

Biomechanika a lékařské přístroje

Projekt II
2018

Lukáš Horný

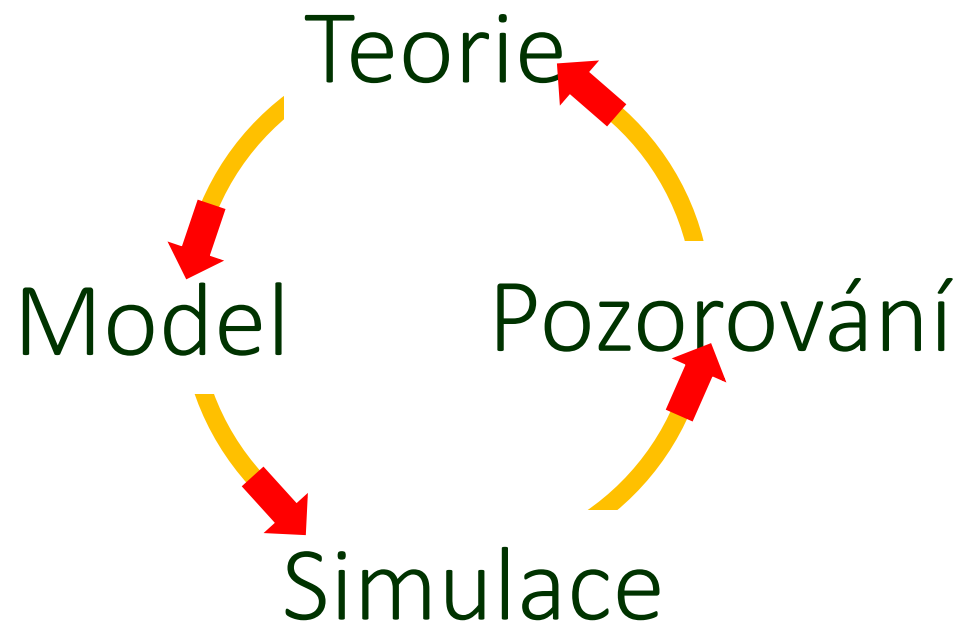
lukas.horny@fs.cvut.cz

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky, ČVUT FS

Projekt II: O co nám půjde?

Otázky – odpovědi

Konstrukce – model – konstrukce




Co je to
(výpočtový) model?

Model

Výpočtový → simulace

Formulace úlohy: diferenciální vs. variační | deformační vs. silová | statická vs. dynamická


$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Rovnice
rovnováhy

Geometrické
rovnice

Konstitutivní
rovnice

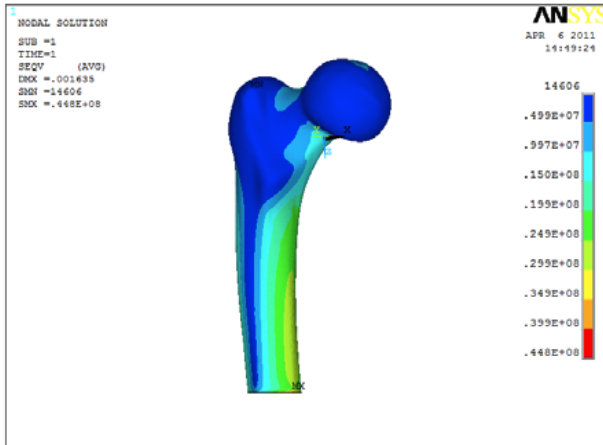
Podmínky (rovnice)
kompatibility (deformací)

$$\partial \Omega_u : x_i(x_1, x_2, x_3) = x_{i0}(x_1, x_2, x_3) \quad \partial \Omega_F : \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = -p_0(x_1, x_2, x_3)$$

Okrajové (+počáteční) podmínky

Model

Výpočtovým modelem řešíme úlohu pružnosti:



Popsat stav napjatosti a deformace v tělese z daného materiálu, při dané geometrii, nějakém zatížení a v nějakých vazbách...

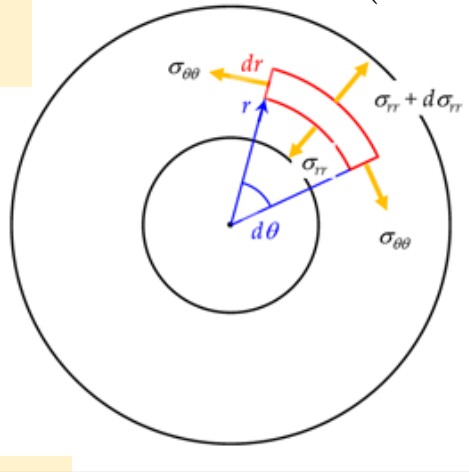
Deformační varianta: úlohu zformulujeme pro neznámé posuvy (neznámou kinematiku deformace)

Silová varianta: úlohu zformulujeme pro neznámé rozložení napětí

„Silnostěnná nádoba“
jako příklad
výpočtového modelu

Příklad modelu: silnostěnná nádoba

Rovnice rovnováhy



$$(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r + dr)d\theta dz - \sigma_{rr}rd\theta dz - 2\sigma_{\theta\theta}\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)drdz = 0$$

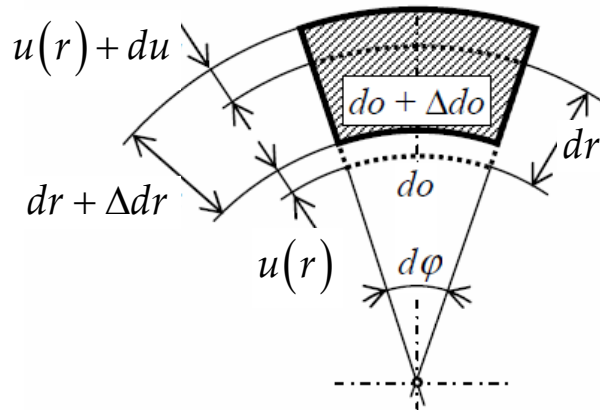
$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_i) &= -P_1 \\ \sigma_{rr}(r_2) &= -P_2 \\ \sigma_{zz}(0) &= -P_z\end{aligned}$$

Geometrické rovnice

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{du}{dr} & \varepsilon_{r\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} & \varepsilon_{\theta z} &= 0 \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{dw}{dz} & \varepsilon_{zr} &= 0\end{aligned}$$



Konstitutivní rovnice

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right)\end{aligned}$$

Příklad modelu: silnostěnná nádoba

Geometrické rovnice

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{dw}{dz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}\left(\frac{du}{dr}, u, r, \varepsilon_{zz}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}\left(\frac{du}{dr}, u, r, \varepsilon_{zz}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

Rovnice rovnováhy

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Obecné řešení

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \right)\end{aligned}$$

Konstitutivní rovnice

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{rr}(r, \varepsilon_{zz}, C_1, C_2, C_3) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}(r, \varepsilon_{zz}, C_1, C_2, C_3) \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz}(\varepsilon_{zz}, C_1, C_3)\end{aligned}$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_i) &= -P_1 \\ \sigma_{rr}(r_2) &= -P_2 \\ \sigma_{zz}(0) &= -P_z\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} \rightarrow w = \varepsilon_{zz} z + C_3$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - (P_1 - P_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + (P_1 - P_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2} \\ \sigma_{zz} &= -P_z\end{aligned}$$

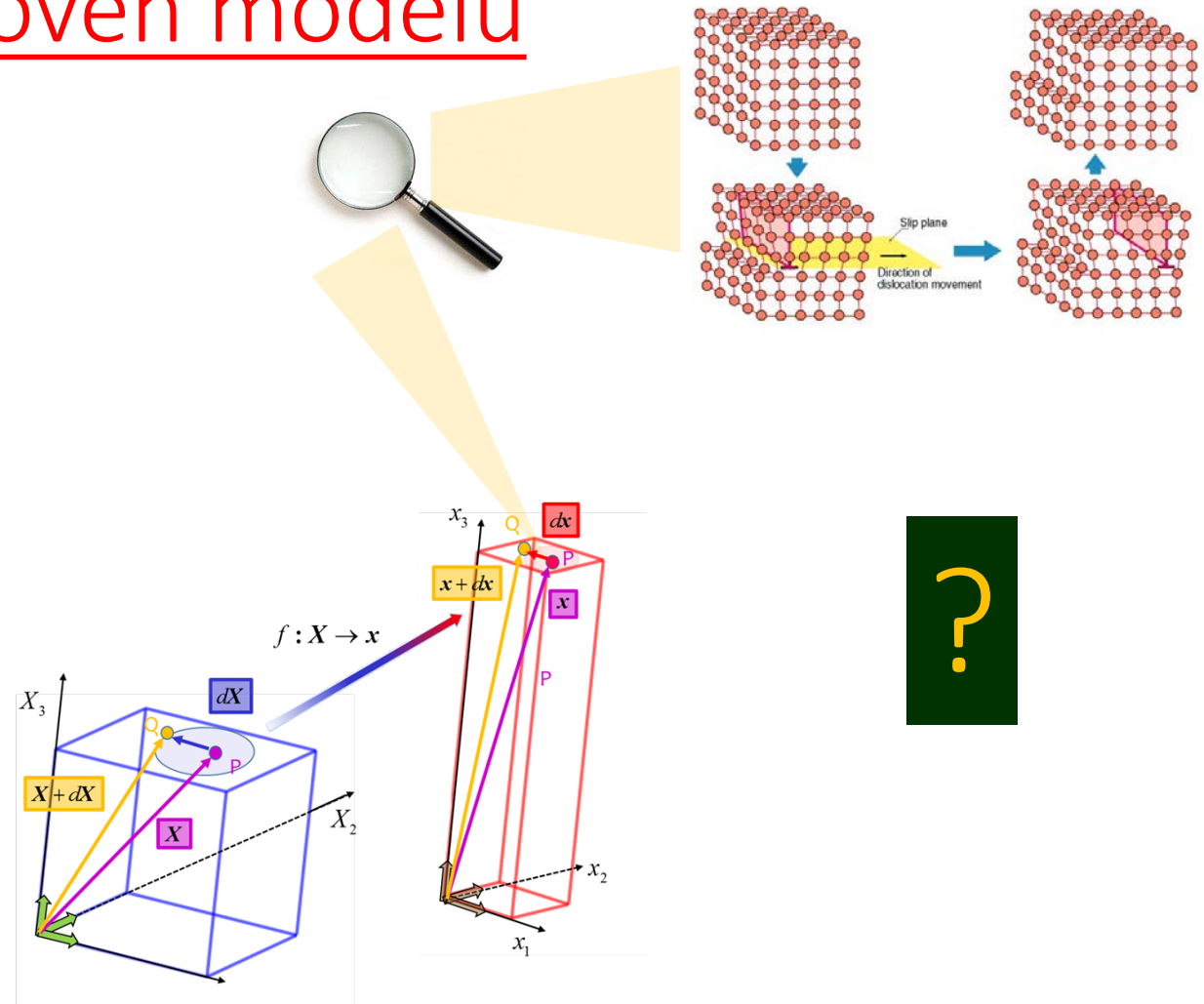
Výpočtovým modelem
matematizujeme
realitu

Matematizace reality výpočtovým modelem

...s sebou nese rozlišovací úroveň modelu

...tj. některé jevy jsou zahrnuty a popsány, řekněme, že jsou rozlišovány

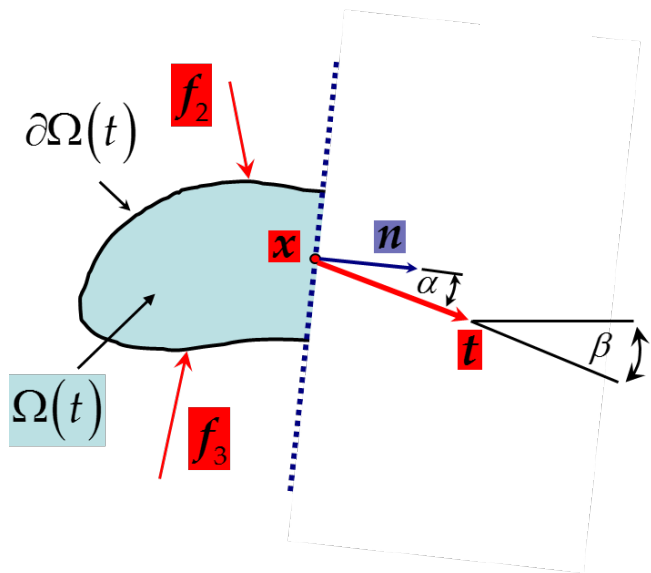
A některé jevy jsou přirozeně zanedbány – jsou pod rozlišovací schopností modelu



Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

(na danou rozlišovací úroveň)



Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_{32} - \sigma_{23} &= 0 \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} &= 0 \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{sudá permutace } (i, j, k) \\ -1 & \text{lichá permutace } (i, j, k) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

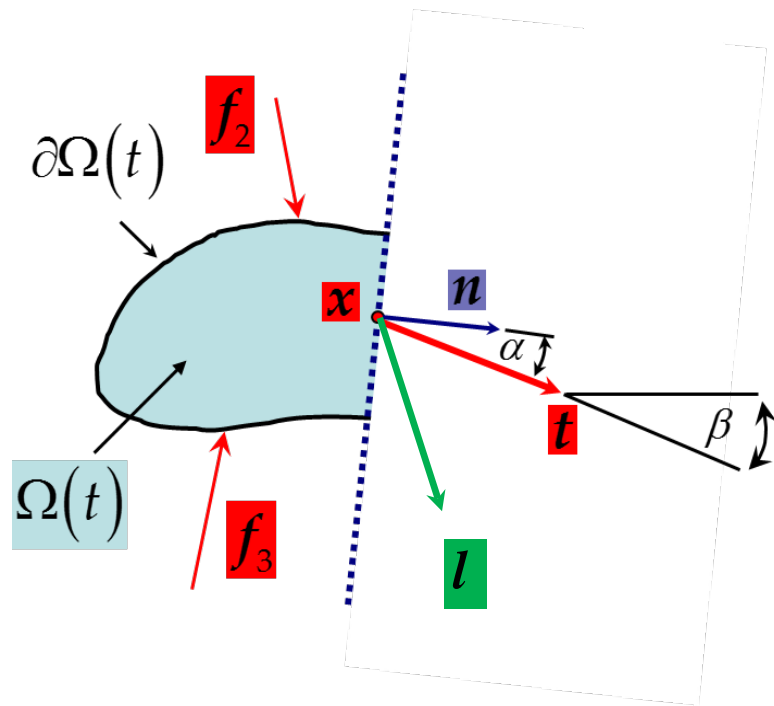
$$df = t ds$$

$$t = \sigma n$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Na obrázku možná něco chybí,
nebo ne?

Matematizace reality výpočtovým modelem



$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

$$d\mathbf{M} = \mathbf{l} ds$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{m} \mathbf{n}$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{13}}{\partial x_3} + \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0$$

$$\frac{\partial m_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_3} + \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0$$

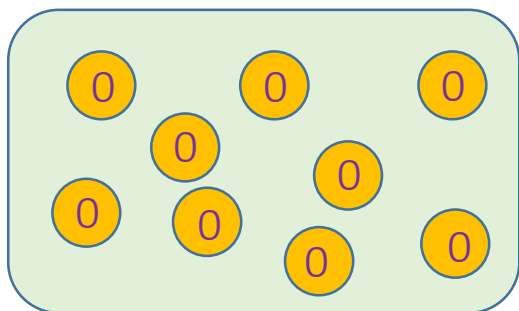
$$\frac{\partial m_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$$

Matematizace reality výpočtovým modelem je zjednodušením reality

Naše běžné **kontinuum** (nepolární) je **model reality**! Model, který funguje, nejsou-li přítomna **momentová napětí \mathbf{m}** . Model, který se nehodí např. pro popis materiálu s distribuovanými elektrickými dipóly.

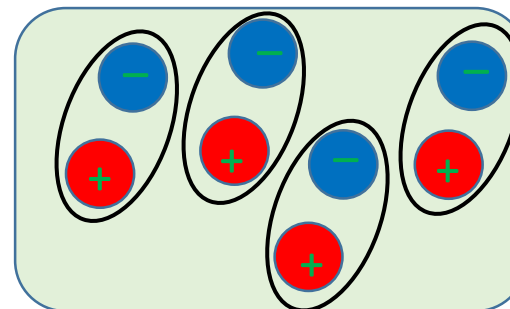
$$df = tds$$



$$\Delta s \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 & \sigma_{32} - \sigma_{23} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 & \sigma_{13} - \sigma_{31} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 & \sigma_{21} - \sigma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$df = tds \quad d\mathbf{M} = lds$$



$$\Delta s \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{13}}{\partial x_3} + \sigma_{32} - \sigma_{23} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial m_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_3} + \sigma_{13} - \sigma_{31} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 & \frac{\partial m_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial m_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{21} - \sigma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

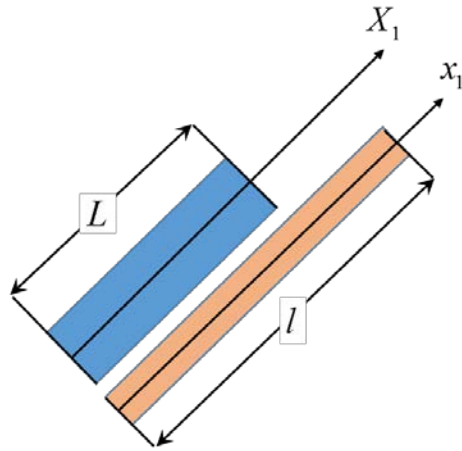
Geometrické rovnice

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

versus

$$E_{IK} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_j} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} \frac{\partial U_K}{\partial X_I} \right)$$

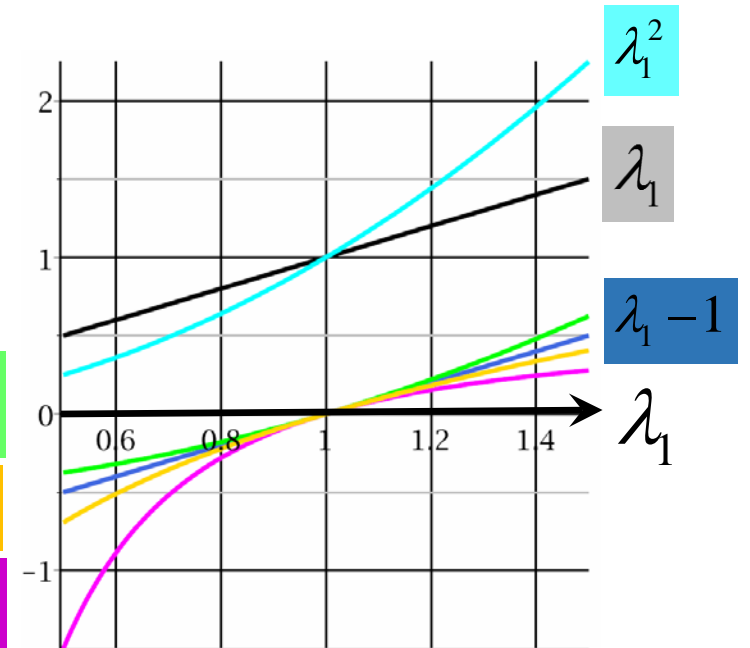
$$\lambda_1 = \frac{l}{L} = \frac{L + \Delta L}{L} = 1 + \varepsilon$$



$$\frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1)$$

$$\ln \lambda_1$$

$$\frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2})$$



Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

Konstitutivní rovnice

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

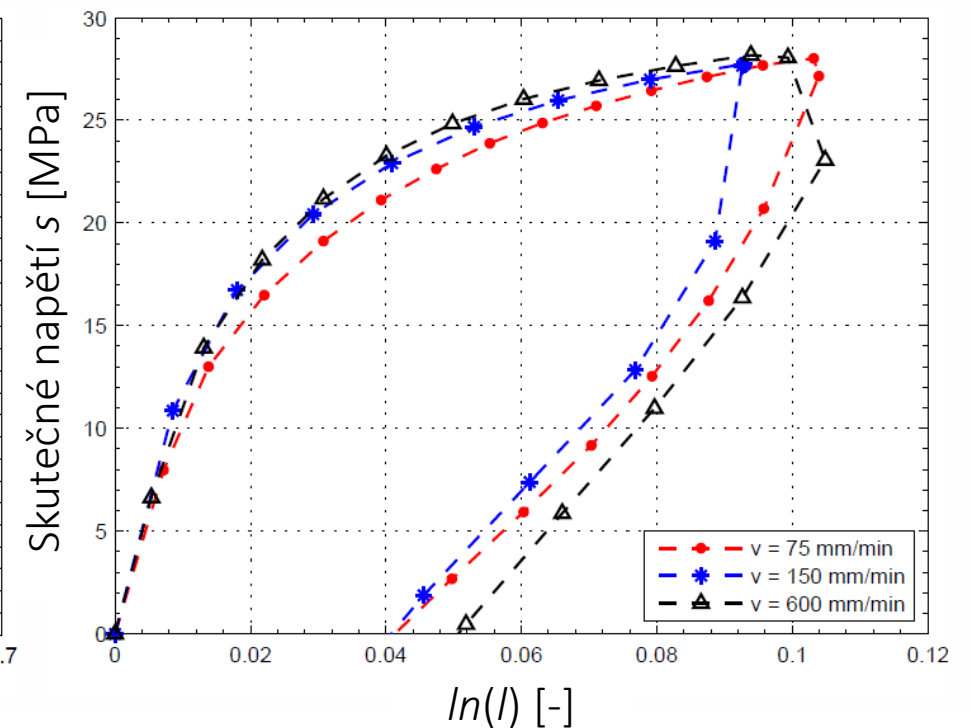
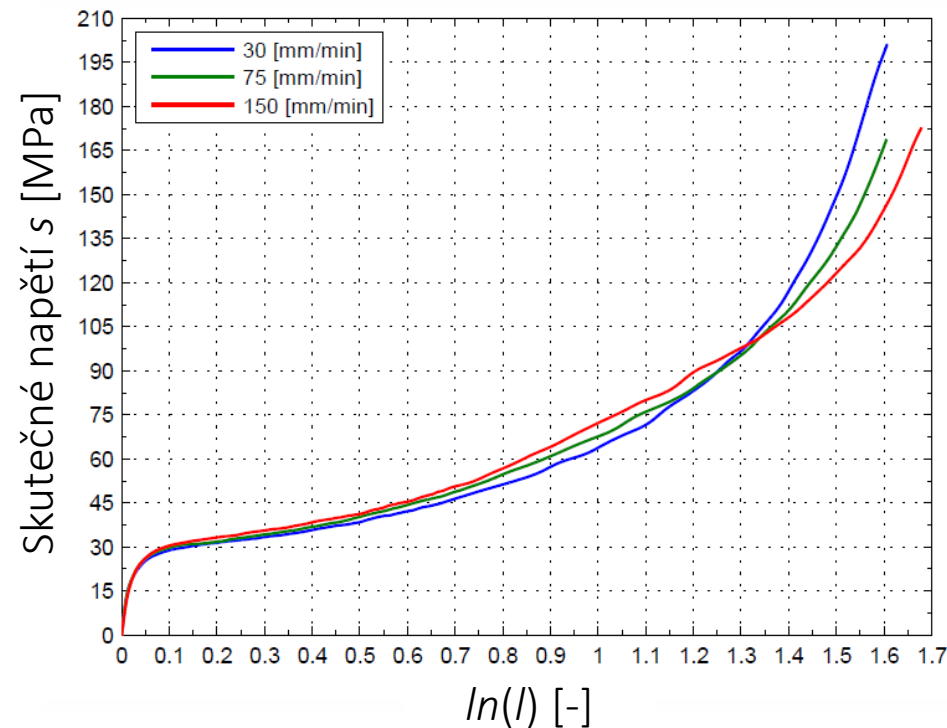
versus

$$\sigma_{ij} = \lambda_{iK} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{jK}}$$

versus

$$\psi = W_e(\mathbf{E}) + W_p(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}})$$

Nelineární elastoviskoplastické chování UHMWPE v tahu



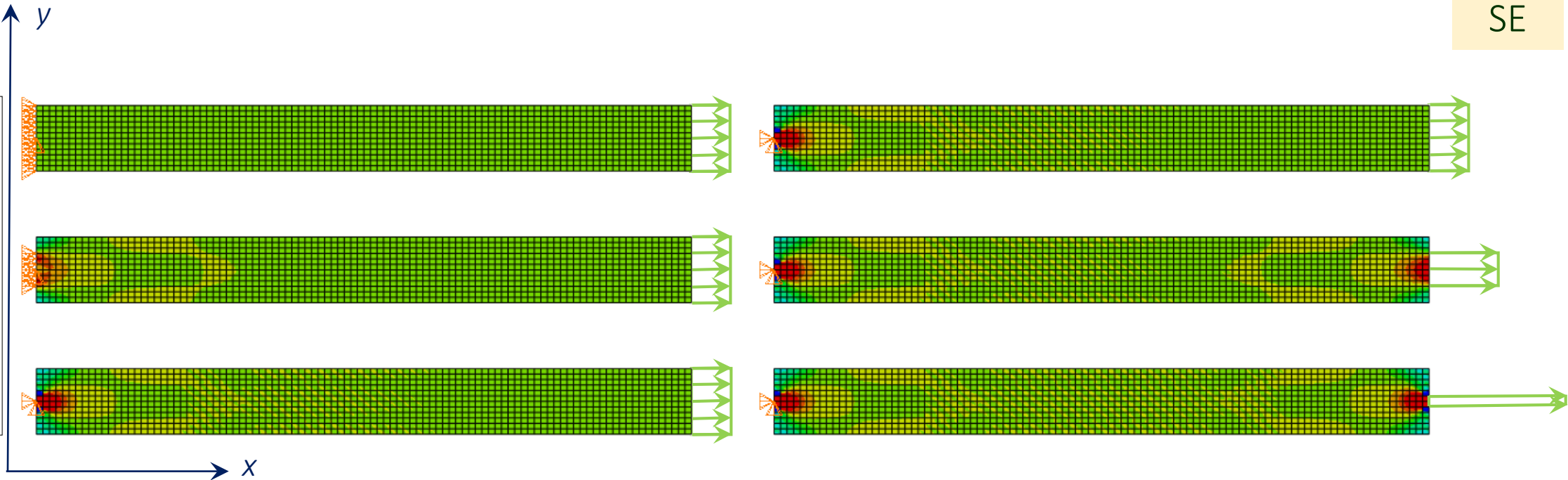
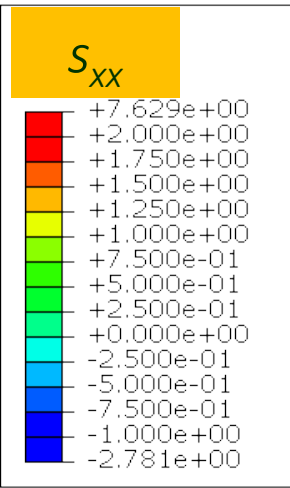
Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

Okrajové podmínky



SE



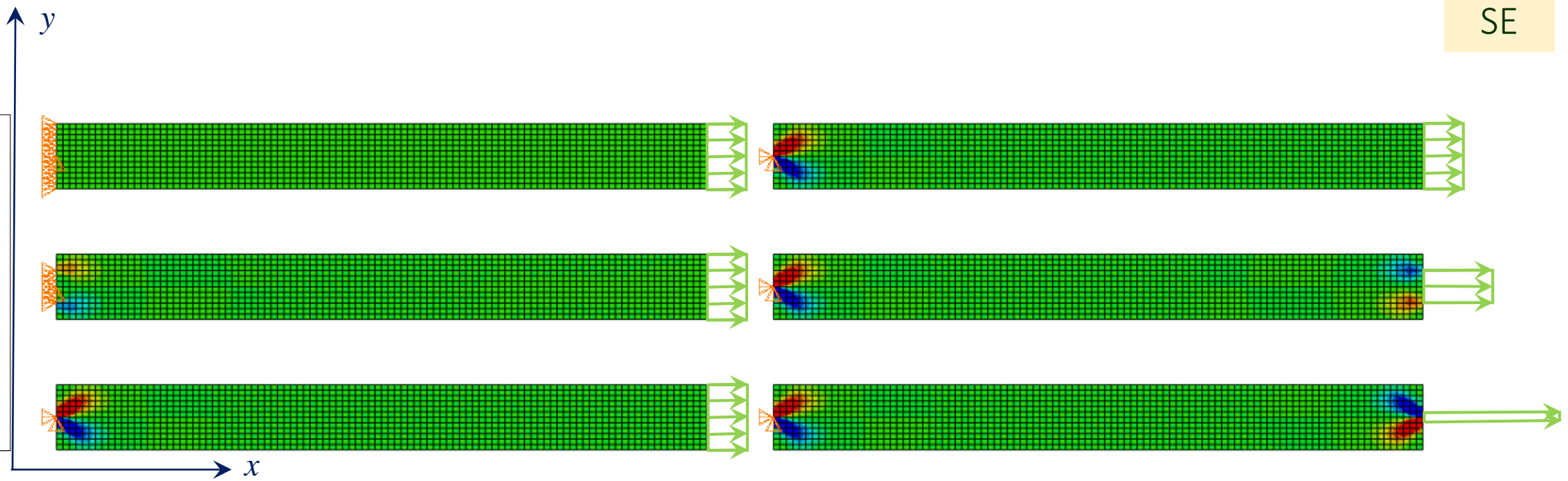
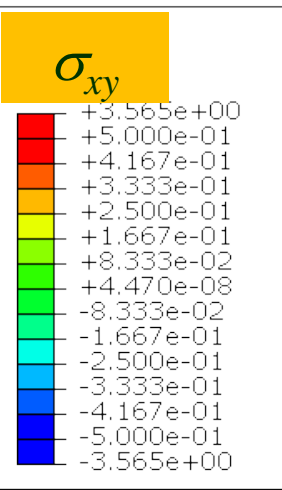
Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

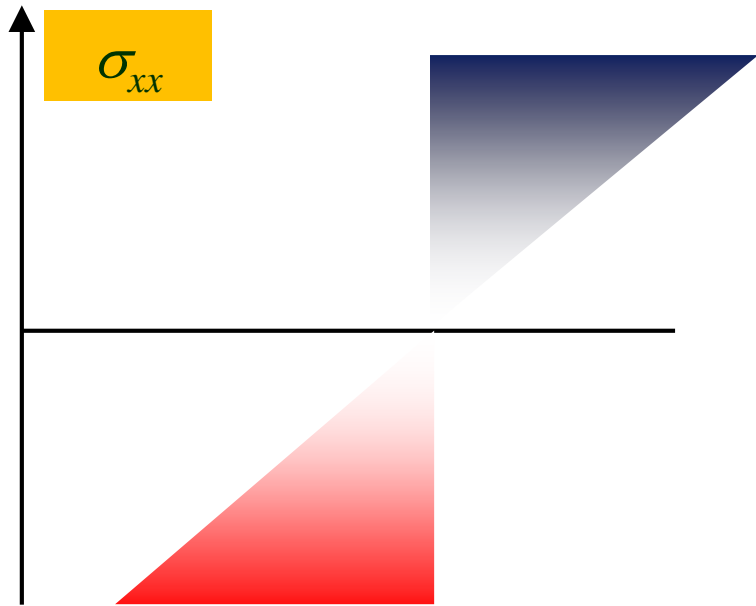
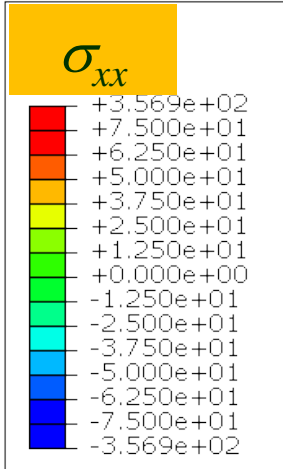
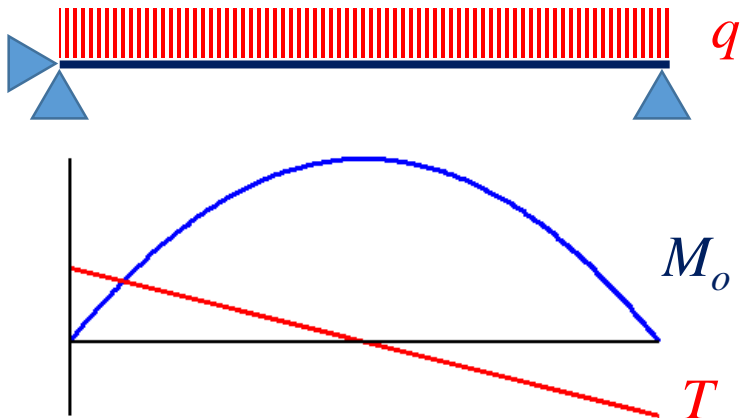
Okrajové podmínky



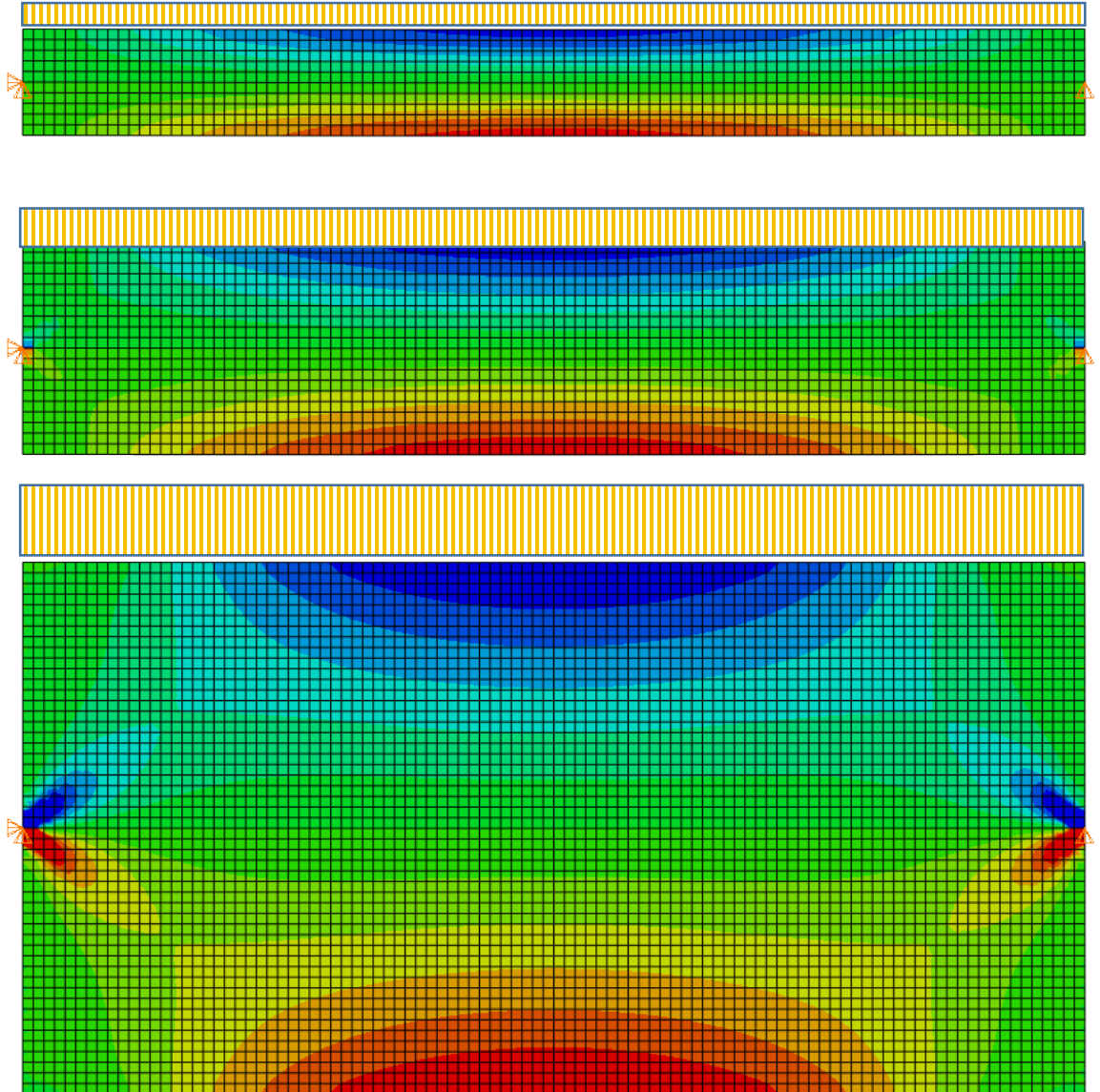
SE



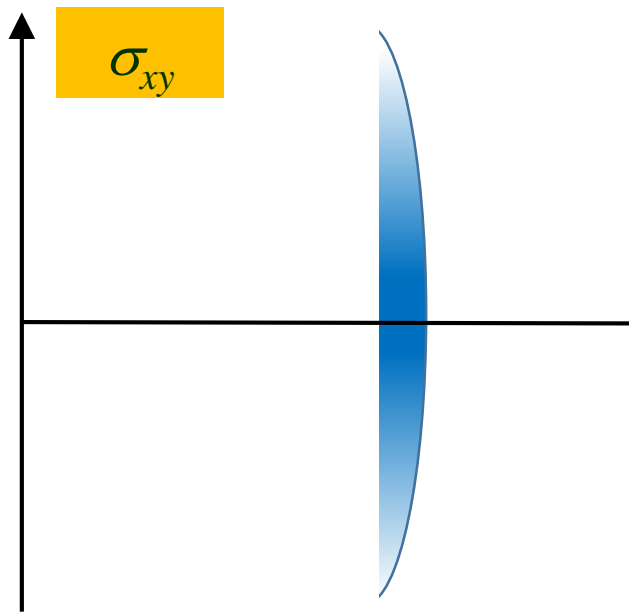
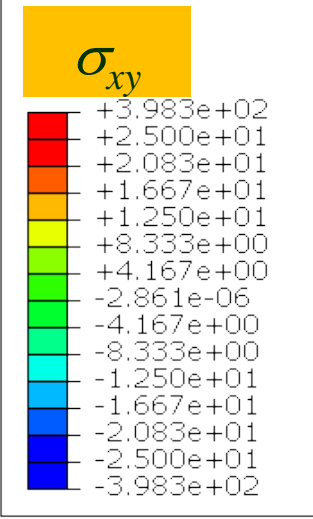
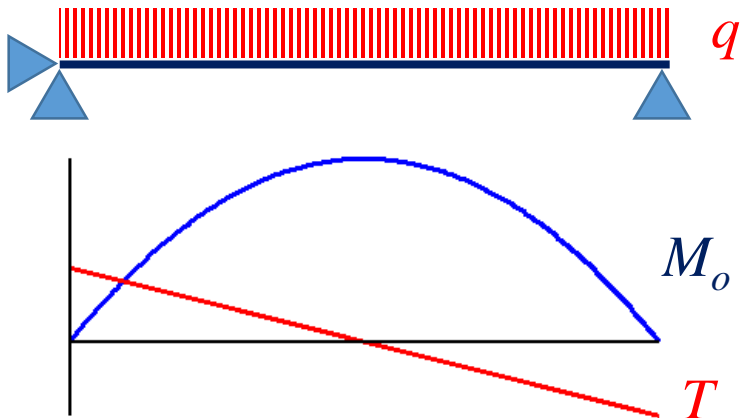
Matematizace reality výpočtovým modelem



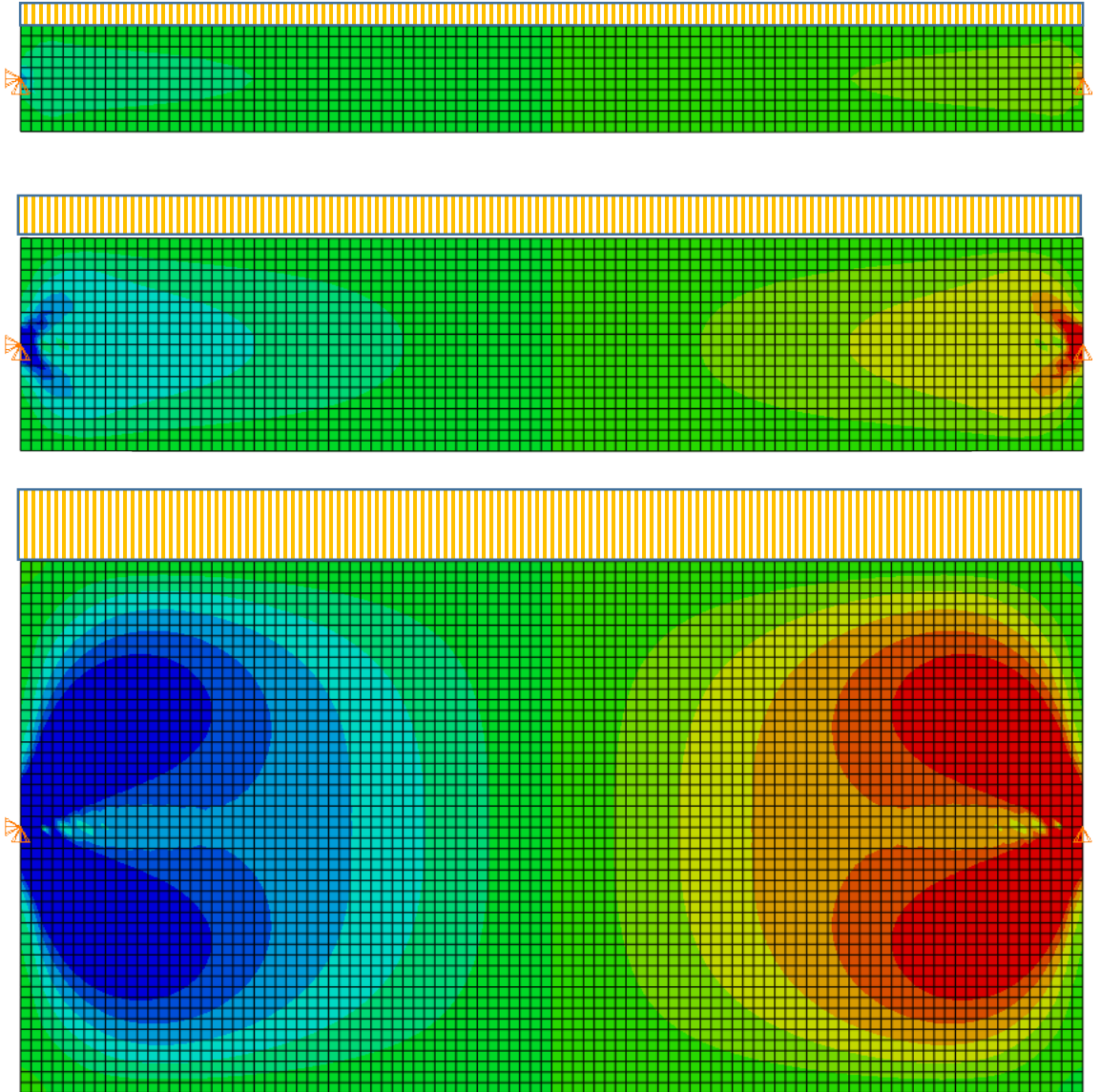
Geometrie



Matematizace reality výpočtovým modelem



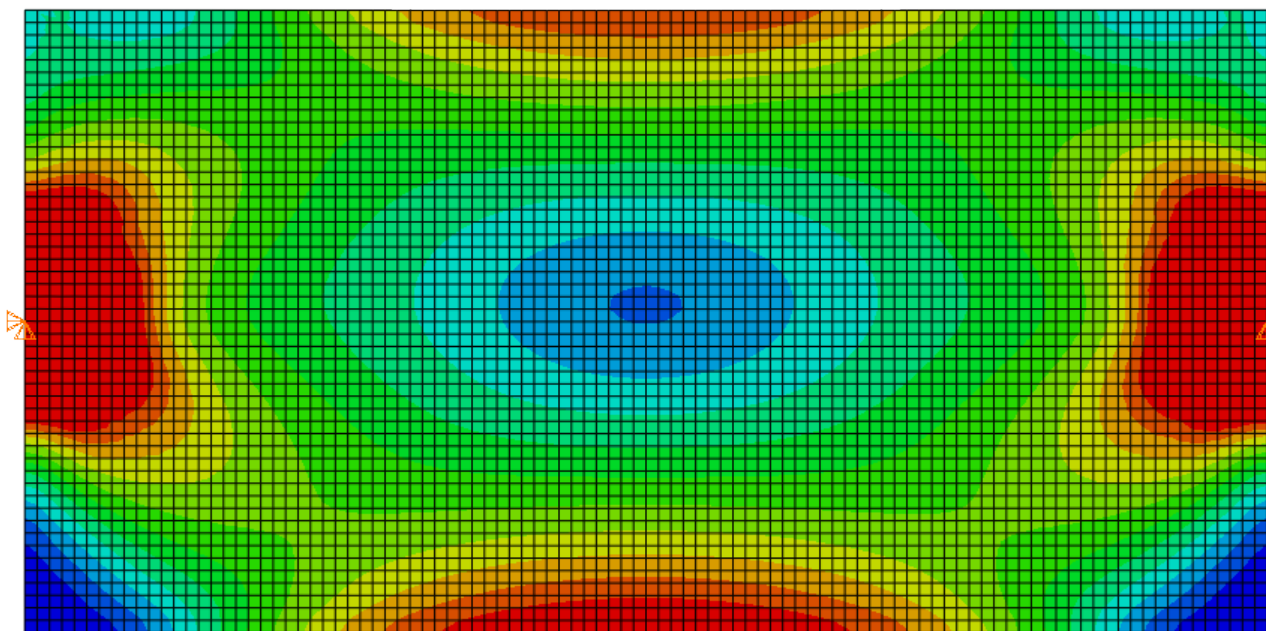
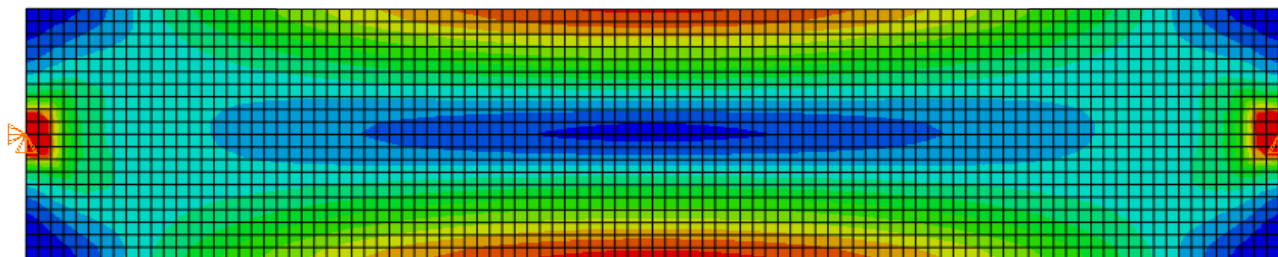
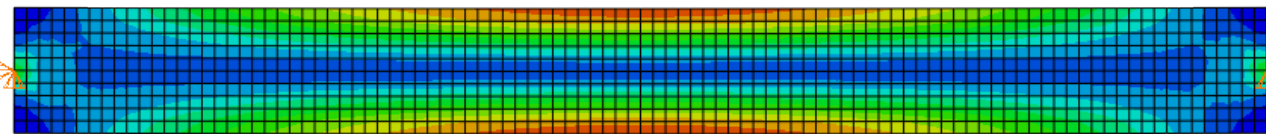
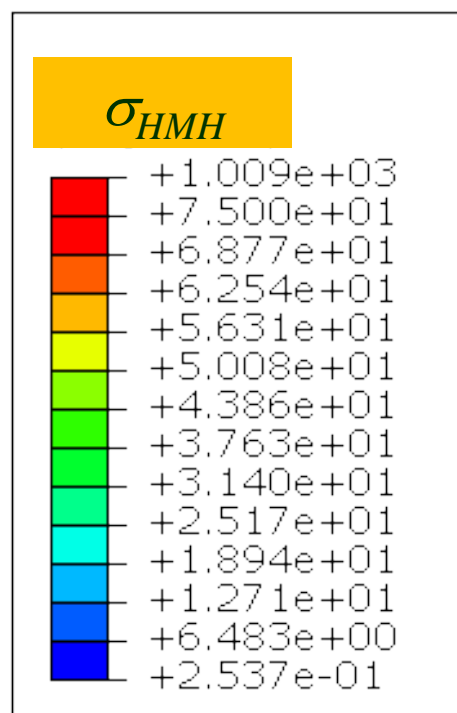
Geometrie



Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

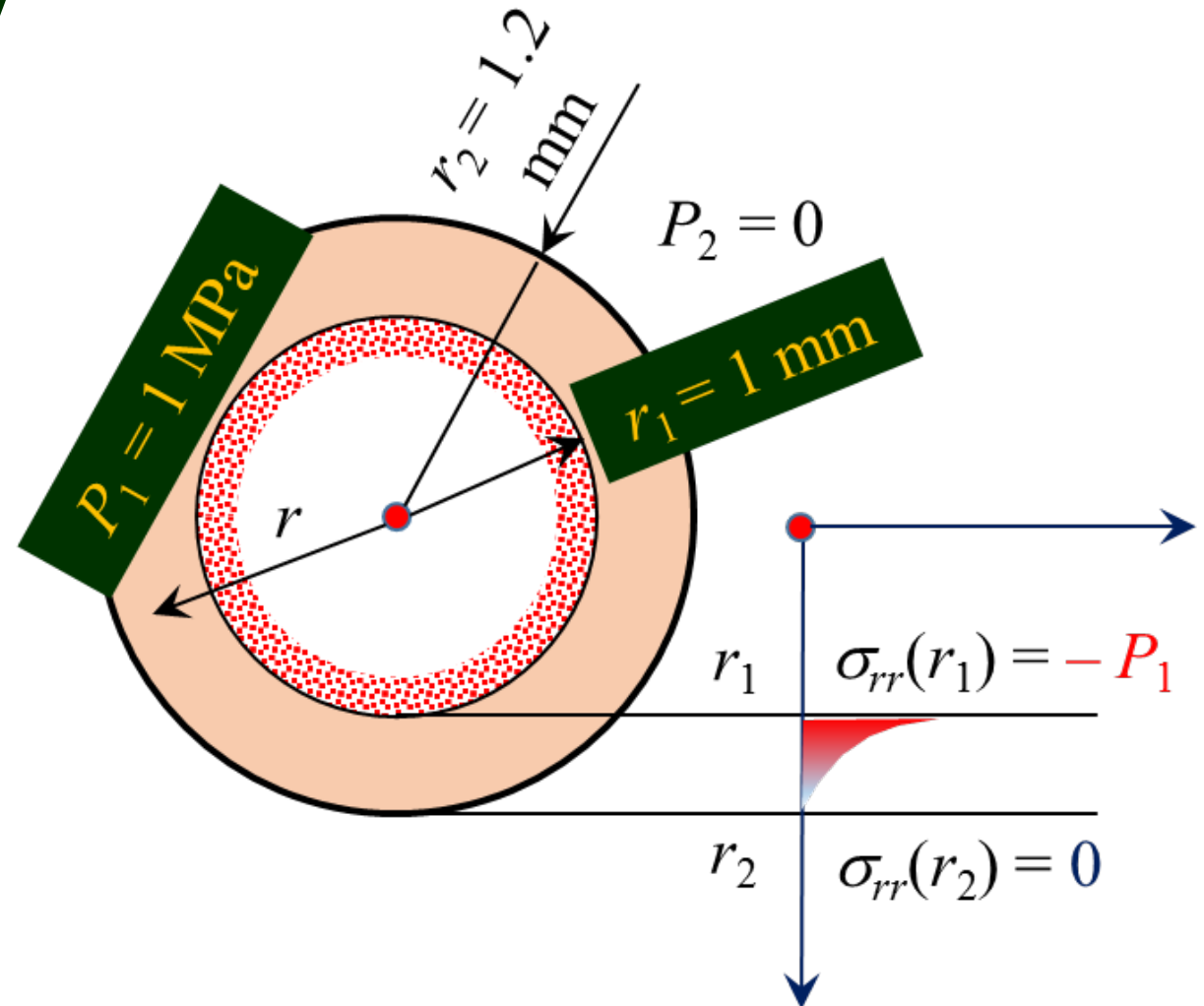
Geometrie



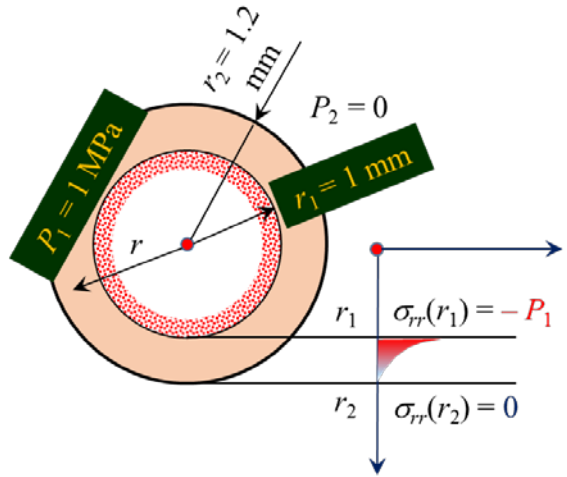
Matematizace reality výpočtovým modelem

...je zjednodušením reality

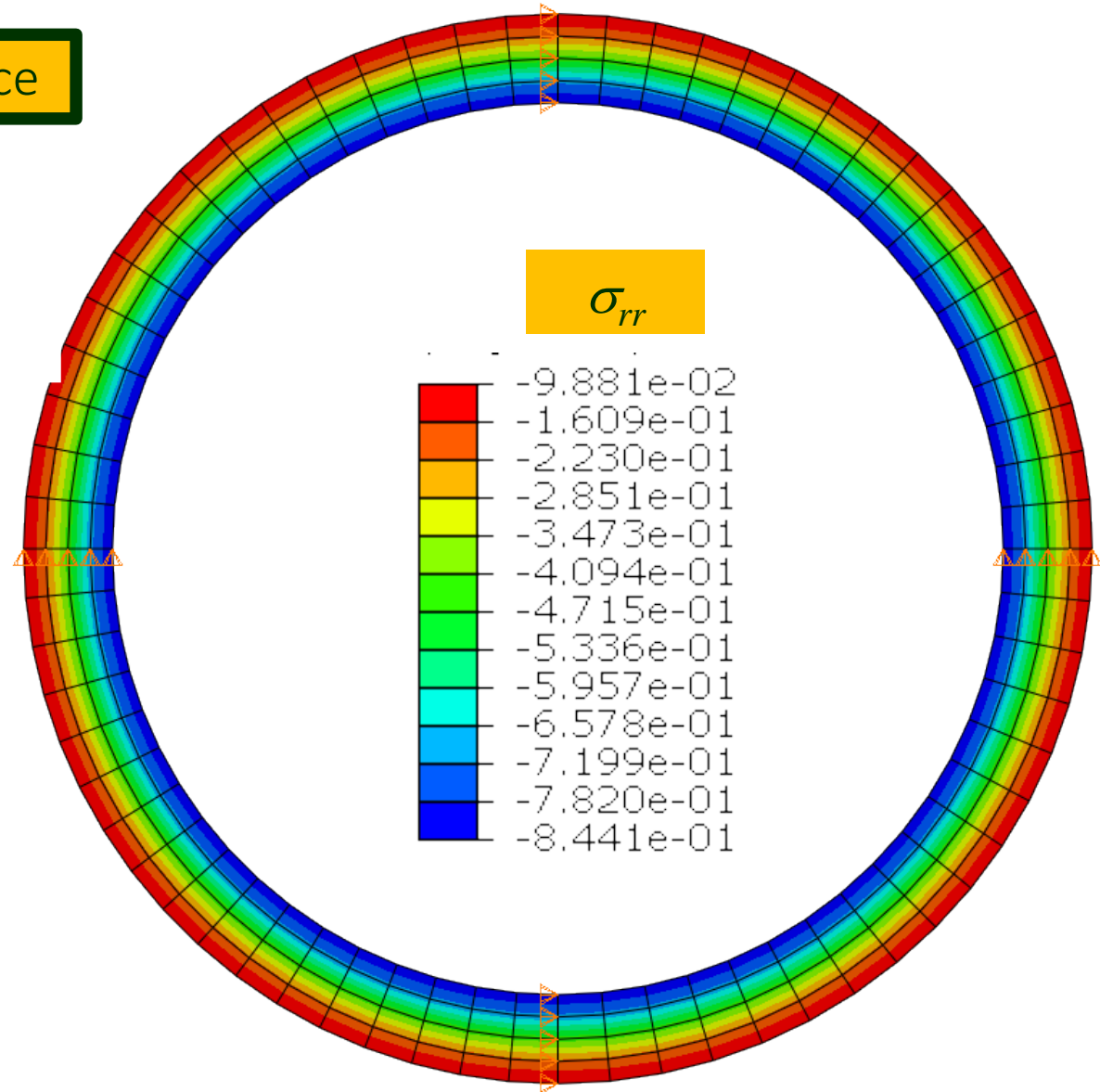
$$\sigma_{rr} = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (P_2 - P_1) \frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2}{r_2^2 - r_1^2}$$



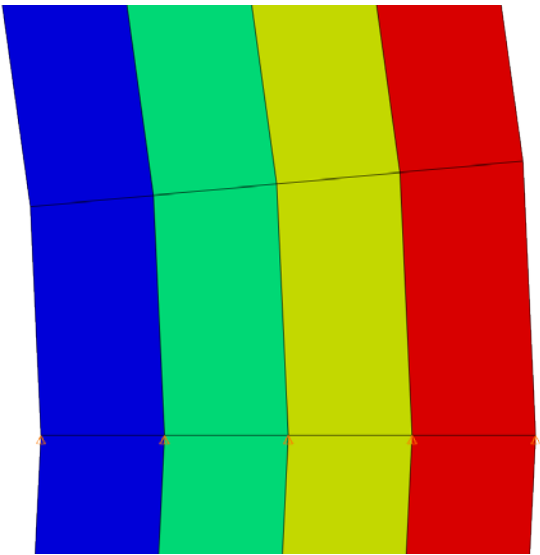
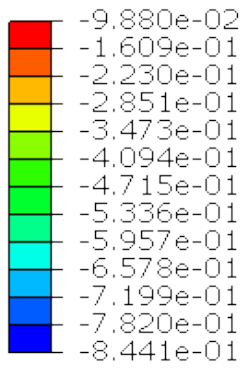
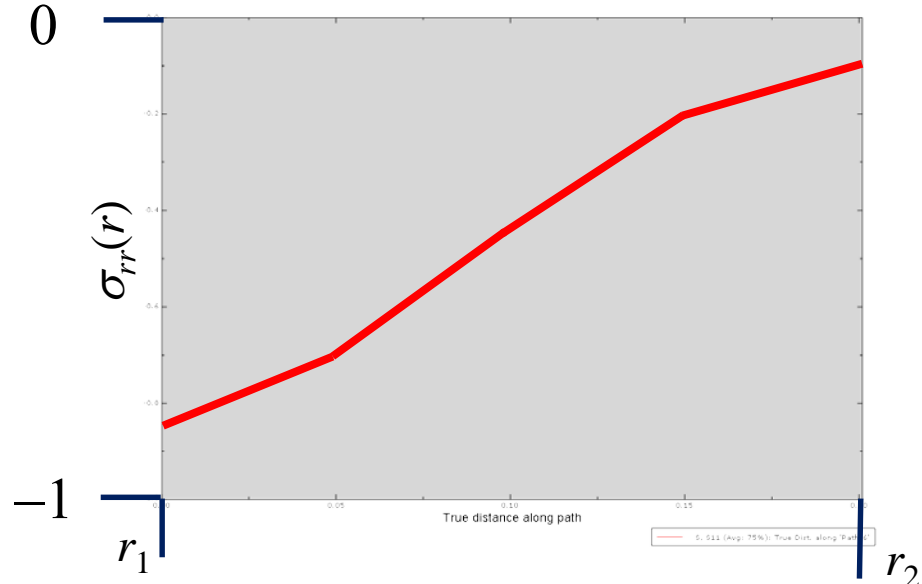
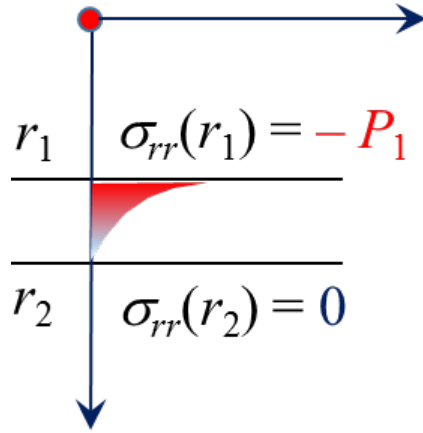
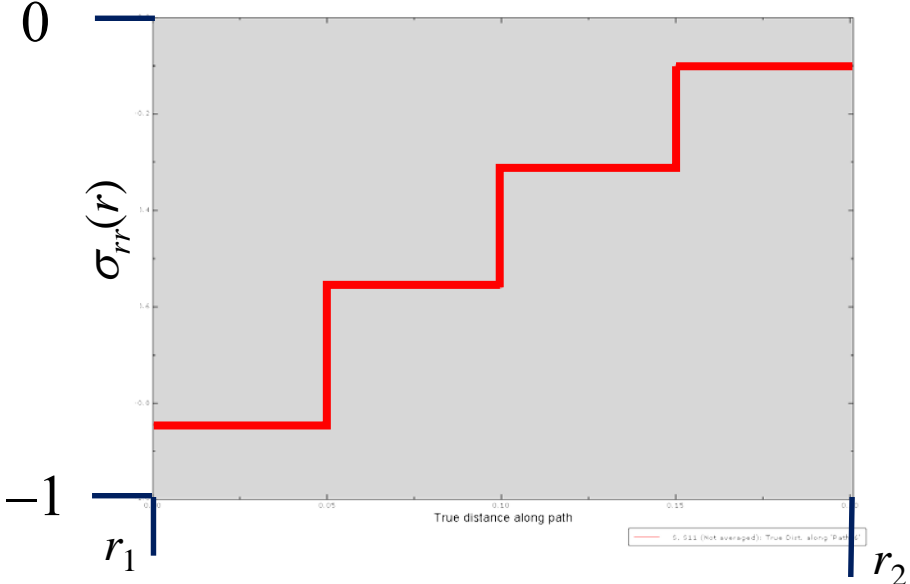
Matematizace reality výpočtovým modelem



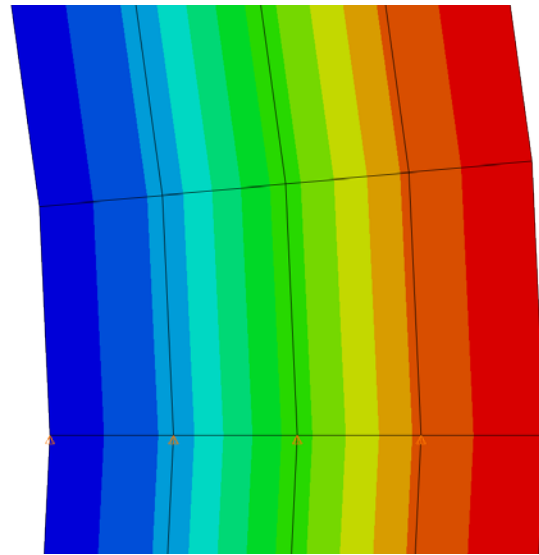
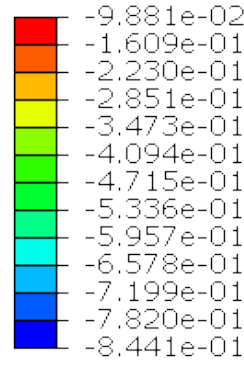
Diskretizace



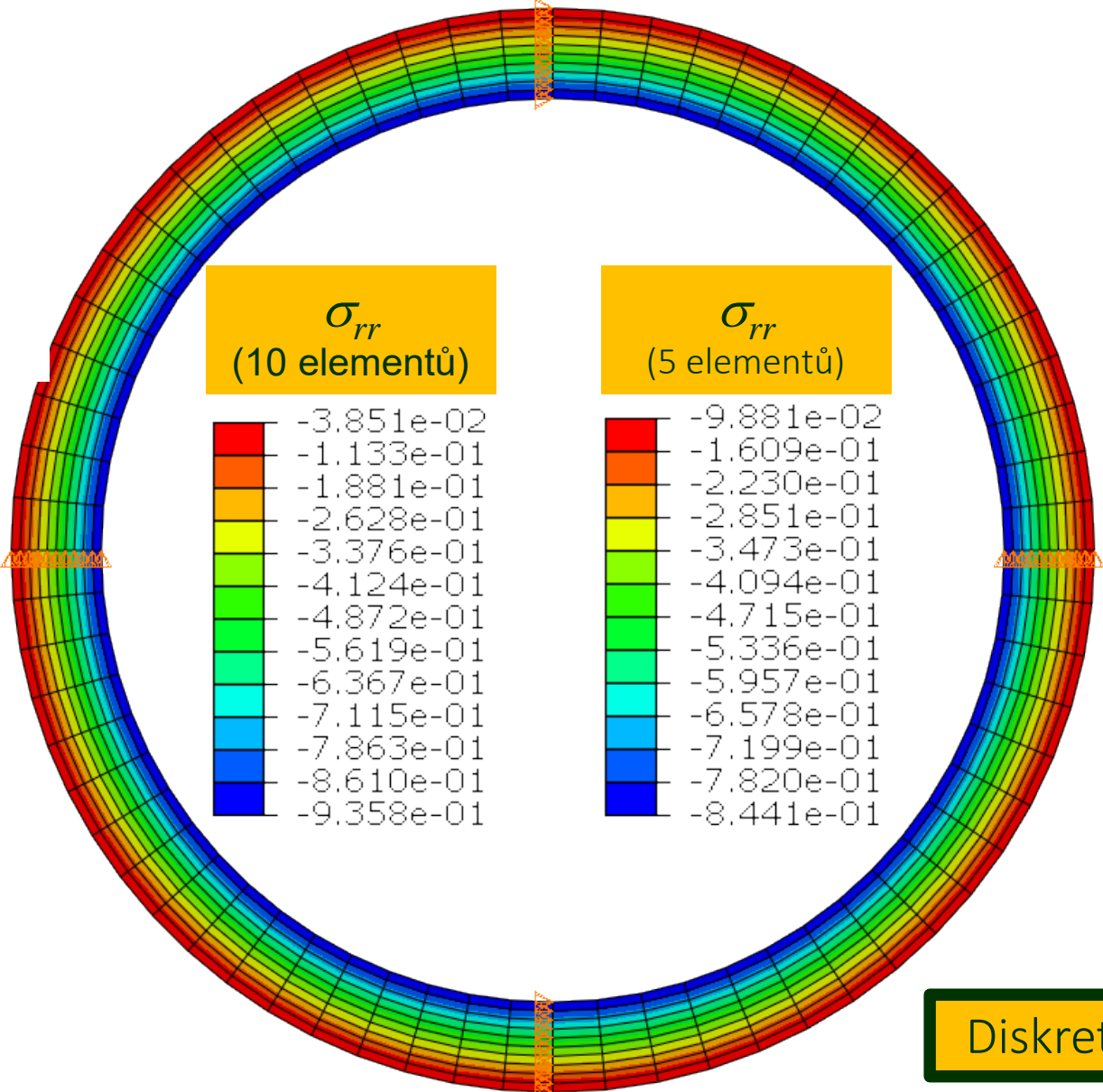
Matematizace reality výpočtovým modelem



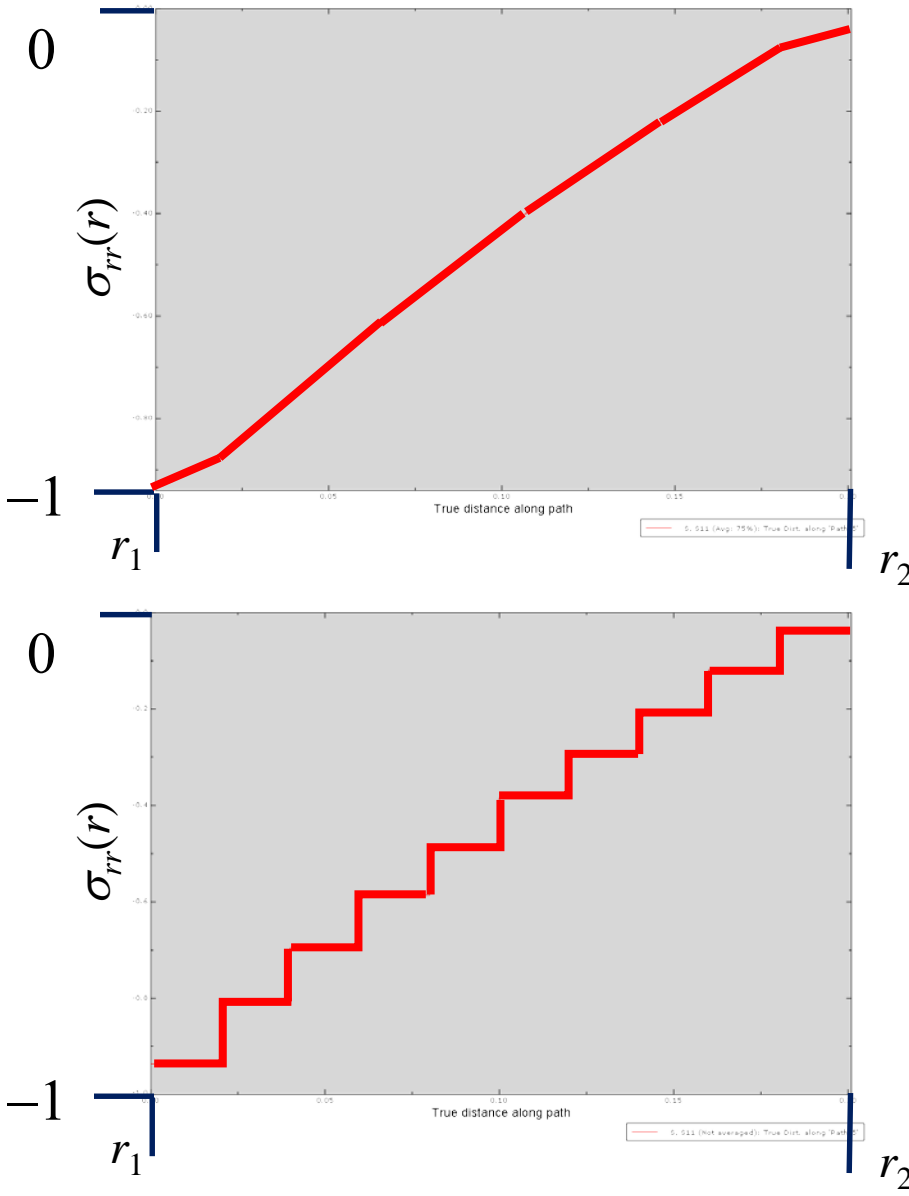
Diskretizace



Matematizace reality výpočtovým modelem



Diskretizace



Model má svou cenu (náklady)

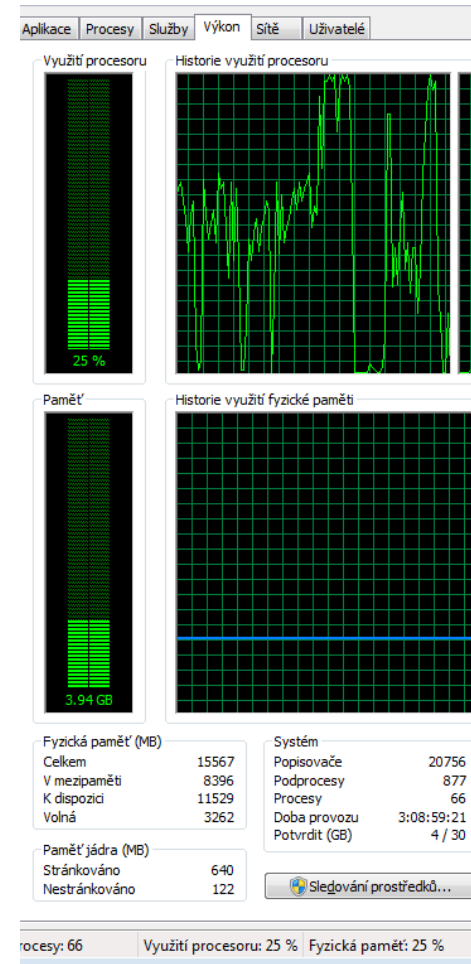
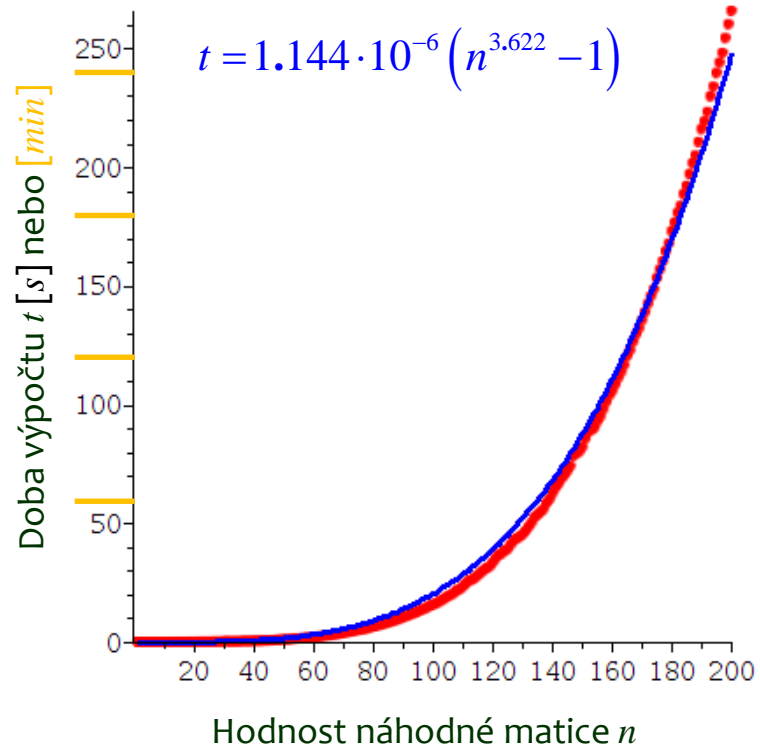
```
# Maple 18 doba výpočtu  
# inverzní matice k náhodné  
# matici
```

```
with(Statistics):with(plots):  
with(LinearAlgebra):  
with(Optimization):  
with(RandomTools):  
  
n:=200:  
A:=Vector(n):  
for i from 1 by 1 to n do  
A[i]:=RandomMatrix(i): end do:
```

```
B:=Vector(n):  
for i from 1 by 1 to n do  
st := time(): MatrixInverse(A[i]): time() - st:  
B[i]:=st: end do:
```

```
C:=Vector([seq(i,i=1..n)]):  
Q:=add((B[i]-eval(a*(t^b-1),t=C[i]))^2,i=1..n):  
res:=NLPSolve(Q,a=0..10,b=0..10,initialpoint={a=0.001,b=0.8},iterationlimit=1000):
```

```
p1:=plot(Vector([seq(i,i=1..n)]),B,style=point,symbol=solidcircle,color=red,symbolsize=12,axis=[thickness=0.9],axesfont = ["Times",  
"Roman", 12]):p2:=plot(eval(a*(t^b-1),res[2]),t=1..200,color=blue,thickness=3):display(p1,p2);
```



1 z 4-core AMD A8-6600K 4.2 GHz
4 GB z 16 GB RAM

Výpočtový model

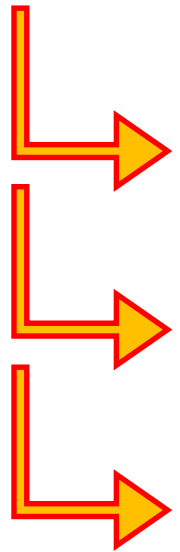
- Výpočtový model je zjednodušením reality.
- Může být analytický i numerický.
- Při odvozování rovnic pro analytický popis problému, stejně jako při numerickém řešení, přijímáme mnoho předpokladů, které model definují:
 - o geometrii
 - o kinematice deformace
 - o materiálových vlastnostech
 - o vazbách a zatížení
 - o formě a způsobu rozložení vnitřních sil a jejich intenzity,...
 - o počtu integračních bodů
 - o chybě, kterou připouštíme,...
 - zvolený systém veličin je také modelový předpoklad (např. časté nezahrnutí teploty vůbec neznamená, že se v reálných situacích tělesa při deformaci neochlazují/nezahřívají)

Vaše úloha v Projektu II:

POZOROVÁNÍ

versus

MODEL



1D

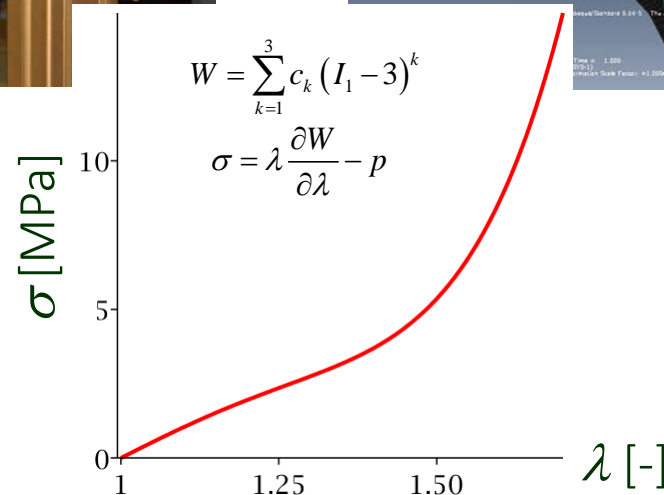
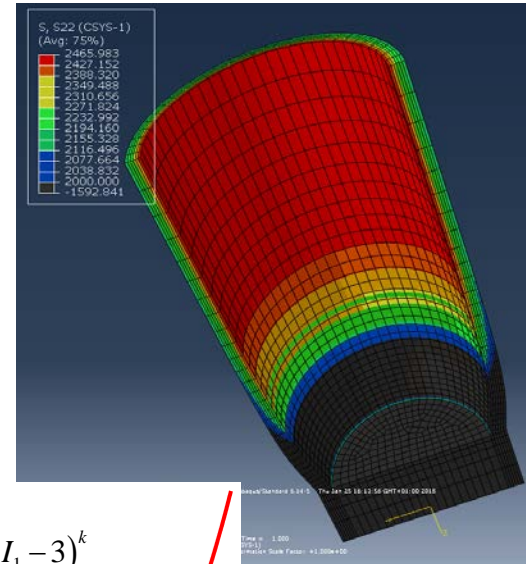
Makro

2D

Mikro

Nano

3D



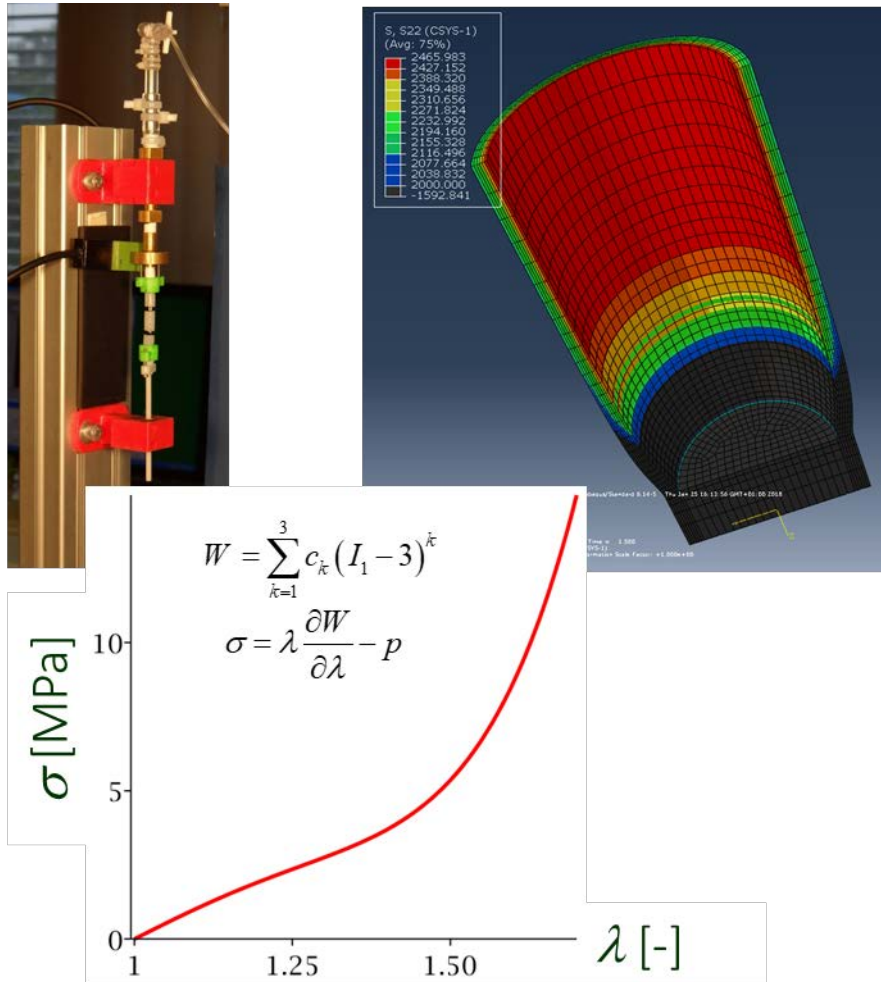
analytický

výpočtový

numerický

konstitutivní

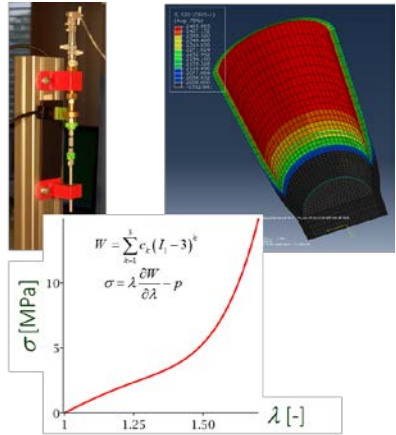
Projekt II: Otázky a odpovědi



Otázky – odpovědi

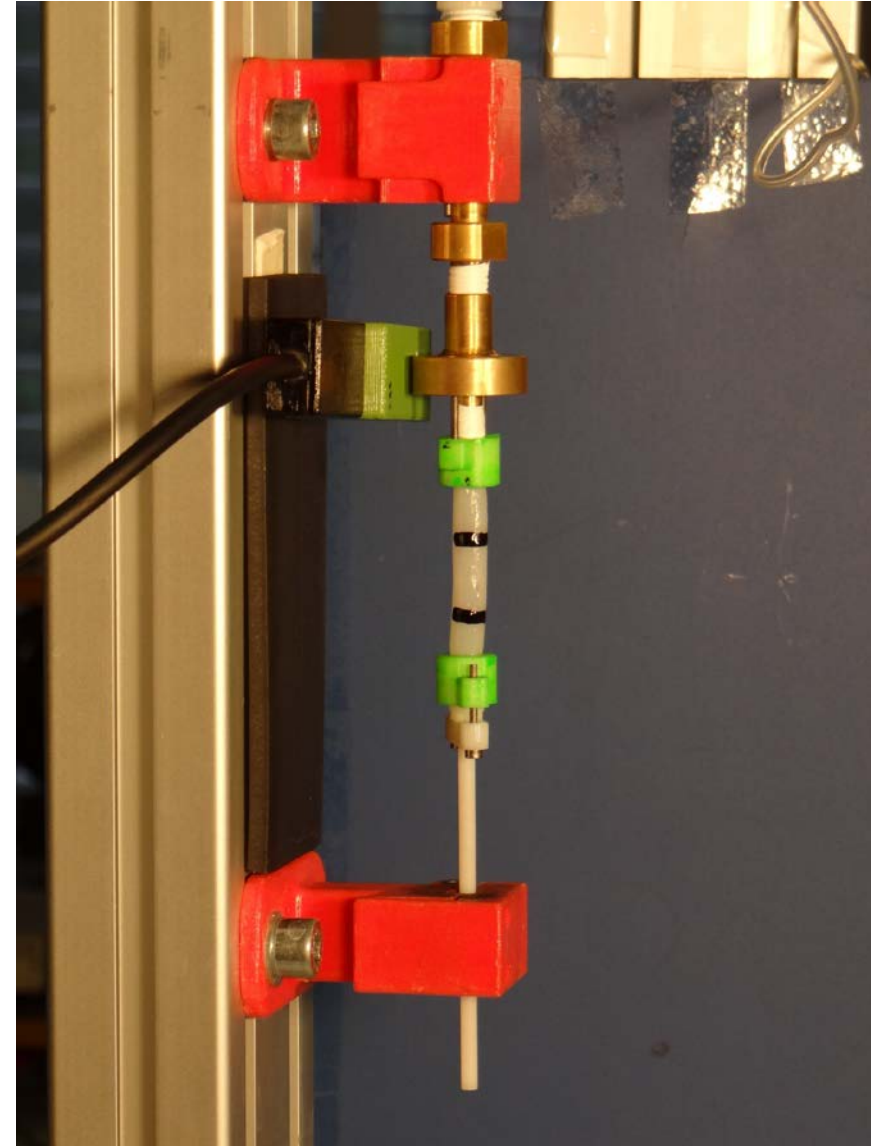
- Shodují se analytické a numerické řešení s experimentem?
- *Nikoliv? A proč?*
- Shodují se globální a lokální materiálové vlastnosti?
- *Nikoliv? A proč?*

Projekt II: Globální experiment

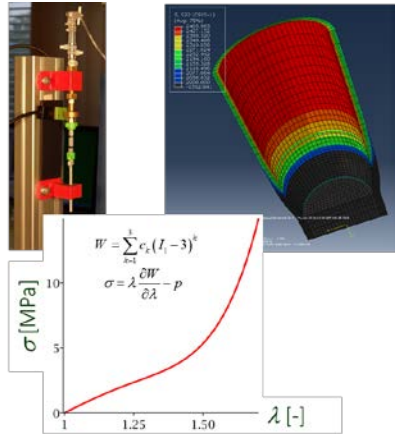


1) Experimentální inflace a extenze elastomerní trubice

- Proměření počátečních rozměrů
- Záznam tlaku v čase
- Fotografie deformujícího se vzorku



Projekt II: Odhad konstitutivních parametrů

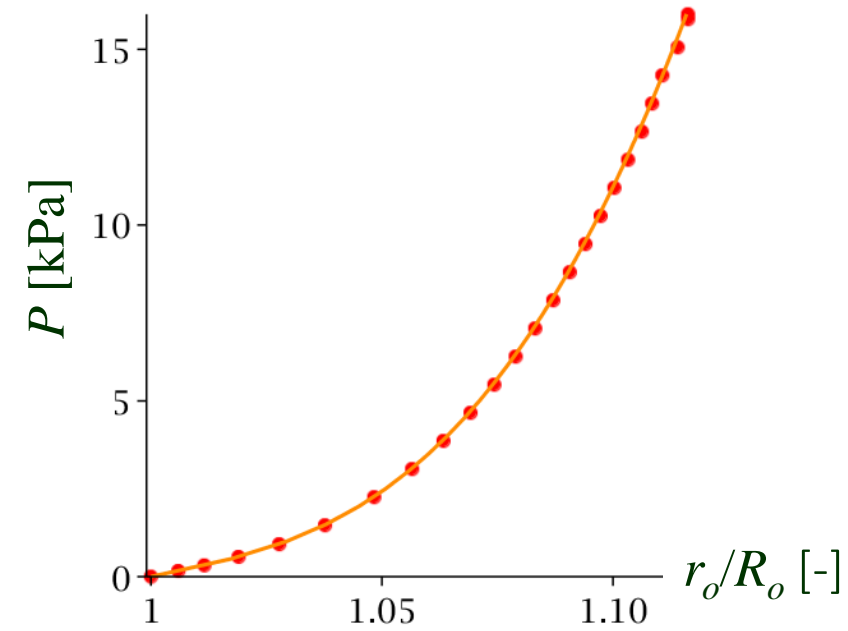


2) Regresní analýza založená na 2D analytickém modelu makro pozorování

- Maple, Matlab,...

- $W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_1 - 3)^2 + c_3 (I_1 - 3)^3$

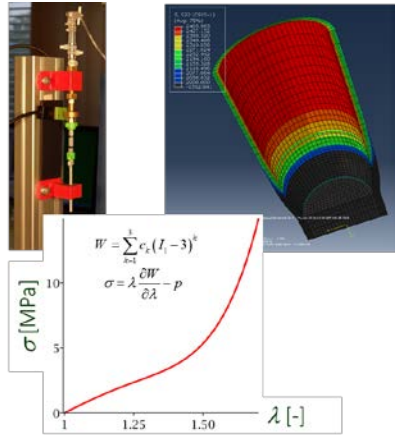
- $Q = \sum_{k=1}^n \left[\left(\sigma_{\theta\theta}^{EXPERIMENT} - \sigma_{\theta\theta}^{MODEL} \right)^2 + \left(\sigma_{zz}^{EXPERIMENT} - \sigma_{zz}^{MODEL} \right)^2 \right]_k$



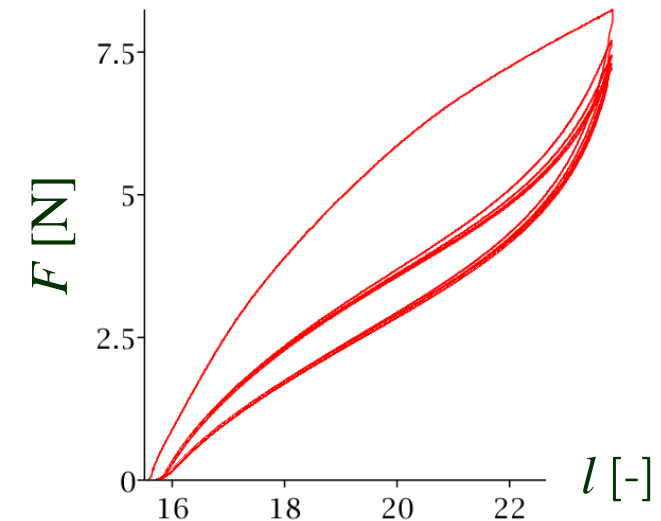
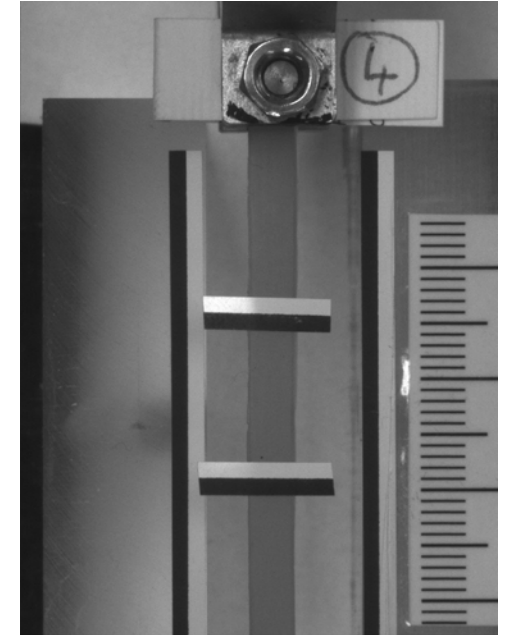
$$\{c_1, c_2, c_3\} \rightarrow Q_{\min}$$

Projekt II: Odhad konstitutivních parametrů

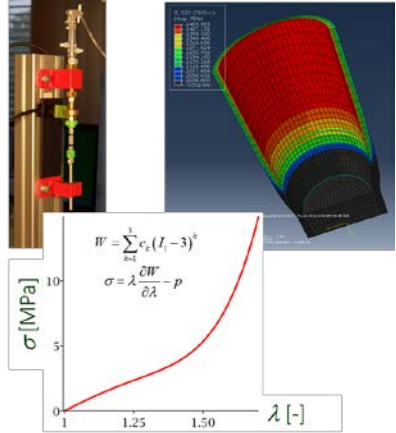
3) Tahová zkouška jako alternativní pozorování pro zjištění konstitutivního modelu



- Záznam kinematiky
- Záznam sil
- Určení napětí



Projekt II: Odhad konstitutivních parametrů

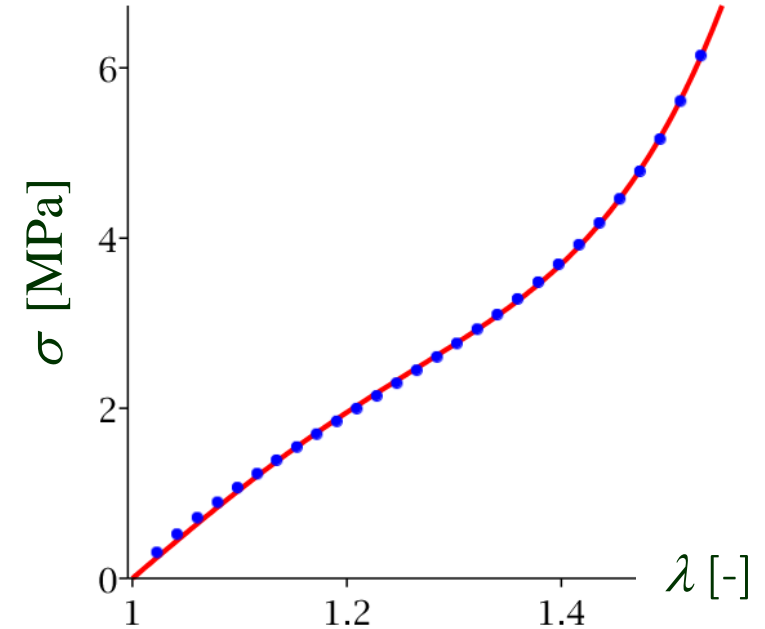


4) Regresní analýza založená na 1D modelu

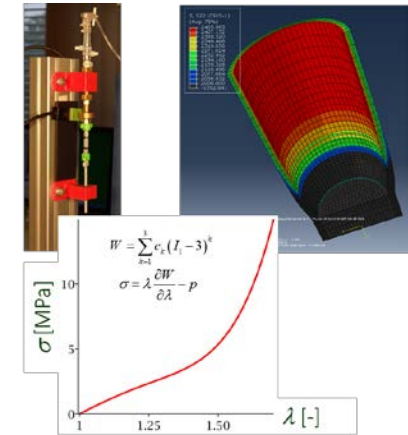
- Maple, Matlab,...

- $W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_1 - 3)^2 + c_3 (I_1 - 3)^3$

- $Q = \sum_{k=1}^n \left(\sigma_{xx}^{EXPERIMENT} - \sigma_{xx}^{MODEL} \right)_k^2 \quad \{c_1, c_2, c_3\} \rightarrow Q_{\min}$

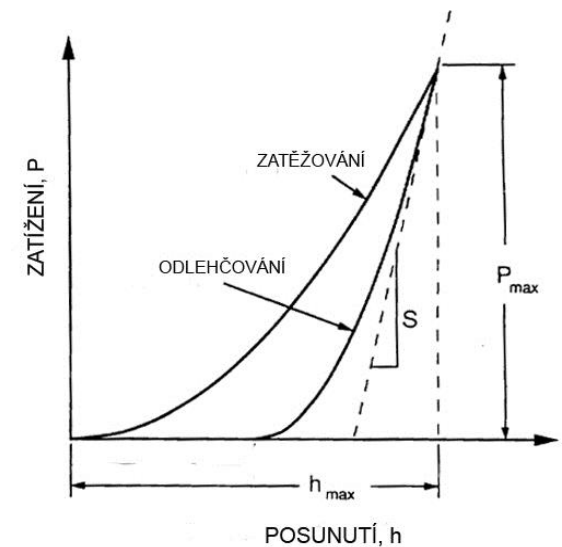
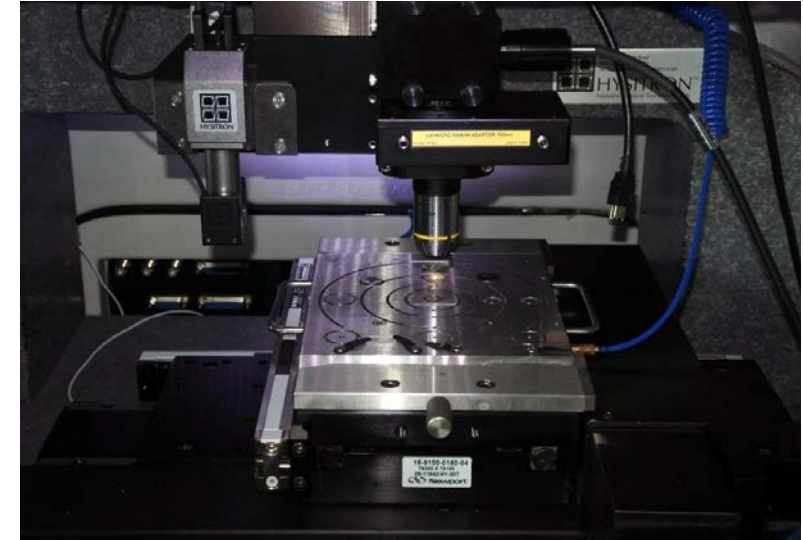


Projekt II: Odhad konstitutivních parametrů



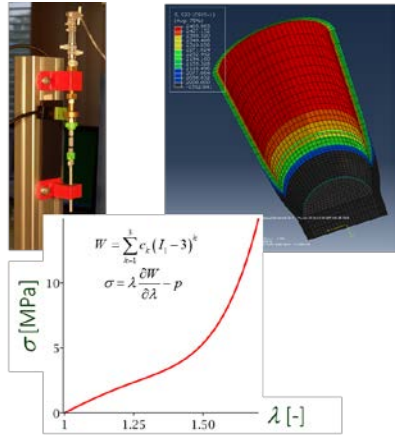
5) Mikroskopické pozorování mechanického chování

- Nanoindentace
- Lineární model
- Viskoelasticitá

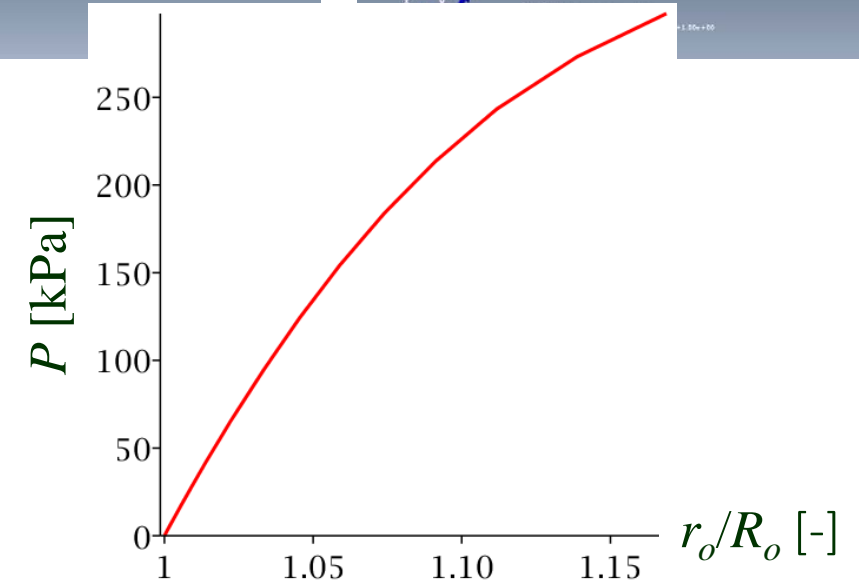
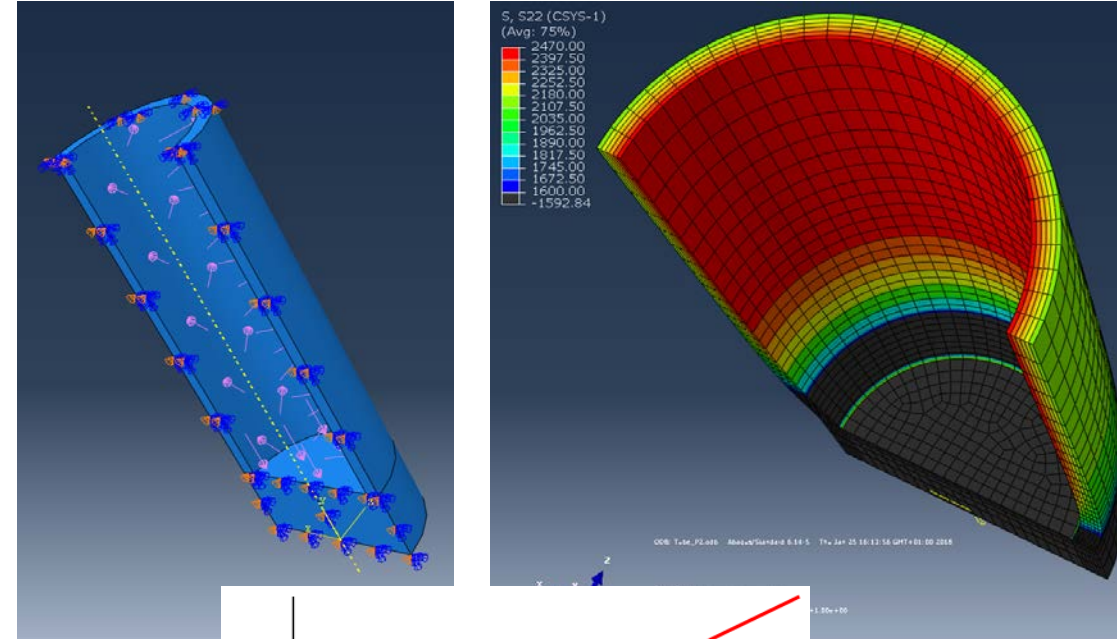


Projekt II: Předpověď numerického modelu

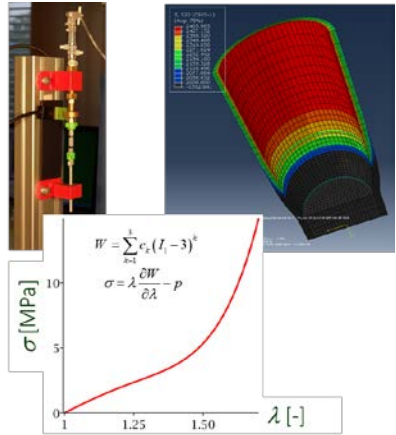
6) MKP výpočet kinematiky nafukování a pole napětí



- Abaqus – rozdíl mezi 2D a 3D
- Abaqus – vliv okrajových podmínek
- Porovnání předpovědí pro různé vstupní hodnoty



Projekt II: Porovnání předpovědí

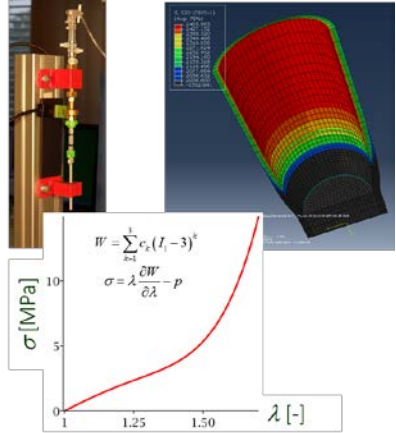


7a) MKP výpočet pro parametry z inflace
(2D)

7b) MKP výpočet pro parametry z tahovky
(1D)

7c) experimentální data z inflace

Projekt II: Porovnání předpovědí



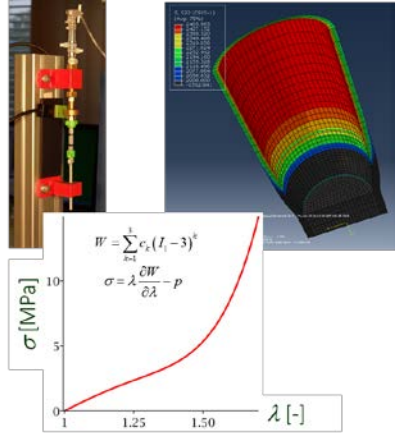
8a) Počáteční modul pružnosti z tahové zkoušky

8b) Počáteční modul pružnosti z indentace

8c) Počáteční modul pružnosti z inflace

- Modul pružnosti určujeme jako tečnu k grafu napětí-deformace
- Je-li k dispozici spojitý model, pak primárně ze spojitého modelu (8a, 8c)

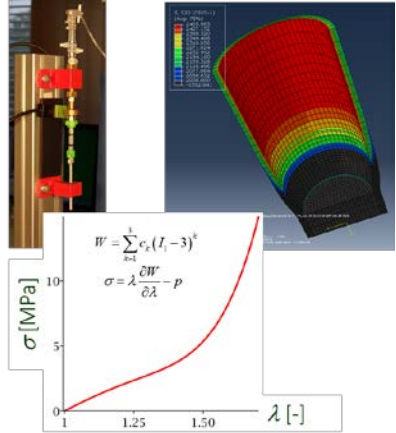
Projekt II: Nedostatky modelů



9) Elasticita versus viskoelasticita:
zhodnoťte projevy viskoelasticity pozorované
v 1D tahu a indentaci

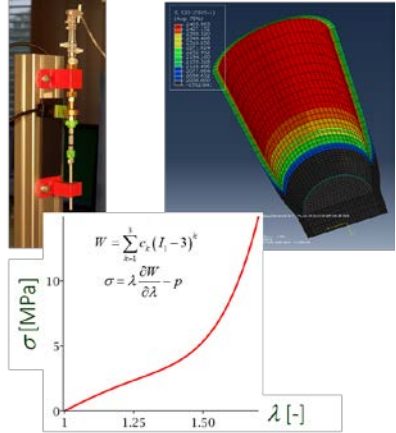
- Míra zmařené hustoty deformační energie
- Creep jako trvalá deformace

Projekt II: Nedostatky modelů



- 10a) Zhodnoťte jak přijaté modelové předpoklady ovlivňují předpovědi modelů
- 10b) Co jsou největší zdroje chyb?
- 10c) Jak daleko sahá u vetknuté trubice oblast ovlivněná vetknutím (lineární vs. nelineární případ)?

Projekt II: Nedostatky modelů



- O všem, co jste dělali, vypracujte zprávu na úrovni bakalářské práce
- Očekávaný rozsah 30 až 60 stran
- Práci si rozdělte do kapitol...
- Dodržte jednotné fonty, značení a definice veličin v celé práci!

Komentáře

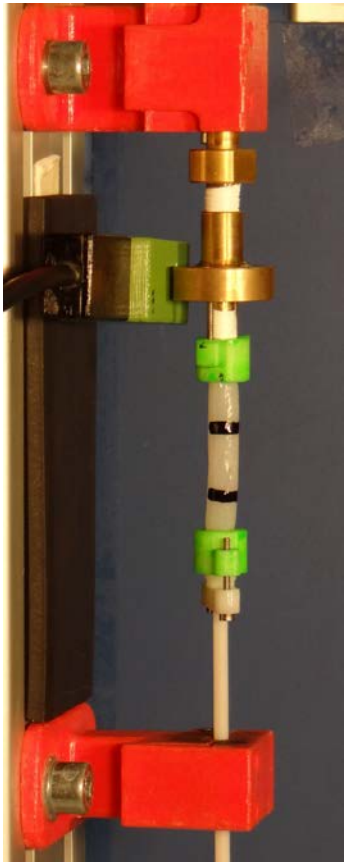
Projekt II

1) Experimentální inflace

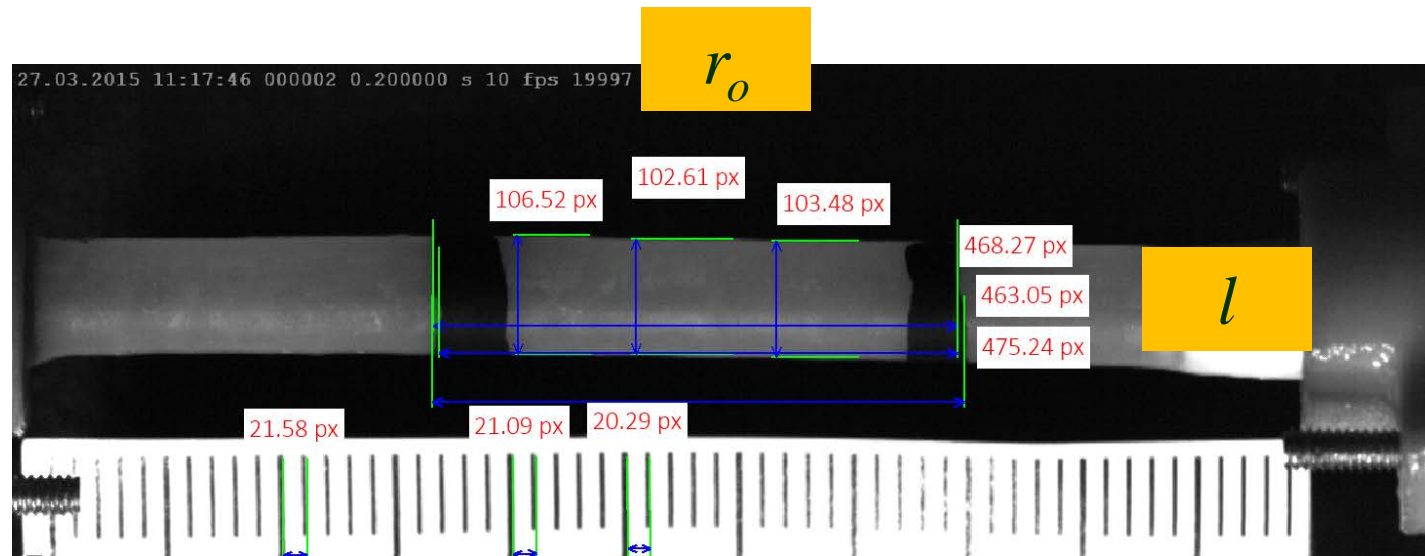


1) Experimentální inflace

a) Izochorická kinematika válcové skořepiny



$$V = \pi (R_o^2 - R_i^2) L = \pi (r_o^2 - r_i^2) l = v$$



$$\lambda_{\ominus} = \frac{r}{R}$$

$$r = \frac{r_i + r_o}{2}$$

$$R = \frac{R_i + R_o}{2}$$

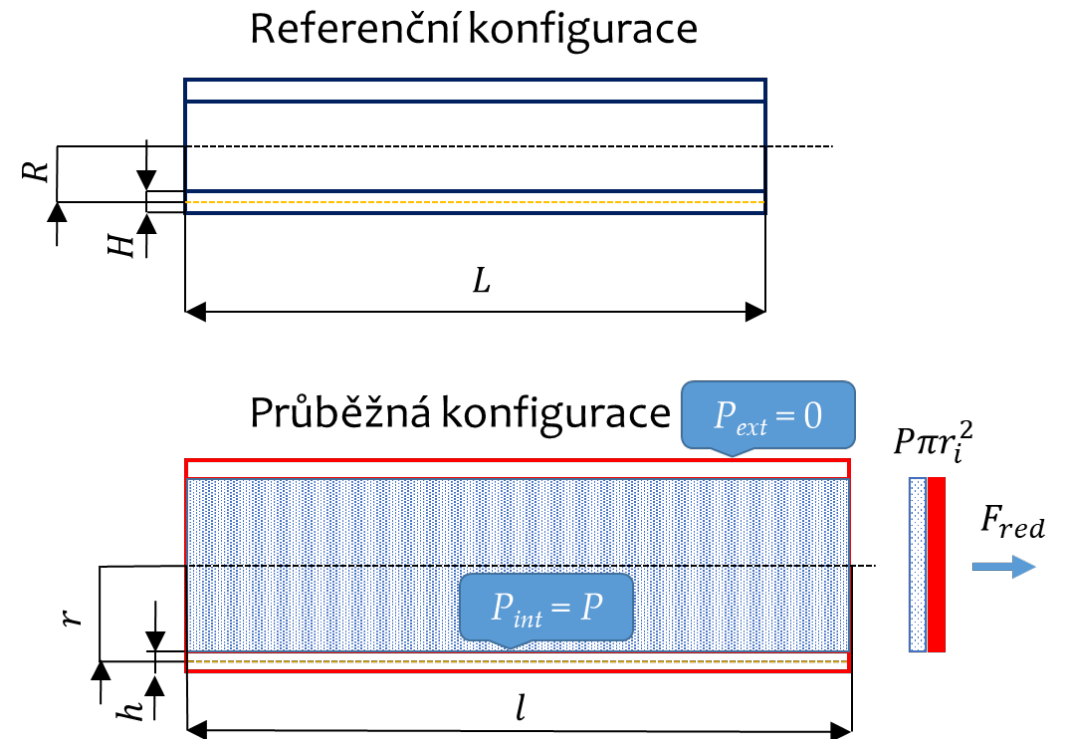
$$\lambda_z = \frac{l}{L}$$

1) Experimentální inflace

a) Izochorická kinematika válcové skořepiny

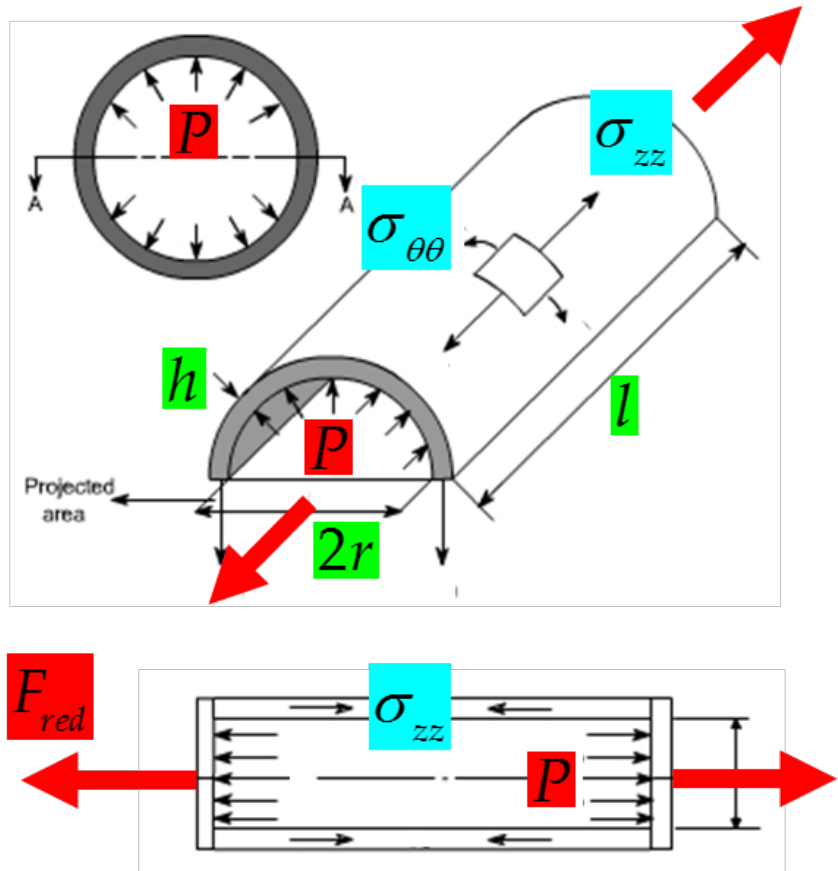
$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_R & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\Theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_Z \end{pmatrix}$$

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_R = \lambda_R(\lambda_\Theta, \lambda_Z)$$



1) Experimentální inflace

b) Rovnice rovnováhy válcové skořepiny



$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{rP}{h}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{F_{red}}{2\pi rh} + \frac{rP}{2h}$$

$$\sigma_{rr} = 0$$

2) Regresní analýza

a) Konstitutivní model

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{I}$$

$$\sigma_{rr} = \lambda_R \frac{\partial W}{\partial \lambda_R} - p$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{\Theta} \frac{\partial W}{\partial \lambda_{\Theta}} - p$$

$$\sigma_{zz} = \lambda_Z \frac{\partial W}{\partial \lambda_Z} - p$$

$$W = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_1 - 3)^2 + c_3 (I_1 - 3)^3$$

$$I_1 = \lambda_R^2 + \lambda_{\Theta}^2 + \lambda_Z^2$$

2) Regresní analýza

b) Výpočtový model předpovídá napětí

$$\sigma_{rr} = 0 = \lambda_R \frac{\partial W}{\partial \lambda_R} - p \quad \Rightarrow \quad p = \left[\lambda_R \frac{\partial W}{\partial \lambda_R} \right]_{\lambda_R = (\lambda_\Theta \lambda_Z)^{-1}}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{MOD} = \left[\lambda_\Theta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\Theta} \right]_{\lambda_R = (\lambda_\Theta \lambda_Z)^{-1}} - \left[\lambda_R \frac{\partial W}{\partial \lambda_R} \right]_{\lambda_R = (\lambda_\Theta \lambda_Z)^{-1}}$$

$$\sigma_{zz}^{MOD} = \left[\lambda_Z \frac{\partial W}{\partial \lambda_Z} \right]_{\lambda_R = (\lambda_\Theta \lambda_Z)^{-1}} - \left[\lambda_R \frac{\partial W}{\partial \lambda_R} \right]_{\lambda_R = (\lambda_\Theta \lambda_Z)^{-1}}$$

2) Regresní analýza

c) Napětí určená z pozorování

$$\sigma_{\theta\theta}^{EXP} = \frac{rP}{h} = \frac{\lambda_{\ominus} RP}{\lambda_R H} = \lambda_{\ominus}^2 \lambda_Z \frac{RP}{H}$$

$$\sigma_{zz}^{EXP} = \frac{rP}{2h} + \frac{F_{red}}{2\pi rh} = \frac{\lambda_{\ominus} RP}{2\lambda_R H} + \frac{mg}{2\pi\lambda_{\ominus} R\lambda_R H} = \lambda_{\ominus}^2 \lambda_Z \frac{RP}{H} + \frac{\lambda_Z mg}{2\pi RH}$$

2) Regresní analýza

d) Účelová funkce Q

$$Q = \sum_{k=1}^n \left[w_{\theta} \left(\sigma_{\theta\theta}^{EXP} - \sigma_{\theta\theta}^{MOD} \right)^2 + w_z \left(\sigma_{zz}^{EXP} - \sigma_{zz}^{MOD} \right)^2 \right]_k$$

$$w_{\theta} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sigma_{\theta\theta,k}^{EXP} \right)^2}$$

$$w_z = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sigma_{zz,k}^{EXP} \right)^2}$$

2) Regresní analýza

e) Odhad parametrů minimalizací účelové funkce Q

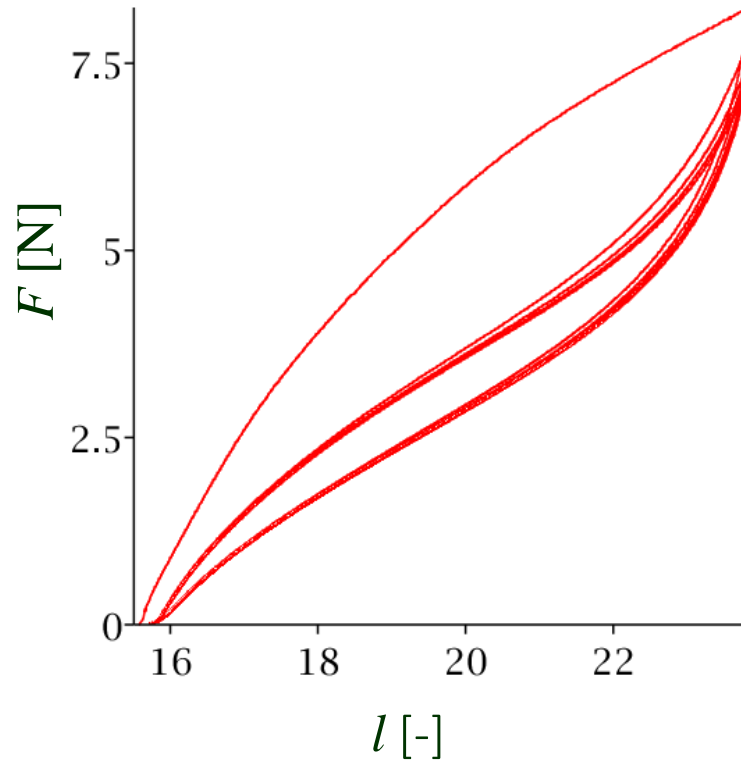
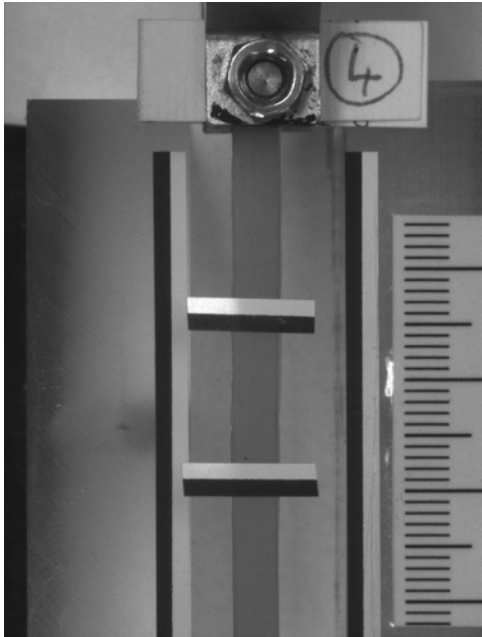
$$Q = \sum_{k=1}^n \left[w_{\theta} \left(\sigma_{\theta\theta}^{EXP} - \sigma_{\theta\theta}^{MOD} \right)^2 + w_z \left(\sigma_{zz}^{EXP} - \sigma_{zz}^{MOD} \right)^2 \right]_k$$

- Nelineárního programování v Maple např. pomocí *Optimization[NLPSolve](Q,...)*

$$Q = Q(c_1, c_2, c_3)$$

3) Tahová zkouška jako alternativa

a) Cyklický kvazistatický experiment



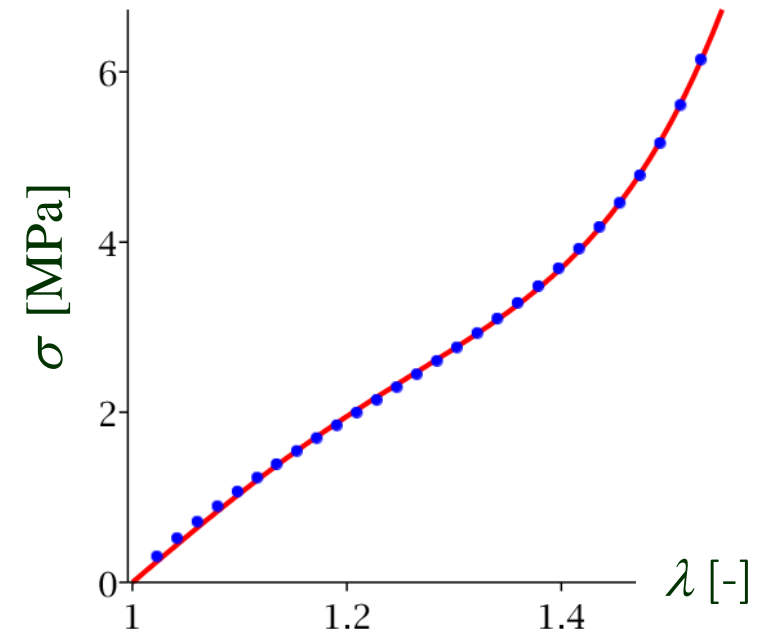
- Preconditioning
- Izochorická kinematika
- Jednoosá napjatost
- Extenzometr

4) Tahová zkouška jako alternativa

a) Regresní analýza opět odhadne parametry konstitutivního modelu

$$\sigma_{xx}^{EXP} = \frac{F \lambda_X}{S}$$
$$\sigma_{xx}^{MOD} = \left[\lambda_X \frac{\partial W}{\partial \lambda_X} - \lambda_Z \frac{\partial W}{\partial \lambda_Z} \right]_{\lambda_y = \frac{1}{\sqrt{\lambda_X}}, \lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\lambda_X}}}$$

- U jednoduchých funkcí můžeme použít např. $Statistics[Fit](f(x, c_1, c_2, c_3), X, Y, x)$
tj. nemusíme přímo vytvářet součet čtverců Q ,
ale postačí sestavit vektory X a Y



Další úkoly

5) Mikroskopické pozorování mechanického chování, 6) Detaily MKP výpočtu, 7) Detaily uspořádání tahové a inflační zkoušky budou probrány v jednotlivých laboratořích...

A1-s113



Mikro/nano – Ing. Josef Šepitka, Ph.D. Josef.septika@fs.cvut.cz

C1-s116a



MKP – Ing. Petr Tichý, Ph.D. petr.tichy@fs.cvut.cz

C1-s114



1D tah – Ing. Radek Sedláček, Ph.D. radek.sedlacek@fs.cvut.cz

E3-139a



Inflace trubice – Ing. Hynek Chlup hynek.chlup@fs.cvut.cz

Další úkoly

Harmonogram přednášek, laboratoří a konzultací bude rozeslán emailem