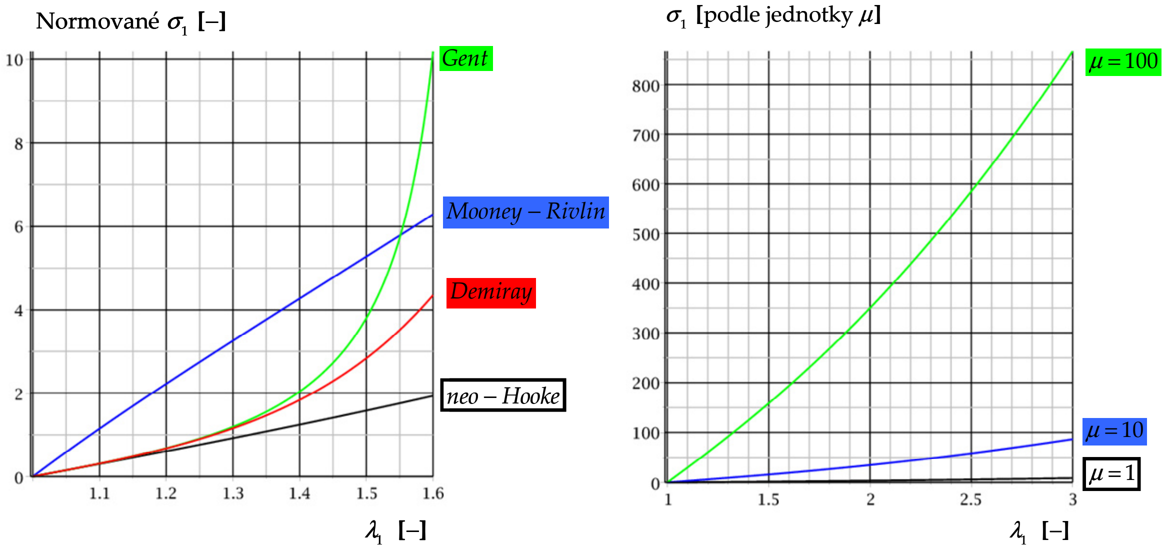
Rovnice se ještě zjednoduší, uvážíme-li kinematické omezení $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ (nestlačitelnsot) a současně fakt, že příčné zúžení u izotorpního materiálu musí splňovat $\lambda_2 = \lambda_3$. Kombinací dostáváme $\lambda_2 = \lambda_3. = 1/\sqrt{\lambda_1}$.

Konečné tvary závislosti mezi napětím a strečem pro jediné nenulové napětí σ_1 jsou následující:

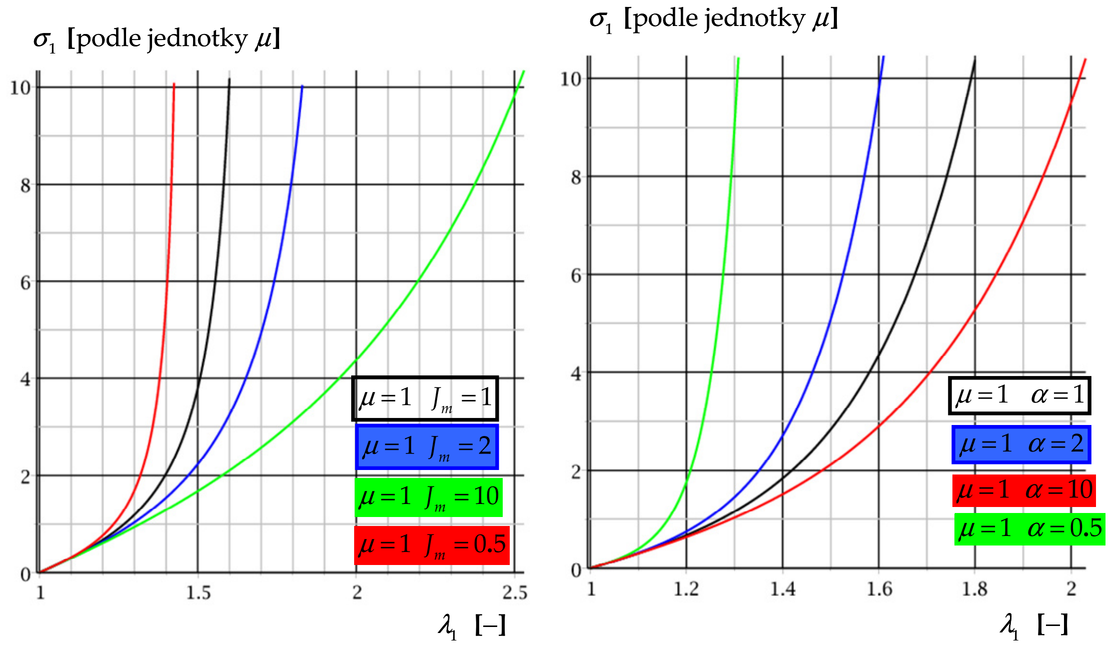
$$\sigma_{neo-Hooke} = \mu\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \qquad \sigma_{Mooney-Rivlin} = 2C_{10}\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) + 2C_{01}\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)$$

$$\sigma_{Gent} = \frac{\mu J_m}{\lambda_1 J_m + 3\lambda_1 - \lambda_1^3 - 2}\left(\lambda_1^3 - 1\right) \qquad \sigma_{Demiray} = \mu e^{\alpha\left(\lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3\right)}\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

Je zjevné, že neo-hookeovský a Mooneyův-Rivlinův model závisí na parametrech lineárně naopak Gentův a Demirayův nelineárně. Na následujících obrázcích jsou předpovědi modelů pro některé hodnoty parametrů.



Obrázek II.2. Vlevo: Průběh napětí σ_1 pro neo-hookeovský, Mooenyův-Rivlinův, Gentův a Demirayův model při jednotkové volbě parametrů ($\mu = C_{10} = C_{01} = J_m = \alpha = 1$). Rozdíly mezi křivkami pochází pouze z rozdílných funkčních závislostí. Vpravo: neo-hookeovský model pro $\mu = 1$, 10 a 100.



Obrázek II.3. *Vlevo*: Průběh napětí σ_1 pro **Gentův model** s $J_m = 1$, 2, 10 a 0.5 ($\mu = 1$). **Logaritmická funkce hustoty deformační energie vede po derivaci na racionální funkci, grafy jsou tedy obecné hyperboly. Růst je tím strmější, čím menší je parametr J_m. Přípustné deformace jsou v tomto modelu omezeny, neboť jak W, tak výrazy pro napětí, pro určitou hodnotu λ_1 rostou nade všechny meze. Za tímto bodem se obrátí trend napětí (z rostoucí funkce streče na klesající). Protože rovnice pro napětí je:** $\sigma_{Gent} = \mu J_m \left(\lambda_1^3 - 1\right) / \left(\lambda_1 J_m + 3\lambda_1 - \lambda_1^3 - 2\right)$**, je poloha tohoto bodu určena řešeními rovnice** $\lambda_1 J_m + 3\lambda_1 - \lambda_1^3 - 2 = 0$. *Vpravo*: Průběh napětí pro **exponenciální model**, který ukazuje, že čím je parametr a vyšší, tím strměji stoupá napětí s rostoucí deformací. Exponenciální model neklade žádné podmínky na přípustné streče – pro všechna reálná čísla je hodnota napětí i energie reálným číslem. **Toto je principiální rozdíl mezi oběma modely**, který je přítomen, ačkoliv samotné křivky vypadají velmi podobně.

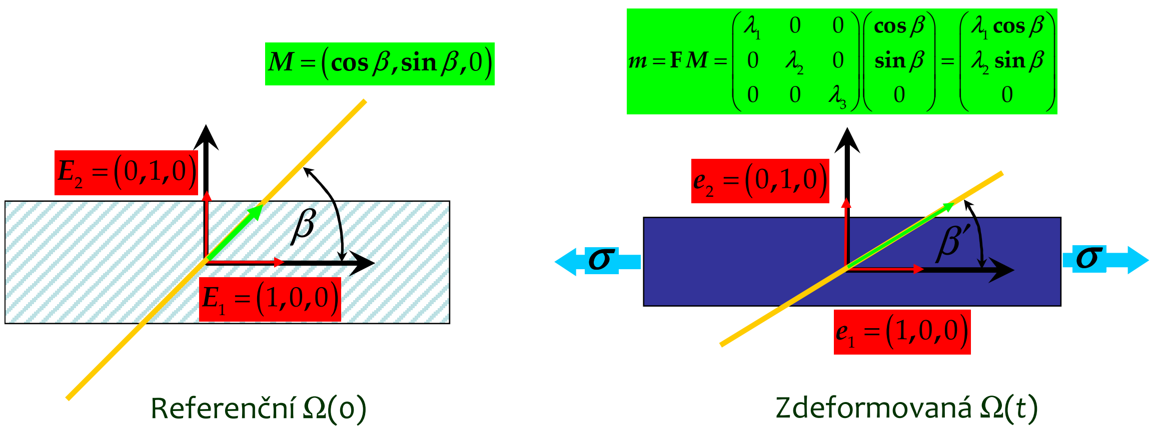
II.4.5 INVARIANTY PRO ANIZOTROPNÍ MATERIÁL

Většinu měkkých biologických tkání (pro nás jsou zde nejdůležitější cévy – tepny a žíly –, ale platí to i pro srdce, chlopně, krycí blány jako je osrdečník, a nakonec i části jiných soustav jako jsou chrupavky, šlachy vazy, kůže,...) nelze uspokojivě modelovat jako izotropní materiály. Během růstové periody v nich dojde k vytvoření orientované fibrilární struktury (založené nejčastěji na kolagenních a elastinových sítích). Makroskopická mechanická odezva pak samozřejmě závisí na směru zatížení.

Probereme dvě třídy anizotropního chování odpovídající (modelově) homogennímu vyztužení vlákny[48]: (1) materiál s jedním preferovaným směrem (tzv. transverzální izotropie), (2) materiál se dvěma (mechanicky ekvivalentními) preferovanými směry (tzv. lokální ortotropie).

Obdobně jako v případě izotropních materiálů je dnes běžné formulovat konstitutivní rovnici pomocí invariantů. Ukážeme, že chápeme-li anizotropii jako existenci preferovaných směrů v kontinuu, existují při deformaci materiálu kromě hlavních invariantů tenzoru deformace ještě další invarainty vztažené k tomuto preferovanému směru.

Transverzálně izotropní materiál. Zvažme situaci na Obrázku II.4. Čili mějme těleso (pro jednoduchost nakreslené ve 2D) v referenční konfiguraci, jehož body $\boldsymbol{X}$ jsou zaměřeny v kartézském systému, $\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{E}_1 + X_2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3$. Materiál tělesa nechť má jeden preferovaný směr v referenční konfiguraci od osy X_1 skloněn pod úhlem β. Můžeme ho charakterizovat vektorem $\boldsymbol{M} = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0) = \cos(\beta)\boldsymbol{E}_1 + \sin(\beta)\boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3$. Předpokládávejme, že těleso přejde z referenční konfigurace do nějaké zdeformované konfigurace, kde je vystaveno podmínkám homogenní jednoosé tahové napjatosti a homogenní trojosé deformace. Ta nechť je popsána pomocí $\mathbf{F} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.



Obrázek II.4. Vlevo: referenční konfigurace materiálu s jedním preferovaným směrem. Vpravo: zdeformovaná konfigurace. Preferovaný směr je při zadané kinematice po deformaci vidět pod úhlem $\beta' = \mathbf{arctan}\left((\lambda_2/\lambda_1)\mathbf{cot\,an}(\beta)\right)$.

[48] Sousloví *vyztužení vlákny* zde používáme jen jako názornou pomůcku pro odůvodnění vzniku anizotropního chování. Samo o sobě toto sousloví patří do teorie kompozitních materiálů, čili vícefázového kontinua. Pro nás to ale znamená, že v každém místě kontinua se nachází jak (orientovaná) vláknitá složka, tak složka matrice, která tvoří pojivo pro vlákna. Na rozměrové škále charakterizované dX ale nedokážeme tyto dvě složky oddělit a tvoří homogenní kontinuum.

V této kinematice se vektor $\boldsymbol{M}$ převede na zdeformovaný (již nenormovaný) vektor $\boldsymbol{m}$ podle pravidla:

$$\boldsymbol{m} = \mathbf{F}\,\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\beta \\ \lambda_2 \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro jeho druhou mocninu platí $\boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \lambda_1\cos\beta & \lambda_2\sin\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\beta \\ \lambda_2 \sin\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 \cos^2\beta + \lambda_2^2 \sin^2\beta$.

To je skalár a jak jsme viděli při rozboru objektivity, jde o vhodného kandidáta na proměnnou v konstitutivní rovnici. Platí totiž: $\boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = (\mathbf{F}\boldsymbol{M})\cdot(\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{M}\mathbf{F}^T)\cdot(\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M}(\mathbf{C}\boldsymbol{M})$, kde je tento skalár vyjádřen čistě v materiálovém popisu. Veličinu $\boldsymbol{m}^2$ interpretujeme geometricky jako kvadrát streče λ_M, který kinematika deformace popsaná $\mathbf{F}$ způsobí v preferovaném směru kontinua; $\boldsymbol{m}^2 = \lambda_M^2$. Ke stejnému výsledku bychom dospěli i uvažováním obecného $\mathbf{F}$ se všemi devíti nenulovými složkami.

Zřejmě $\boldsymbol{m}^2$ vytváří další invariant v průběhu deformace. Pokud to zřejmé není, tak uvažme, že natočení souřadnicové soustavy před deformací $\mathbf{F}$ znamená aplikaci rotace $\mathbf{Q}$ podle pravidla $\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{Q}^T$. Rotace $\mathbf{Q}$ působí ovšem i na vektor $\boldsymbol{M}$ a to podle pravidla $\boldsymbol{M}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{M}$. Takže deformace sama vede k vektoru $\boldsymbol{m}'$ podle rovnice $\boldsymbol{m}' = \mathbf{F}'\boldsymbol{M}'$. Pro natočený zdeformovaný vektor tedy dostáváme:

$\boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{m}' = (\mathbf{F}'\boldsymbol{M}')\cdot(\mathbf{F}'\boldsymbol{M}') = (\mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{M})\cdot(\mathbf{F}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{M}) = (\mathbf{F}\mathbf{I}\boldsymbol{M})\cdot(\mathbf{F}\mathbf{I}\boldsymbol{M}) = (\mathbf{F}\boldsymbol{M})\cdot(\mathbf{F}\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}$.

K veličině $\boldsymbol{m}^2$ lze dospět ještě dalším způsobem, který pro nás bude nejdůležitější. Zaveďme novou tenzorovou veličinu $\mathbf{M}$ definovanou jako tenzorový součin $\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}$ (II.70, II.71). Nazveme ji ***tenzor orientace***. Též jí můžeme říkat ***strukturální tenzor příslušný směru*** $\boldsymbol{M}$.

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1M_1 & M_1M_2 & M_1M_3 \\ M_2M_1 & M_2M_2 & M_2M_3 \\ M_3M_1 & M_3M_2 & M_{13}M_3 \end{pmatrix} \tag{II.70}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{M} = M_{11}\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1 + M_{12}\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_2 + \ldots + M_{32}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_2 + M_{33}\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 = \\ M_1M_1\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1 + M_1M_2\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_2 + \ldots + M_3M_2\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_2 + M_3M_3\boldsymbol{E}_3\otimes\boldsymbol{E}_3 \end{gathered} \tag{II.71}$$

Takže např. pro vektor $\boldsymbol{M} = (cos(\beta), sin(\beta), 0)$ dospějeme k tenzoru:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta & 0 \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud to do teď nebylo zřejmé, nyní vidíme, že **tenzor M je symetrický**. Pomocí tenzorů $\mathbf{M}$ a $\mathbf{C}$ můžeme dospět ke druhé mocnině streče v preferovaném směru (čili k druhé mocnině protažení výztužného vlákna) jako ke stopě $tr(\mathbf{CM})$, která je zároveň rovna $\mathbf{C}:\mathbf{M}$.

V uvažované situaci jednoho preferovaného směru tím ale nejsou vyčerpány všechny veličiny invariantní vzhledem k rotaci souřadnicového systému. Invariantní je též skalár definovaný jako $tr(\mathbf{C}^2\mathbf{M}) = \mathbf{C}^2:\mathbf{M}$.[49]

Takže pro materiál s jedním preferovaným směrem $\boldsymbol{M}$, kde deformace je popsána symetrickým tenzorem $\mathbf{C}$ s hlavními invarianty $I_1(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C})$ a $I_3(\mathbf{C})$, zavádíme doplňkové invarianty $I_4(\mathbf{C},\mathbf{M}) = tr(\mathbf{CM})$ a $I_5(\mathbf{C},\mathbf{M}) = tr(\mathbf{C}^2\mathbf{M})$.

Materiál se dvěma preferovanými směry. Obdobnými úvahami jako v předchozím můžeme dospět k závěru, že v materiálu, kde anizotropie vzniká dík dvěma preferovaným směrům – označme jejich jednotkové vektory v referenční konfiguraci jako $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ – lze dodefinovat další doplňkové invarianty, které jsou typu $I(\mathbf{C},\mathbf{M}_1)$, $I(\mathbf{C},\mathbf{M}_2)$ a $I(\mathbf{C},\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2)$. Kromě toho zde bude ještě invariant typu $I(\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2)$, který ovšem vůbec nebude obsahovat informaci o $\mathbf{C}$ a nebude tudíž z hlediska popisu deformace užitečný. Tenzory $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ vytváříme z vektorů $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ podle pravidla (II.70).

Invarianty zavedeme podle následujících pravidel (II.72). Zde $\mathbf{C}$ je pravý Cauchyův–Greenův tenzor deformace a $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ jsou symetrické tenzory orientace pro referenční vektory $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$.[50]

$$I_4\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_1\right) = tr\left(\mathbf{C}\,\mathbf{M}_1\right) = \mathbf{C}:\mathbf{M}_1 = \boldsymbol{M}_1\cdot\left(\mathbf{C}\,\boldsymbol{M}_1\right) \tag{II.72}$$

$$I_5\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_1\right) = tr\left(\mathbf{C}^2\,\mathbf{M}_1\right) = \mathbf{C}^2:\mathbf{M}_1 = \boldsymbol{M}_1\cdot\left(\mathbf{C}^2\,\boldsymbol{M}_1\right) \tag{II.73}$$

$$I_6\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_2\right) = tr\left(\mathbf{C}\,\mathbf{M}_2\right) = \mathbf{C}:\mathbf{M}_2 = \boldsymbol{M}_2\cdot\left(\mathbf{C}\,\boldsymbol{M}_2\right) \tag{II.74}$$

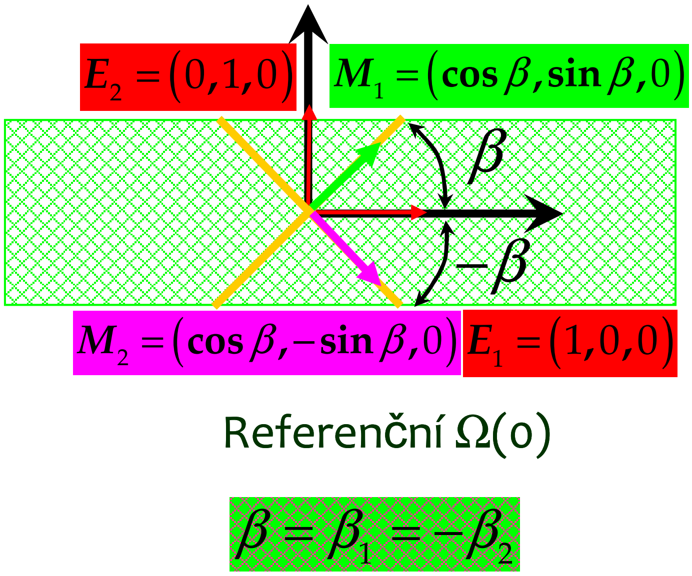
$$I_7\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_2\right) = tr\left(\mathbf{C}^2\,\mathbf{M}_2\right) = \mathbf{C}^2:\mathbf{M}_2 = \boldsymbol{M}_2\cdot\left(\mathbf{C}^2\,\boldsymbol{M}_2\right) \tag{II.75}$$

$$I_8\left(\mathbf{C},\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2\right) = \left(\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{M}_2\right)\boldsymbol{M}_1\cdot\left(\mathbf{C}\,\boldsymbol{M}_2\right) \tag{II.76}$$

Je zřejmé, že dvojice invariantů I_4, I_5 a I_6, I_7 mají formálně stejný tvar. Metoda konstrukce invariantů, které závisí na tenzoru deformace a preferovaných směrech, se samozřejmě dá zobecnit i pro vyšší počet směrů. Čtenáři se zájmem o tuto oblast doporučujeme jako úvodník kapitolu 6.7 a 6.8 v Holzapfel (2000) a následně kap. 6 v Itskov (2007) – kde najde i ono zobecnění. Dodejme že, když platí $\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{M}_2 = 0$, hovoříme o **ortotropním materiálu** (nutně pak totiž existuje ještě třetí směr, který je kolmý k rovině v níž $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ leží).

[49] Technicky vzato můžeme najít nekonečně mnoho invariantů… Nás ale zajímají ty, které přinášejí informaci o podmínkách deformace, které umíme geometricky interpretovat. Lze dokázat, že $tr(\mathbf{CM})$ a $tr(\mathbf{C}^2\mathbf{M})$ společně s hlavními invarianty I_1, I_2 a I_3 tvoří „bázi“ v „prostoru invariantů.“

[50] Devátým, na deformaci nezávislým, invariantem je $I_9(\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2) = (\boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{M}_2)^2$.



Obrázek II.5. Preferované směry v lokálně ortotropním materiálu.

II.4.6 MODELY PRO ANIZOTROPNÍ W

Jak bylo již dříve řečeno, v případě anizotropního materiálu není hustota deformační energie izotropní funkcí tenzoru deformace, neboť příslušná grupa izotropie (grupa symetrie), vůči níž je W invariantní pro **Q**, je **vlastní** podgrupou v Orth⁺.[51] Tato skutečnost by nás ale nutila pro každý materiál přesně charakterizovat grupu symetrií, abychom věděli, jak s ním na zkušebně zacházet… Ba co víc, máme-li v ruce neznámý materiál, tak dopředu vůbec nevíme v jakém směru je tužší, poddajnější, jak ho orientovat…

Taková situace je velmi nepraktická a asi nepřekvapí, že i pro anizotropní materiály byl navržen matematický postup jak formulovat W založený na izotropii (čili na práci se všemi vlastními ortogonálními transformacemi).

Základní myšlenka, kterou zde nebudeme dokazovat (více s. 119 v Itskov (2007)), **spočívá v ekvivalenci** mezi anizotropní funkcí hustoty deformační energie $W = W(\mathbf{C})$, tj. $W = W(\mathbf{C})$ **izotropní vzhledem k nějaké grupě symetrií tvořící podgrupu** v Orth⁺, a $W = W(\mathbf{C}, \mathbf{M}_1, .., \mathbf{M}_k)$, která je **izotropní vůči všem vlastním ortogonálním transformacím** $\mathbf{Q} \in$ Orth⁺. Přitom $\mathbf{M}_1, .., \mathbf{M}_k$ jsou tenzory orientace preferovaných směrů $\boldsymbol{M}_1, .., \boldsymbol{M}_k$, které způsobují, že $W = W(\mathbf{C})$ je anizotropní.

Znamená to, že mít anizotropní W jako funkci jedné tenzorové proměnné ($\mathbf{C}$) je ekvivalentní situaci, kdy máme izotropní W jako funkci více tenzorových proměnných ($\mathbf{C}, \mathbf{M}_1, .., \mathbf{M}_k$).

Transversální izotropie. Výše uvedené v důsledku znamená, že o W řekneme, že odpovídá transverzálně izotropnímu materiálu charakterizovanému preferovaným směrem $\boldsymbol{M}$ právě tehdy, když platí (II.77).

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T\right) \qquad \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+ \qquad \text{(II.77)}$$

[51] Tj. platí: *příslušná grupa symetrií* ⊂ Orth⁺ a současně *příslušná grupa symetrií* ≠ Orth⁺.

Takovou funkci pak lze reprezentovat jako izotropní funkci invariantů $I_1(\mathbf{C})$, $I_2(\mathbf{C})$ a $I_3(\mathbf{C})$, $I_4(\mathbf{C},\mathbf{M})$ a $I_5(\mathbf{C},\mathbf{M})$.

Dva preferované směry M_1 a M_2. Funkce hustoty deformační energie W odpovídá anizotropnímu materiálu se dvěma preferovanými směry, jestliže splňuje (II.78), čili je izotropní funkcí tří tenzorových proměnných $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$.

$$W\left(\mathbf{C},\mathbf{M}_1,\mathbf{M}_2\right)=W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\mathbf{M}_1\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\mathbf{M}_2\mathbf{Q}^T\right) \qquad \mathbf{Q}\in \mathrm{Orth}^+ \tag{II.78}$$

I zde nejsnáze dospějeme k funkci splňující (II.78) konstrukcí pomocí invariantů.

Dodejme ještě, že v případě, že v materiálu se dvěma preferovanými směry neplatí $M_1 \cdot M_2 = 0$, ale platí, že W je symetrická funkce vzhledem k $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$, pak hovoříme o tzv. **lokální ortotropii**. To nastane např. tehdy, jestliže dvě rodiny vláken přispívají stejnou měrou do W (vizte obr. II.5).

Tento způsob konstrukce anizotropních W pro měkké tkáně je od roku 2000, kdy G.A. Holzapfel, C.T. Gasser a R.W. Ogden publikovali svůj v pravdě legendární článek[52], čím dál více populární a dnes již asi převládá nad všemi ostatními možnostmi. Velmi důrazně doporučujeme všem čtenářům tento článek k přečtení http://www.biomech.tugraz.at/files/publications/Holzapfel_et_al-JElasticity-2000.

Rovnice (II.79) popisuje jimi navržený model pro elastické krevní cévy. Dále ho budeme označovat jako **HGO model**. Ukazuje se ale, že tento model, resp. jeho transverzálně izotropní restrikce, vyrovnávají velmi výstižně výsledky pozorování pro velkou část měkkých tkání vůbec. Je třeba říci, že jde vlastně o zobecnění Fungovy ideje exponenciálního chování.

$$W_{HGO}=\frac{\mu}{2}\left(I_1-3\right)+\left(\frac{k_1}{2k_2}e^{k_2\left(I_4-1\right)^2}-1\right)+\left(\frac{k_1}{2k_2}e^{k_2\left(I_6-1\right)^2}-1\right) \tag{II.79}$$

Části tohoto modelu interpretujeme obvykle tak, že neo-hookevský člen je zodpovědný za mechanickou energii, která se během deformace ukládá do izotropní matrice (např. elastinová síť) a exponenciální členy odpovídají energii uložené do dvou protiběžných šroubovicově vinutých rodin kolagenních vláken.[53] μ, k_1, k_2 a β (β je skryté v I_4 a I_6) jsou materiálové parametry modelu.

Jestliže můžeme považovat model (II.79) za v jistém smyslu anizotorpní rozšíření modelu (II.69). Pak dodejme, že pro Gentův model (II.68) navrhli C. Horgan a G. Saccomandi (2005) obdobné rozšíření, které vedlo k zavedení pojmu *omezená průtažnost vláken* (*limiting fiber extensibility*), (II.80). Zde μ, J_m, k a β jsou parametry modelu.

$$W=\frac{\mu}{2}\left(I_1-3\right)-\frac{kJ_m}{2}\ln\left(1-\frac{\left(I_4-1\right)^2}{J_m}\right)-\frac{kJ_m}{2}\ln\left(1-\frac{\left(I_6-1\right)^2}{J_m}\right) \tag{II.80}$$

[52] V červenci 2013 měl tento článek v bibliografické databázi SCOPUS úctyhodných 763 citací.

[53] O šroubovicích zde hovoříme proto, že první aplikace tohoto modelu byla na cévách, čili trubicích. Jinak se samozřejmě můžeme držet obrázku II.5, který znázorňuje situaci v rovině.

Často užívanou variantou anizotropního modelu W je také Fungův exponenicální model. V literatuře je možno najít různé jeho varianty lišící se podle exponentu. Nejobecnější forma tohoto modelu je (II.81). c a C_{IJKL} jsou materiálové parametry a E_{IJ} a E_{KL} jsou složky Greenova–Lagrangeova tenzoru deformace.

$$W = \frac{c}{2}\left(e^{Q} - 1\right) \qquad Q = C_{IJKL} E_{IJ} E_{kl} \tag{II.81}$$

Q je zformulováno analogicky k hustotě energie v Hookeově zákoně. Jde tedy o exponenciální funkci s argumentem ve formě kvadrátů složek tenzoru deformace. C_{IJKL} představuje 81 parametrů, z nichž maximálně 21 je nezávislých, protože očekáváme splnění hlavních i vedlejších symetrií: $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$ a $C_{IJKL} = C_{JIKL} = C_{IJLK}$. I 21 je z hlediska možností experimentální charakterizace téměř nedosažitelně mnoho. Naprosto nejčastěji se objevují varianty: $Q = C_{IIKK}E_{II}E_{KK}$, která má 6 nezávislých složek, anebo $Q = C_{1111}E_{11}^2 + 2C_{1122}E_{11}E_{22} + C_{2222}E_{22}^2$. Pro některé hodnoty parametrů vizte např. Holzapfel a kol. (2000).

Na závěr dodejme, že u modelů (II.79) a (II.80) je neo-hookeovský člen nezbytný i z čistě fyzikálních důvodů. Snadno lze ukázat, že bez tohoto členu by směrnice tečny v počátku křivek napětí–deformace byla nulová! V takové případě bychom jen obtížně mohli mluvit o pevné látce...

II.4.7 PŘEDPOVĚDI ANIZOTROPNÍCH HYPERELASTICKÝCH MODELŮ

Jaké chování anizotorpní modely předpovídají si ukážeme na příkladech. Budeme simulovat jednoosou tahovou zkoušku a nafukování nelineárně pružné anizotorpní trubice.

Příklady.

PII.2 Ukažme jakou odezvu materiálu na jednoosý tah předpovídají modely z publikace Holzapfel a kol. (2005) pro jednotlivé vrstvy lidských věnčitých tepen.[54]

Autoři konali jednoosé tahové zkoušky s jednotlivými vrstvami (intima – vnitřní krycí a komunikační vrstva, medie – střední vrstva zajišťující pružnost sestavená z elastinových membrán protkaných kolagenními a svalovými vlákny, adventicie – vnější vrstva zajišťující dostatečnou pevnost složená převážně z kolagenního vaziva) povrchových srdečních tepen.

V úvahu jsou brány pouze pasivní (čil bez aktivace svalové kontrakce) elastické (bez viskózních efektů jako je relaxace a creep) vlastnosti.

Použitý model pro hustotu deformační energie odpovídal vzorci (II.82).

$$W = \mu\left(I_1 - 3\right) + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2\left[(1-\rho)(I_1-3)^2 + \rho(I_4-1)^2\right]} - 1\right) \tag{II.82}$$

[54] Holzapfel GA, Sommer G, Gasser CT, Regitnig P (2005) Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*289(5 58-5):H2048-58. http://ajpheart.physiology.org/content/289/5/H2048

μ, k_1 a k_2 jsou materiálové parametry, které mají stejný význam jako ve (II.79). Tedy až na multiplikativní konstantu ½ u μ. Narozdíl od (II.79) je zde argument exponenciální funkce rozšířen o izotropní člen ($I_3 - 1$). Podle hodnoty parametru ρ, který musí splňovat $0 < \rho < 1$, tento model předpovídá větší či menší míru anizotorpie. Při volbě $\rho = 1$ dospějeme k transverzálně izotropní analogii (II.79). Pro $\rho = 0$ dospějeme k čistě izotropní odezvě. K této úpravě bylo přistoupeno, jelikož se ukázalo, že nasměrování (kolagenní) vláknité složky není dokonalé a lze spíše říci, že existuje dominantní směr, kolem něhož jsou s určitou hustotou pravděpodobnosti rozptýleny ještě další směry.[55]

Nelineární regresí byly získány materiálové parametry, jejichž střední hodnoty (medián) použijeme:

intima	$\mu = 26.16$ kPa	$k_1 = 80.22$ kPa	$k_2 = 110.34$	$\beta = 66.3°$	$\rho = 0.5$
medie	$\mu = 1.09$ kPa	$k_1 = 21.54$ kPa	$k_2 = 7.77$	$\beta = 21°$	$\rho = 0.25$
adventicie	$\mu = 6.69$ kPa	$k_1 = 32.5$ kPa	$k_2 = 67.92$	$\beta = 69.3°$	$\rho = 0.55$.

Jednoosé tahové zkoušky se konají s podlouhlými kvádry (proužky) vyjmutými z tepen v obvodovém a axiálním směru jejich přirozeného (válcového) souřadnicového systému. Budeme tedy používat kartézský systém, kde osa 1 je totožná s obvodovou osou trubice (po jejím rozvinutí), 2 je totožná s axiální osou (po rozvinutí) a 3 s radiální osou.

Materiál budeme pokládat za nestlačitelný.

Kinematiku jednoosého tahu budeme modelovat jako homogenní deformaci podle předpisu:

$$x_1 = \lambda_1 X_1 \qquad x_2 = \lambda_2 X_2 \qquad x_3 = \lambda_3 X_3 .$$

Deformační gradient **F** (**F** = ∂***x***/∂**X**) bude mít tvar:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Nestlačitelnost představuje podmínku $\det(F) = 1 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Model (II.82), ačkoliv budí dojem trasnverzální izotropie, je třeba chápat jako lokální ortotropii, neboť se pohybujeme v kontextu cévní mechaniky. Platí tedy (stejně jako na obrázku II.5): $\beta = \beta_1 = -\beta_2$.

Parametr β vystupuje v I_4, které píšeme (ve shodě s II.72) jako (II.83).[56]

$$I_4 = \lambda_1^2 \cos^2(\beta) + \lambda_2^2 \sin^2(\beta) \tag{II.83}$$

Dosadíme-li do (II.82) z (II.83) a $I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ dostaneme (II.84).

$$W = \mu\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3\right) + \frac{k_1}{k_2}\left(e^{k_2\left[(1-\rho)\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-3\right)^2 + \rho\left(I\lambda_1^2 \cos^2(\beta) + \lambda_2^2 \sin^2(\beta) - 1\right)^2\right]} - 1 \right) \tag{II.84}$$

[55] Tato myšlenka byla o rok později přesněji matematizována v Gasser TC, Ogden RW, Holzapfel GA (2006) Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the Royal Society Interface* 3(6):15-35. http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/3/6/15 V této publikaci se objevuje exponent ve formě $k_2(\kappa I_1 - (1 - 3\kappa)I_4 - 1)^2$. Zde $\kappa \in \langle 0,1/3 \rangle$ je materiálový parametr charakterizující rozptyl orientace vláken. Materiál je izotropní pro $\kappa = 0$ a anizotropní s dokonale uspořádanými vlákny pro $\kappa = 1/3$.

[56] V tomto konkrétním případě $I_4 = I_6$.

Konstitutivní rovnici budeme podle (II.56) psát ve tvaru:

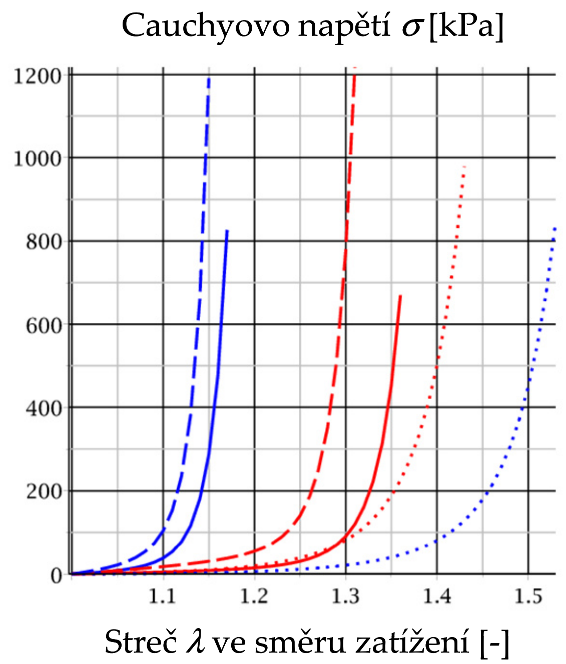
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p\mathbf{I}.$$

Vzhledem k délce výrazů je zde nebudeme vypisovat.

Pro eliminaci neurčitého p použijeme okrajovou podmínku $\sigma_3 = 0$ (čili nulovost napětí ve směru normály povrchu vzorku). Poté do zbylých výrazů (pro σ_1 a σ_2) dosadíme z nestlačitelnosti, $\lambda_3 = 1/(\lambda_1\lambda_2)$. Každá složka tenzoru napětí je funkcí dvou proměnných. Jedna z nich je dána přímo naší volbou – a sice velikost streče ve směru působící síly při tahové zkoušce. Druhou je hodnota příčného streče (λ_2 pro zkoušku probíhající ve směru 1 a obráceně λ_1 pro zkoušku ve směru 2). Pro zjištění příčných strečů použijeme druhou okrajovou podmínku:

Zkouška ve směru 1:	Zkouška ve směru 2:
λ_1 je předepsáno	λ_2 je předepsáno
$\sigma_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \rightarrow \lambda_2$	$\sigma_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \rightarrow \lambda_1$.

Jestliže numericky dopočítáme příčné streče ke zvoleným hodnotám podélného streče, dosadíme obě hodnoty do výrazu pro podélné napětí (napětí ve směru síly). Výsledné předpovědi jsou na obrázku II.6.



Obrázek II.6 – Jednoosý tah vrstev lidské věnčité tepny. Červeně jsou uvedeny hodnoty napětí σ_1 (proužek v obvodovém směru), modře hodnoty σ_2 (proužek v axiálním směru). Vodorovná osa má význam streče ve směru zatížení proužku. Plné křivky ——— odpovídají adventicii, tečkované ······· medii a přerušované čáry - - - - - - odpovídají intimě. Vstupní parametry podle Holzapfel a kol. (2005).

PII.3 Výpočtovou simulací ukažme, jaká je odezva lidské břišní aorty na současné zatížení vnitřním tlakem a předepínací axiální silou. Čili provedeme výpočet, jehož výsledky budou odpovídat tzv. inflačně-extenznímu testu, který se běžně provádí se vzorky cév *ex vivo* pro určení jejich materiálových parametrů. Jako zdrojová data použijeme výsledky v Labrosse a kol. (2013).

Ze sedmnácti aort testovaných Labroessem a kol. (2013) si vybereme např. muže stáří ve smrti 38 let. Pro něj v tabulce 1 zjistíme referenční vnitřní poloměr R_i = 5.3 mm a referenční tloušťku H = 1.22 mm. Materiálové parametry mají hodnoty c_1 = 14.7 kPa, c_2 = 3.04, c_3 = 7.38. Ty vystupují v anizotropním hyperelastickém materiálovém modelu navrženém Guccionem a kol. (1991) uvedeném v rovnici (II.85). Jak vidno, jde o model fingovského typu. $E_{\Theta\Theta}$, E_{ZZ} a E_{RR} jsou složky Greenova–Lagrangeova tenzoru deformace **E** ve směrech Θ, Z a R referenčního válcového souřadnicového systému.

$$W = \frac{c_1}{2}\left(e^{c_2 E_{\Theta\Theta}^2 + c_3\left(E_{ZZ}^2 + E_{RR}^2\right)} - 1\right) \tag{II.85}$$

Břišní aortu budeme modelovat jako válec konstantního průřezu a tloušťky, který je zaslepený dnem. Jako model kinematiky a napjatosti použijeme válcovou membránovou skořepinu. To znamená, že zanedbáme efekt konečné tloušťky stěny – všechny posuvy se budou realizovat pouze jako změna polohy střední plochy válce. Vzhledem k tomu, že (II.85) neobsahuje závislost na smykových deformacích, nebudeme je uvažovat. Budeme tedy zatěžovat válec o referenčních rozměrech R, L, H (poloměr, délka, tloušťka), který přiložením vnitřního tlaku a protahující síly F_{red} přejde ve zdeformovaný válec o rozměrech r, l, h. Při této kinematice se bude zmenšovat/zvětšovat poloměr a axiální poloha bodů válcové plochy (průřezy se nebudou natáčet). Tato kinematika je vystižena rovnicemi (II.86).

$$r = \lambda_{\theta\Theta} R \qquad z = \lambda_{zZ} Z \qquad h = \lambda_{rR} H \tag{II.86}$$

Z nich vyjádříme deformační gradient **F** (pomocí I.1-36, resp. I.1-41 až 43) jako:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že když se průřezy vůči sobě nenatáčí, tak $\Theta = \theta$.

Greenův–Lagrangeův tenzor deformace **E** můžeme vyjádřit jako E = ½($\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ – **I**); čili ve složkách platí $E_{IJ} = ½(\lambda_{iJ} - 1)$. Po dosazení do W dostaneme:

$$W = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2 - 1\right) + \frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2 + \lambda_{rR}^2 - 2\right)} - 1\right).$$

Konstitutivní rovnici ve tvaru (II.56) může psát jako (II.87).

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{rR}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\theta\Theta}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial W}{\partial \lambda_{zZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{rR} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zZ} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_1c_3\lambda_{rR}^2\left(\lambda_{rR}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c_1c_2\lambda_{\theta\Theta}^2\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}c_1c_3\lambda_{zZ}^2\left(\lambda_{zZ}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p \end{pmatrix} \tag{II.87}$$

V případě tenkostěnné membránové skořepiny můžeme složky tenzoru napětí vyjádřit přímo z rovnic rovnováhy. Připomeňme, že všechna napětí jsou soustředěna ve střední ploše válce a jejich hodnoty odpovídají předpokladu o konstantním rozložení po tloušťce stěny. Takže rovnice rovnováhy můžeme psát jako (II.88).

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{2} \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{Pr_m}{h} \qquad \sigma_{zz} = \frac{Pr_m}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi r_m h} \tag{II.88}$$

Symbolem P jsme označili vnitřní tlak a současně předpokládáme, že z vnějšku je tlak roven 0. Indexem m u poloměru r_m chceme zdůraznit, že jde o střední poloměr $r_m = ½(r_i + r_o)$. Zde r_i a r_o označují zdeformovaný vnitřní a vnější poloměr trubice. Při deformaci R_m přechází v r_m. Když $R_m = ½(R_i + R_o)$ a $R_o = R_i + H$.

Soustavu rovnic pro simulaci inflace a extenze cévy nyní získáme kombinací (II.88), (II.86) a konstitutivní rovnice (II.87) ve tvaru (II.89).

$$\begin{aligned} r: &\quad \tfrac{1}{2}c_1c_3\lambda_{rR}^2\left(\lambda_{rR}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p = -\frac{P}{2} \\ \theta: &\quad \tfrac{1}{2}c_1c_2\lambda_{\theta\Theta}^2\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p = \frac{P\lambda_{\theta\Theta}R_m}{\lambda_{rR}H} \\ z: &\quad \tfrac{1}{2}c_1c_3\lambda_{zZ}^2\left(\lambda_{zZ}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\lambda_{rR}^2-2\right)}-p = \frac{P\lambda_{\theta\Theta}R_m}{2\lambda_{rR}H} + \frac{F_{red}}{2\pi\lambda_{\theta\Theta}R_m\lambda_{rR}H} \end{aligned} \tag{II.89}$$

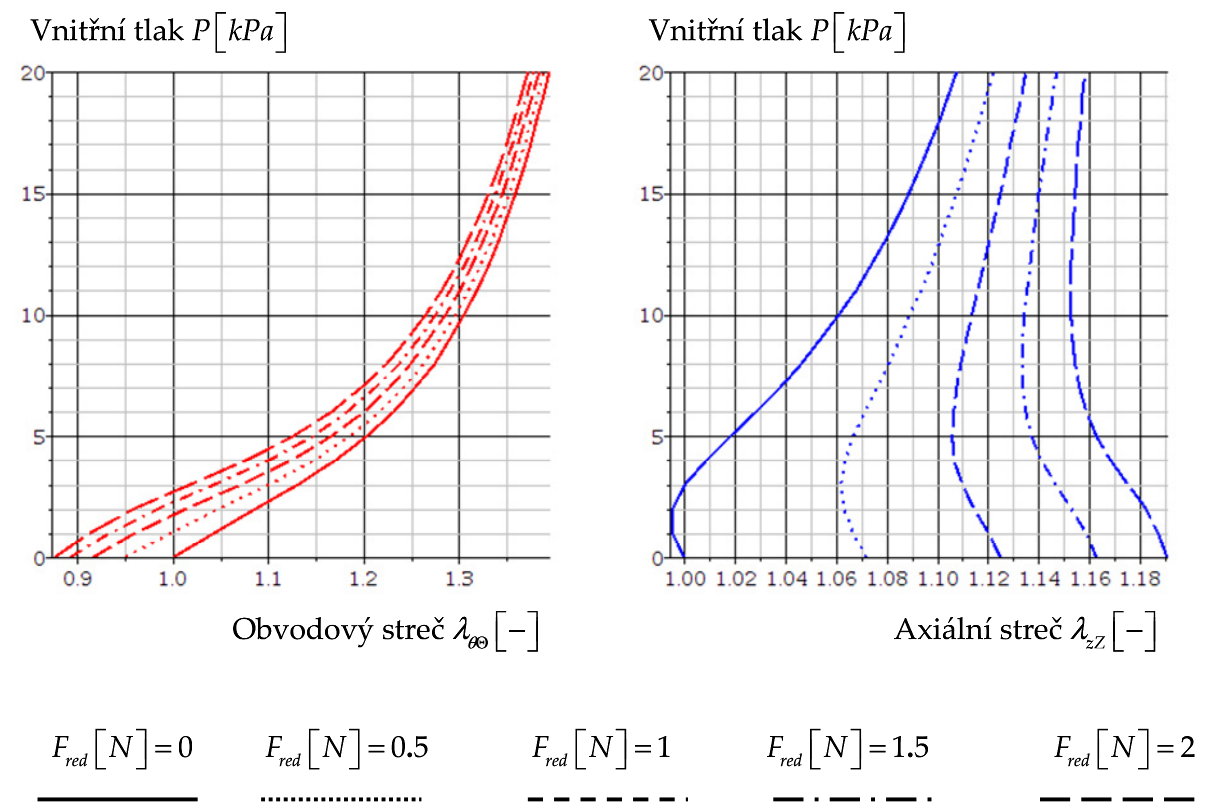
Nyní ještě použijeme předpoklad o nestlačitelnosti, který píšeme jako $\lambda_{rR}\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ} = 1 \Rightarrow \lambda_{rR} = 1/(\lambda_{\theta\Theta}\lambda_{zZ})$. V (II.90) dostáváme finální soustavu rovnic pro naši simulaci.

$$\begin{aligned} r: &\quad \frac{c_1c_3}{2\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2}\left(\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2}-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2}-2\right)}-p = -\frac{P}{2} \\ \theta: &\quad \tfrac{1}{2}c_1c_2\lambda_{\theta\Theta}^2\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2}-2\right)}-p = \frac{P\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}R_m}{H} \\ z: &\quad \tfrac{1}{2}c_1c_3\lambda_{zZ}^2\left(\lambda_{zZ}^2-1\right)e^{\frac{c_2}{2}\left(\lambda_{\theta\Theta}^2-1\right)+\frac{c_3}{2}\left(\lambda_{zZ}^2+\frac{1}{\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}^2}-2\right)}-p = \frac{P\lambda_{\theta\Theta}^2\lambda_{zZ}R_m}{2H} + \frac{\lambda_{zZ}F_{red}}{2\pi R_m H} \end{aligned}$$

První rovnice (radiální rovnováha) poslouží k vyjádření hydrostatické reakce na nestlačitelnost, $p = p(\lambda_{\theta\Theta},\lambda_{zZ},P)$. Z ní dosadíme do zbylých dvou (θ a z). Získáme tak dvě nelineární rovnice pro dvě neurčité $\lambda_{\theta\Theta}$, λ_{zZ} popisující kinematiku mechanické odezvy materiálu. Parametry c_1, c_2, c_3, R_m ($R_m = ½(R_i + R_o)$) a H jsou známé ze zadání. Vnitřní tlak P a předepínací síla F_{red} představují parametry zatěžování, čili jde o námi volené hodnoty.

Řešení je nutno hledat numericky. Výsledky získané pomocí Maple 17 pro tlaky $0 \leq P \leq 20$ kPa a F_{red} = 0, 0.5, 1, 1.5, a 2 N jsou na obrázku II.7.

Výsledky pro všech 17 aort z článku Labrosse et al. (2013) lze najít v Horný et al. (2013), http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10237-013-0534-8 nebo http://users.fs.cvut.cz/~hornyluk/files/Horny-Netusil-Vonavkova-2013-BMMB-Axial-prestretch-and-distensibility-of-aorta.pdf.



Obrázek II.7. Výsledky simulace nafukování lidské břišní aorty při axiálním předpětí vyvozeném silou *Fred*. Vlevo: odezva změnou poloměru (nafukování). Čím vyšší je počáteční předpětí vyvozené Fred, tím nižší je hodnota počátečního obvodového streče (klesne pod 1, protože při $P = 0$ jde vlastně o příčné zúžení). Aplikací vnitřního tlak pak poloměr roste. Vpravo: odezva změnou axiálního protažení. Simulace předpovídá, že počátek tlakování bude vždy doprovázen axiálním zkracováním, které postupně přejde v prodlužování (měřeno vzhledem k hodnotě počátečního předepnutí!). Rostoucí předepínací síla Fred vede k rostoucímu počátečnímu předpětí.

SHRNUTÍ

Konstitutivní rovnice pro nelineární pružné kontinuum (jako jsou cévy, šlachy, vazy, kůže, osrdečník,…) jsou dnes nejčastěji formulovány pomocí elastického potenciálu (hustoty deformační energie) *W*. Hovoříme pak o **hyperelastickém** materiálu. **Hustota deformační energie** *W* tvoří potenciálovou funkci pro napětí, čili **složky napětí se získají pomocí derivací potenciálu podle složek deformace**. Vždy pracujeme s konjugovaným párem napětí a deformace.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \qquad \mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^T$$

W formulujeme jako funkci invariantů tenzoru deformace, abych získali formulaci nezávislou na volbě souřadného systému.

U měkkých tkání často využíváme předpokladu nestlačitelnosti, kdy $J = 1$ během deformace. To vede ke skutečnosti, že tenzor napětí je určen z *W* jednoznačně až na skalární multiplikátor *p* (ve skutečných napětích představující hydrostatickou složku napjatosti). Součinitel *p* je třeba určit z rovnováhy a okrajových podmínek. Nelze ho určit z konstitutivní rovnice přímo.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T} \qquad \mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} - p(2\mathbf{E}+\mathbf{I})^{-1} = 2\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}$$

O skalární funkci jedné tenzorové proměnné říkáme, že je **izotropní**, jestliže pro všechny vlastní ortogonální transformace **Q** a všechny přípustné proměnné **C** platí

$$W(\mathbf{C}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T\right).$$

Jinak říkáme, že je anizotropní.

Anizotropní skalární funkci jedné tenzorové proměnné můžeme převést na izotropní skalární funkci dvou tenzorových proměnných tím, že zformuluje závislost na preferovaném směru pomocí tenzoru orientace. Čili jestliže máme materiál s jedním preferovaným směrem v referenční konfiguraci, *M*, jehož hustota deformační energie je $W = W(\mathbf{C})$, pak tato funkce *W* není invariantní vůči všem vlastním ortogonálním transformacím. Můžeme ale zformulovat novou tenzorovou proměnnou $\mathbf{M} = M \otimes M$, tzv. **tenzor orientace nebo též strukturální tenzor příslušný směru** *M*. Místo charakterizace materiálu pomocí anizotropní funkce $W = W(\mathbf{C})$ můžeme pracovat s $W = W(\mathbf{C},\mathbf{M})$, která bude izotropní. Tj. pro všechna přípustná **C** a pro všechny vlastní ortogonální transformace **Q** bude platit:

$$W(\mathbf{C},\mathbf{M}) = W\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T\right).$$

Konkrétní formu funkční závislosti opět formuluje pomocí invariantů. Kromě invariantů **C**, využijeme doplňkové invarianty $tr(\mathbf{CM})$ a $tr(\mathbf{C}^2\mathbf{M})$.

Tento postup lze v $\mathbb{R}^3$ rozšířit na konečný počet proměnných (preferovaných směrů).

ZDROJE

Arruda EM, Boyce MC (1993) A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials**.** *J Mech Phys Solids* 41(2):389–412.

Bonet J., Wood R. (1997) *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Mechanics/Nonlinear%20Continuum%20Mechanics%20For%20Finite%20Element%20Analysis%20-%20Bonet,%20Wood.pdf

Blatz PJ, Ko WL (1962) Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Trans. Soc. Rheol.* 6:223-251.

Gasser TC, Ogden RW, Holzapfel GA (2006) Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *Journal of the Royal Society Interface* 3(6):15-35.

Gent AN (1996) A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem Technol* 69:59-61.

Guccione JM, McCulloch AD, Waldman LK (1991) Passive material properties of intact ventricular myocardium determined from a cylindrical model. *J Biomech Eng* 113(1):42-55.

Holzapfel G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley and Sons, Chichester.

Holzapfel GA, Gasser TC, Ogden RW (2000) A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J Elast* 61(1-3):1-48. doi:http://dx.doi.org/10.1023/A:1010835316564 %3chttp:/dx.doi.org/10.1023/A:1010835316564%3e10.1023/A:1010835316564

Holzapfel GA, Sommer G, Gasser CT, Regitnig P (2005) Determination of layer-specific mechanical properties of human coronary arteries with nonatherosclerotic intimal thickening and related constitutive modeling. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*289(5 58-5):H2048-58.

Horný L, Netušil M, Voňavková T (2013) Axial prestretch and circumferential distensibility in biomechanics of abdominal aorta. Biomechanics and Modleing in Mechanobiology, in press.

Labrosse MR, Gerson ER, Veinot JP, Beller CJ. (2013) Mechanical characterization of human aortas from pressurization testing and a paradigm shift for circumferential residual stress. *J Mech Behav Biomed Mater* 17:44-55. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S175161611200210X

Marsden J.E., Hughes T.J.R. (1994) Mathematical foundations of elasticity. Dover Publications, New York. http://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf

Maršík F. (1999) *Termodynamika kontinua*. Academia, Praha.

Ogden RW (1972) Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. *Proc R Soc A* 326(1567):565-584.

Ogden RW (1997) *Nonlinear elastic deformations*. Dover Publications, Mineaola.

Ogden RW (2009) Anisotropy and nonlinear elasticity in arterial wall mechanics. In: Holzapfel, G.A. and Ogden, R.W. (eds.) *Biomechanical Modelling at the Molecular, Cellular and Tissue Levels. Series: CISM courses and lectures series (508)*. Springer, s. 179-258.

Selvadurai APS (2006) Deflections of a rubber membrane. *J Mech Phys Solids* 54(6):1093-1119.

Šilhavý M. (1997) *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer, Berlin.

Valanis KC, Landel RF (1967) The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *J Appl Physics* 38:2997–3002.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$\boldsymbol{a}$	a_i	zrychlení v prostorovém popisu	5	
$\boldsymbol{A}$	A_I	zrychlení v materiálovém popisu	5	
$\boldsymbol{b}$	b_i	objemové síly v prostorovém popisu	49	
$\mathbf{b}$	b_{ij}	levý Cauchyův-Greenův tenzor deformace	16	
$\boldsymbol{B}$	B_I	objemové síly v materiálovém popisu	51	
$\mathbf{C}$	C_{IK}	pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace	13	
$\mathbf{I}$	δ_{ij}	Kroneckerovo delta	17	
$\mathbf{d}$	d_{ij}	tenzor rychlosti deformace (prostorový)	20	
$\boldsymbol{ds}$	ds_i	diferenciální vektor plochy průřezu prostorově	9	38
$\boldsymbol{dS}$	dS_K	diferenciální vektor plochy průřezu materiálově		
$D(\text{-})/Dt$	*tečka*	materiálová derivace	5	
$div(\text{-})$		divergence	48	50
$\boldsymbol{\varepsilon}$	ε_{ij}	inženýrský tenzor deformace	18	
$\boldsymbol{\upvarepsilon}$	ε_{ijk}	Levi-Civitův tenzor (permutační)	48	
	e	hustota vnitřní energie prostorově	54	
$\boldsymbol{e}$	e_i	bázový vektor (normovaný, prostorová konfigurace)	4	
$\mathbf{e}$	e_{ij}	Eluerův (Almansiův) tenzor deformace	16	
	E	hustota vnitřní energie materiálově	55	
$\boldsymbol{E}$	E_K	bázový vektor (normovaný, referenční konfigurace)	4	
$\mathbf{E}$	E_{IK}	Green-Lagrangeův (Lagrangeův) tenzor deformace	16	
$\boldsymbol{F}$	F_i	vektor síly	49	
$\mathbf{F}$	F_{iK}	deformační gradient	6	
$grad(\text{-})$		operátor gradientu vůči prostorové konfiguraci	10	48
$Grad(\text{-})$		gradient vůči referenční konfiguraci		
	η	hustota entropie prostorově	54	
	H	hustota entropie materiálově	54	
$\mathbf{I}$		jednotková/ý matice/tenzor	10	
J		objemový poměr	9	
	λ	streč	14	
$\mathbf{l}$	l_{ij}	prostorový gradient rychlosti	20	
$\boldsymbol{L}$	L_i	moment hybnosti	49	
$\boldsymbol{M}$	M_i	moment síly	49	
$\boldsymbol{M}$	M_i	vektor preferovaného směru	84	
$\mathbf{M}$	M_{IK}	tenzor orientace (strukturální tenzor)	85	
$\boldsymbol{n}$	n_i	vektor vnější normály (prostorový)	36	

$\boldsymbol{N}$	N_I	vektor vnější normály (referenční)	36	
	p	Lagrangeův multiplikátor	76	
$\boldsymbol{p}$	p_i	hybnost	49	
	P	tlak	42	93
$\mathbf{P}$	P_{iK}	smluvní napětí (první Piolovo-Kirchhoffovo)	37	
	ρ_0	objemová hustota materiálově	46	
	ρ	objemová hustota prostorově	46	
$\boldsymbol{q}$	q_i	tepelný výkon (hustota tepelného toku) prostorově	53	
$\boldsymbol{Q}$	Q_K	tepelný výkon (hustota tepelného toku) materiálově	53	
$\mathbf{Q}$	Q_{ij}	ortogonální transformace	59	
$\mathbf{R}$	R_{iK}	tenzor rotace (vlastní ortogonální transformace)	14	
$\boldsymbol{\sigma}$	σ_{ik}	Cauchyovo napětí (skutečné)	37	
$\mathbf{S}$	S_{IK}	druhé Piolovo-Kirchhoffovo napětí	40	
	t	čas	3	
	T	teplota	55	
	T	kinetická energie	53	
	U	vnitřní energie materiálově	54	
$\boldsymbol{u}$	u_i	posuv prostorově	4	
$\boldsymbol{U}$	U_K	posuv materiálově	4	
$\mathbf{U}$	U_{IK}	pravý tenzor strečů	14	
$\boldsymbol{v}$	v_i	rychlost prostorově	4	
$\boldsymbol{V}$	V_K	rychlost materiálově	4	
$\mathbf{v}$	v_{ij}	levý tenzor strečů	14	
	W	hustota deformační energie	71	
	ψ	hustota volné energie	55	71

REJSTŘÍK

$\boldsymbol{M}$	M_i	moment síly	49	
$\boldsymbol{n}$	n_i	normálový vektor plochy (prostorový)	36	
$\boldsymbol{N}$	N_I	normálový vektor plochy (referenční)	36	
		napětí		
$\mathbf{S}$	S_{IK}	druhé Piolovo-Kirchhoffovo napětí	40	
$\mathbf{P}$	P_{iK}	smluvní napětí (první Piolovo-Kirchhoffovo)	37	
$\boldsymbol{\sigma}$	σ_{ik}	Cauchyovo napětí (skutečné)	37	
$\boldsymbol{B}$	B_I	objemové síly v materiálovém popisu	51	
$\boldsymbol{b}$	b_i	objemové síly v prostorovém popisu	49	
J		objemový poměr	9	
$\mathbf{Q}$	Q_{ij}	ortogonální transformace	59	
$\boldsymbol{u}$	u_i	posuv prostorově	4	
$\boldsymbol{U}$	U_K	posuv materiálově	4	
$\mathbf{C}$	C_{IK}	pravý Cauchyův-Greenův tenzor deformace	13	
$\boldsymbol{M}$	M_i	preferovaný směr	84	
$\boldsymbol{F}$	F_i	silový vektor	49	
	λ	**streč**	14	
$\mathbf{U}$	U_{IK}	pravý tenzor strečů	14	
$\mathbf{v}$	v_{ij}	levý tenzor strečů	14	
$\mathbf{R}$	R_{iK}	tenzor rotace (vlastní ortogonální transformace)	14	
$\boldsymbol{v}$	v_i	rychlost prostorově	4	
$\boldsymbol{V}$	V_K	rychlost materiálově	4	
$\mathbf{d}$	d_{ij}	tenzor rychlosti deformace (prostorový)	20	
$\mathbf{M}$	M_{IK}	tenzor orientace (strukturální tenzor)	85	
$\boldsymbol{q}$	q_i	tepelný výkon (hustota tepelného toku) prostorově	53	
$\boldsymbol{Q}$	Q_K	tepelný výkon (hustota tepelného toku) materiálově	53	
	T	teplota	55	
	P	tlak	42	93
$\boldsymbol{A}$	A_I	zrychlení v materiálovém popisu	5	
$\boldsymbol{a}$	a_i	zrychlení v prostorovém popisu	5	