

Přenos hybnosti

Přehled základních rovnic

I. Rovnice kontinuity

Fyzikální vlastnost $P \equiv \rho$

Diferenciální tvar

Kontrolní objem materiální
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{I} - 1)$$

Kontrolní objem pevný
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \quad (\text{I} - 2)$$

\uparrow \uparrow
 $|$ 2 rychlost konvektivního přívodu hmotnosti
 1 rychlost akumulace hmotnosti

Integrální tvar

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \vec{n} \cdot \vec{u} \cdot \rho \cdot dS \quad (\text{I} - 3)$$

Ustálené proudění nestlačitelných tekutin

- Ustálené proudění $\partial \rho / \partial t = 0$
- Nestlačitelné tekutiny $\rho = \text{konst.}$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{I} - 4)$$

Kartézské souřadnice

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{I} - 5a)$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot u_i = 0 \quad (\text{I} - 5b)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I} - 5c)$$

Cylindrické souřadnice

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I} - 6)$$

II. Cauchyova rovnice

Fyzikální vlastnost $P \equiv \rho \cdot \vec{u}$

Základní rovnice dynamiky tekutin

• Diferenciální tvar

Kontrolní objem materiální
$$\rho \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \bullet \vec{\tau} + \rho \cdot \vec{f} \quad (\text{II} - 1)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$

1 – setrvačné síly 2 – tlakové síly 3 – síly vazkého tření 4 – vnější objemové síly

Kontrolní objem pevný
$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \bullet \vec{\tau} + \rho \cdot \vec{f} \quad (\text{II} - 2)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

1 – časová složka setrvačné síly 4 – síly vazkého tření
 2 – konvektivní složka setrvačné síly 5 – vnější objemové síly
 3 – tlakové síly

Kartézské souřadnice

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \rho \cdot f_x \quad (\text{II} - 3a)$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_i \quad (\text{II} - 3b)$$

Složka x :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho \cdot f_x \quad (\text{II} - 4a)$$

Složka y :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho \cdot f_y \quad (\text{II} - 4b)$$

Složka z :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho \cdot f_z \quad (\text{II} - 4c)$$

III. Konstitutivní rovnice $\vec{\tau} = 2 \cdot \eta \cdot \vec{d}$

1. Tenzor rychlosti deformace \vec{d}

- Symetrický tenzor ; \Rightarrow 6 nezávislých složek.
- Symetrická část tenzoru $\nabla \vec{u}$.

$$\vec{d} = \frac{1}{2} \cdot [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] \quad (\text{III} - 1)$$

Kartézské souřadnice

$$d_{--} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_-} u_- + \left(\frac{\partial}{\partial x_-} u_- \right)^T \right] \quad (\text{III} - 2a)$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^T \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (\text{III} - 2b)$$

$$\vec{d} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{III} - 3)$$

$$d_{xx} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (\text{III} - 3a)$$

$$d_{yx} = d_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (\text{III} - 3d)$$

$$d_{yy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (\text{III} - 3b)$$

$$d_{zx} = d_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III} - 3e)$$

$$d_{zz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (\text{III} - 3c)$$

$$d_{zy} = d_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III} - 3f)$$

Cylindrické souřadnice

$$\vec{d} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & \varphi & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ \varphi \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\varphi} & d_{rz} \\ d_{\varphi r} & d_{\varphi\varphi} & d_{\varphi z} \\ d_{zr} & d_{z\varphi} & d_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{III} - 4)$$

$$d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{III} - 4a)$$

$$d_{\varphi r} = d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{III} - 4d)$$

$$d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \quad (\text{III} - 4b)$$

$$d_{zr} = d_{rz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{III} - 4e)$$

$$d_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{III} - 4c) \quad d_{z\varphi} = d_{\varphi z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{III} - 4f)$$

2. Druhý invariant – pro vyjádření zdánlivé viskozity nestlačitelné tekutiny

$$II = \vec{d} : \vec{d} \quad (\text{III} - 5)$$

$$II = d_{--} : d_{--} \quad (\text{III} - 6a)$$

$$II = \sum_i \sum_j d_{ij} d_{ji} \quad (\text{III} - 6b)$$

Kartézské souřadnice

$$II = d_{xx}^2 + 2 \cdot d_{xy}^2 + 2 \cdot d_{xz}^2 + d_{yy}^2 + 2 \cdot d_{yz}^2 + d_{zz}^2 \quad (\text{III} - 7)$$

Cylindrické souřadnice

$$II = d_{rr}^2 + 2 \cdot d_{r\varphi}^2 + 2 \cdot d_{rz}^2 + d_{\varphi\varphi}^2 + 2 \cdot d_{\varphi z}^2 + d_{zz}^2 \quad (\text{III} - 8)$$

3. Tenzor dynamických napětí

- Symetrický tenzor ; \Rightarrow 6 nezávislých složek.

Kartézské souřadnice

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{III} - 9)$$

Cylindrické souřadnice

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r & \varphi & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ \varphi \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (\text{III} - 10)$$

4. Konstitutivní rovnice

4.1 Newtonské kapaliny

- *Stlačitelné kapaliny*

$$\vec{\tau} = -\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \vec{\delta} \cdot \text{tr}(\vec{d}) + 2 \cdot \mu \cdot \vec{d} \quad (\text{III} - 11)$$

- *Nestlačitelné kapaliny*

$$\vec{\tau} = 2 \cdot \mu \cdot \vec{d} \quad (\text{III} - 12)$$

složkově: $\tau_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot d_{ij} \quad (\text{III} - 13)$

Kartézské souřadnice

$$\tau_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot d_{xx} \quad (\text{III} - 14a) \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = 2 \cdot \mu \cdot d_{yx} = 2 \cdot \mu \cdot d_{xy} \quad (\text{III} - 14d)$$

$$\tau_{yy} = 2 \cdot \mu \cdot d_{yy} \quad (\text{III} - 14b) \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 2 \cdot \mu \cdot d_{zx} = 2 \cdot \mu \cdot d_{xz} \quad (\text{III} - 14e)$$

$$\tau_{zz} = 2 \cdot \mu \cdot d_{zz} \quad (\text{III} - 14c) \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 2 \cdot \mu \cdot d_{zy} = 2 \cdot \mu \cdot d_{yz} \quad (\text{III} - 14f)$$

Cylindrické souřadnice

$$\tau_{rr} = 2 \cdot \mu \cdot d_{rr} \quad (\text{III} - 15a) \quad \tau_{\varphi r} = \tau_{r\varphi} = 2 \cdot \mu \cdot d_{\varphi r} = 2 \cdot \mu \cdot d_{r\varphi} \quad (\text{III} - 15d)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2 \cdot \mu \cdot d_{\varphi\varphi} \quad (\text{III} - 15b) \quad \tau_{zr} = \tau_{rz} = 2 \cdot \mu \cdot d_{zr} = 2 \cdot \mu \cdot d_{rz} \quad (\text{III} - 15e)$$

$$\tau_{zz} = 2 \cdot \mu \cdot d_{zz} \quad (\text{III} - 15c) \quad \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = 2 \cdot \mu \cdot d_{z\varphi} = 2 \cdot \mu \cdot d_{\varphi z} \quad (\text{III} - 15f)$$

4.2 Nenewtonské kapaliny - nestlačitelné

$$\vec{\tau} = 2 \cdot \eta \cdot \vec{d} \quad (\text{III} - 16)$$

kde $\eta = (II)$ kde II je druhý invariant tenzoru \vec{d}

- *Mocninné kapaliny*

$$\eta = K \cdot |\sqrt{2 \cdot II}|^{n-1} \quad (\text{III} - 17)$$

kde K – koeficient konzistence,
n – index toku.

- *Binghamské kapaliny*

$$\eta \rightarrow \infty \quad \text{pro } \frac{1}{2} \cdot (\vec{\tau} : \vec{\tau}) < \tau_0^2 \quad (\text{III} - 18)$$

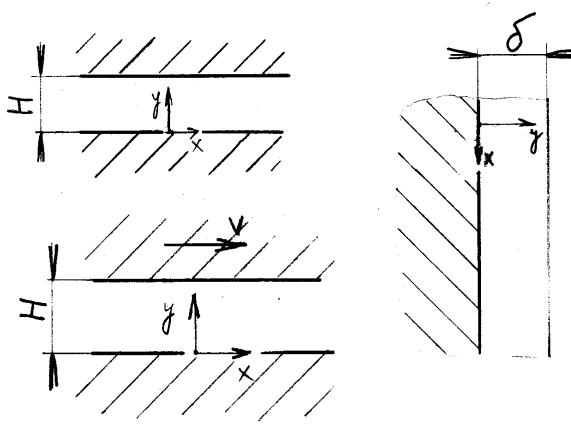
$$\eta = \mu_p + \frac{\tau_0}{|\sqrt{2 \cdot II}|} \quad \text{pro } \frac{1}{2} \cdot (\vec{\tau} : \vec{\tau}) > \tau_0^2$$

kde μ_p – plastická viskozita,
 τ_0 – mez toku.

IV. Případy exaktního řešení Cauchyovy rovnice

1. Jednorozměrné axiální proudění ve směru x

- Laminární proudění.
- Nestlačitelná tekutina.
- Axiální proudění ve štěrbině.
Splývající film. Pevná deska
– pohyblivá deska.



Kartézské souřadnice

$$u_x = f_x(x, y, z) = f_x(y)$$

$$u_y = f_y(x, y, z) = 0$$

$$u_z = f_z(x, y, z) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0 & \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$

Pozn. $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ vyplývá z rovnice kontinuity.

- **Tenzor rychlosti deformace** $\vec{\bar{d}}$

$$\vec{\bar{d}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Druhý invariant**

$$II = 2 \cdot d_{xy}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2$$

Smyková rychlost

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Newtonská kapalina

$$\vec{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mocninná kapalina

$$\vec{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & K \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^n & 0 \\ K \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Binghamská kapalina

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} < \tau_0$$

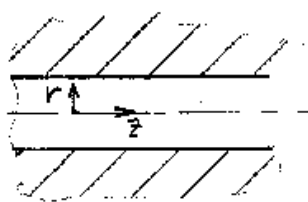
$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} > \tau_0$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_p \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \tau_0 & 0 \\ \mu_p \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Jednorozměrné axiální proudění ve směru z

- Laminární proudění.
- Nestlačitelná tekutina.
- Axiální proudění v kruhové trubce, mezikružích.



Cylindrické souřadnice

$$u_r = f_r(r, \varphi, z) = 0$$

$$u_\varphi = f_\varphi(r, \varphi, z) = 0$$

$$u_z = f_z(r, \varphi, z) = f(r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial u_r}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} &= 0 & \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &\neq 0 & \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Pozn. $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ vyplývá z rovnice kontinuity.

- Tenzor rychlosti deformace \vec{d}

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Druhý invariant

$$II = 2 \cdot d_{rz}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2$$

Smyková rychlost

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

Newtonská kapalina

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mocninná kapalina

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ K \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Binghamská kapalina

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} < \tau_0$$

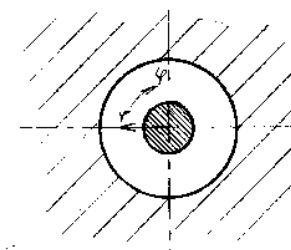
$$\vec{\vec{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} > \tau_0$$

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_p \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \tau_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu_p \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \tau_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Jednorozměrné tangenciální proudění ve směru φ

- Laminární proudění.
- Nestlačitelná tekutina.
- Tangenciální proudění v mezikruží.



Cylindrické souřadnice

$$u_r = f_r(r, \varphi, z) = 0$$

$$u_\varphi = f_\varphi(r, \varphi, z) = 0$$

$$u_z = f_z(r, \varphi, z) = f(r)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \neq 0 \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Pozn. $\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ vyplývá z rovnice kontinuity.

- **Tenzor rychlosti deformace $\vec{\vec{d}}$**

$$\vec{\vec{d}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Druhý invariant**

$$II = 2 \cdot d_{rz}^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right]^2$$

Smyková rychlost

$$\dot{\gamma} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)$$

Newtonská kapalina

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) & 0 \\ \mu \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mocninná kapalina

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & K \cdot \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right]^n & 0 \\ K \cdot \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right]^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Binghamská kapalina

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} < \tau_0$$

$$\vec{\vec{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} > \tau_0$$

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_p \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) + \tau_0 & 0 \\ \mu_p \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) + \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V. Navier – Stokesova rovnice

Cauchyova rovnice $\rho \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \bullet \vec{\tau} + \rho \cdot \vec{f}$ (V – 1)

+

konstituční rovnice:
Newtonův zákon $\vec{\tau} = -\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \vec{\delta} \cdot \text{tr}(\vec{d}) + 2 \cdot \mu \cdot \vec{d}$ (V – 2)

=

rovnice
Navier - Stokesova $\rho \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{3} \cdot \mu \cdot \nabla \nabla \bullet \vec{u} + \mu \cdot \nabla^2 \vec{u} + \rho \cdot \vec{f}$ (V – 3)

Nestlačitelné kapaliny

Kontrolní objem
materiální $\rho \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{u} + \rho \cdot \vec{f}$ (V – 4)

Kontrolní objem
pevný $\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{u} + \rho \cdot \vec{f}$ (V – 5)

Laplaceův operátor $\nabla^2 = \nabla \bullet \nabla$

Kartézské souřadnice

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \bullet \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{u} + \rho \cdot \vec{f} \quad (\text{V – 6a})$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial}{\partial x} u \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u + \rho \cdot f \quad (\text{V – 6b})$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_j \mu \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho \cdot f_i \quad (\text{V – 6c})$$

Složka x :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f_x \quad (\text{V – 7a})$$

Složka y :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f_y \quad (\text{V – 7b})$$

Složka z :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f_z \quad (\text{V – 7c})$$

Cylindrické souřadnice

Složka r :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2}{r} + u_z \cdot \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_r) \right] + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right\} + \rho \cdot f_r \end{aligned} \quad (V-8a)$$

Složka φ :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r \cdot u_\varphi}{r} + u_z \cdot \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\varphi) \right] + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right\} + \rho \cdot f_\varphi \end{aligned} \quad (V-8b)$$

Složka z :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} + \rho \cdot f_z \end{aligned} \quad (V-8c)$$

Příklady exaktního řešení Navier – Stokesovy rovnice pro nestlačitelné kapaliny

Laminární proudění

- Tlakové proudění v uzavřeném obdélníkovém kanálu
 - A. Proudění v kanálu obdélníkového průřezu
 - B. Proudění ve štěrbině nekonečné šířky
- Tlakové proudění v potrubí kruhového a mezikruhového průřezu
- Tangenciální proudění mezikružím mezi sousými válci
- Stékání po stěně

Přibližná analytická řešení

Řešení v limitních případech, kdy některé členy jsou řádově menší než ostatní, takže je možné je zanedbat.

A. Plouživé proudění – převažují vazké síly, setrvačné síly jsou zanedbatelné.

Př. obtékání koule.

Stokesova rovnice (V – 9)

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 \vec{u} + \rho \cdot \vec{f}$$

B. Proudění ideálních tekutin – převažují setrvačné síly, vazké síly jsou zanedbatelné.

Př. Potenciální obtékání válce.

Eulerova rovnice (V – 10)

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \cdot \vec{f}$$

C. Mezní vrstva – uvnitř mezní vrstvy – 2D Navier – Stokesova rovnice se zanedbáním obj.sil
– vně mezní vrstvy – Eulerova rovnice

Inspekční analýza

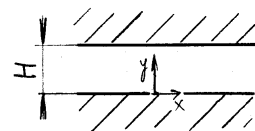
- Nezískáváme analytické řešení.
- Odvození funkcionální kvalitativní závislosti. Kvantitativní závislost následně experimentem.

VI. Exaktní příklady řešení Navier – Stokesovy rovnice - příklady

VI.1 Tlakové laminární proudění ve štěrbině

1. Hustota toku hybnosti

- Přímkový profil.



$$\tau_{yx}(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot H \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{y}{H} \right) \quad (\text{VI} - 1a)$$

2. Rychlostní profil

- Parabolický profil.

$$u_x(y) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot H^2 \cdot \left[\frac{y}{H} - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right] \quad (\text{VI} - 1b)$$

3. Maximální rychlost

- Uprostřed mezery ; $y = H/2$.

$$u_{\max} = \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot H^2 \quad (\text{VI} - 1c)$$

4. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{12\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot H^2 \quad (\text{VI} - 1d)$$

5. Objemový průtok

$$\dot{V} = \frac{1}{12\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot B \cdot H^3 \quad (\text{VI} - 1e)$$

Symbols:

p_1 – tlak ve štěrbině v délce L_1 ,

p_2 – tlak ve štěrbině v délce L_2 ,

$\Delta p = (p_1 - p_2)$ – tlakový spád na délce $\Delta L = L_2 - L_1$,

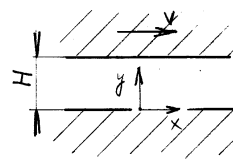
H – výška štěrbin,

B – šířka štěrbin,

μ - dynamická viskozita,

y – příčná souřadnice.

VI.2 Pohyblivá deska – pevná deska



1. Hustota toku hybnosti

- Konstantní profil.

$$\tau_{yx}(y) = \mu \cdot \frac{v}{H} \quad (\text{VI} - 2a)$$

2. Rychlostní profil

- Přímkový profil.

$$u_x(y) = \frac{v}{H} \cdot y \quad (\text{VI} - 2b)$$

3. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \cdot v \quad (\text{VI} - 2c)$$

4. Síla působící na desku

$$F = \mu \cdot \frac{v}{H} \cdot S = \mu \cdot \frac{v}{H} \cdot B \cdot L \quad (\text{VI} - 2d)$$

5. Objemový průtok

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \cdot v \quad (\text{VI} - 2e)$$

Symbols:

v – rychlost desky,

S – povrch desky,

H – výška štěrby,

B – šířka štěrby,

L – délka štěrby,

μ – dynamická viskozita,

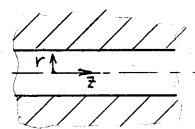
y – příčná souřadnice.

VI.3 Tlakové laminární proudění v kruhovém potrubí

1. Hustota toku hybnosti

- Přímkový profil.

$$\tau_{rz}(r) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot r \quad (\text{VI} - 3a)$$



2. Rychlostní profil

- Parabolický profil.

$$u_z(r) = 2\bar{u} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{VI} - 3b)$$

3. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot R^2 = \frac{1}{32\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot D^2 \quad (\text{VI} - 3c)$$

4. Objemový průtok – Hagen – Poiseuilleův vztah

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot D^4 \quad (\text{VI} - 3d)$$

Symbols:

p_1 – tlak v trubce v délce L_1 ,

p_2 – tlak v trubce v délce L_2 ,

$\Delta p = (p_1 - p_2)$ – tlakový spád na délce $\Delta L = L_2 - L_1$,

R – poloměr trubky,

D – průměr trubky,

L – délka trubky,

μ – dynamická viskozita,

r – poloměr.

VI.4 Tlakové laminární proudění v mezikružích

A. Aproximativní řešení – rozvinutí dle R_s

1. Rychlostní profil

- Parabolický profil.

$$u_z(r) = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot (R_2 - R_1)^2 \cdot \left[\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} - \left(\frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^2 \right] \quad (\text{VI} - 4a)$$

2. Maximální rychlost

- $r_{\max} = R_1 + (R_1 + R_2)/2$.

$$u_{\max} = \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot (R_2 - R_1)^2 \quad (\text{VI} - 4b)$$

3. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{12\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot (R_2 - R_1)^2 \quad (\text{VI} - 4c)$$

4. Objemový průtok

$$\dot{V} = \frac{\pi}{12\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot (R_1 + R_2) \cdot (R_2 - R_1)^3 \quad (\text{VI} - 4d)$$

B. Přesné řešení

1. Rychlostní profil

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot R_2^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \cdot \ln \left(\frac{r}{R_2} \right) \right] \quad (\text{VI} - 5a)$$

$$u_z(r) = \frac{1}{16\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot D_2^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{2r}{D_2} \right)^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \cdot \ln \left(\frac{2r}{D_2} \right) \right] \quad (\text{VI} - 5b)$$

2. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot R_2^2 \cdot \left[1 + \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{VI} - 5c)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{32\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot D_2^2 \cdot \left[1 + \kappa^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{VI} - 5d)$$

3. Objemový průtok

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot R_2^4 \cdot \left[1 - \kappa^4 - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{VI} - 5e)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{128\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L_2 - L_1} \cdot D_2^4 \cdot \left[1 - \kappa^4 - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln \frac{1}{\kappa}} \right] \quad (\text{VI} - 5f)$$

C. Chyba aproximace

Chyba aproximace je prezentována na porovnání průtoků:

κ	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
\dot{V}_r / \dot{V}	1,000	0,999	0,998	0,996	0,992	0,987	0,978	0,962	0,931

$$\frac{\dot{V}_r}{\dot{V}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \kappa) \cdot (1 - \kappa)^3}{1 - \kappa^4 - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln \frac{1}{\kappa}}} \quad (\text{VI} - 5g)$$

Symbols:

p_1 – tlak v trubce v délce L_1 ,

p_2 – tlak v trubce v délce L_2 ,

$\Delta p = (p_1 - p_2)$ – tlakový spád na délce $\Delta L = L_2 - L_1$,

R_1 – vnější poloměr vnitřní trubky,

R_2 – vnitřní poloměr vnější trubky,

R_s – střední poloměr ; $R_s = (R_1 + R_2)/2$

D_1 – vnější průměr vnitřní trubky,

D_2 – vnitřní průměr vnější trubky,

$\kappa = R_1 / R_2 = D_1 / D_2$

\dot{V}_r - objemový průtok z rovinné aproximace,

\dot{V} - objemový průtok z přesného řešení,

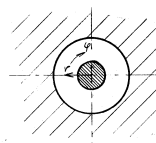
L – délka trubky,

μ - dynamická viskozita,

r – poloměr.

VI.5 Tangenciální laminární proudění v mezikruží vlivem rotace vnitřního válce

A. Aproximativní řešení – rozvinutí dle R_s



1. Hustota toku hybnosti

- Konstantní profil.

$$\tau_{r\varphi}(r) = \mu \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \cdot \omega = \pi \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \cdot \mu \cdot n \quad (\text{VI} - 6a)$$

2. Rychlostní profil

- Přímkový profil.

$$u_\varphi(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \cdot \omega \cdot (R_2 - r) = \pi \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} \cdot n \cdot (R_2 - r) \quad (\text{VI} - 6b)$$

3. Krouticí moment

$$M_k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^3}{R_2 - R_1} \cdot L \cdot \mu \cdot \omega = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^3}{R_2 - R_1} \cdot L \cdot \mu \cdot n \quad (\text{VI} - 6c)$$

B. Přesné řešení

1. Hustota toku hybnosti

- Hyperbolický profil.

$$\tau_{r\varphi}(r) = 2 \cdot \mu \cdot \omega \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = 4\pi \cdot \mu \cdot n \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (\text{VI} - 7a)$$

2. Rychlostní profil

- Hyperbolický profil.

$$u_\varphi(r) = \omega \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left[\frac{R_2^2}{r} - r \right] = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \left[\frac{R_2^2}{r} - r \right] \quad (\text{VI} - 7b)$$

3. Krouticí moment

$$M_k = 4\pi \cdot \frac{R_2^2 \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot L \cdot \mu \cdot \omega = 8\pi^2 \cdot \frac{R_2^2 \cdot R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot L \cdot \mu \cdot n \quad (\text{VI} - 7c)$$

C. Chyba aproximace

Chyba aproximace je prezentována na porovnání výpočtových hodnot dynamických viskozit:

κ	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5
μ_r / μ	0,999	0,994	0,987	0,975	0,960	0,939	0,912	0,879	0,839	0,790

Symbols:

R_1 – poloměr vnitřního rotujícího válce,

R_2 – poloměr vnějšího pevného válce,

R_s – střední poloměr ; $R_s = (R_1 + R_2)/2$,

L – délka vnitřního rotujícího válce,

$\kappa = R_1 / R_2 = D_1 / D_2$,

M_k – krouticí moment na rotujícím válci,

ω - úhlová rychlost,

n – otáčky vnitřního rotujícího válce,

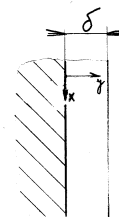
μ_r - dynamická viskozita z rovinné aproximace,

μ - dynamická viskozita z přesného řešení,

r – poloměr.

VI.6 Laminární stékající film kapaliny

Svislá stěna



1. Hustota toku hybnosti

- Přímkový profil.

$$\tau_{yx}(y) = \rho \cdot g \cdot \delta \cdot \left[1 - \frac{y}{\delta} \right] \quad (\text{VI} - 8a)$$

2. Rychlostní profil

- Parabolický profil.

$$u_x(y) = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta}{\mu} \cdot \left[y - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\delta} \right] \quad (\text{VI} - 8b)$$

3. Střední rychlost

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^2}{\mu} \quad (\text{VI} - 8c)$$

4. Objemový průtok

$$\dot{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^3}{\mu} \cdot B \quad (\text{VI} - 8d)$$

Symbols:

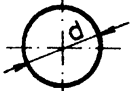
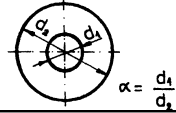
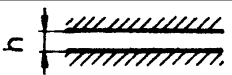
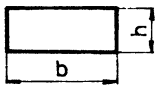
δ - tloušťka stékajícího filmu,
 B - šířka stékajícího filmu,
 g - tíhové zrychlení,
 ρ - hustota,
 μ - dynamická viskozita,
 y - příčná souřadnice.

Šikmá stěna

Místo g složka tíhového zrychlení do směru x : $g_x = g \cdot \sin \alpha$, kde α - úhel sklonu stěny svírající s vodorovnou osou.

VI.7 Režim toku

1. Kanál:

Tvar průřezu:	Charakteristický rozměr	Hydraulický průměr d_h
Kruh		d
Mezikruží		$d_2 - d_1$
Rovinná štěrbina		$2h$
Obdélník		$2bh/(b + h)$

$$Re_h = \frac{\bar{u} \cdot d_h}{\nu} = \frac{\bar{u} \cdot d_h \cdot \rho}{\mu}$$

kde : d_h – hydraulický průměr, \bar{u} - střední rychlost,
 ν - kinematická viskozita, μ - dynamická viskozita,
 ρ - hustota

Režim toku: laminární proudění $Re_h < 2300$; turbulentní proudění $2300 < Re_h$

2. Stékající film po svislé stěně

$$Re = \frac{4 \cdot \dot{V}_{1m}}{\nu} = \frac{4 \cdot \dot{V}_{1m} \cdot \rho}{\mu}$$

kde : \dot{V}_{1m} - intenzita skrápění (objemový tok na 1 m délky),
 ν - kinematická viskozita, μ - dynamická viskozita,
 ρ - hustota

Režim toku:

laminární oblast	$Re < 25$
pseudolaminární oblast	$25 < Re < 1\,000$
přechodová oblast	$1\,000 < Re < 1\,500$
turbulentní oblast	$1\,500 < Re$

Pozn. Pseudolaminární oblast – v jádru proudu laminární proudění, na povrchu proudící vrstvy se objevuje zvlnění a víry.

3. Tangenciální proudění v mezikruží mezi dvěma válci

Rotace vnitřního válce

$$Re_{krit} \cong \frac{41,3}{(1-\kappa)^{3/2}}$$

$$Re_i = \frac{\omega_1 \cdot R_1^2}{\nu} = \frac{\omega_1 \cdot R_1^2 \cdot \rho}{\mu}$$

kde:

$\kappa = R_1/R_2$,

R_1 – poloměr vnitřního rotujícího válce,

R_2 – poloměr vnějšího pevného válce,

ω_1 – úhlová rychlost vnitřního rotujícího válce,

ν - kinematická viskozita, μ - dynamická viskozita,

ρ - hustota

Režim toku: laminární proudění $Re_i < Re_{krit}$; turbulentní proudění $Re_{krit} < Re_i$

Radek Šulc 2002/v1