

VI. Nestacionární vedení tepla

Nestacionární vedení tepla stagnantním prostředím, tj. tělesy a kapalinou, ve které se neprojevuje přirozená konvekce.

F. K. rovnice

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{Q}^{(g)} = \lambda \cdot \nabla^2 T + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{VI} - 1)$$

- **Nestacionární vedení tepla v prostředí bez vnitřních zdrojů tepla a s neproměnnými fyzikálními vlastnostmi:**

Fourierova rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \nabla^2 T = a \cdot \nabla^2 T \quad (\text{VI} - 2)$$

kde a – součinitel teplotní vodivosti.

- **Biotovo číslo**

$$Bi = \frac{\text{vnitřní termický odpor (kondukcí)}}{\text{vnější termický odpor (konvekci)}} = \frac{L / \lambda}{1 / \alpha} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \quad (\text{VI} - 3)$$

kde α – součinitel přestupu tepla,
 L – charakteristický rozměr
 λ – tepelná vodivost tělesa.

Hodnota Biotova čísla poskytuje informaci, který z obou termických odporů bude v daném konkrétním případě dominantní, což ovlivňuje o řešení.

- **Případy**

A. Zanedbatelný vnitřní konduktivní termický odpor $Bi \ll 1$

Dominance vnějšího konvektivního odporu. Zanedbatelný vnitřní konduktivní termický odpor \Rightarrow teplotní gradienty uvnitř tělesa zanedbatelné. Prakticky $Bi < 0,1$ teplota povrchu \approx teplota tělesa.

Případy: Tělesa

- s malým charakteristickým rozměrem (např. malé částice, dráty, tenké plechy).
- s vysokou tepelnou vodivostí (např. kovy).
- s malým součinitelem přestupu tepla α (např. vzduch nebo jiné plyny)

B. Zanedbatelný vnější konvektivní termický odpor $Bi \gg 1$

Zanedbatelný vnější konvektivní odpor. Dominance vnitřního konduktivního termického odporu.

Případy: Opačné případy než v předchozím případě, tj.: tělesa:

- s velkým charakteristickým rozměrem
- s nízkou tepelnou vodivostí (např. kovy).
- s vysokým součinitelem přestupu tepla α (např. kondenzující pára)

Teplota povrchu stěny T_s se v tomto případě liší od teploty prostředí T_f relativně málo ; v mezním případě $T_f = T_s$ (okrajová podmínka I. druhu) – prakticky pro $Bi > 100$.

C. Termické odpory stejného řádu $Bi \approx 1$

Oba termické odpory jsou téhož řádu ; ani jeden nelze zanedbat. Na povrchu se uplatňují okrajové podmínky III. druhu.

A. Nestacionární vedení tepla v tělesech se zanedbatelným vnitřním termickým odporem $Bi \ll 1$

F. K. rovnice
$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \quad (A-1)$$

• Integrální tvar

$$\rho \cdot c_p \cdot \int_V \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV = - \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} \cdot dS \quad (A-2)$$

• Teplota tělesa v čase t

Pro $Bi \ll 1$ teplota tělesa T a hustota tepelného toku q nezávisí na souřadnici ; lze T i q umístit před integrál:

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \cdot (T - T_f) \cdot S \quad (A-3)$$

Po integraci s počáteční podmínkou: teplota tělesa $T(t=0) = T_0$:

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = \exp \left[- \frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot t \right] \quad (A-4)$$

• Tepelný tok povrchem tělesa S a objemu V v čase t

$$\dot{Q}(t) = \alpha \cdot (T(t) - T_f) \cdot S \quad (A-5)$$

• Celkové množství tepla převedeného povrchem tělesa za dobu t

$$Q = \int_0^t \dot{Q}(t) dt = -\rho \cdot c_p \cdot V \cdot (T_0 - T_f) \cdot \left[1 - \exp \left(- \frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot t \right) \right] \quad (A-6)$$

$$Q = -\rho \cdot c_p \cdot V \cdot (T_0 - T(t))$$

T_f – teplota prostředí, c_p – měrná tepelná kapacita, ρ - hustota.

B. Nestacionární vedení tepla v tělesech se zanedbatelným vnějším termickým odporem $Bi \gg 1$

Fourierova rovnice
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \nabla^2 T = a \cdot \nabla^2 T \quad (B-1)$$

B1. Poloneomezené prostředí (polomasiv)

- Skoková změna teploty + OP I.druhu

Počáteční podmínka $T(t, x) = T(t = 0, 0 \leq x < \infty) = T_0$
 Okrajové podmínky OP1: teplota stěny $T(t > 0, x = 0) = T_S$
 OP2: teplota polomasivu $T(t > 0, x \rightarrow \infty) = T_0$

- Nestacionární teplotní profil

$$T^+ = \frac{T - T_0}{T_S - T_0} = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (B1-1)$$

kde bezrozměrná polohová souřadnice η :

$$\eta = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \quad (B1-2)$$

kde $\operatorname{erf}(x)$ – Gaussův integrál chyb
 $\operatorname{erfc}(x)$ – komplementární funkce Gaussova integrálu chyb $\operatorname{erf}(x)$; $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$.

- Teplotní gradient

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -(T_S - T_0) \cdot \frac{\exp(-\eta^2)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \quad (B1-3)$$

- Hustota tepelného toku na povrchu poloneomezeného prostředí

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = (T_S - T_0) \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} = \frac{\lambda}{\delta_T} \cdot (T_S - T_0) \quad (B1-4)$$

kde δ_T – penetrační hloubka konduktivního přenosu tepla.

- Celkové množství tepla převedeného do prostředí plochou S za čas t

$$Q = S \cdot \int_0^t q_x dt = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot (T_S - T_0) \cdot S \cdot 2\sqrt{t} = 2 \cdot \frac{\lambda}{\delta_T} \cdot (T_S - T_0) \cdot S \cdot t \quad (B1-5)$$

- Penetrační hloubka konduktivního přenosu tepla

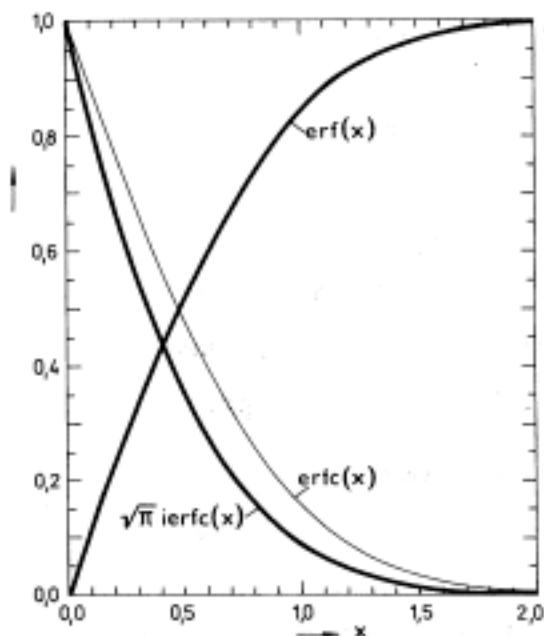
$$\delta_T = \sqrt{\pi \cdot a \cdot t} \quad (B1 - 6)$$

Interpretace: Za dobu t od okamžiku teplotního skoku na povrchu z T_0 na T_s dojde v penetrační hloubce δ_T k relativnímu zvýšení teplotní difference o 21 % ($T^+ = 0,21$).

- Použití pro konečná tělesa

Závislost platnou pro nestacionární vedení tepla v poloneomezeném prostředí lze s dostatečnou přesností použít i pro konečná tělesa s charakteristickým rozměrem L , pokud Fourierovo číslo $Fo = a \cdot t / L^2 < 0,04$ ($\delta_T \ll L$).

- Graf funkce erf(x), erfc(x)



- Tabulka funkce erf(x)

x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)
0,00	0,000 00	0,27	0,297 42	0,78	0,738 01	1,32	0,938 07
0,01	0,011 28	0,28	0,307 88	0,80	0,742 10	1,34	0,941 91
0,02	0,022 36	0,29	0,318 28	0,82	0,753 91	1,36	0,945 56
0,03	0,033 84	0,30	0,328 63	0,84	0,765 14	1,38	0,949 02
0,04	0,045 11	0,32	0,349 13	0,86	0,776 10	1,40	0,952 38
0,05	0,056 37	0,34	0,369 36	0,88	0,786 69	1,45	0,959 38
0,06	0,067 62	0,36	0,389 33	0,90	0,796 91	1,50	0,966 11
0,07	0,078 86	0,38	0,409 01	0,92	0,806 77	1,55	0,971 82
0,08	0,090 08	0,40	0,428 39	0,94	0,816 23	1,60	0,976 35
0,09	0,101 28	0,42	0,447 47	0,96	0,825 42	1,65	0,980 38
0,10	0,112 46	0,44	0,466 23	0,98	0,834 23	1,70	0,983 79
0,11	0,123 62	0,46	0,484 66	1,00	0,842 78	1,75	0,986 67
0,12	0,134 76	0,48	0,502 75	1,02	0,850 84	1,80	0,988 09
0,13	0,145 87	0,50	0,520 59	1,04	0,858 65	1,85	0,990 11
0,14	0,156 95	0,52	0,537 90	1,06	0,866 14	1,90	0,992 79
0,15	0,168 00	0,54	0,554 94	1,08	0,873 33	1,95	0,994 18
0,16	0,179 01	0,56	0,571 82	1,10	0,880 21	2,00	0,995 32
0,17	0,189 99	0,58	0,587 92	1,12	0,886 79	2,05	0,996 28
0,18	0,200 94	0,60	0,603 86	1,14	0,893 08	2,10	0,997 02
0,19	0,211 84	0,62	0,619 41	1,16	0,899 10	2,15	0,997 63
0,20	0,222 70	0,64	0,634 59	1,18	0,904 84	2,20	0,998 13
0,21	0,233 52	0,66	0,649 38	1,20	0,910 31	2,25	0,998 57
0,22	0,244 30	0,68	0,663 78	1,22	0,915 53	2,30	0,998 87
0,23	0,255 03	0,70	0,677 80	1,24	0,920 51	2,35	0,999 11
0,24	0,265 70	0,72	0,691 43	1,26	0,925 24	2,40	0,999 31
0,25	0,276 33	0,74	0,704 68	1,28	0,929 73	2,45	0,999 49
0,26	0,286 90	0,76	0,717 54	1,30	0,934 01	2,50	0,999 59

C. Nestacionární vedení tepla v tělesech s termickými odpory stejného řádu $Bi \approx 1$

Fourierova rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \nabla^2 T = a \cdot \nabla^2 T \quad (C-1)$$

C1. Poloneomezené prostředí

C2. Neomezená deska

C3. Neomezený válec

C4. Koule

C5. 2D a 3D tělesa

C1. Poloneomezené prostředí (polomasiv)

- Skoková změna teploty + OP III.druhu

Počáteční podmínka $T(t, x) = T(t = 0, 0 \leq x < \infty) = T_0$
 Okrajové podmínky OP1: OP III.druhu
 OP2: teplota polomasivu $T(t > 0, x \rightarrow \infty) = T_0$

- Nestacionární teplotní profil

$$T^* = f(Bi_x, Fo^*) \quad (C1-1)$$

$$T^* = \operatorname{erfc}\left(\frac{Bi_x}{2\sqrt{Fo^*}}\right) + \exp(Bi_x + Fo^*) \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{Fo^*} + \frac{Bi_x}{2\sqrt{Fo^*}}\right)$$

v grafické formě viz. obr.

kde

bezrozměrná teplota

$$T^* = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = 1 - T^+ \quad (C1-2)$$

Biotovo číslo

$$Bi_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} \quad (C1-3)$$

Fourierovo číslo

$$Fo^* = \frac{a \cdot t}{L_{fikt}^2} = \frac{a \cdot t}{(\lambda / \alpha)^2} \quad (C1-4)$$

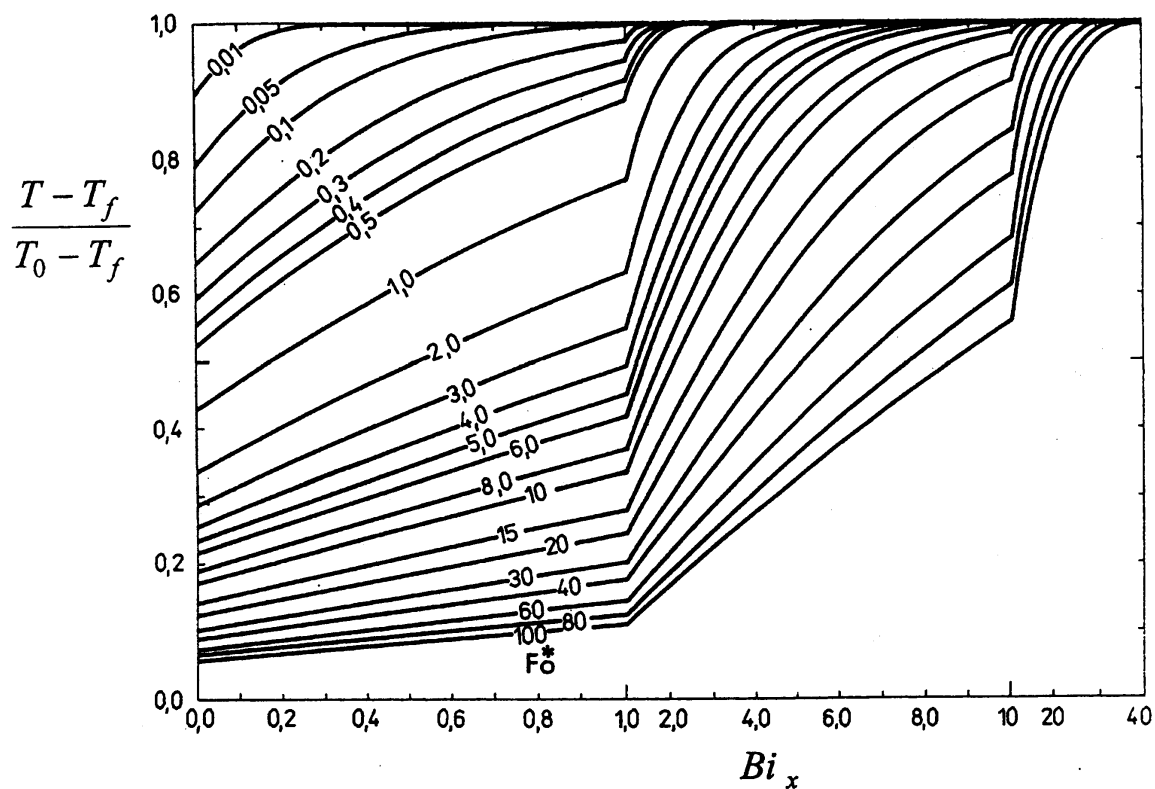
kde x – souřadnice (počátek souřadného systému na povrchu polomasivu),
 T_f – teplota prostředí,
 T_0 – počáteční teplota poloneomezeného prostředí,
 α – součinitel přestupu tepla,
 $\operatorname{erfc}(x)$ – komplementární funkce Gaussova integrálu chyb $\operatorname{erf}(x)$; $\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$.

- Teplota na povrchu poloneomezeného prostředí

$$x = 0 \Rightarrow Bi_x = 0 \quad T^* = \exp(Bi_x) \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo^*}) \quad (C1 - 5)$$

- Použití pro konečná tělesa

Vztahy pro poloneomezené prostředí platí přesně také pro poloneomezené tyče nekonečné délky libovolného avšak konstantního průřezu s tepelně izolovaným povrchem.



C2. Neomezená deska

!! POZOR !! – počátek souřadného systému v ose desky $\Rightarrow H$ – polovina tloušťky desky **!!!**

- Skoková změna teploty + OP III.druhu**

Počáteční podmínka $T(t, x) = T(t = 0, -H \leq x < H) = T_0$

Okrajové podmínky OP III.druhu

- Nestacionární teplotní profil v desce tloušťky $2H$**

$$T^* = f(x^*, Fo, Bi) \quad ; \quad \text{v grafické formě viz. obr.} \quad (C2 - 1)$$

kde

bezrozměrná teplota

$$T^* = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = 1 - T^+ \quad (C2 - 2)$$

bezrozměrná souřadnice polohy

$$x^* = \frac{x}{H} \quad (C2 - 2)$$

Fourierovo číslo

$$Fo = \frac{a \cdot t}{H^2} \quad (C2 - 3)$$

Biotovo číslo

$$Bi = \frac{\alpha \cdot H}{\lambda} \quad (C2 - 4)$$

kde x – souřadnice (počátek souřadného systému v ose desky),
 H – tloušťka poloviny desky ; (\Rightarrow tloušťka desky $2H$),
 T_f – teplota prostředí,
 T_0 – počáteční teplota neomezené desky,
 α – součinitel přestupu tepla.

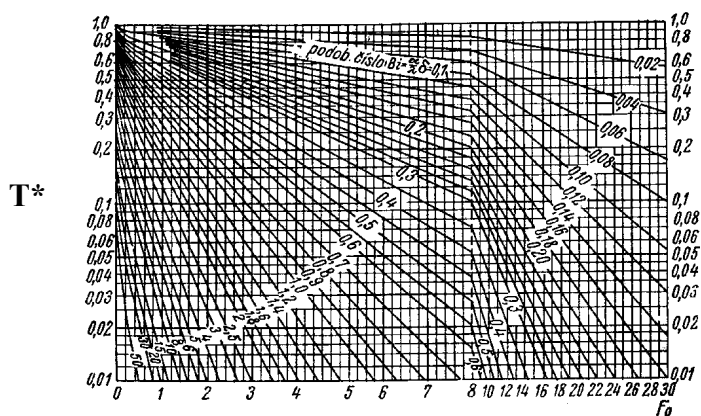
- Hustota tepelného toku na $1m^2$ povrchu**

$$q = \alpha \cdot (T_f - T_S) \quad (C2 - 5)$$

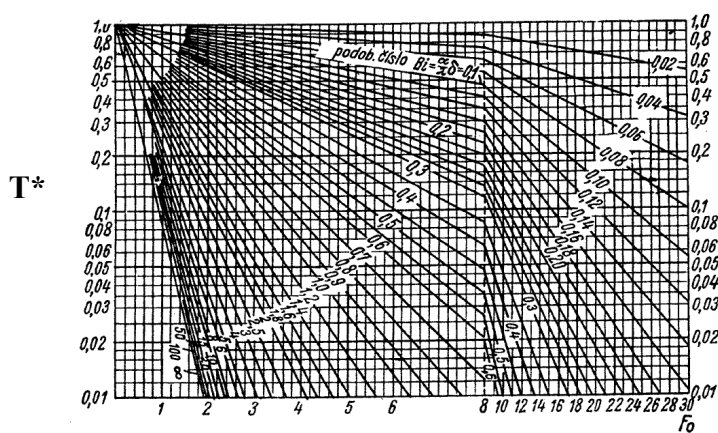
kde $T_S = f(t)$, která se vypočte z $T^*(x^* = 1, Fo, Bi)$

- Okrajová podmínka I. druhu - teplota stěny $T_S = \text{konst.}$**

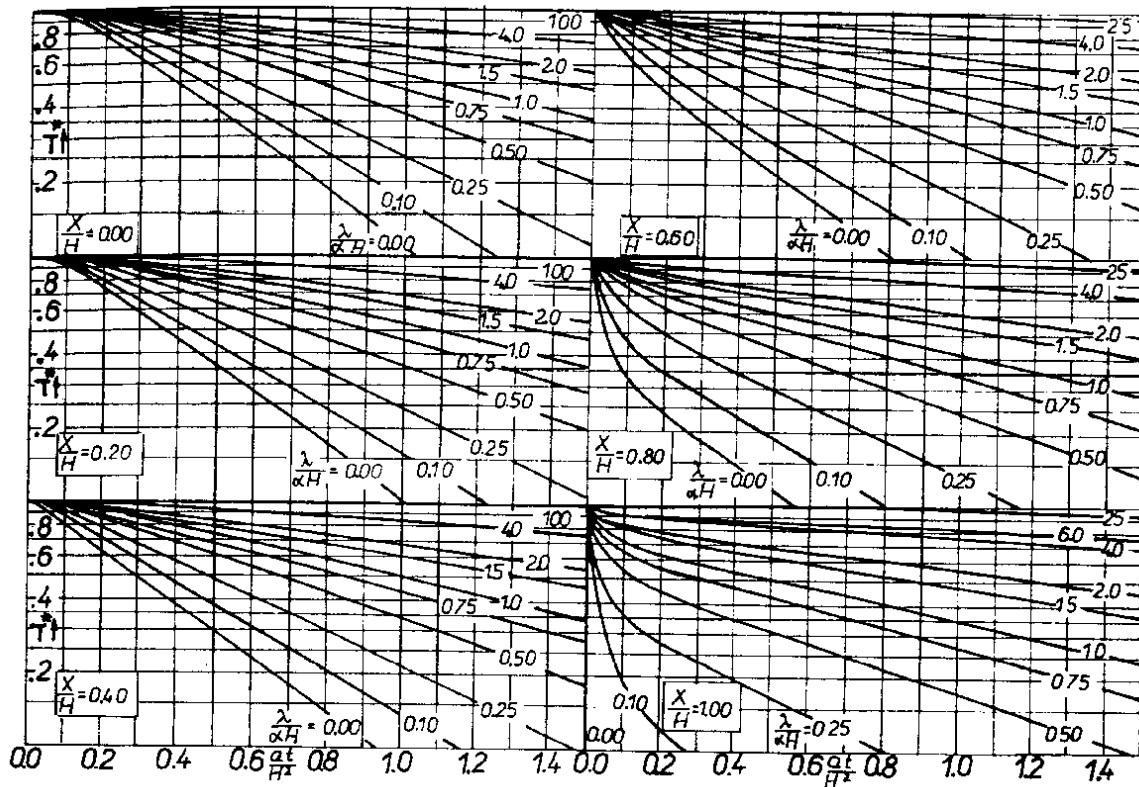
OP. I.druhu : $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow 1/Bi = 0$; teplotní profil $T^* = f(x^*, Fo)$ z grafu pro $1/Bi = 0$.



Neomezená deska – povrch desky



Neomezená deska – osa desky



Neomezená deska

C3. Neomezený válec

- Skoková změna teploty + OP III.druhu

Počáteční podmínka $T(t, r) = T(t = 0, 0 \leq r \leq R) = T_0$

Okrajové podmínky OP III.druhu

- Nestacionární teplotní profil ve válci o poloměru R

$$T^* = f(r^*, Fo, Bi) \quad ; \quad \text{v grafické formě viz. obr.} \quad (C3 - 1)$$

kde

bezrozměrná teplota

$$T^* = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = 1 - T^+ \quad (C3 - 2)$$

bezrozměrná souřadnice polohy

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (C3 - 2)$$

Fourierovo číslo

$$Fo = \frac{a \cdot t}{R^2} \quad (C3 - 3)$$

Biotovo číslo

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} \quad (C3 - 4)$$

kde r – poloměr (počátek souřadného systému v ose válce),
 R – poloměr neomezeného válce,
 T_f – teplota prostředí,
 T_0 – počáteční teplota neomezeného válce,
 α – součinitel přestupu tepla.

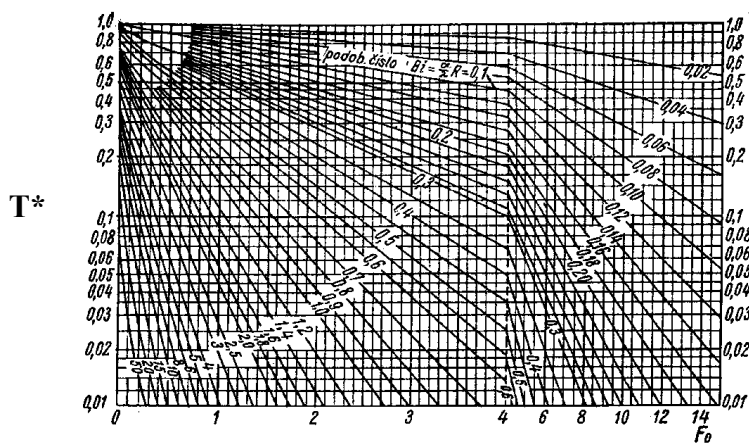
- Hustota tepelného toku na 1m^2 povrchu

$$q = \alpha \cdot (T_f - T_S) \quad (C3 - 5)$$

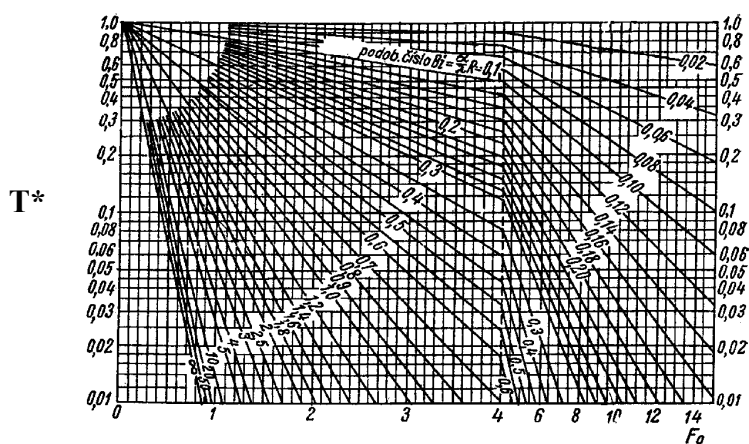
kde $T_S = f(t)$, která se vypočte z $T^*(r^* = 1, Fo, Bi)$

- Okrajová podmínka I. druhu - teplota povrchu $T_S = \text{konst.}$

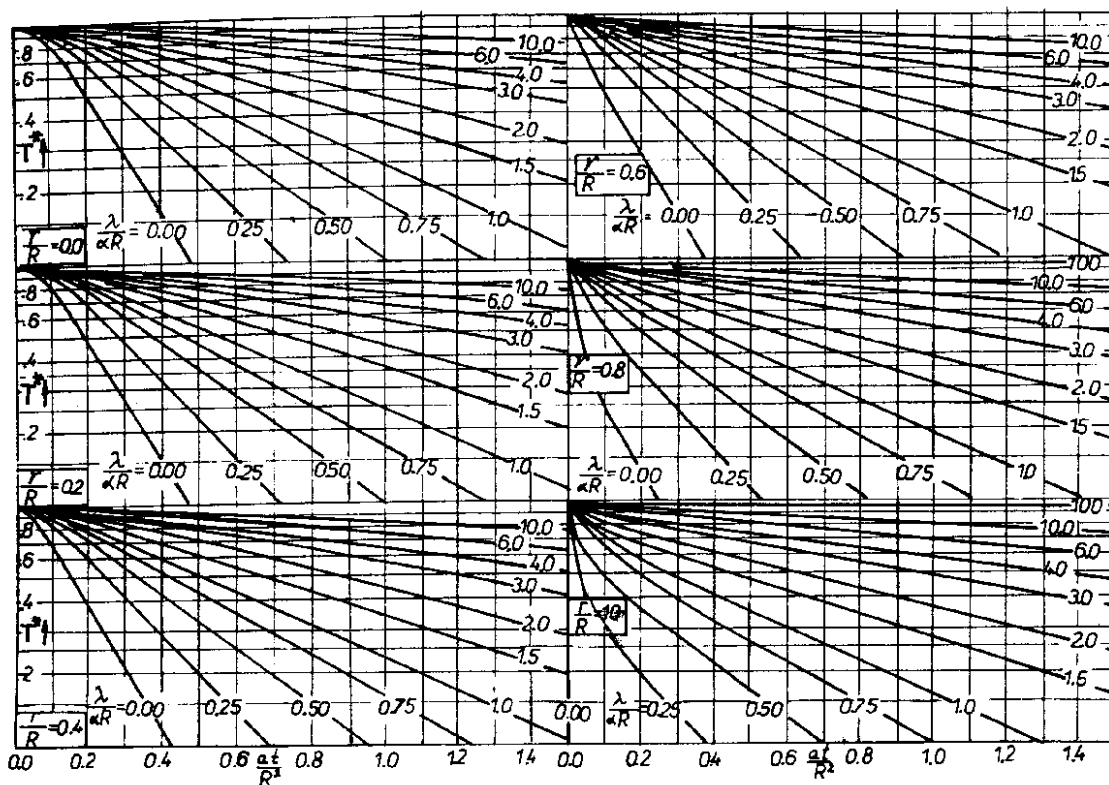
OP. I.druhu : $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow 1/Bi = 0$; teplotní profil $T^* = f(r^*, Fo)$ z grafu pro $1/Bi = 0$.



Neomezený válec – povrch válce



Neomezený válec – osa válce



Neomezený válec

C4. Koule

- **Skoková změna teploty + OP III.druhu**

Počáteční podmínka $T(t, r) = T(t = 0, 0 \leq r \leq R) = T_0$

Okrajové podmínky OP III.druhu

- **Nestacionární teplotní profil v kouli o poloměru R**

$$T^* = f(r^*, Fo, Bi) \quad ; \quad \text{v grafické formě viz. obr.} \quad (C4 - 1)$$

kde

bezrozměrná teplota

$$T^* = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = 1 - T^+ \quad (C4 - 2)$$

bezrozměrná souřadnice polohy

$$r^* = \frac{r}{R} \quad (C4 - 2)$$

Fourierovo číslo

$$Fo = \frac{a \cdot t}{R^2} \quad (C4 - 3)$$

Biotovo číslo

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} \quad (C4 - 4)$$

kde r – poloměr (počátek souřadného systému ve středu koule),
 R – poloměr koule,
 T_f – teplota prostředí,
 T_0 – počáteční teplota koule,
 α – součinitel přestupu tepla.

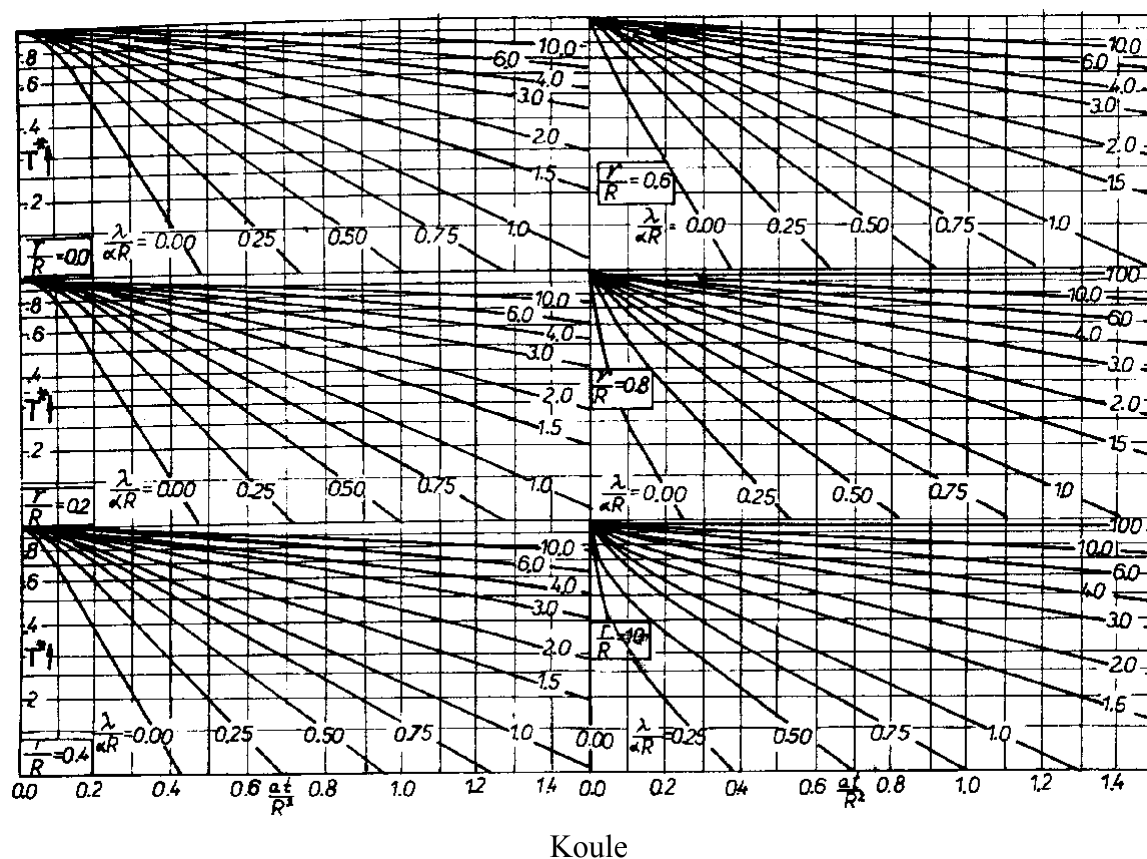
- **Hustota tepelného toku na 1m^2 povrchu**

$$q = \alpha \cdot (T_f - T_S) \quad (C3 - 5)$$

kde $T_S = f(t)$, která se vypočte z $T^*(r^* = 1, Fo, Bi)$

- **Okrajová podmínka I. druhu - teplota povrchu $T_S = \text{konst.}$**

OP. I.druhu : $\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow 1/Bi = 0$; teplotní profil $T^* = f(r^*, Fo)$ z grafu pro $1/Bi = 0$.



C4. 2D a 3D tělesa

• Základní jednorozměrná pole – označení

$$T^*|_{\text{poloneomezené prostředí}} \equiv P(x_i) \quad (\text{C4} - 1)$$

$$T^*|_{\text{neomezená deska}} \equiv D(x_j) \quad (\text{C4} - 2)$$

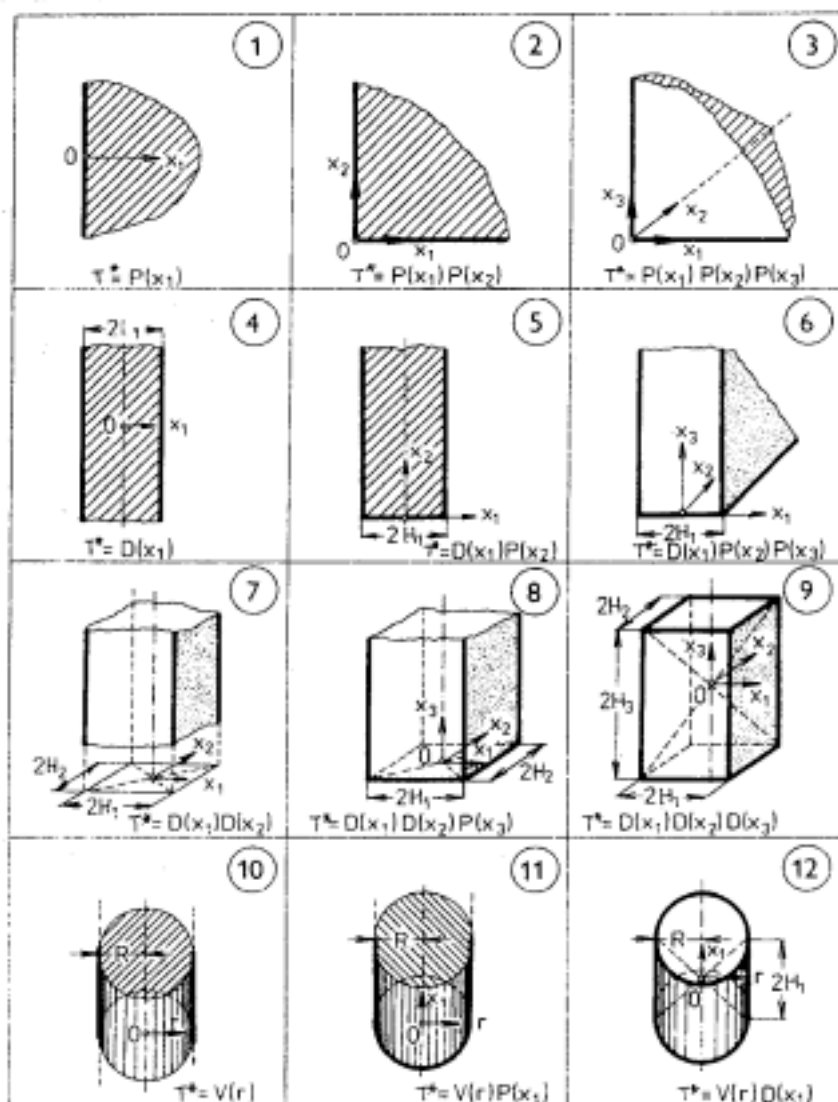
$$T^*|_{\text{neomezený válec}} \equiv V(r) \quad (\text{C4} - 3)$$

• Newtonův multiplikativní princip(1936)

Těleso konečného rozměru – průnik elementárních případů

Př. Konečný válec – průnik nekonečného válce a neomezené desky

$$\text{Teplotní profil konečného válce: } T^*(r, x) \equiv V(r) \cdot D(x) \quad (\text{C4} - 5)$$



Platnost

- Tento princip v zásadě vzato platí pro okrajové podmínky II. nebo III. druhu resp. II. druhu pro izolované stěny.
- Na protilehlých površích musí být hodnoty Biotova čísla Bi shodné, mohou se však lišit na površích sousedních.

Radek Šulc 2002