

Přenos tepla

Přehled základních rovnic

I. Bilance vnitřní energie

Fyzikální vlastnost	$P \equiv \rho \cdot u_E$	kde u_E – vnitřní energie
Hustota toku	$IP = \vec{q}$	kde \vec{q} - hustota tepelného toku
Zdroj	$\dot{P}^{(g)} = -p\nabla \cdot \vec{u} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)}$	

- **Diferenciální tvar** (po spojení s rovnicí kontinuity a úpravě)

$$\text{Kontrolní objem materiální} \quad \rho \cdot \frac{Du_E}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} - p\nabla \cdot \vec{u} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{I} - 1)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

- 1 – rychlost akumulace vnitřní energie v materiálovém objemu
- 2 – teplo přivedené za jednotku času konduktivně povrchem kontrolního objemu
- 3 – reverzibilní práce vykonaná za jednotku času při expanzi ($\nabla \cdot \vec{u} > 0$) resp. spotřebovaná při kompresi ($\nabla \cdot \vec{u} < 0$)
- 4 – nevratná práce vykonaná za jednotku času vazkým třením uvnitř materiálového elementu
- 5 – výkon zdroje energetické přeměny uvnitř elementu (Jouleovo teplo, rozpouštěcí teplo, reakční teplo chemických, jaderných, biologických přeměn)

$$\text{Kontrolní objem pevný} \quad \rho \cdot \left(\frac{\partial u_E}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u_E \right) = -\nabla \cdot \vec{q} - p\nabla \cdot \vec{u} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{I} - 2)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1A & 1B & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

- 1A – časová část změny vnitřní energie (rychlost akumulace v pevném kontrolním objemu)
- 1B – konvektivní část změny vnitřní energie (makroskopickým pohybem-přítokem, odtokem)
- 2 – teplo přivedené za jednotku času konduktivně povrchem kontrolního objemu
- 3 – reverzibilní práce vykonaná za jednotku času při expanzi ($\nabla \cdot \vec{u} > 0$) resp. spotřebovaná při kompresi ($\nabla \cdot \vec{u} < 0$)
- 4 – nevratná práce vykonaná za jednotku času vazkým třením uvnitř pevného elementu
- 5 – výkon zdroje energetické přeměny uvnitř elementu (Jouleovo teplo, rozpouštěcí teplo, reakční teplo chemických, jaderných, biologických přeměn)

• **Integrální tvar**

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot u_E \cdot dV = - \int_S \vec{n} \bullet \vec{q} \cdot dS - \int_S \rho \cdot u_E \cdot \vec{n} \bullet \vec{u} \cdot dS + \int_V \vec{\tau} \colon \vec{\dot{d}} \cdot dV + \int_V \dot{Q}^{(g)} dV \quad (\text{I} - 3)$$

↑
1

↑
2

↑
3

↑
4

↑
5

- 1 – rychlost akumulace vnitřní energie v pevném kontrolním objemu
 2 – teplo přivedené za jednotku času konduktivně povrchem kontrolního objemu
 3 – zvýšení vnitřní energie za jednotku času konvektivním přívodem povrchem kontr. objemu
 4 – mechanická energie disipovaná za jednotku času uvnitř kontrolního objemu
 5 – výkon zdroje energetické přeměny uvnitř kontrolního objemu

Lze odvodit, že člen 4 v nestlačitelných kapalinách:

$$\int_V \vec{\tau} \colon \vec{\dot{d}} \cdot dV = \dot{V} \cdot \Delta p_z \quad , \quad (\text{I} - 4)$$

kde \dot{V} - objemový průtok daným kontrolním elementem,
 Δp_z - tlaková ztráta při proudění daným kontrolním elementem.

II. Bilance entalpie

Entalpie

Při řešení technických úloh je většinou výhodnější pracovat s jinými termodynamickými funkcemi než s vnitřní energií. Vzhledem k tomu, že většina procesů v technické praxi probíhá při konstantním tlaku, používá se nejčastěji entalpie h :

$$h = u_E + p \cdot v, \quad (\text{II} - 1)$$

kde u_E – vnitřní energie,
 p – tlak,
 v – měrný objem.

- Diferenciální tvar**

$$\text{Kontrolní objem materiální} \quad \rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \rho \cdot T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \cdot \frac{Dp}{Dt} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{II} - 2)$$

Rovnice (II – 2) platí bez ohledu na to, je – li v bilancovaném objemu plyn, kapalina nebo tuhá látka. V případě plynu k rovnici přistupuje ještě stavová rovnice plynu pro vyjádření diferenciálního kvocientu $(\partial v / \partial T)_p$. Měrná tepelná kapacita c_p je definována vztahem: $c_p = (\partial h / \partial T)_p$.

Nestlačitelná kapalina

Nestlačitelná kapalina se zanedbatelnou objemovou roztažností $(\partial v / \partial T)_p = 0$

- Diferenciální tvar**

$$\text{Kontrolní objem materiální} \quad \rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{II} - 3)$$

$$\text{Kontrolní objem pevný} \quad (\text{II} - 4)$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)}$$

- Integrální tvar**

Nestlačitelná kapalina $u_E \approx h \approx c_p \cdot T$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot c_p T \cdot dV = - \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} \cdot dS - \int_S \rho \cdot c_p T \cdot \vec{n} \cdot \vec{u} \cdot dS + \int_V \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} \cdot dV + \int_V \dot{Q}^{(g)} dV \quad (\text{II} - 5)$$

III. Přenos tepla a jeho mechanismy

Tepelný tok vyjádřený hustotou tepelného toku \vec{q} může nastat třemi způsoby:

- vedením,
- konvekcí,
- zářením.

Základním předpokladem k tomu, aby kterýkoliv z těchto dějů mohl probíhat, je existence teplotního rozdílu. Směr přenosu je **vždy** orientován z místa s vyšší teplotou k místům s nižší teplotní hladinou.

1. Vedení tepla

Přenos energie interakcemi mezi atomy a molekulami **stagnantního** spojitého prostředí vznikající v důsledku nerovnoměrného rozložení teplot.

Fourierův zákon

Vazba mezi hustotou tepelného toku a rozložením teploty (teplotním polem) $T(x,y,z)$

- *v homogenním izotropním prostředí:*

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \nabla T, \quad (\text{III} - 1)$$

kde λ – tepelná vodivost,
 ∇T – teplotní gradient.

Kartézské souřadnice

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{III} - 2a)$$

$$q_i = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{III} - 2b)$$

Složka x:

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Složka y:

$$q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

Složka z:

$$q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III} - 3a)$$

$$(\text{III} - 3b)$$

$$(\text{III} - 3c)$$

Cylindrické souřadnice

Složka r:

$$q_r = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

Složka φ :

$$q_\varphi = -\lambda \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

Složka z:

$$q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III} - 4a)$$

$$(\text{III} - 4b)$$

$$(\text{III} - 4c)$$

- *v nehomogenním anizotropním prostředí:*

$$\vec{q} = -\vec{\lambda} \bullet \nabla T, \quad (\text{III} - 5)$$

kde $\vec{\lambda}$ – tenzor tepelné vodivosti.

Tepelná vodivost

- Plyny - řádově x . 0,01 W/m.K
- s rostoucí teplotou roste $\propto \sqrt{T}$
- Kapaliny - řádově x . 0,1 W/m.K
- s rostoucí teplotou mírně klesá
(vyjímkou je voda, u které v rozsahu 0 až 100°C tepelná vodivost roste)
- Tuhé látky - nekovové materiály x. (0,1 ÷ 1) W/m.K
- kovy 10 ÷ 100 W/m.K

2. Konvektivní přestup tepla

Konvektivní přenos tepla se může uskutečnit pouze při **makroskopickém pohybu** spojitého prostředí, tj. při proudění tekutin. Jestliže teplotní rozložení v tekutině, na kterou působí pole objemových sil, vyvolá rozdíly hustot – dojde vlivem rozdílu hustot k makroskopickému pohybu tekutiny – nastane tzv. volná (přirozená) konvekce. Pokud je proudění vyvoláno např. čerpadlem nebo ventilátorem, hovoříme o konvekci nucené.

Newtonův vztah

Empirický vztah.

$$\vec{q} \bullet \vec{n} = q_n = \alpha \cdot (T_f - T_S), \quad (\text{III} - 6)$$

kde \vec{n} – vektor normály,
 q_n – hustota tepelného toku ve směru normály k povrchu,
 α – součinitel přestupu (přenosu) tepla,
 T_f – teplota v jádře proudícího média,
 T_S – teplota stěny.

3. Přenos tepla zářením

Tuhé látky, kapaliny a některé plyny emitují, zvláště při vyšších teplotách, energii různých forem – UV záření, γ záření, ... Nositelem přenášené energie jsou elektromagnetické vlny. Tepelné záření (tepelná radiace; sálání) se uplatňuje v oboru vlnových délek přibližně $10^{-7} \div 10^{-4}$ m. Přenos tepla zářením mezi dvěma povrchy o různých teplotách probíhá narozdíl od předchozích mechanismů **nezávisle** na prostředí, které prostor mezi povrchy vyplňuje.

Stefan – Boltzmannův zákon

– vyjadřuje celkovou hustotu zářivého toku absolutně černého tělesa

$$\vec{q} \bullet \vec{n} = q_n = \sigma^{(s)} \cdot T^4, \quad (\text{III} - 7)$$

kde \vec{n} – vektor normály,
 q_n – hustota tepelného toku ve směru normály k povrchu,
 $\sigma^{(s)}$ – Stefan – Boltzmannova konstanta ; $\sigma^{(s)} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$,
 T – teplota povrchu.

IV. Fourier – Kirchhoffova rovnice

1. Fourier – Kirchhoffova rovnice

- **Diferenciální tvar**

Diferenciální rovnice přenosu entalpie pro nestlačitelnou kapalinu se zanedbatelně malou objemovou roztažností

$$\rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 1)$$

+ Fourierův zákon v homogenním izotropním prostředí

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \nabla T \quad (\text{IV} - 2)$$

+ konstitutivní rovnice pro newtonské kapaliny

$$\vec{\tau} = 2\mu \cdot \vec{\dot{d}} \quad (\text{IV} - 3)$$

= Fourier – Kirchhoffova rovnice (F.K. rovnice)

$$\rho \cdot c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \cdot \nabla^2 T + 2\mu \cdot \vec{\dot{d}} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 4)$$

resp. v pevném kontrolním objemu:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \cdot c_p \cdot \vec{u} \cdot \nabla T = \lambda \cdot \nabla^2 T + 2\mu \cdot \vec{\dot{d}} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 5)$$

↑
1

↑
2

↑
3

↑
4

↑
5

1 – rychlost akumulace entalpie v pevném kontrolním objemu všemi mechanismy s výjimkou záření

2 – rychlost konvektivního přívodu entalpie povrchem kontrolního objemu

3 – rychlost konduktivního přívodu entalpie povrchem kontrolního objemu

4 – rychlost disipace mechanické energie v pevném kontrolním objemu

5 – výkon objemového zdroje energetické přeměny uvnitř kontrolního objemu

Laplaceův operátor $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$

Kartézské souřadnice

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \cdot c_p \cdot \vec{u} \cdot \nabla T = \lambda \cdot \nabla^2 T + 2\mu \cdot \vec{\dot{d}} : \vec{\dot{d}} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 6a)$$

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + 2\mu \cdot d_{xx} : d_{xx} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 6b)$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_j u_j \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \lambda \cdot \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + 2\mu \cdot \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot d_{ji} + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 6c)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 2\mu \cdot \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot d_{ji} + \dot{Q}^{(g)} \end{aligned} \quad (\text{IV} - 7)$$

Cylindrické souřadnice

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} + u_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \lambda \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} + 2\mu \cdot \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot d_{ji} \Big|_{\text{cylindr.s.}} + \dot{Q}^{(g)} \end{aligned} \quad (\text{IV} - 8)$$

• Integrální tvar

$$\int_V \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV = - \int_S \vec{n} \cdot \vec{q} \cdot dS - \int_S \rho \cdot c_p T \cdot \vec{n} \cdot \vec{u} \cdot dS + \int_V \vec{\tau} : \vec{\dot{d}} \cdot dV + \int_V \dot{Q}^{(g)} dV \quad (\text{IV} - 9)$$

Použití F.K. rovnice

- Výpočet teplotního pole (rozložení teplot) $T(t, x_i)$ v tuhé látce nebo newtonské kapalině.
- Následné stanovení hustoty tepelného toku q z teplotního rozložení.

2. F.K. rovnice pro tuhé látky

Vzhledem k tomu, že : $\vec{u} = 0$ a $\vec{\dot{d}} = 0$:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \nabla^2 T + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{IV} - 10)$$

3. Řešení F.K. rovnice – počáteční a okrajové podmínky

- Počet počátečních podmínek**

1 časová derivace teploty podle času \Rightarrow 1 počáteční podmínka – znalost teplotního rozložení v čase $t = 0$: $T(x_i, t = 0) = T_0(x_i)$.

- Počet okrajových podmínek**

Druhá derivace teploty podle souřadnice \Rightarrow počet okrajových podmínek = 2. počet prostorových souřadnic.

Př.1 – Nekonečná deska, neomezený válec, koule
= jedna prostorová souřadnice \Rightarrow 2 okrajové podmínky.

Př.2 – Konečný válec
= dvě prostorové souřadnice \Rightarrow 4 okrajové podmínky.

Př.2 – Kvádr
= tři prostorové souřadnice \Rightarrow 6 okrajových podmínek.

4. Typy okrajových podmínek

4.1 Okrajová podmínka I. druhu (Dirichletova)

Je zadána teplota stěny T_S jako funkce času:

$$T(t, x = 0) = T_S(t) \quad (\text{IV} - 11)$$

Příklad: - ohřev kondenzující parou
 - chlazení vroucí kapalinou

4.2 Okrajová podmínka II. druhu (Neumannova)

Je zadána hustota tepelného toku \vec{q} na stěně jako funkce času:

$$\vec{q}(t, x = 0) = \vec{q}_S(t) = -\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (\text{IV} - 12)$$

Příklad: - elektrický ohřev (vytápěné desky, trubkové ohřívače opatřené topnou spirálou
 - přenos tepla zářením

Speciální případ:

Izolovaný povrch, osy nebo roviny symetrie v tělese nebo objemu kapaliny při symetrickém ohřevu nebo chlazení.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{x=0} = \vec{q}(t, x=0) = \vec{q}_S(t) = 0 \quad (\text{IV} - 13)$$

4.3 Okrajová podmínka III. druhu (Fourierova)

Podmínka spojitosti hustot tepelného toku na mezifázovém rozhraní proudící kapalina – stěna:

$$\left| \begin{array}{c} \text{teplo převedené tělesu/z tělesa kondukcí} \\ \text{(vedením)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{teplo odvedené/přivedené prostředím} \\ \text{konvekce} \end{array} \right|$$

$$\lambda \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha \cdot (T_f - T_S) \quad (\text{IV} - 14)$$

kde T_f – teplota v jádru proudícího prostředí,
 T_S – teplota stěny,
 α – součinitel přestupu tepla (viz Přirozená, nucená konvekce).

4.4 Okrajová podmínka IV. druhu

Podmínka spojitosti hustot tepelného toku na styku dvou těles:

$$\lambda^{(1)} \cdot \left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=H} = \lambda^{(2)} \cdot \left. \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=H} \quad (\text{IV} - 15)$$

Pro tuhá tělesa a dokonalý styk přechází (IV – 15) v podmínku spojitosti teplotních rozložení:

$$T^{(1)} \Big|_{x=H} = T^{(2)} \Big|_{x=H} \quad (\text{IV} - 16)$$

Příklad: - složené stěny.

Pozn. V praxi nelze tuto podmínku (IV – 16) přesně realizovat ; nutno zahrnout tepelný odpor styku.

V. Stacionární vedení tepla

Stacionární vedení tepla stagnantním prostředím, tj. tělesy a kapalinou, ve které se neprojevuje přirozená konvekce.

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{Q}^{(g)} = \lambda \cdot \nabla^2 T + \dot{Q}^{(g)} \quad (\text{V} - 1)$$

A. Stacionární jednorozměrné vedení tepla bez vnitřních zdrojů

- A1. Neomezená deska
- A2. Neomezený dutý válec
- A3. Kulová stěna

B. Stacionární jednorozměrné vedení tepla s vnitřním objemovým zdrojem tepla

- B1. Neomezená deska
- B2. Neomezený válec, koule
- B3. Neomezená válcová a kulová stěna

C. Stacionární rovinná a prostorová pole

A. Stacionární jednorozměrné vedení tepla bez vnitřních zdrojů

Laplaceova rovnice $\nabla^2 T = 0$ (V - 2)

Kartézské souřadnice $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ (V - 3)

Cylindrické souřadnice $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ (V - 4)

A1. Neomezená deska

A1.1 Jedna deska

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad \begin{array}{l} \text{OP1: } T(x=0) = T_{Si} \\ \text{OP2: } T(x=H) = T_{Se} \end{array} \qquad (\text{A1} - 1)$$

- **Teplotní profil**

Přímkový profil.

$$T(x) = -(T_{Si} - T_{Se}) \cdot \frac{x}{H} + T_{Si} \qquad (\text{A1} - 2)$$

- **Hustota tepelného toku 1 m² plochy**

$$q_x = \frac{\lambda}{H} (T_{Si} - T_{Se}) \qquad (\text{A1} - 3)$$

- **Tepelný tok stěnou o ploše S**

$$\dot{Q} = q_x \cdot S \qquad (\text{A1} - 4)$$

- **Termický odpor**

$$R_T = \frac{(T_{Si} - T_{Se})}{\dot{Q}} = \frac{H}{\lambda} \cdot \frac{1}{S} \qquad (\text{A1} - 5)$$

λ - tepelná vodivost desky

H - tloušťka desky

T_{Si} - teplota stěny desky na povrchu desky blíže k počátku souřadného systému

T_{Se} - teplota stěny desky na povrchu desky dále od počátku souřadného systému

A1.2 Složená deska

- **Hustota tepelného toku 1 m² plochy**

$$q_x = \frac{1}{\sum_j \frac{H_j}{\lambda_j}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \qquad (\text{A1} - 6)$$

- **Tepelný tok stěnou o ploše S**

$$\dot{Q} = q_x \cdot S \qquad (\text{A1} - 7)$$

A1.3 Konvektivně konduktivní přenos tepla

- **Hustota tepelného toku 1 m² plochy**

$$q_x = k \cdot (T_{fi} - T_{fe}) \quad (\text{A1} - 8)$$

kde k – součinitel prostupu tepla.

- **Součinitel prostupu tepla**

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_j \frac{H_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\alpha_e}} \quad (\text{A1} - 9)$$

- **Termický odpor prostředí na mezifázovém povrchu**

$$R_T = \frac{(T_{Si} - T_{Se})}{\dot{Q}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{S} \quad (\text{A1} - 10)$$

Symbols:

- α_i - součinitel přestupu tepla mezi tekutinou a povrchem stěny nejbližší k počátku souřadného systému
 α_e - součinitel přestupu tepla mezi tekutinou a povrchem stěny nejdále od počátku souřadného systému
 λ_j - tepelná vodivost j – té desky
 H_j - tloušťka j – té desky
 T_{fi} - teplota v jádru tekutiny na straně stěny nejbližší k počátku souřadného systému
 T_{fe} - teplota v jádru tekutiny na straně stěny nejdále od počátku souřadného systému
 T_{Si} - teplota stěny krajní desky na povrchu nejbližší k počátku souřadného systému
 T_{Se} - teplota stěny krajní desky na povrchu nejdále od počátku souřadného systému

A2. Neomezený dutý válec

A2.1 Jeden dutý válec

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{OP1: } T(r = R_i) = T_{Si} \\ \text{OP2: } T(r = R_e) = T_{Se} \end{array} \quad (\text{A2} - 1)$$

- **Teplotní profil**
Logaritmický profil.

$$T(r) = (T_{Si} - T_{Se}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{R_e}}{\ln \frac{R_i}{R_e}} + T_{Se} \quad (\text{A2} - 2)$$

- **Hustota tepelného toku na poloměru r na 1 m délky**
Hyperbolický profil

$$q(r) = \frac{\lambda}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{A2} - 3)$$

- **Tepelný tok na 1 m délky**

$$\dot{q}_{1m} = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) = \frac{\pi}{\frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D_e}{D_i}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \quad (\text{A2} - 4)$$

- **Tepelný tok na délce L**

$$\dot{Q} = \dot{q}_{1m} \cdot L \quad (\text{A2} - 5)$$

- **Termický odpor**

$$R_T = \frac{(T_{Si} - T_{Se})}{\dot{Q}} = \frac{\ln(R_e / R_i)}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{L} \quad (\text{A2} - 6)$$

- λ - tepelná vodivost desky
 D_i - vnitřní průměr dutého válce
 D_e - vnější průměr dutého válce
 T_{Si} - teplota stěny vnitřního povrchu dutého válce
 T_{Se} - teplota stěny vnějšího povrchu dutého válce

- **Lineární aproximace**

$$\ln(R_e / R_i) = 2H / \bar{D} \quad \text{kde } H = 1/2 \cdot (D_e - D_i) \text{ a } \bar{D} = 1/2 \cdot (D_e + D_i) \quad (\text{A2} - 7)$$

$$\dot{Q} = q_x \cdot S \quad \text{kde } S = \pi \cdot \bar{D} \cdot L \text{ a } q_x \text{ dle (A1} - 3)$$

Chyba aproximace:

$\kappa \geq 0,5$ relativní chyba aproximace $< 4 \%$

$\kappa \geq 0,67$ relativní chyba aproximace $< 1,4 \%$

kde $\kappa = R_i/R_e = D_i/D_e$

A2.2 Složená válcová stěna

- **Tepelný tok na 1m délky**

$$\dot{q}_{1m} = \frac{\pi}{\sum_j \frac{1}{2\lambda_j} \cdot \ln \frac{D_{ej}}{D_{ij}}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \quad (\text{A2} - 8)$$

- **Tepelný tok na délce L**

$$\dot{Q} = \dot{q}_{1m} \cdot L \quad (\text{A2} - 9)$$

A2.3 Konvektivně konduktivní přenos tepla

- **Součinitel prostupu tepla na 1m délky**

$$k_{1m} = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha_i \cdot D_i} + \sum_j \frac{1}{2\lambda_j} \cdot \ln \frac{D_{ej}}{D_{ij}} + \frac{1}{\alpha_e \cdot D_e}} \quad (\text{A2} - 10)$$

- **Součinitel prostupu tepla vztažený na vnější povrch složené válcové stěny**

$$k_e = \frac{k_{1m}}{\pi \cdot D_e} \quad (\text{A2} - 11)$$

- **Součinitel prostupu tepla vztažený na vnitřní povrch složené válcové stěny**

$$k_i = \frac{k_{1m}}{\pi \cdot D_i} \quad (\text{A2} - 12)$$

- **Hustota tepelného toku vztažená na 1 m² vnější plochy**

$$q_e = k_e \cdot (T_{fi} - T_{fe}) \quad (\text{A2} - 13)$$

- **Hustota tepelného toku vztažená na 1 m² vnitřní plochy**

$$q_i = k_i \cdot (T_{fi} - T_{fe}) \quad (\text{A2} - 14)$$

- **Tepelný tok na 1m délky**

$$\dot{q}_{1m} = k_{1m} \cdot (T_{fi} - T_{fe}) \quad (\text{A2} - 15)$$

- **Tepelný tok na délce L**

$$\dot{Q} = \dot{q}_{1m} \cdot L \quad (\text{A2} - 16)$$

$$\dot{Q} = q_e \cdot S_e = q_e \cdot \pi \cdot D_e \cdot L \quad (\text{A2} - 17)$$

$$\dot{Q} = q_i \cdot S_i = q_i \cdot \pi \cdot D_i \cdot L \quad (\text{A2} - 18)$$

Symbols:

- α_i - součinitel přestupu tepla mezi tekutinou a povrchem válcové stěny nejbližší k počátku souřadného systému
 α_e - součinitel přestupu tepla mezi tekutinou a povrchem válcové stěny nejdále od počátku souřadného systému
 λ_j - tepelná vodivost j – té válcové stěny
 D_i - vnitřní průměr krajní válcové stěny nejbližší k počátku souř.systému ; $D_i = D_{i1}$
 D_e - vnější průměr krajní válcové stěny nejdále od počátku souř.systému ; $D_e = D_{en}$
 D_{ij} - vnitřní průměr j- té válcové stěny
 D_{ej} - vnější průměr j – té válcové stěny
 n - číslo poslední válcové stěny ; číslováno vzestupně směrem od počátku souř. systému
 T_{fi} - teplota v jádru tekutiny na straně stěny nejbližší k počátku souřadného systému
 T_{fe} - teplota v jádru tekutiny na straně stěny nejdále od počátku souřadného systému
 T_{Si} - teplota stěny vnitřního povrchu krajní válcové stěny nejbližší k počátku souř.s.
 T_{Se} - teplota stěny vnějšího povrchu krajní válcové stěny nejdále od počátku souř. s.

A3. Kulová stěna

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{OP1: } T(r = R_i) = T_{Si} \\ \text{OP2: } T(r = R_e) = T_{Se} \end{array} \quad (\text{A3} - 1)$$

- Teplotní profil**

Hyperbolický profil.

$$T(r) = \frac{1/R_e}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}} \cdot \left(1 - \frac{R_e}{r} \right) \cdot (T_{Si} - T_{Se}) + T_{Se} \quad (\text{A3} - 2)$$

- Hustota tepelného toku na poloměru r**

Hyperbolický profil

$$q(r) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \cdot \frac{1}{r^2} \quad (\text{A3} - 3)$$

- Tepelný tok**

$$\dot{Q} = q(r) \cdot S = q(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = \lambda \cdot \frac{4\pi}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}} \cdot (T_{Si} - T_{Se}) \quad (\text{A3} - 4)$$

- Termický odpor**

$$R_T = \frac{(T_{Si} - T_{Se})}{\dot{Q}} = \frac{\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right)}{4\pi \cdot \lambda} = \frac{\left(\frac{1}{D_i} - \frac{1}{D_e} \right)}{2\pi \cdot \lambda} \quad (\text{A3} - 5)$$

 λ - tepelná vodivost kulové stěny D_i - vnitřní průměr kulové stěny D_e - vnější průměr kulové stěny T_{Si} - teplota stěny vnitřního povrchu kulové stěny T_{Se} - teplota stěny vnějšího povrchu kulové stěny

B. Stacionární jednorozměrné vedení tepla s vnitřním objem. zdrojem tepla

Poissonova rovnice (V – 5)

$$0 = \nabla^2 T + \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda}$$

Kartézské souřadnice (V – 6)

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda}$$

Cylindrické souřadnice (V – 7)

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda}$$

- **Objemový zdroj**

Vazba mezi vnitřním objemovým zdrojem tepla a hustotou tepelného toku:

$$\dot{Q}^{(g)} \cdot V = \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot S \quad (V – 8)$$

kde V – objem tělesa o povrchu S ,
 \vec{n} - normála,
 \vec{q} - hustota tepelného toku na ploše S .

Př. Vedení tepla v el.vodiči pod proudem o průřezu S

$$\dot{Q}^{(g)} = \frac{P}{V} = \frac{R \cdot I^2}{S \cdot L} = \frac{\rho^{(el)} \cdot I^2}{S^2}, \quad (V – 9)$$

kde P – výkon tepelného zdroje,
 V – objem,
 R – elektrický odpor ; $R = \rho^{(el)} \cdot L/S$, kde S průřez vodiče, L délka vodiče,
 $\rho^{(el)}$ – měrný elektrický odpor
 I – elektrický proud,
 S – průřez vodiče.

B1. Neomezená deska tloušťky H

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{!!!! počátek souřad. systému v ose desky!!!!} \\ \text{OP1: osa desky } T(x=0) = (\partial T / \partial x) = 0 \\ \text{OP2: povrch desky OP III. druhu} \\ -\lambda(\partial T / \partial x)_{\text{povrch}} = \alpha(T_s - T_f) \end{array} \quad (\text{B1} - 1)$$

• **Integrace**

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda} \cdot x + C_1 \quad (\text{B1} - 2a)$$

$$T = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (\text{B1} - 2b)$$

• **Teplotní profil**

Parabolický profil

$$T(x) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{8 \cdot \lambda} \cdot H^2 \cdot \left[1 + \frac{4 \cdot \lambda}{\alpha \cdot H} - \left(\frac{x}{H/2} \right)^2 \right] \quad (\text{B1} - 3)$$

$$T(x) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{8 \cdot \lambda} \cdot H^2 \cdot \left[1 + 4 / Bi - \left(\frac{2x}{H} \right)^2 \right], \quad (\text{B1} - 4)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot H}{\lambda}, \quad (\text{B1} - 5)$$

kde Bi – Biotovo číslo,
 T_s – teplota povrchu,
 T_f – teplota prostředí,
 H – tloušťka desky,
 x – souřadnice polohy.

Pozn. Okrajová podmínka I. druhu na povrchu desky: $Bi \rightarrow \infty$.

B2. Neomezený válec

Rovnice:

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda} \quad (\text{B2} - 1)$$

- Konvektivní přestup tepla na povrchu**

OP1: osa válce $T(r=0) = (\partial T / \partial r) = 0$

OP2: povrch válce OP III. druhu

$$-\lambda(\partial T / \partial r)_{\text{povrch}} = \alpha(T_S - T_f)$$

Teplotní profil

Parabolický profil:

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha \cdot R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{B2} - 2)$$

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + 4 / Bi - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (\text{B2} - 3)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda}, \quad (\text{B2} - 4)$$

kde Bi – Biotovo číslo,
 D – průměr válce, R – poloměr válce
 T_S – teplota povrchu válce,
 T_f – teplota prostředí.

Pozn. Okrajová podmínka I. druhu na povrchu válce: $Bi \rightarrow \infty$.

- Konvektivně - konduktivní přestup tepla na povrchu**

OP1: osa válce $T(r=0) = (\partial T / \partial r) = 0$

OP2: povrch válce OP III. druhu

$$-\lambda(\partial T / \partial r)_{\text{povrch}} = k_i \cdot (T_S - T_f)$$

Teplotní profil

Parabolický profil:

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot \lambda}{k_i \cdot R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{B2} - 5)$$

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{4 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + 4 / Bi_{\text{modif}} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (\text{B2} - 6)$$

$$Bi_{\text{modif}} = \frac{k_i \cdot D}{\lambda}, \quad (\text{B2} - 7)$$

$$k_i = \frac{k_{1m}}{\pi \cdot D} \quad (\text{B2} - 8)$$

$$k_{1m} = \frac{\pi}{\sum_j \frac{1}{2\lambda_j} \cdot \ln \frac{D_{ej}}{D_{ij}} + \frac{1}{\alpha_e \cdot D_e}} \quad (\text{B2} - 9)$$

- kde Bi_{modif} – modifikované Biotovo číslo,
 D – průměr válce s objemovým zdrojem,
 D_e – vnější průměr složené válcové stěny,
 R – poloměr válce s objemovým zdrojem,
 k_i – součinitel prostupu tepla složené válcové stěny bez objemového zdroje tepla
vztažený k vnitřnímu povrchu této složené stěny,
 T_s – teplota povrchu složené válcové stěny,
 T_f – teplota prostředí,
 $T(r)$ – teplotní rozložení ve válci s objemovým zdrojem tepla,

B3. Koule

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{6 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha \cdot R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{B3} - 1)$$

$$T(r) - T_f = \frac{\dot{Q}^{(g)}}{6 \cdot \lambda} \cdot R^2 \cdot \left[1 + 4 / Bi - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (\text{B3} - 2)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot D}{\lambda}, \quad (\text{B3} - 3)$$

- kde Bi – Biotovo číslo,
 D – průměr koule, R – poloměr koule,
 T_s – teplota povrchu,
 T_f – teplota prostředí.

B4. Neomezená válcová a kulová stěna

Vzhledem k tomu, že $0 < R_i \leq r \leq R_e$, do rovnice teplotního rozložení ještě přistoupí v případě válcové stěny logaritmický a v případě kulové stěny hyperbolický člen.

C. Stacionární rovinná a prostorová pole

C1. 2D a 3D pole pro $\lambda = \text{konst.}$

Laplaceova rovnice ; v jednodušších případech analyticky, jinak numericky.

C2. Tvarový součinitel S_T

Jestliže je těleso, v kterém určujeme teplotní profil, omezené dvěma **izotermními** plochami S_1 a S_2 s konstantní teplotou T_1 resp. T_2 , pak pro tepelný tok převedený z teplejší izotermní plochy S_1 určitého objektu o teplotě T_1 do jeho chladnější izotermní plochy S_2 o teplotě T_2 lze ve stacionárním režimu pro prostředí $\lambda = \text{konst.}$ odvodit:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot S_T \cdot (T_1 - T_2) \quad (\text{C2} - 1)$$

kde S_T – tvarový faktor.

- **Redukovaný tvarový součinitel**

$$S_T^{(1)} = \frac{S_T}{L} \quad (\text{C2} - 2)$$

- **Složitější geometrie**

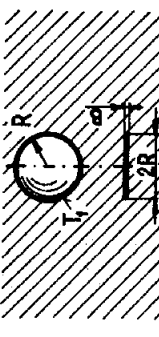
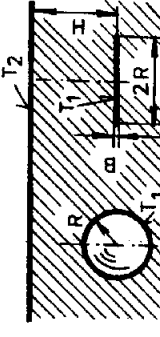
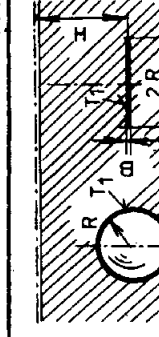
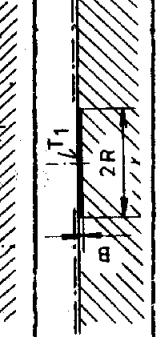
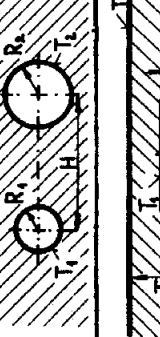

Paralelní řazení
$$S_T = \sum_i S_{Ti} \quad (\text{C2} - 3)$$

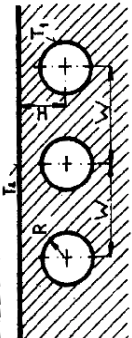
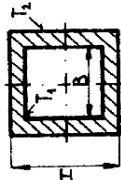
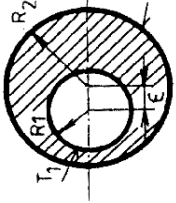
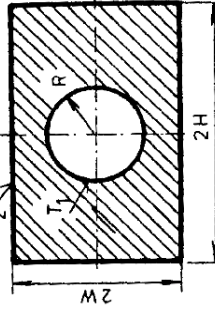
Sériové řazení
$$\frac{1}{S_T} = \sum_i \frac{1}{S_{Ti}} \quad (\text{C2} - 4)$$

Hodnoty S_T pro některé jednoduché geometrie jsou uvedeny v tabulce nebo např. v Kutateladze, Borišanskij: Sdílení tepla (1962).

Hodnoty uvedené v následující tabulce platí **přesně pouze pro konduktivní** přenos tepla izotermními plochami. V některých případech lze v praxi reálnější okrajové podmínky III. druhu na vstupních i výstupních plochách aproximovat pomocí fiktivní délky λ/α .

Tvarový faktor – tabulka

Poř. číslo	Systém	Schema	S_T nebo $S_T^{(1)}$	Omezení	Grigull Hahne Wong
1	Koule nebo kruhový disk, $B/R \rightarrow 0$, v neomezeném prostředí, T_2 konečná ve velké vzdálenosti od objektu.		Koule $S_T = 4 \pi R$, viz rovnice (8.26) Disk $S_T = 8 R$		
2					
3	Koule nebo kruhový disk, $B/R \rightarrow 0$, v poloneomezeném prostředí s izotermním povrchem		Koule $S_T = \frac{4 \pi R}{1 - R/(2H)}$ Disk $S_T = \frac{4 \pi R}{2} - \arctg(R/2H)$	$H/R \gg 2$	dtto
4					
5	Koule nebo kruhový disk, $B/R \rightarrow 0$, v poloneomezeném prostředí s adiabatickým povrchem, T_2 ve velké vzdálenosti konečná.		Koule $S_T = \frac{4 \pi R}{1 + R/(2H)}$ Disk $S_T = \frac{4 \pi R}{2} + \arctg(R/2H)$	$H/R \gg 2$	
6					
7	Kruhový disk, $B/R \rightarrow 0$, v poloneomezeném prostředí s čas- tečně adiabatickým povrchem, T_2 konečná ve velké vzdálenosti		$S_T = 4 R$		Grigull
8	Paralelní válce, izotermní povrchy v neomezeném prostředí.		$S_T^{(1)} = \frac{2 \pi}{\operatorname{arccosh} [(H^2 - R_1^2 - R_2^2)/(2 R_1 R_2)]}$		Grigull
9	Obdélníkový kanál v poloneomezeném prostředí.		$S_T^{(1)} = \frac{5,7 + \frac{W}{2B}}{\ln \frac{3,5 H}{(WB^2)^{1/4}}}$		Kutat Boriš

10	<u>Řada válců téhož průměru a teploty v poloneomezeném prostře- dí</u>		$S_T^{(1)} = \frac{2\pi}{\ln \left[\frac{W}{\pi R} \sinh \left(2\pi \frac{H}{W} \right) \right]}$	$S_T^{(1)}$ pro jeden válec	Šorin Wong	
11	<u>Kanál s průřezem koncentrických čtverců</u>		$S_T^{(1)} = \frac{2\pi}{0,93 \ln(H/B) - 0,0502}$ $S_T^{(1)} = \frac{2\pi}{0,785 \ln(H/B)}$	$H/B > 1,4$ $H/B < 1,4$	AIChE Grigull	
12	<u>Paralelní, excentrické válce</u>		$S_T^{(1)} = \frac{2\pi}{\operatorname{argcosh} [(R_1^2 + R_2^2 - \epsilon^2)/(2 R_1 R_2)]}$		Grigull	
13	<u>Válec v ose tyče obdélníkového průřezu.</u>		$S_T^{(1)} = \frac{2\pi}{\ln \frac{4W}{\pi R} - f(H/W)}$	H/W f H/W	f	
			1	0,1658	2,25	0,00340
			1,25	0,07926	2,5	0,00156
			1,50	0,03562	3,0	0,00032
			1,75	0,00816	4,0	1,395 · 10 ⁵
			2,00	0,00746		0