

NURBS KŘIVKY

(NeUniformní Racionální B-Spline křivky)

Praha, 2007

Ivana Linkeová

Obsah

Přehled použité symboliky	11
1 Křivky	15
1.1 Definice a vlastnosti křivky	15
1.2 Napojování křivek	22
2 Aproximační NURBS křivky	27
2.1 Definice NURBS křivky	27
2.2 Důležité vlastnosti bazových funkcí a NURBS křivek	30
2.3 Druhy B-spline a NURBS křivek	32
2.3.1 Otevřená křivka	33
2.3.2 Ukotvená křivka	40
2.3.3 Uzavřená křivka	47
3 Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek	51
3.1 Stupeň	51
3.2 Váhy řídicích bodů	54
3.2.1 Interaktivní změna vah	54
3.2.2 Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů	56
3.3 Uzlový vektor	58
3.3.1 Uniformní uzlový vektor	59
3.3.2 Těžišťová metoda stanovení uzlového vektoru	61
3.3.3 Efekt vícenásobných uzlů	65
4 Interpolační NURBS křivky	67
4.1 Prostá interpolace	68
4.2 Uzlová interpolace	71
4.2.1 Podmínka uzavřenosti křivky	71
4.2.2 Vektory derivací křivky v krajních bodech definičního polygonu	75
5 Tvarovací nástroje interpolačních NURBS křivek	87
5.1 Okrajové podmínky uzlové interpolační křivky	87
5.1.1 Tečné vektory v krajních bodech křivky	87
5.1.2 Vektory druhých derivací v krajních bodech křivky	93
5.1.3 Porovnání vlivu okrajových podmínek na tvar uzlové interpolační křivky	94
5.2 Stupeň	94
5.3 Váhy řídicích bodů interpolační křivky	95
5.3.1 Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů	98
5.4 Uzlový vektor a vektor parametrizace	99

5.4.1	Uniformní uzlový vektor	100
5.4.2	Průměrový uzlový vektor	100
5.4.3	Těžišový uzlový vektor	100
5.4.4	Uniformní vektor parametrizace	101
5.4.5	Tětivová metoda konstrukce vektoru parametrizace	103
5.4.6	Dostředivá metoda konstrukce vektoru parametrizace	107
5.4.7	Univerzální metoda	111
5.5	Rozdělení interpolačních metod	113
6	Porovnání přesnosti interpolačních metod	117
6.1	Stanovení přesnosti interpolační metody	117
6.1.1	Odchylka křivek	117
6.1.2	Absolutní chyba interpolace	120
6.1.3	Relativní chyba interpolace	121
6.2	Interpolace modelových dat	122
6.2.1	Modelová data na křivce bez singulárních bodů	123
6.2.2	Modelová data na křivce s jedním singulárním bodem	136
6.2.3	Modelová data na křivce s více singulárními body	148
6.3	Posouzení interpolačních metod	160
	Literatura	163
A	Konstrukce aproximační NURBS křivky	165
A.1	Těžišový uzlový vektor aproximační křivky	165
A.2	Aproximační B-spline křivka	166
A.2.1	B-spline báze funkce aproximační B-spline křivky	166
A.2.2	Analytická reprezentace aproximační B-spline křivky	173
A.3	Aproximační NURBS křivka	174
A.3.1	Těžišové váhy řídicích bodů aproximační NURBS křivky	174
A.3.2	Racionální báze funkce aproximační NURBS křivky	175
A.3.3	Analytická reprezentace aproximační NURBS křivky	178
B	Konstrukce interpolační NURBS křivky	181
B.1	Vektor parametrizace interpolační NURBS křivky	181
B.2	Prostá interpolační B-spline křivka	182
B.2.1	Řídicí body prosté interpolační B-spline křivky	182
B.2.2	Analytická reprezentace prosté interpolační B-spline křivky	184
B.3	Prostá interpolační NURBS křivka	185
B.3.1	Těžišové váhy řídicích bodů prosté interpolační NURBS křivky	185
B.3.2	Racionální báze funkce prosté interpolační NURBS křivky	186
B.3.3	Řídicí body prosté interpolační NURBS křivky	189
B.3.4	Analytická reprezentace prosté interpolační NURBS křivky	192
B.4	Uzlová interpolační B-spline křivka	195
B.4.1	B-spline báze funkce uzlové interpolační B-spline křivky	195
B.4.2	Řídicí body uzlové interpolační B-spline křivky	199
B.4.3	Analytická reprezentace uzlové interpolační křivky	201
	Rejstřík	205

Předmluva

Geometrické modelovanie je dynamicky sa rozvíjajúca časť počítačovej grafiky, ktorej závažnosť a sila prameňa zo synergického efektu dosiahnutého syntézou analytických a syntetických metód a techník modelovania používaných pri reprezentácii a opise objektov zložitých tvarov. Matematické analytické modely umožňujú nielen komplexne opísať modelovaný objekt a jeho tvarové charakteristiky, ale poskytujú aj aparát na analýzu tvaru geometrického objektu, jeho jednoduchú zmenu a prispôsobenie požadovaným tvarovým charakteristikám kladeným na model.

Rôzne metódy reprezentácie objektov využívajú množstvo tvarovacích parametrov, ktoré majú väčšinou elegantnú geometrickú interpretáciu a široké spektrum variabilnosti. Najaktuálnejšími známymi metódami reprezentácie kriviek a plôch všeobecných tvarov, ktoré sa objavili za posledných dvadsať rokov a v súčasnosti sa intenzívne využívajú v geometrickom modelovaní, sú B-spline a NURBS reprezentácia. Dnes sú už takmer všetky vysoko kvalitné, najčastejšie používané a užívateľsky obľúbené systémy modelovania s podporou počítačov CAGD a CAGM vyvíjané práve na teoretickom základe NURBS reprezentácie interpolačných, resp. aproximačných útvarov. NURBS reprezentácia je matematicky pomerne zložitý aparát, ktorý sa postupne vyvinul zovšeobecnením klasických reprezentácií, obsahuje tieto ako svoje špeciálne prípady a prináša nové možnosti tvarovania a modelovania pomocou prirodzených tvarovacích nástrojov so zrejmu geometrickou interpretáciou. Predstavuje teda všeobecný matematický aparát geometrického modelovania tvaru, ktorý je široko použiteľný a aplikovateľný v rôznych odvetviach vedy a techniky, v numericky riadenej výrobe, v architektúre a dizajne, v počítačovom umení, hrách či filmových animáciách, ale aj v medicíne, biológii a všeobecne v počítačovom podporovaných simuláciách a vizualizácii vedeckých pokusov a procesov, napr. vo fyzike mikročastíc, teórii strún alebo v súčasnej kozmológii.

Napriek tejto skutočnosti, je teória NURBS kriviek a plôch stále pomerne záhadnou a neuchopenou teóriou, v ktorej zostáva mnoho nejasností týkajúcich sa využiteľnosti všetkých výhod a úžasnej geometrickej variability pri interaktívnom modelovaní tvaru. Nedostatočné zvládnutie teoretického aparátu NURBS reprezentácie presúva využitie poskytovaného mocného modelovacieho nástroja len na intuitívnu úroveň. NURBS reprezentácia však umožňuje okrem iného flexibilný dizajn a variabilnosť tvaru, lokálne tvarovanie, voľbu stupňa geometrickej spojitosti, afinnú a projektívnu invariantnosť, jednotný matematický aparát pre modelovanie štandardných analytických i zložitých komplexných tvarov, redukuje nároky na kapacitu pamäte pri archivovaní tvarov, a numericky stabilné a presné algoritmy umožňujú jednoduché a rýchle spracovanie výpočtov. Nesmiernou výhodou NURBS reprezentácie je aj skutočnosť, že uchováva geometrickú informáciu vo forme, ktorá bude aktuálna minimálne nasledujúcich 20 rokov.

Publikácia je teoretickým, praktickým a zároveň didakticky umne spracovaným úvodom do teórie NURBS kriviek s cieľom priblížiť danú problematiku nielen z pohľadu teoretického, ale aj z hľadiska jej praktického použitia v technickej praxi a aplikáciách. Základný teoretický matematický aparát je bohato ilustrovaný prehľadnými obrázkami a obohatený praktickými príkladmi a výpočtami. Uvedené testovacie metriky pre porovnanie presnosti interpolačných

metód a rozsiahla databáza výsledkov testovania presnosti interpolačných NURBS metód pri modelovaní daného tvaru s posúdením úspešnosti jednotlivých metód sú vítaným pomocníkom pri praktickom výbere vhodnej metódy. Obzvlášť cenným je prínos publikácie z hľadiska využitia pri štúdiu, keďže prináša komplexný pohľad na teóriu NURBS kriviek na odborne vysokej úrovni a s množstvom kvalitných ilustrácií a riešených príkladov.

Daniela Velichová

Úvod

Publikace podává ucelený přehled o metodách matematického modelování rovinných i prostorových křivek obecného tvaru zadaných posloupností bodů pomocí NURBS (**Ne**Uniformní **R**acionální **B**-**S**pline) reprezentace, tj. křivek po částech parametrizovaných racionálními funkcemi. Tato reprezentace nachází v současné době řadu bezprostředních aplikací v CA (Computer Aided) systémech založených na počítačem podporovaných technologiích, jako např. CAD (Computer Aided Design), CAGD (Computer Aided Geometric Design), CAM (Computer Aided Manufacturing), CAE (Computer Aided Engineering), apod. V průběhu celého konstrukčně vývojového procesu se uživatelé CA systémů běžně dostávají do styku s NURBS reprezentací a její nesmírnou geometrickou variabilitou danou značným množstvím tvarovacích nástrojů – modifikátorů výsledného tvaru NURBS křivky.

Čtenář zde nalezne podrobné objasnění teoretického principu NURBS reprezentace, jehož pochopení je nezbytné při modelování objektů požadovaného tvaru a geometrických vlastností. Kniha poskytuje uživateli potřebnou orientaci v množství tvarovacích nástrojů NURBS reprezentace (řídící body, definiční body, stupeň křivky, uzly, uzlový vektor, váhy řídicích bodů, vektor parametrizace, okrajové podmínky), jejichž hodnoty ovlivňují výsledný tvar NURBS křivky. Při interaktivním návrhu v CA systémech jsou konkrétní hodnoty tvarovacích nástrojů vyžadovány systémem jako vstupní data, která je třeba zadat, případně vhodně zvolit. Použití NURBS reprezentace bez hlubší znalosti vede často k neuspokojivým výsledkům a neefektivní práci. Proto je zde na řadě příkladů demonstrován samostatný i kombinovaný vliv tvarovacích nástrojů a kromě formulace podmínek, za nichž můžeme očekávat dobré výsledky, jsou zde uvedeny i takové kombinace, kterým je třeba se v praxi vyhnout, neboť mohou zcela selhat.

Publikace představuje rozsáhlou studii stávajících i autorkou nově navržených přímých metod stanovení tvarovacích nástrojů NURBS reprezentace a jejich vlivu na výsledný tvar NURBS křivky. Přímé metody konstrukce tvarovacích nástrojů předpokládají (kromě zvoleného stupně křivky) jediný vstupní údaj – zadanou posloupnost bodů. Konkrétní hodnoty tvarovacích nástrojů lze potom velmi snadno stanovit, neboť jsou vypočteny pouze z polohy (kartézských souřadnic) zadaných bodů, což je situace, která je v technické praxi nejběžnější.

Spolehlivý a přesný způsob interpretace vstupních dat je základním předpokladem úspěšnosti celého konstrukčně vývojového procesu [6]. Proto je zde kladen zvláštní důraz na interpolační metody interpretace zadané posloupnosti bodů a na jejich posouzení z hlediska schopnosti přesné rekonstrukce libovolného tvaru původní křivky, která zadanou posloupnost bodů obsahuje. Různými kombinacemi běžně používaných i nově navržených metod konstrukce tvarovacích nástrojů interpolačních NURBS křivek byl sestaven soubor vybraných interpolačních metod. Součástí publikace je podrobné testování přesnosti dosažené jednotlivými metodami při rekonstrukci tvaru původní křivky na vhodně zvolených množinách modelových dat.

Vlastní téma publikace je uspořádáno do šesti kapitol se dvěma přílohami. Teoretická část je shrnuta v prvních pěti kapitolách, šestá kapitola je věnována aplikaci uvedených metod. Praktický postup konstrukce NURBS křivek je uveden v přílohách. Zdrojové kódy některých algoritmů jsou přístupné na Internetu [11], [12], [13].

První kapitola Křivky je věnována definici, vymezení a vysvětlení důležitých pojmů, se kterými se pracuje v celé publikaci. Druhá kapitola Aproximační NURBS křivky obsahuje teoretický základ a shrnutí důležitých vlastností NURBS reprezentace. Třetí kapitola Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek se věnuje způsobům stanovení a detailnímu rozboru vlivu jednotlivých tvarovacích nástrojů na výsledný tvar aproximační NURBS křivky. Vzhledem k tomu, že publikace je zaměřena zejména na oblasti konstrukce matematických modelů tvarově obecných křivek, ve kterých je rozhodujícím požadavkem přesná reprodukce tvaru původní vzorové křivky, je zde mimořádná pozornost věnována interpolačním metodám. Princip interpolace a potřebný teoretický základ je uveden ve čtvrté kapitole Interpolační NURBS křivky. Pátá kapitola Tvarovací nástroje interpolačních NURBS křivek zkoumá vliv jednotlivých způsobů konstrukce tvarovacích nástrojů na tvar výsledné interpolační křivky a tvoří stěžejní část publikace.

V šesté kapitole Porovnání přesnosti interpolačních metod jsou nejprve definovány metriky, s jejichž pomocí lze přesnost interpolačních metod posuzovat, a poté je uvedena rozsáhlá komparativní analýza přesnosti celkem 34 vybraných interpolačních metod, které jsou definovány různými kombinacemi již zavedených i nově navržených metod konstrukce tvarovacích nástrojů interpolačních NURBS křivek.

Vzhledem k tomu, že problematika NURBS reprezentace není obecně pokládána za jednoduchou (viz [4] a [16]), je publikace doplněna příklady modelování konkrétních křivek. Aby nebyl narušen výklad uvedený v teoreticky zaměřených kapitolách, jsou příklady uvedeny v přílohách na konci publikace. Příloha A obsahuje detailní postup modelování aproximační NURBS křivky, příloha B obsahuje detailní postup modelování interpolační NURBS křivky.

Zvolené nikoliv ryze matematické, ale spíše prakticky a didakticky orientované pojetí celé knihy bylo inspirováno články [4] a [16], které se zabývají NURBS reprezentací z pedagogického hlediska. Autoři upozorňují na momenty, které nejsou pro studenty snadno pochopitelné, a uvádějí vlastní přístup k výuce NURBS na vysokých technických školách. Ke zvolenému pojetí také přispěly vlastní zkušenosti autorky získané při výuce NURBS reprezentace v rámci bakalářského, magisterského i doktorandského studia na Strojní fakultě ČVUT v Praze. Nejsilnějším podnětem byl prakticky orientovaný článek [7], kde autor upozorňuje na úskalí, se kterými se uživatel bez dostatečného teoretického zázemí může setkat při interaktivním návrhu tvaru objektu pomocí NURBS reprezentace.

Pro efektivní použití NURBS reprezentace v technické praxi je nezbytné teorii NURBS dobře rozumět a vědět, jakým způsobem zasáhne změna jednotlivých tvarovacích nástrojů do výsledného tvaru modelovaného objektu. Jinak se nesmírná geometrická variabilita NURBS reprezentace stane paradoxně brzdou.

Dovoluji si vyslovit touto cestou své upřímné poděkování doc. RNDr. Daniele Velichové, CSc. a RNDr. Karolíně Kundrátové, Ph.D. za pečlivé přečtení rukopisu této publikace a za poskytnutí cenných rad i kritických připomínek, které značnou měrou napomohly ke zkvalitnění celého textu včetně doprovodných obrázků.

Praha, září 2007

Ivana Linkeová

Přehled použité symboliky

a	koeficient
$[a, b]$	uzavřený interval z prostoru reálných čísel, obor parametrizace křivky
$A = (a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_i)_{i=0}^n$	obecný způsob zápisu vektoru dat A , který obsahuje $n+1$ uspořádaných prvků a_0, a_1, \dots, a_n
$\mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}, \mathbf{B}^*, \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{W}$	bod, polohový vektor bodu
$ \mathbf{AB} $	vzdálenost bodů \mathbf{A} a \mathbf{B} , velikost vektoru $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$
$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})$	vektor určený počátečním bodem \mathbf{A} a koncovým bodem \mathbf{B}
$\mathbf{b}(\alpha)$	jednotkový vektor binormály křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
b_α	binormála křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
$B_{i,n}(u)$	Bernsteinův polynom n -tého stupně
C^k	parametrická spojitost k -tého řádu vektorové funkce jedné proměnné, parametrická spojitost k -tého řádu křivky, parametrická spojitost k -tého řádu v bodě napojení dvou segmentů téže křivky, parametrická spojitost k -tého řádu v bodě napojení dvou křivek
$C(u)$	křivka daná bodovou rovnicí
$\mathbf{C}(u), \mathbf{D}(v), \tilde{\mathbf{C}}(u)$	křivka daná vektorovou rovnicí, aproximační NURBS křivka daná vektorovou rovnicí, interpoláčnı NURBS křivka daná vektorovou rovnicı
$C'(\alpha)$	tečný vektor NURBS křivky v bodě $u = \alpha$
$C''(\alpha)$	vektor druhé derivace vektorové funkce NURBS křivky v bodě $u = \alpha$

$\mathbf{C}^{(k)}(u)$	k -tá derivace vektorové funkce křivky dané vektorovou rovnicí, k -tá derivace vektorové funkce NURBS křivky dané vektorovou rovnicí
${}^i\mathbf{C}(u)$	i -tý segment segmentované křivky dané vektorovou rovnicí
$C_0(u), C_1(u), C_2(u), C_3(u)$	Coonsovy polynomy
$C'_0(u), C'_1(u), C'_2(u), C'_3(u)$	první derivace Coonsových polynomů
$C''_0(u), C''_1(u), C''_2(u), C''_3(u)$	druhá derivace Coonsových polynomů
d^I	odchylka interpolační křivky od teoretické křivky
d^{II}	odchylka teoretické křivky od interpolační křivky
d^{III}	odchylka teoretické a interpolační křivky
D^I, D^{II}, D^{III}	absolutní chyba interpolace
E	přesnost interpolační metody
F, \mathbf{F}	zobrazení
$F(u)$	bodová funkce jedné proměnné
$\mathbf{F}(u)$	vektorová funkce jedné proměnné
h_i	i -tá hodnota parametru ve vektoru parametrizace
$H, (h_0, h_1, \dots, h_{\tilde{n}}), (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$	vektor parametrizace
$H_0(u), H_1(u), H_2(u), H_3(u)$	Hermitovy polynomy
I, J	obor parametrizace bodové, resp. vektorové funkce, obor parametrizace křivky dané bodovou, resp. vektorovou rovnicí
k	křivka obecně
$\mathbf{K}(t)$	teoretická křivka daná vektorovou rovnicí
l_i	délka i -tého ramene řídicího polygonu, délka i -tého ramene definičního polygonu, i -tá vzdálenost těžišť dílčích řídicích polygonů, i -tá vzdálenost těžišť dílčích definičních polygonů
L	součet všech délek ramen řídicího polygonu, součet všech vzdáleností těžišť dílčích řídicích polygonů, součet všech délek ramen definičního polygonu, součet všech vzdáleností těžišť dílčích definičních polygonů
$L_i(u)$	i -tý Lagrangeův polynom
$L'_i(u)$	první derivace i -tého Lagrangeova polynomu

$\mathbf{L}(u)$	Lagrangeova interpolační křivka
m	počet uzlových roztečí, nejvyšší index posloupnosti uzlů
n	počet ramen řídicího polygonu, nejvyšší index posloupnosti řídicích bodů
\tilde{n}	počet ramen definičního polygonu, nejvyšší index posloupnosti definičních bodů
$\mathbf{n}(\alpha)$	jednotkový vektor normály křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
n_α	normála křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
$N_{i,p}(u), \tilde{N}_{i,p}(u)$	i -tá B-spline bazová funkce p -tého stupně
$N_{i,p}^{(k)}(u)$	k -tá derivace i -té B-spline bazové funkce p -tého stupně
p	stupeň bazových funkcí, stupeň křivky
$(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n, (\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$	řídicí polygon
$\mathbf{P}_i, \tilde{\mathbf{P}}_i$	i -tý řídicí bod
$(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$	definiční polygon
\mathbf{Q}_i	i -tý definiční bod
\mathbf{Q}'_0	tečný vektor v počátečním bodě interpolační NURBS křivky
\mathbf{Q}'_n	tečný vektor v koncovém bodě interpolační NURBS křivky
\mathbf{Q}''_0	vektor druhé derivace vektorové funkce v počátečním bodě interpolační NURBS křivky dané vektorovou rovnicí
\mathbf{Q}''_n	vektor druhé derivace vektorové funkce v koncovém bodě interpolační NURBS křivky dané vektorovou rovnicí
R	prostor reálných čísel
R^n	prostor dimenze n
$R_{i,p}(u), \tilde{R}_{i,p}(u)$	i -tá racionální bazová funkce p -tého stupně
t, u, \tilde{u}, v	parametr
$\mathbf{t}(\alpha)$	jednotkový tečný vektor křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
t_α	tečna křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě $u = \alpha$
\mathbf{T}	těžiště definičního polygonu
\mathbf{T}_i	těžiště i -tého dílčího řídicího polygonu, těžiště i -tého dílčího definičního polygonu

$U, (u_0, u_1, \dots, u_m), (u_i)_{i=0}^m$	
$\tilde{U}, (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m), (\tilde{u}_i)_{i=0}^m$	uzlový vektor
u_i, \tilde{u}_i	i -tý uzel
$[u_i, u_{i+1}), [\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1})$	i -tá uzlová rozteč, i -tý interval uzlového vektoru
V_n	vektorové zaměření prostoru dimenze n
w_i, \tilde{w}_i	váha i -tého řídicího bodu
$W, (w_0, w_1, \dots, w_n), (w_i)_{i=0}^n,$	
$\tilde{W}, (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n), (\tilde{w}_i)_{i=0}^n$	váhy řídicích bodů
$x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)$	souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné
$x(u), y(u), \tilde{x}(v), \tilde{y}(v)$	souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné rovinné křivky dané bodovou, resp. vektorovou rovnicí
$x(u), y(u), z(u),$	
$\tilde{x}(v), \tilde{y}(v), \tilde{z}(v)$	souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné prostorové křivky dané bodovou, resp. vektorovou rovnicí
δ, ε	reálné číslo
$\varepsilon^I, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}$	relativní chyba interpolace
ν	normálová rovina
φ, ψ	úhel
ρ	rektifikační rovina
ω	oskulační rovina
$\Delta u, \Delta \tilde{u}$	uniformní krok uzlového vektoru
Δt	vzorkovací krok parametru t pro získání modelových dat na teoretické křivce

Kapitola 1

Křivky

V této kapitole uvedeme potřebné pojmy, definice a základní vlastnosti křivek, se kterými budeme pracovat v rámci celé publikace.

1.1 Definice a vlastnosti křivky

Z geometrického hlediska je křivka jednoparametrická množina *bodů* v prostoru dimenze n , které jsou funkčními hodnotami *bodové funkce jedné proměnné*. Namísto bodů křivky se často uvažují jejich *polohové vektory*, které jsou funkčními hodnotami *vektorové funkce jedné proměnné*. V takovém případě je křivka hodografem této vektorové funkce.

■ **Definice 1.1 – Bodová, resp. vektorová funkce jedné proměnné.** Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval reálných čísel. Potom se zobrazení F , resp. \mathbf{F} intervalu I do euklidovského prostoru \mathbb{R}^n , $n > 1$, resp. do jeho vektorového zaměření V_n , $n > 1$, nazývá *bodová funkce jedné proměnné*

$$F(u) = [x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)], \quad (1.1)$$

resp. *vektorová funkce jedné proměnné*

$$\mathbf{F}(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)). \quad (1.2)$$

Interval I nazýváme *oborem parametrizace* bodové, resp. vektorové funkce, argument u nazýváme *parametrem*. Každému $u \in I$ je bodovou, resp. vektorovou funkcí přiřazen *bod*, resp. *vektor*.

Reálné funkce

$$x_1 = x_1(u), x_2 = x_2(u), \dots, x_n = x_n(u), u \in I, \quad (1.3)$$

se nazývají *souřadnicové funkce* bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné. \square

Souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné jsou reálnými funkcemi jedné proměnné. Bodová, resp. vektorová funkce jedné proměnné je zobecněním reálné funkce jedné proměnné. Snadno lze dokázat následující tvrzení a z nich vyplývající vlastnosti bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné:

- Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, má v bodě $\alpha \in I$ za limitu bod $F_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)]$, resp. vektor $\mathbf{F}_\alpha = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$, právě když pro limity jejich souřadnicových funkcí platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \alpha} x_1(u) &= x_1(\alpha), \\
\lim_{u \rightarrow \alpha} x_2(u) &= x_2(\alpha), \\
&\vdots \\
\lim_{u \rightarrow \alpha} x_n(u) &= x_n(\alpha).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, je spojitá v bodě $\alpha \in I$, právě když jsou její souřadnicové funkce v bodě α spojité, tzn., že pro $\alpha \in I$ existují limity (1.4), které jsou rovny funkčním hodnotám souřadnicových funkcí v bodě α .

- Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, je spojitá na intervalu I , právě když jsou její souřadnicové funkce na intervalu I spojité.
- Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, má v bodě $\alpha \in I$ derivaci k -tého řádu, právě když existují derivace k -tého řádu $x_1^{(k)}(\alpha), x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha)$ jejich souřadnicových funkcí. Derivace $F^{(k)}(\alpha)$ bodové funkce F , resp. derivace $\mathbf{F}^{(k)}(\alpha)$ vektorové funkce \mathbf{F} v bodě $\alpha \in I$ je potom vektor

$$F^{(k)}(\alpha) = \left(x_1^{(k)}(\alpha), x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha) \right), \tag{1.5}$$

resp. vektor

$$\mathbf{F}^{(k)}(\alpha) = \left(x_1^{(k)}(\alpha), x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha) \right). \tag{1.6}$$

- Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, má spojitost k -tého řádu v bodě $\alpha \in I$, právě když jsou derivace jejich souřadnicových funkcí až do k -tého řádu v bodě $\alpha \in I$ spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá v bodě $\alpha \in I$.
- Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, má spojitost k -tého řádu na I , právě když jsou derivace jejich souřadnicových funkcí až do k -tého řádu na I spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá na I .

■ **Definice 1.2 – Křivka.** *Křivka* je každá souvislá podmnožina prostoru $k \subset R^n$, která je spojitým obrazem intervalu I . V případě, že $n = 2$, resp. $n = 3$, označujeme křivku jako *rovinnou*, resp. *prostorovou*¹.

Je-li analytickou reprezentací rovinné, resp. prostorové křivky bodová funkce (1.1), která je definovaná, spojitá a alespoň jedenkrát diferencovatelná na intervalu I , říkáme, že je rovinná, resp. prostorová křivka dána *bodovou rovnicí*

$$C(u) = [x(u), y(u)], \quad u \in I, \tag{1.7}$$

resp.

$$C(u) = [x(u), y(u), z(u)], \quad u \in I. \tag{1.8}$$

Je-li analytickou reprezentací rovinné, resp. prostorové křivky vektorová funkce (1.2), která je definovaná, spojitá a alespoň jedenkrát diferencovatelná na intervalu I , říkáme, že je rovinná, resp. prostorová křivka dána *vektorovou rovnicí*

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)), \quad u \in I, \tag{1.9}$$

¹Z důvodů praktické aplikace nebudeme křivky v prostorech dimenze vyšší než 3 uvažovat.

resp.

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u)), \quad u \in I. \quad (1.10)$$

Rozepíšeme-li souřadnicové funkce křivky dané bodovou rovnicí (1.7), resp. (1.8) nebo vektorovou rovnicí (1.9), resp. (1.10), obdržíme *parametrické rovnice* rovinné, resp. prostorové křivky:

$$\begin{aligned} x &= x(u), \\ y &= y(u), \quad u \in I, \end{aligned} \quad (1.11)$$

resp.

$$\begin{aligned} x &= x(u), \\ y &= y(u), \\ z &= z(u), \quad u \in I. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Je-li křivka definována parametrickými rovnicemi (1.11), resp. (1.12), říkáme, že je *křivka definovaná parametricky*.

Je-li interval $I = [a, b]$ uzavřený, hovoříme o *oblouku křivky*. \square

Poznámka: V souladu s terminologií počítačové grafiky a z důvodů stručnosti budeme nadále termínem *křivka* rozumět oblouk křivky.

V dalších definicích v této kapitole budeme uvažovat pouze prostorovou křivku. Modifikace příslušných vztahů pro rovinnou křivku je zřejmá.

■ **Definice 1.3 – Bod křivky.** *Bodem křivky* označujeme hodnotu bodové funkce F pro $\alpha \in I = [a, b]$

$$F(\alpha) = [x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)] = \mathbf{C}(\alpha), \quad (1.13)$$

resp. polohového vektoru, který je hodnotou vektorové funkce \mathbf{F} pro $\alpha \in I = [a, b]$

$$\mathbf{F}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = \mathbf{C}(\alpha). \quad (1.14)$$

Hodnota parametru $u = \alpha \in I = [a, b]$, která označuje polohu bodu na křivce, se nazývá *parametrická (křivočará) souřadnice* bodu křivky.

Bodovou, resp. vektorovou funkcí je definovaná orientace křivky. Počáteční bod křivky má křivočarou souřadnici a , koncový bod křivky má křivočarou souřadnici b . Počáteční a koncový bod křivky označujeme jako *krajní* body křivky. \square

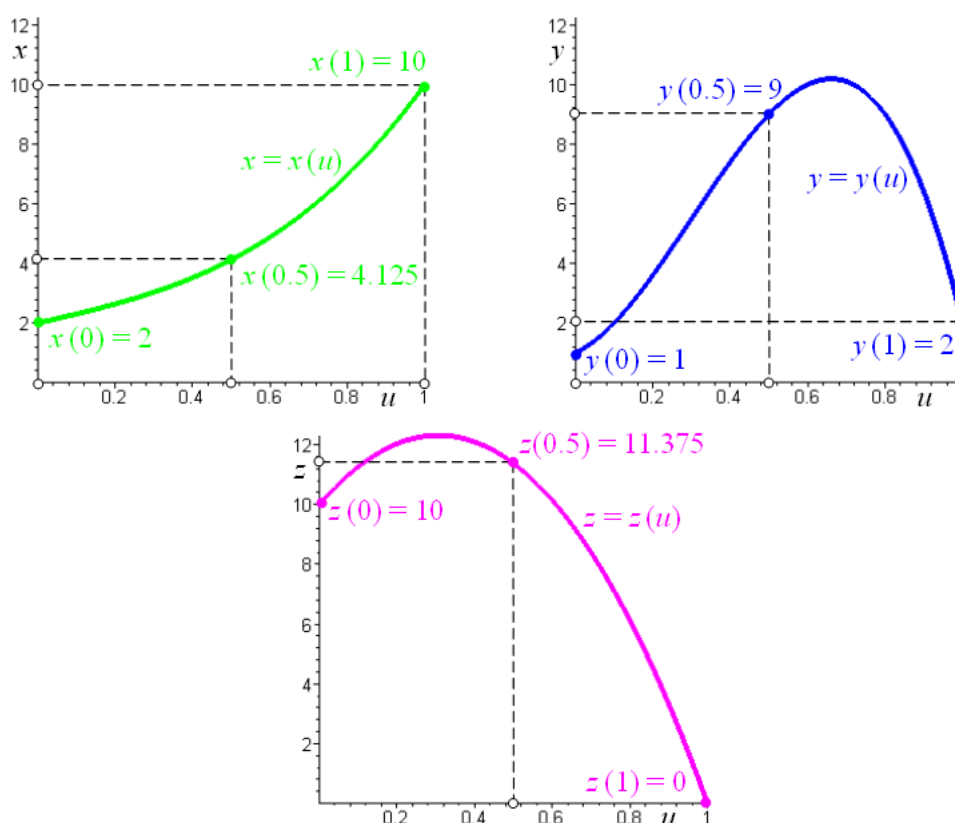
Pro objasnění výše definovaných pojmů budeme uvažovat následující souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce

$$\begin{aligned} x &= x(u) = 5u^3 + 3u + 2, \\ y &= y(u) = -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, \\ z &= z(u) = -u^3 - 24u^2 + 15u + 10, \quad u \in [0, 1], \end{aligned} \quad (1.15)$$

jejichž průběh je zobrazen na obr. 1.1. Na tomto obrázku jsou také vyznačeny funkční hodnoty souřadnicových funkcí pro $u = 0$, $u = 0.5$ a $u = 1$, které budeme sledovat i v dalších obrázcích.

Bodová funkce $F(u)$, $u \in I$, která zobrazuje interval $I = [0, 1]$ do trojrozměrného prostoru, má tvar

$$F(u) = [5u^3 + 3u + 2, -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, -u^3 - 24u^2 + 15u + 10], \quad u \in [0, 1]. \quad (1.16)$$



Obr. 1.1: Souřadnicové funkce

Křivka k , která je dána bodovou rovnicí

$$C(u) = [5u^3 + 3u + 2, -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, -u^3 - 24u^2 + 15u + 10], \quad u \in [0, 1],$$

je zobrazena na obr. 1.2. Kromě křivky k jsou zde vyznačeny i funkční hodnoty bodové funkce $F(0)$, resp. $F(0.5)$, resp. $F(1)$, které odpovídají bodům křivky $C(0) = [2, 1, 10]$, resp. $C(0.5) = [4.125, 9, 11.375]$, resp. $C(1) = [10, 2, 0]$.

Vektorová funkce $\mathbf{F}(u)$, $u \in I$, která zobrazuje interval $I = [0, 1]$ do vektorového zaměření trojrozměrného prostoru, má tvar

$$\mathbf{F}(u) = (5u^3 + 3u + 2, -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, -u^3 - 24u^2 + 15u + 10), \quad u \in [0, 1]. \quad (1.17)$$

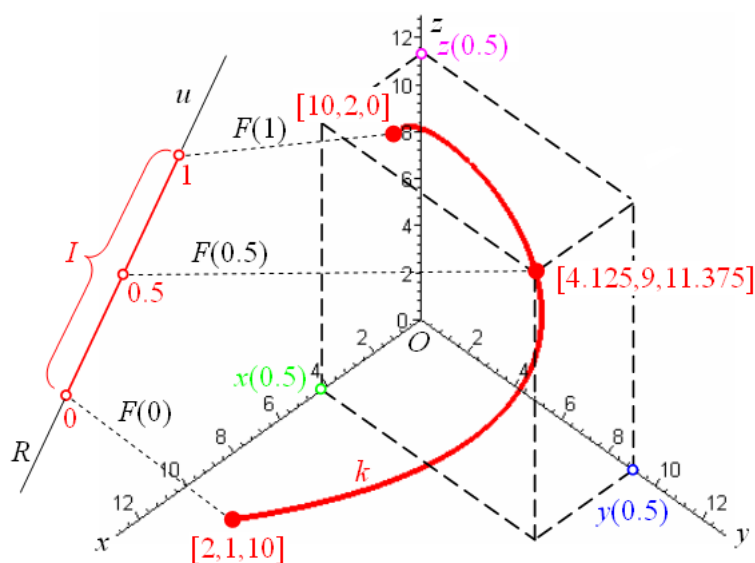
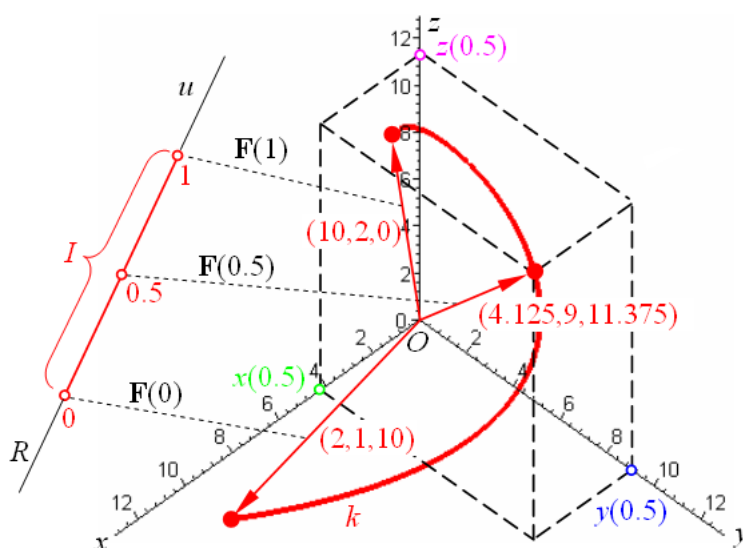
Křivka k , která je dána vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = (5u^3 + 3u + 2, -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, -u^3 - 24u^2 + 15u + 10), \quad u \in [0, 1],$$

je zobrazena na obr. 1.3. Pro hodnoty parametru $u = 0$, resp. $u = 0.5$, resp. $u = 1$ jsou zde vyznačeny funkční hodnoty vektorové funkce $\mathbf{F}(0)$, resp. $\mathbf{F}(0.5)$, resp. $\mathbf{F}(1)$, které jsou polohovými vektory $\mathbf{C}(0) = (2, 1, 10)$, resp. $\mathbf{C}(0.5) = (4.125, 9, 11.375)$, resp. $\mathbf{C}(1) = (10, 2, 0)$ bodů křivky k . Koncové body těchto polohových vektorů leží na křivce k .

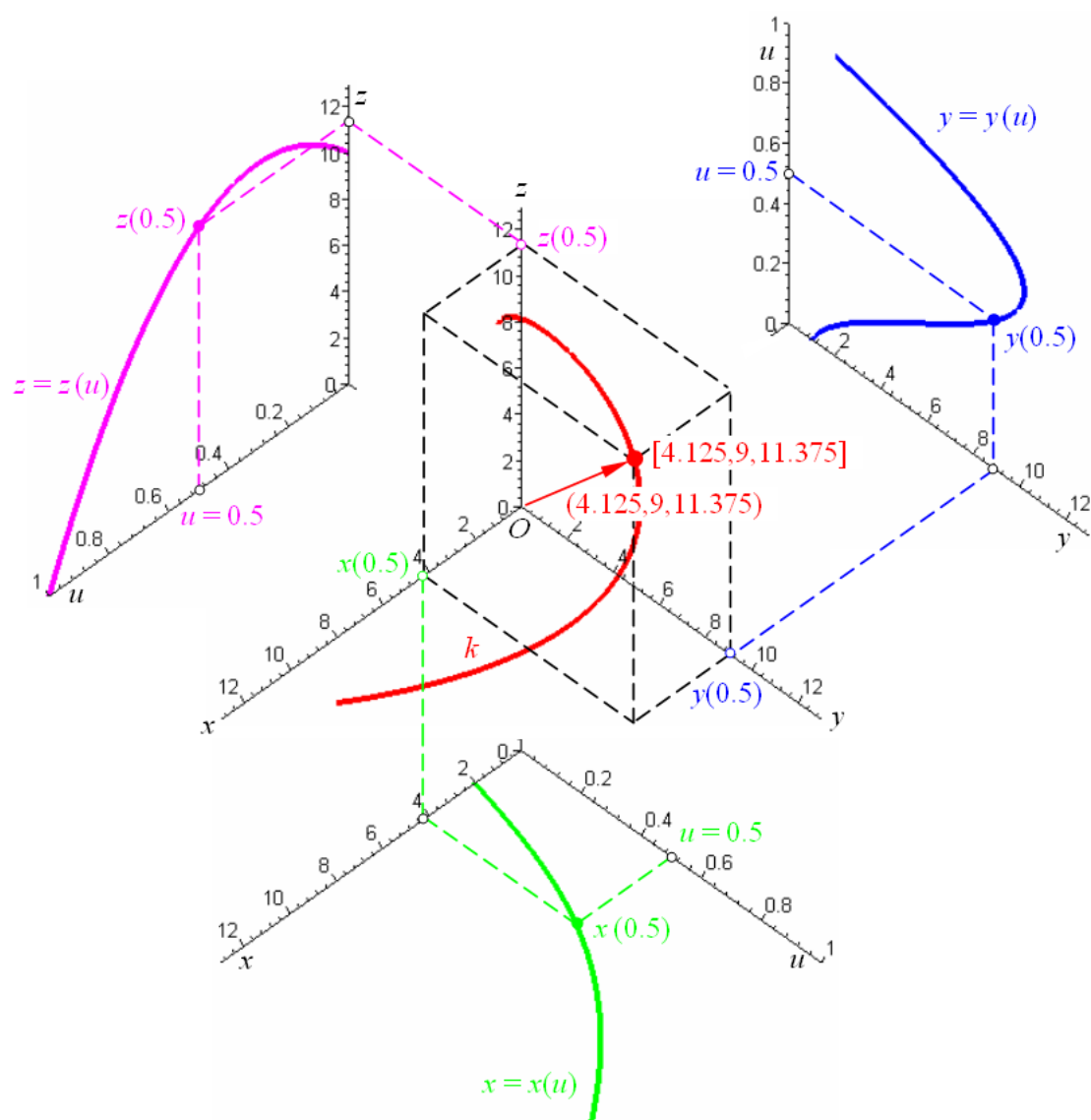
Parametrické rovnice křivky k dostaneme rozepsáním souřadnicových funkcí bodové funkce (1.16), resp. vektorové funkce (1.17):

$$\begin{aligned} x(u) &= 5u^3 + 3u + 2, \\ y(u) &= -50u^3 + 45u^2 + 6u + 1, \\ z(u) &= -u^3 - 24u^2 + 15u + 10, \quad u \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Obr. 1.2: Křivka k daná bodovou rovnicíObr. 1.3: Křivka k daná vektorovou rovnicí

Na obr. 1.4 je zobrazen graf křivky k dané parametrickými rovnicemi (1.18) včetně vhodně orientovaných grafů souřadnicových funkcí. Dosadíme-li do souřadnicových funkcí konkrétní zvolenou hodnotu parametru u , dostaneme souřadnice bodu křivky, resp. složky jeho polohového vektoru. Na obr. 1.4 je znázorněn bod $[4.125, 9, 11.375]$, resp. jeho polohový vektor $(4.125, 9, 11.375)$ odpovídající hodnotě parametru $u = 0.5$.

Je zřejmé, že bodová, vektorová a parametrické rovnice křivky jsou vzájemně ekvivalentní. Nadále budeme pracovat pouze s vektorovou rovnicí křivky. V souladu s tím budeme křivku označovat $\mathbf{C}(u)$. Bodem křivky pro $u = \alpha \in I = [a, b]$ budeme nadále rozumět koncový bod polohového vektoru $\mathbf{C}(u)$ a budeme jej označovat stejně jako polohový vektor, tedy $\mathbf{C}(\alpha)$.

Obr. 1.4: Křivka k daná parametrickými rovnicemi

- **Definice 1.4 – Regulární a singulární bod křivky.** Bod křivky $C(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, nazýváme *regulárním*, platí-li pro první derivace souřadnicových funkcí vektorové rovnice křivky alespoň jedna z nerovností

$$\left. \frac{dx(u)}{du} \right|_{u=\alpha} \neq 0, \quad \left. \frac{dy(u)}{du} \right|_{u=\alpha} \neq 0, \quad \left. \frac{dz(u)}{du} \right|_{u=\alpha} \neq 0 \quad (1.19)$$

a odpovídá-li mu jen jedna hodnota parametru $u = \alpha$ z $I = (a, b)$. Každý jiný bod nazýváme *singulárním bodem křivky*. □

- **Definice 1.5 – Inflexní bod křivky.** Bod křivky $C(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, nazýváme *inflexním*, platí-li pro druhé derivace souřadnicových funkcí vektorové rovnice křivky

$$\left. \frac{d^2x(u)}{du^2} \right|_{u=\alpha} = 0, \quad \left. \frac{d^2y(u)}{du^2} \right|_{u=\alpha} = 0, \quad \left. \frac{d^2z(u)}{du^2} \right|_{u=\alpha} = 0. \quad (1.20)$$

□

■ **Definice 1.6 – Uzlový a vícenásobný bod křivky.** Jestliže existují čísla

$$\alpha_1, \alpha_2 \in I = [a, b], \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

pro která platí $\mathbf{C}(\alpha_1) = \mathbf{C}(\alpha_2)$, tj. bod křivky určený křivočarou souřadnicí α_1 je totožný s bodem křivky určeným křivočarou souřadnicí α_2 , nazývá se takový bod *uzlovým bodem křivky*. Jestliže existuje k takových čísel $z I = [a, b]$, nazývá se takový bod *k-násobným bodem křivky*. \square

■ **Definice 1.7 – Tečný vektor, vektor binormály a vektor normály v bodě křivky.** Derivace vektorové funkce

$$\mathbf{C}'(u) = \left(\frac{dx(u)}{du}, \frac{dy(u)}{du}, \frac{dz(u)}{du} \right) = (x'(u), y'(u), z'(u)) \quad (1.21)$$

je vektorová funkce, která vyjadřuje pro $\alpha \in I = [a, b]$ *tečný vektor křivky* $\mathbf{C}(u)$ v jejím bodě $\mathbf{C}(\alpha)$:

$$\mathbf{C}'(\alpha) = (x'(\alpha), y'(\alpha), z'(\alpha)). \quad (1.22)$$

Orientace tečného vektoru je shodná s orientací křivky. Jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}(\alpha)$ v regulárním bodě $\mathbf{C}(\alpha)$ křivky $\mathbf{C}(u)$ je dán

$$\mathbf{t}(\alpha) = \frac{\mathbf{C}'(\alpha)}{|\mathbf{C}'(\alpha)|}. \quad (1.23)$$

Přímka určená bodem $\mathbf{C}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{t}(\alpha)$ se nazývá *tečna křivky* t_α v jejím bodě $\mathbf{C}(\alpha)$.

Vektorový součin první a druhé derivace vektorové funkce křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, v bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, se nazývá *vektor binormály*. Jednotkový vektor binormály $\mathbf{b}(\alpha)$ je dán

$$\mathbf{b}(\alpha) = \frac{\mathbf{C}'(\alpha) \times \mathbf{C}''(\alpha)}{|\mathbf{C}'(\alpha) \times \mathbf{C}''(\alpha)|}. \quad (1.24)$$

Přímka určená bodem $\mathbf{C}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{b}(\alpha)$ se nazývá *binormála křivky* b_α v jejím bodě $\mathbf{C}(\alpha)$.

Vektorový součin vektoru binormály a tečného vektoru křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I$ v bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, se nazývá *vektor normály*. Jednotkový vektor normály $\mathbf{n}(\alpha)$ je dán

$$\mathbf{n}(\alpha) = \mathbf{b}(\alpha) \times \mathbf{t}(\alpha). \quad (1.25)$$

Přímka určená bodem $\mathbf{C}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{n}(\alpha)$ se nazývá *normála křivky* n_α v jejím bodě $\mathbf{C}(\alpha)$. \square

■ **Definice 1.8 – Frenetův-Serretův průvodní trojhran křivky.** Normovaný pravoúhlý a pravotočivý (kladně orientovaný) trojhran tvořený v regulárním bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, vektory $\mathbf{t}(\alpha)$, $\mathbf{b}(\alpha)$, $\mathbf{n}(\alpha)$, se nazývá *Frenetův-Serretův průvodní trojhran křivky*. \square

■ **Definice 1.9 – Normálová, rektifikační a oskulační rovina.** Rovina určená normálou a binormálou v regulárním bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, se nazývá *normálová rovina* ν (kolmá k tečně), jejíž rovnice je následující:

$$\nu : (\mathbf{N} - \mathbf{C}(\alpha)) \cdot \mathbf{t}(\alpha) = 0, \quad (1.26)$$

kde \mathbf{N} je polohový vektor bodu normálové roviny ν .

Rovina určená binormálou a tečnou v regulárním bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, se nazývá *rektifikační rovina* ρ (kolmá k normále), jejíž rovnice je následující:

$$\rho : (\mathbf{R} - \mathbf{C}(\alpha)) \cdot \mathbf{n}(\alpha) = 0, \quad (1.27)$$

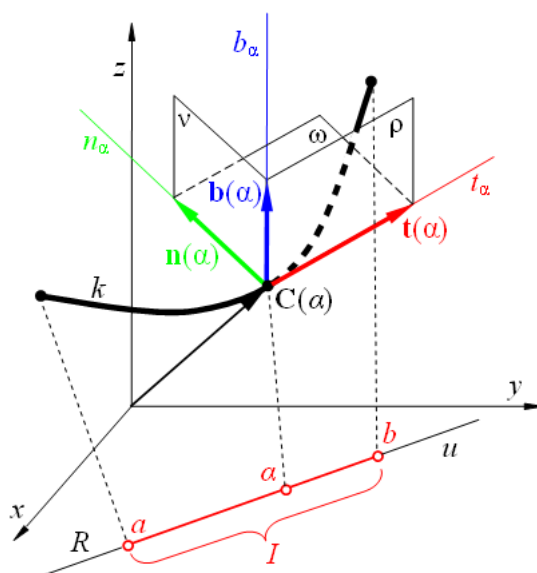
kde \mathbf{R} je polohový vektor bodu rektifikační roviny ρ .

Rovina určená tečnou a normálou v regulárním bodě $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in I = [a, b]$, křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, se nazývá *oskulační rovina* ω (kolmá k binormále), jejíž rovnice je následující:

$$\omega : (\mathbf{W} - \mathbf{C}(\alpha)) \cdot \mathbf{b}(\alpha) = 0, \quad (1.28)$$

kde \mathbf{W} je polohový vektor bodu oskulační roviny ω . □

Frenetův-Serretův průvodní trojhran křivky je zobrazen na obr. 1.5 zároveň s normálovou, rektifikační a oskulační rovinou křivky.



Obr. 1.5: Frenetův-Serretův průvodní trojhran křivky

■ **Definice 1.10 – Bod vratu.** Bod křivky, ve kterém se mění orientace tečného vektoru, se nazývá *bod vratu*. □

1.2 Napojování křivek

Při matematickém modelování křivky obecného tvaru nevystačíme s jedinou křivkou danou jedinou vektorovou rovnicí. Složitější tvary křivek se modelují z několika dílčích křivek, které jsou napojeny svými krajními body. Kvalita napojení musí vyhovovat technické aplikaci, ve které je křivka použita.

Než se budeme zabývat spojitostí napojení dvou křivek, uvedeme si definici spojitosti křivky, která vyplývá ze spojitosti její vektorové funkce.

■ **Definice 1.11 – Spojitost křivky.** Křivka $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, má spojitost k -tého řádu v bodě $\alpha \in I = [a, b]$, právě když má její vektorová funkce v tomto bodě spojitost k -tého řádu. O takové křivce říkáme, že je C^k spojitá v bodě $\alpha \in I = [a, b]$.

Křivka $\mathbf{C}(u)$, $u \in I = [a, b]$, má spojitost k -tého řádu na $I = [a, b]$, právě když má její vektorová funkce na $I = [a, b]$ spojitost k -tého řádu. O takové křivce říkáme, že je C^k spojitá na $I = [a, b]$. \square

■ **Definice 1.12 – Spojitost napojení dvou křivek.** Nechť je dána křivka $\mathbf{C}(u)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in I = [a, b]$, jejíž souřadnicové funkce jsou spojitě a k krát spojitě diferencovatelné na $I = [a, b]$. Nechť je dále dána křivka $\mathbf{D}(v)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{D}(v) = (\tilde{x}(v), \tilde{y}(v), \tilde{z}(v))$, $v \in J = [c, d]$, jejíž souřadnicové funkce jsou spojitě a k krát spojitě diferencovatelné na $J = [c, d]$. Říkáme, že křivka $\mathbf{D}(v)$ je napojena svým počátečním bodem na koncový bod křivky $\mathbf{C}(u)$ s C^k spojitostí, popř. že jsou tyto křivky C^k *spojitě napojeny*, jestliže platí

$$\mathbf{C}^{(i)}(b) = \mathbf{D}^{(i)}(c), \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (1.29)$$

Takto definovaná spojitost napojení dvou křivek se označuje jako *parametrická spojitost*. \square

Parametrická spojitost C^k (parametrická spojitost k -tého řádu) vyjadřuje, že v bodě napojení dvou křivek jsou totožné vektory prvních k derivací vektorových funkcí obou křivek, tj. jejich počátek (bod napojení), směr, orientace i velikost. Méně přísné požadavky na napojení klade tzv. *geometrická spojitost* (např. pro geometrickou spojitost 1. řádu nemusí být shodná velikost tečných vektorů v bodě napojení). V této publikaci se budeme zabývat výhradně parametrickou spojitostí, kterou budeme stručně označovat pouze spojitost.

Příklad C^0 , resp. C^1 , resp. C^2 spojitě napojených rovinných křivek $\mathbf{C}(u)$, $u \in [0, 1]$ a $\mathbf{D}(v)$, $v \in [0, 1]$, je nakreslen na obr. 1.6, resp. obr. 1.7, resp. obr. 1.8. Pro porovnání jsou ve všech obrázcích nakresleny i vektory prvních a druhých derivací vektorových funkcí obou křivek v bodě napojení.

Při zobrazení na obr. 1.6, obr. 1.7 a obr. 1.8 jsou zachována následující pravidla:

- Křivka $\mathbf{C}(u)$ a vektory derivací její vektorové funkce, které jsou odlišné od vektorů příslušných derivací vektorové funkce křivky $\mathbf{D}(v)$, jsou zobrazeny červenou barvou.
- Křivka $\mathbf{D}(v)$ a vektory derivací její vektorové funkce, které jsou odlišné od vektorů příslušných derivací vektorové funkce křivky $\mathbf{C}(u)$, jsou zobrazeny modrou barvou.
- Totožné vektory derivací vektorových funkcí křivek $\mathbf{C}(u)$ a $\mathbf{D}(v)$ jsou zobrazeny černou barvou.
- Vektory prvních derivací vektorových funkcí křivek $\mathbf{C}(u)$ a $\mathbf{D}(v)$ jsou zobrazeny plnou čarou ve skutečné velikosti.
- Vektory druhých derivací vektorových funkcí křivek $\mathbf{C}(u)$ a $\mathbf{D}(v)$ jsou zobrazeny čárkovanou čarou a vzhledem k jejich značné velikosti jsou na obrázcích zmenšeny. Směr a orientace těchto vektorů je zachována.

Křivka $\mathbf{C}(u)$ má ve všech třech obrázcích stále stejnou vektorovou rovnici

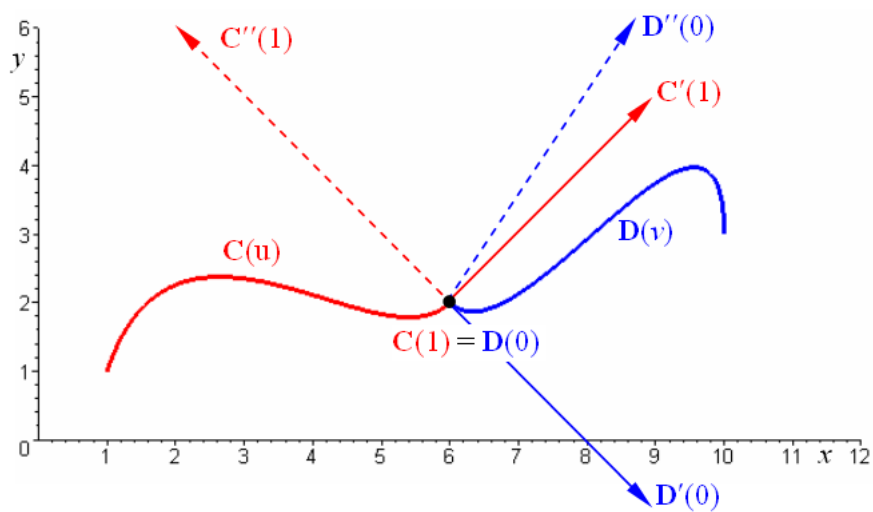
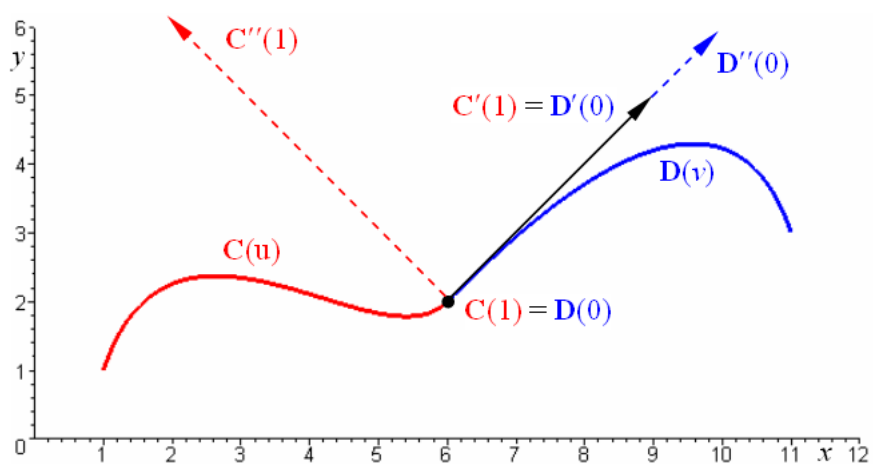
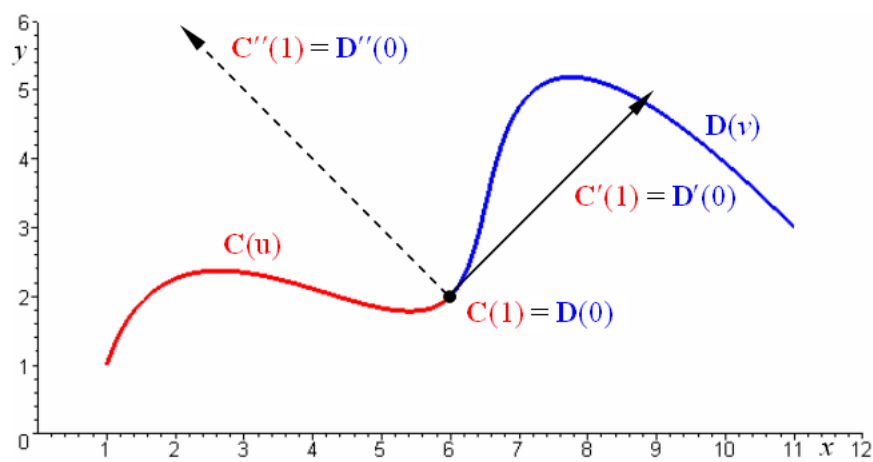
$$\mathbf{C}(u) = (-4u^3 + 6u^2 + 3u + 1, 10u^3 - 18u^2 + 9u + 1), \quad u \in [0, 1],$$

jejíž první, resp. druhá derivace je

$$\mathbf{C}'(u) = (-12u^2 + 12u + 3, 30u^2 - 36u + 9), \quad u \in [0, 1],$$

resp.

$$\mathbf{C}''(u) = (-24u + 12, 60u - 36), \quad u \in [0, 1].$$

Obr. 1.6: C^0 spojitě napojení dvou křivekObr. 1.7: C^1 spojitě napojení dvou křivekObr. 1.8: C^2 spojitě napojení dvou křivek

Křivka $\mathbf{D}(v)$ z obr. 1.6 má vektorovou rovnici

$$\mathbf{D}(v) = (-5v^3 + 6v^2 + 3v + 6, -14v^3 + 18v^2 - 3v + 2), \quad v \in [0, 1],$$

jejíž první, resp. druhá derivace je

$$\mathbf{D}'(v) = (-15v^2 + 12v + 3, -42v^2 + 36v - 3), \quad v \in [0, 1],$$

resp.

$$\mathbf{D}''(v) = (-30v + 12, -84v + 36), \quad v \in [0, 1].$$

Křivky na obr. 1.6 jsou pouze C^0 spojitě napojené, tzn. mají totožný pouze bod napojení, neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(1) &= (6, 2) = \mathbf{D}(0) = (6, 2), \\ \mathbf{C}'(1) &= (3, 3) \neq \mathbf{D}'(0) = (3, -3), \\ \mathbf{C}''(1) &= (-12, 24) \neq \mathbf{D}''(0) = (12, 36). \end{aligned}$$

Křivka $\mathbf{D}(v)$ z obr. 1.7 má vektorovou rovnici

$$\mathbf{D}(v) = (-4v^3 + 6v^2 + 3v + 6, -8v^3 + 6v^2 + 3v + 2), \quad v \in [0, 1],$$

jejíž první, resp. druhá derivace je

$$\mathbf{D}'(v) = (-12v^2 + 12v + 3, -24v^2 + 12v + 3), \quad v \in [0, 1],$$

resp.

$$\mathbf{D}''(v) = (-24v + 12, -48v + 12), \quad v \in [0, 1].$$

Křivky na obr. 1.7 jsou C^1 spojitě napojené, tzn. mají totožný bod napojení a tečné vektory v tomto bodě, neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(1) &= (6, 2) = \mathbf{D}(0) = (6, 2), \\ \mathbf{C}'(1) &= (3, 3) = \mathbf{D}'(0) = (3, 3), \\ \mathbf{C}''(1) &= (-12, 24) \neq \mathbf{D}''(0) = (12, 12). \end{aligned}$$

Konečně křivka $\mathbf{D}(v)$ z obr. 1.8 má vektorovou rovnici

$$\mathbf{D}(v) = (8v^3 - 6v^2 + 3v + 6, -14v^3 + 12v^2 + 3v + 2), \quad v \in [0, 1],$$

jejíž první, resp. druhá derivace je

$$\mathbf{D}'(v) = (24v^2 - 12v + 3, -42v^2 + 24v + 3), \quad v \in [0, 1],$$

resp.

$$\mathbf{D}''(v) = (48v - 12, -84v + 24), \quad v \in [0, 1].$$

Křivky na obr. 1.8 jsou C^2 spojitě napojené, tzn. mají totožný bod napojení, totožné tečné vektory v tomto bodě a totožné vektory druhých derivací svých vektorových funkcí v tomto bodě, neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(1) &= (6, 2) = \mathbf{D}(0) = (6, 2), \\ \mathbf{C}'(1) &= (3, 3) = \mathbf{D}'(0) = (3, 3), \\ \mathbf{C}''(1) &= (-12, 24) = \mathbf{D}''(0) = (-12, 24). \end{aligned}$$

Poznámky:

- V souladu s terminologií zavedenou v počítačové grafice a z důvodů stručnosti budeme nadále termínem *k-tá derivace křivky* rozumět vektorovou funkci $\mathbf{C}^{(k)}(u)$, $u \in I$, která je k -tou derivací vektorové funkce křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I$, a budeme ji i stejně označovat, tedy $\mathbf{C}^{(k)}(u)$.
- Termínem *vektor k-té derivace křivky v bodě α* budeme rozumět hodnotu vektorové funkce $\mathbf{C}^{(k)}(u)$, $u \in I$, která je k -tou derivací vektorové funkce křivky $\mathbf{C}(u)$, $u \in I$, v bodě $\alpha \in I$. Vektor k -té derivace křivky v bodě α budeme označovat $\mathbf{C}^{(k)}(\alpha)$.
- Konkrétně vektor první derivace křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě α (tj. tečný vektor křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě α) budeme značit $\mathbf{C}'(\alpha)$. Vektor druhé derivace křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě α budeme značit $\mathbf{C}''(\alpha)$.

Kapitola 2

Aproximační NURBS křivky

NURBS představuje dvojí zobecnění uniformní B-spline reprezentace. Písmeno B pochází od slova *báze*, neboť NURBS křivka je konstruována jako lineární kombinace bázových funkcí, kdy součinitelé u jednotlivých bázových funkcí jsou řídicí body (viz dále). *Spline* označuje *segmentovanou* křivku, která je složena ze spojitě napojených oblouků – segmentů křivky. Kvalita napojení jednotlivých segmentů splňuje podmínky C^{p-1} spojitosti, kde p je stupeň křivky. *Uniformní* znamená, že rozdíly hodnot parametru, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů křivky, jsou stejné. B-spline křivky stupně p jsou parametrizovány polynomiálními B-spline funkcemi stupně p .

Prvním zobecněním uniformní B-spline reprezentace je *neuniformní* B-spline reprezentace, kdy rozdíly hodnot parametru, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů křivky, nejsou stejné. Druhým zobecněním je *racionální* B-spline reprezentace, která se od polynomiální liší tím, že každému řídicímu bodu je přiřazena *váha*, která vypovídá o důležitosti vlivu konkrétního řídicího bodu na tvar výsledné křivky vůči vlivu ostatních řídicích bodů. Zavedení vah vede na parametrizaci racionálními funkcemi.

Podle interpretace vstupních dat rozlišujeme dva základní přístupy ke konstrukci matematického modelu křivky zadané posloupností bodů: *aproximaci* a *interpolaci*.

V případě aproximace označujeme zadané body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ jako *řídicí body* a útvar, do kterého jsou uspořádány, *řídicí polygon* $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n)$. Aproximační křivka nemusí řídicími body procházet, její výsledný tvar sleduje konfiguraci řídicích bodů.

Při interpolaci označujeme zadané body $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ jako *definiční body* a útvar, do kterého jsou uspořádány, *definiční polygon* $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}} = (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{\tilde{n}})$. Interpoláčnı křivka musí definičními body procházet a její tvar mezi definičními body musí vyhovovat nárokům aplikace, ve které je použita.

Konstrukci interpolačních NURBS křivek se věnuje kap. 4 Interpolační NURBS křivky. V této kapitole se budeme zabývat aproximačními NURBS křivkami.

2.1 Definice NURBS křivky

Tvar aproximační NURBS křivky lze modifikovat celkem čtyřmi různými tvarovacími nástroji, kterými jsou: řídicí body, stupeň křivky, váhy řídicích bodů a hodnoty parametru, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů NURBS křivky, uspořádané do tzv. *uzlového vektoru*.

■ **Definice 2.1 – Uzlový vektor.** Nechť U je neklesající posloupnost $(m + 1)$ reálných čísel

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m.$$

Potom čísla u_i , kde $i = 0, \dots, m$, nazýváme *uzly*, množinu $U = (u_i)_{i=0}^m = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_m)$ nazýváme *uzlovým vektorem* a polootevřený interval $[u_i, u_{i+1})$ nazýváme *i -tou uzlovou roztečí* (*uzlovým intervalem*).

Opakuje-li se uzel u_i v uzlovém vektoru k -krát, tj.

$$u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}, \quad k > 1,$$

označujeme jej jako *k -násobný*. Pokud se uzel u_i vyskytuje v uzlovém vektoru pouze jedenkrát, označujeme jej jako *jednoduchý*.

Jednoduché nebo k -násobné uzly na začátku a na konci uzlového vektoru nazýváme *krajní*, uzly uvnitř uzlového vektoru nazýváme *vnitřní*.

Mají-li všechny uzlové rozteče stejnou délku, tj.

$$u_{i+1} - u_i = \Delta u = \text{konst.}, \quad i = 0, \dots, m - 1,$$

nazýváme uzlový vektor *uniformní*, v ostatních případech hovoříme o *neuniformním* uzlovém vektoru. Násobnost krajních uzlů nemá na toto rozdělení vliv. \square

- **Definice 2.2 – B-spline báze funkce.** Na daném uzlovém vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$, $u_0 = a$, $u_m = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, jsou B-spline báze funkce $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, $u \in [a, b]$, stupně p definovány rekurentním vzorcem:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [u_i, u_{i+1}), \\ 0, & u \notin [u_i, u_{i+1}) \text{ nebo na uzlové rozteči nulové délky,} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u), \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.1)$$

Opakováním uzlů vznikají uzlové rozteče nulové délky. V takovém případě se výrazy $\frac{0}{0}$, které se vyskytnou v rekurentním vzorci (2.1), položí definitoricky rovny nule. \square

Z rekurentního vzorce (2.1) je zřejmé, že je-li $p \geq 1$, je každá B-spline báze funkce stupně p lineární kombinací dvou B-spline báze funkcí stupně $p - 1$.

- **Definice 2.3 – B-spline křivka.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$, uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$, $u_0 = a$, $u_m = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, a stupeň křivky p . Potom je B-spline křivka $\mathbf{C}(u)$ stupně p dána následující vektorovou rovnicí:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [a, b], \quad (2.2)$$

kde $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline báze funkce dle (2.1). \square

- **Definice 2.4 – Váhy řídicích bodů.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a posloupnost nezáporných reálných čísel $W = (w_0, w_1, \dots, w_n) = (w_i)_{i=0}^n$, která jsou přiřazena odpovídajícím řídicím bodům $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. Potom čísla w_0, w_1, \dots, w_n označujeme jako *váhy řídicích bodů*. \square

Poznámka: V souladu s terminologií zavedenou v počítačové grafice budeme nadále termínem *váhy řídicích bodů* rozumět posloupnost vah $W = (w_0, w_1, \dots, w_n) = (w_i)_{i=0}^n$ řídicích bodů a budeme je i stejně označovat, tj. $W = (w_0, w_1, \dots, w_n) = (w_i)_{i=0}^n$.

- **Definice 2.5 – Racionální bázové funkce.** Nechť jsou dány váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$. Potom jsou racionální bázové funkce $R_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, $u \in [a, b]$, stupně p definovány následovně:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j}, \quad (2.3)$$

kde $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce dle (2.1). \square

- **Definice 2.6 – NURBS křivka.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$. Nechť je dále dán uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$, $u_0 = a$, $u_m = b$, $a, b \in R$, a stupeň p . Potom je NURBS křivka $\mathbf{C}(u)$ stupně p dána následující vektorovou rovnicí:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)\mathbf{P}_i, \quad u \in [a, b], \quad (2.4)$$

kde $R_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou racionální bázové funkce dle (2.3). \square

- **Věta 2.1 – Počet uzlových roztečí uzlového vektoru.** Při daném počtu $n + 1$ řídicích bodů a daném stupni p je počet m uzlových roztečí uzlového vektoru roven

$$m = n + p + 1. \quad (2.5)$$

Důkaz: Obecný tvar souřadnicové funkce z vektorové rovnice $\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u), z(u))$, $u \in [a, b]$, polynomiální křivky stupně p je

$$x(u), \text{ resp. } y(u), \text{ resp. } z(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_pu^p = \sum_{i=0}^p a_iu^i, \quad (2.6)$$

kde koeficienty a_0, a_1, \dots, a_p jsou reálné konstanty. Je-li $a_p \neq 0$, vyjadřuje (2.6) křivku stupně p , k jejíž konstrukci je třeba zadat $p + 1$ geometrických podmínek – zde řídicích bodů, které vedou k určení $p + 1$ koeficientů a_0, a_1, \dots, a_p . Daným počtem $n + 1$ řídicích bodů lze tedy určit křivku stupně nejvýše n . Potom je $N_{n,p}(u)$ B-spline bázová funkce stupně p , která je asociována s posledním řídicím bodem \mathbf{P}_n . Protože každá B-spline bázová funkce stupně $p > 0$ je lineární kombinací dvou B-spline bázových funkcí stupně $p - 1$, musí být $N_{n,p}(u)$ nenulová na uzlové rozteči $[u_n, u_{n+p+1}]$, viz vlastnost 2.1 níže. Vzhledem k tomu, že $N_{n,p}(u)$ je poslední B-spline bázovou funkcí, musí být uzel u_{n+p+1} posledním uzlem uzlového vektoru, tedy u_m . Z toho vyplývá $m = n + p + 1$. \square

Při konstrukci B-spline, resp. NURBS křivky postupujeme následovně:

- Pro zadaný uzlový vektor vyjádříme $n + 1$ B-spline bázových funkcí p -tého stupně podle rekurentního vztahu (2.1).
- V případě, že jsou všechny váhy řídicích bodů jednotkové (nebo stejné), je výslednou křivkou B-spline křivka s vektorovou rovnicí (2.2).
- Je-li alespoň jedna váha odlišná od ostatních, vyjádříme racionální bázové funkce dle (2.3).
- Je-li alespoň jedna váha odlišná od ostatních, je výslednou křivkou NURBS křivka s vektorovou rovnicí (2.4).

Příklad konstrukce konkrétní aproximační B-spline i NURBS křivky je uveden v Příloze A. Zdrojový kód algoritmu je k dispozici v [12].

2.2 Důležité vlastnosti bazových funkcí a NURBS křivek

Vlastnosti B-spline, resp. racionálních bazových funkcí významným způsobem ovlivňují tvar výsledné B-spline, resp. NURBS křivky. Uvedme si zde ty nejdůležitější. Předpokládáme stupeň p a uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$.

Vlastnost 2.1 B-spline bazová funkce $N_{i,p}(u)$, resp. racionální bazová funkce $R_{i,p}(u)$ je nenulová pouze na $p + 1$ uzlových roztečích. Konkrétně se jedná o interval $[u_i, u_{i+p+1})$.

Tato vlastnost vyplývá ze skutečnosti, že B-spline bazová funkce p -tého stupně je lineární kombinací dvou B-spline bazových funkcí stupně $p - 1$, jak můžeme sledovat ve schématu výpočtu v tab. 2.1. Zde jsou červenou barvou vyznačeny všechny B-spline bazové funkce a uzlové rozteče, které se podílejí na konstrukci $N_{2,3}(u)$ ¹⁾. Tato vlastnost je označována jako *lokální podpora*, neboť změnou polohy řídicího bodu \mathbf{P}_i se změní tvar části křivky odpovídající pouze intervalu $u \in [u_i, u_{i+p+1})$, zatímco mimo tento interval zůstane tvar křivky zachován.

Vlastnost 2.2 Na libovolné uzlové rozteči $[u_i, u_{i+1})$ je nejvýše $p + 1$ B-spline, resp. racionálních bazových funkcí p -tého stupně nenulových.

Tato vlastnost je důsledkem skutečnosti, že každá B-spline bazová funkce nultého stupně $N_{i,0}(u)$ je jednotková pouze na uzlové rozteči $[u_i, u_{i+1})$, ale na ostatních uzlových roztečích je nulová. Ve schématu v tab. 2.2 je červenou barvou vyznačena uzlová rozteč $[u_4, u_5)$, na které je jednotková $N_{4,0}(u)$ a všechny B-spline bazové funkce, do jejichž konstrukce funkce $N_{4,0}(u)$ zasahuje, a jsou tudíž na $[u_4, u_5)$ nenulové.

Tab. 2.1: Lokální podpora bazových funkcí

uzlová rozteč	$N_{i,0}$	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	$N_{i,3}$
$[u_0, u_1)$	$N_{0,0}$			
$[u_1, u_2)$	$N_{1,0}$	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$	
$[u_2, u_3)$	$N_{2,0}$	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	$N_{0,3}$
$[u_3, u_4)$	$N_{3,0}$	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$	$N_{1,3}$
$[u_4, u_5)$	$N_{4,0}$	$N_{3,1}$	$N_{3,2}$	$N_{2,3}$
$[u_5, u_6)$	$N_{5,0}$	$N_{4,1}$	$N_{4,2}$	$N_{3,3}$
$[u_6, u_7)$	$N_{6,0}$	$N_{5,1}$	$N_{5,2}$	$N_{4,3}$
$[u_7, u_8)$	$N_{7,0}$	$N_{6,1}$	$N_{6,2}$	$N_{5,3}$
$[u_8, u_9)$	$N_{8,0}$	$N_{7,1}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tab. 2.2: Nenulové bazové funkce na uzlové rozteči $[u_4, u_5)$

uzlová rozteč	$N_{i,0}$	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	$N_{i,3}$
$[u_0, u_1)$	$N_{0,0}$			
$[u_1, u_2)$	$N_{1,0}$	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$	
$[u_2, u_3)$	$N_{2,0}$	$N_{1,1}$	$N_{1,2}$	$N_{0,3}$
$[u_3, u_4)$	$N_{3,0}$	$N_{2,1}$	$N_{2,2}$	$N_{1,3}$
$[u_4, u_5)$	$N_{4,0}$	$N_{3,1}$	$N_{3,2}$	$N_{2,3}$
$[u_5, u_6)$	$N_{5,0}$	$N_{4,1}$	$N_{4,2}$	$N_{3,3}$
$[u_6, u_7)$	$N_{6,0}$	$N_{5,1}$	$N_{5,2}$	$N_{4,3}$
$[u_7, u_8)$	$N_{7,0}$	$N_{6,1}$	$N_{6,2}$	$N_{5,3}$
$[u_8, u_9)$	$N_{8,0}$	$N_{7,1}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Vlastnosti 2.1 a 2.2 vyjadřují *plnou podporu* křivky bazovými funkcemi na uzlových roztečích, na kterých je právě $p + 1$ B-spline, resp. racionálních bazových funkcí nenulových.

Část křivky, která je bazovými funkcemi plně podporována, tj. příslušející uzlovým roztečím, na nichž je právě $p + 1$ bazových funkcí nenulových, budeme nazývat *aktivní část křivky*, příslušné

¹⁾V tabulkách a obrázcích je použito stručné označení bazových funkcí $N_{i,p}$ namísto $N_{i,p}(u)$.

segmenty křivky, resp. uzlové rozteče, resp. uzly budeme nazývat *aktivní segmenty*, resp. *aktivní uzlové rozteče*, resp. *aktivní uzly*.

Pokud existují uzlové rozteče, na kterých je méně než $p+1$ bázových funkcí nenulových, ignoruje se odpovídající část křivky, neboť tato zde není svými bázovými funkcemi plně podporována (viz část 2.3.1 Otevřená křivka a 2.3.3 Uzavřená křivka). Takovou část křivky, odpovídající segmenty, uzlové rozteče a uzly budeme označovat jako *pasivní*.

Vlastnost 2.3 Jestliže jsou všechny váhy rovny stejné kladné konstantě (nejčastěji $w_i = 1$, $i = 0, \dots, n$), jsou racionální bázové funkce na aktivních uzlových roztečích rovny B-spline bázovým funkcím.

B-spline bázové funkce jsou potom speciálním případem racionálních bázových funkcí a B-spline křivka je ve své aktivní části totožná s NURBS křivkou. Protože se na pasivních uzlových roztečích B-spline a racionální bázové funkce liší, liší se i pasivní části B-spline a NURBS křivky, viz část 2.3.1 Otevřená křivka a 2.3.3 Uzavřená křivka.

Vlastnost 2.4 B-spline, resp. racionální bázové funkce jsou totálně pozitivní.

Tato vlastnost znamená, že $N_{i,p}(u)$, resp. $R_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou na svém oboru parametrizace $u \in [a, b]$ nezáporné pro všechna i , p a n .

Vlastnost 2.5 Součet B-spline bázových funkcí je pro libovolnou aktivní uzlovou rozteč jednotkový.

Na uzlových roztečích odpovídajících pasivní části křivky není součet B-spline bázových funkcí jednotkový. Naproti tomu součet racionálních bázových funkcí je jednotkový na libovolné uzlové rozteči, bez ohledu na aktivní nebo pasivní části křivky. Podrobněji viz část 2.3.1 Otevřená křivka a 2.3.3 Uzavřená křivka.

Vlastnost 2.6 Totální variace B-spline, resp. racionálních bázových funkcí je nanejvýš rovna totální variaci původní aproximované funkce, tj. řídicího polygonu.

Důsledkem této vlastnosti (označované jako variation diminishing property) je vyhlazovací efekt B-spline, resp. NURBS reprezentace – výsledná B-spline, resp. NURBS křivka neosciluje více než její řídicí polygon. Konkrétně rovinná B-spline, resp. NURBS křivka nemá více průsečíků s libovolnou přímkou než její řídicí polygon a prostorová B-spline, resp. NURBS křivka nemá více průsečíků s libovolnou rovinou než její řídicí polygon.

Vlastnost 2.7 NURBS křivka leží celá v konvexním obalu svého řídicího polygonu; bod NURBS křivky $\mathbf{C}(\alpha)$, $\alpha \in [u_i, u_{i+1})$, leží v konvexním obalu dílčího řídicího polygonu $(\mathbf{P}_j)_{j=i-p}^i$.

Tato vlastnost je důsledkem vlastností 2.4 a 2.5.

Vlastnost 2.8 NURBS křivka je invariantní vůči projektivním transformacím, B-spline křivka je invariantní vůči afinním transformacím.

Tato vlastnost je velmi důležitá pro přímou aplikaci v CA systémech, neboť znamená, že lze dosáhnout stejného výsledku, pokud je transformace aplikována přímo na křivku zadanou původními řídicími body nebo pokud konstruujeme křivku zadanou řídicími body, které jsou podrobeny stejné transformaci.

Vlastnost 2.9 k -tá derivace B-spline bázové funkce je dána vztahem (viz [17], str. 62)

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p}{p-k} \left[\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}^{(k)}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)}(u) \right], \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (2.7)$$

Vlastnost 2.10 Uvnitř každé uzlové rozteče existují všechny derivace B-spline, resp. racionálních báзовých funkcí (prvních p derivací je nenulových). Na rozhraní uzlových roztečí, tj. v uzlech, jsou B-spline, resp. racionální báзовé funkce $p - k$ spojitě diferencovatelné, kde k je násobnost uzlu.

Tato vlastnost znamená, že křivka stupně p definovaná na uzlovém vektoru se všemi uzly jednoduchými je C^{p-1} spojitá a že zvyšování násobnosti uzlu vede ke snížení řádu spojitosti báзовých funkcí v tomto uzlu, a tím i ke snížení řádu spojitosti výsledné křivky.

Vlastnost 2.11 k -tou derivací $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ B-spline křivky lze vyjádřit rekurentním vzorcem (viz [17], str. 97). Označíme-li $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^{(0)}$, lze B-spline křivku $\mathbf{C}(u)$ psát jako

$$\mathbf{C}(u) = \mathbf{C}^{(0)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^{(0)} \quad (2.8)$$

a její k -tou derivací jako

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) \mathbf{P}_i^{(k)}, \quad (2.9)$$

kde

$$\mathbf{P}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{P}_i, & k = 0, \\ \frac{p-k+1}{u_{i+p+1}-u_{i+k}} [\mathbf{P}_{i+1}^{(k-1)} - \mathbf{P}_i^{(k-1)}], & k > 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

$N_{i,p-k}(u)$ jsou B-spline báзовé funkce stupně $p - k$ definované na modifikovaném uzlovém vektoru $U^{(k)}$, který je roven původnímu uzlovému vektoru U zkrácenému o k počátečních a koncových uzlů.

Vlastnost 2.12 Napíšeme-li NURBS křivku jako

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \frac{\mathbf{A}(u)}{w(u)}, \quad (2.11)$$

je její první derivace

$$\mathbf{C}'(u) = \frac{w(u) \mathbf{A}'(u) - w'(u) \mathbf{A}(u)}{w(u)^2} = \frac{\mathbf{A}'(u) - w'(u) \mathbf{C}(u)}{w(u)}, \quad (2.12)$$

neboť podle (2.11) je $\mathbf{A}(u) = w(u) \mathbf{C}(u)$. k -tou derivací $\mathbf{C}^{(k)}(u)$ lze potom vyjádřit rekurentním vzorcem (viz [17], str. 125)

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \frac{1}{w(u)} \left[\mathbf{A}^{(k)}(u) - \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u) \mathbf{C}^{(k-i)}(u) \right], \quad (2.13)$$

kde derivace $\mathbf{A}^{(k)}(u)$ a $w^{(i)}(u)$ vypočteme podle (2.9).

2.3 Druhy B-spline a NURBS křivek

Skutečnost, že se uzel v uzlovém vektoru může opakovat, má zásadní vliv na tvar B-spline a racionálních báзовých funkcí, a tím i na tvar výsledné B-spline a NURBS křivky. Podle vzájemného vztahu mezi tvarem uzlového vektoru a řídicího polygonu rozlišujeme tři druhy B-spline, resp. NURBS křivek: *otevřenou*, *ukotvenou* a *uzavřenou*.

2.3.1 Otevřená křivka

Uzlový vektor otevřené křivky je tvořen neklesající posloupností uzlů:

$$U = (a = u_0 \leq u_1 \leq u_2, \dots, \leq u_m = b). \quad (2.14)$$

Podmínka plné podpory básových funkcí není zajištěna v celém rozsahu parametru $u \in [a, b]$, ale pouze na intervalu $[u_p, u_{m-p}]$, kde je právě $p + 1$ básových funkcí nenulových. Pasivní segmenty křivky příslušející hodnotám parametru z pasivních roztečí $[a, u_p]$ a $(u_{m-p}, b]$ se ignorují (viz vlastnost 2.2). Aktivní segmenty křivky příslušejí aktivním uzlovým roztečím a oborem parametrizace otevřené křivky je pouze interval $[u_p, u_{m-p}]$. Výsledná křivka neprochází žádným zadaným řídicím bodem, proto je označována jako otevřená (*open*).

V tab. 2.3 je uvedeno analytické vyjádření B-spline básových funkcí nultého až 3. stupně a racionálních básových funkcí 3. stupně pro $n = 3$ a uzlový vektor ve tvaru

$$U = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4). \quad (2.15)$$

Váhy všech řídicích bodů pro racionální funkce uvažujeme jednotkové. Průběh básových funkcí z tab. 2.3 je nakreslen na obr. 2.1.²

Příklad otevřené B-spline křivky 3. stupně definované na uzlovém vektoru (2.15) zadané čtyřmi řídicími body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ a \mathbf{P}_3 je uveden na obr. 2.2. Na obr. 2.3 je nakreslen příklad NURBS křivky zadané stejným stupněm, stejným uzlovým vektorem a stejným řídicím polygonem. Rozdíl je pouze v tom, že uvažujeme váhy všech řídicích bodů jednotkové a NURBS křivku parametrizujeme racionálními básovými funkcemi. Na obrázcích jsou nakresleny všechny (aktivní i pasivní) segmenty křivek. Aktivní část křivky je vyznačena tlustou (modrou) čarou, pasivní části jsou nakresleny tenkou čarou. Jednotlivé segmenty křivky jsou odlišeny barevně.

Povšimněme si několika významných skutečností, které jsou patrné z analytického vyjádření (tab. 2.3) a průběhu básových funkcí na obr. 2.1, z průběhu otevřené B-spline křivky na obr. 2.2 a z průběhu otevřené NURBS křivky na obr. 2.3.

- Všechny B-spline básové funkce určitého stupně mají stejný průběh, pouze jsou posunuty vždy o jednu uzlovou rozteč.

Pro uniformní uzlový vektor vyplývá tato vlastnost ze samotného principu konstrukce B-spline básových funkcí jako lineární kombinace dvou B-spline básových funkcí nižšího stupně. Je zřejmé, že s výpočtem každého dalšího vyššího stupně B-spline básových funkcí se zužuje aktivní část oboru parametrizace výsledné křivky.

- B-spline a racionální básové funkce se liší pouze na pasivních uzlových roztečích.

Tam také není součet B-spline básových funkcí jednotkový. Součet racionálních básových funkcí je díky zavedení vah jednotkový na všech uzlových roztečích. V tab. 2.3 můžeme tuto vlastnost sledovat v řádcích s kontrolními součty.

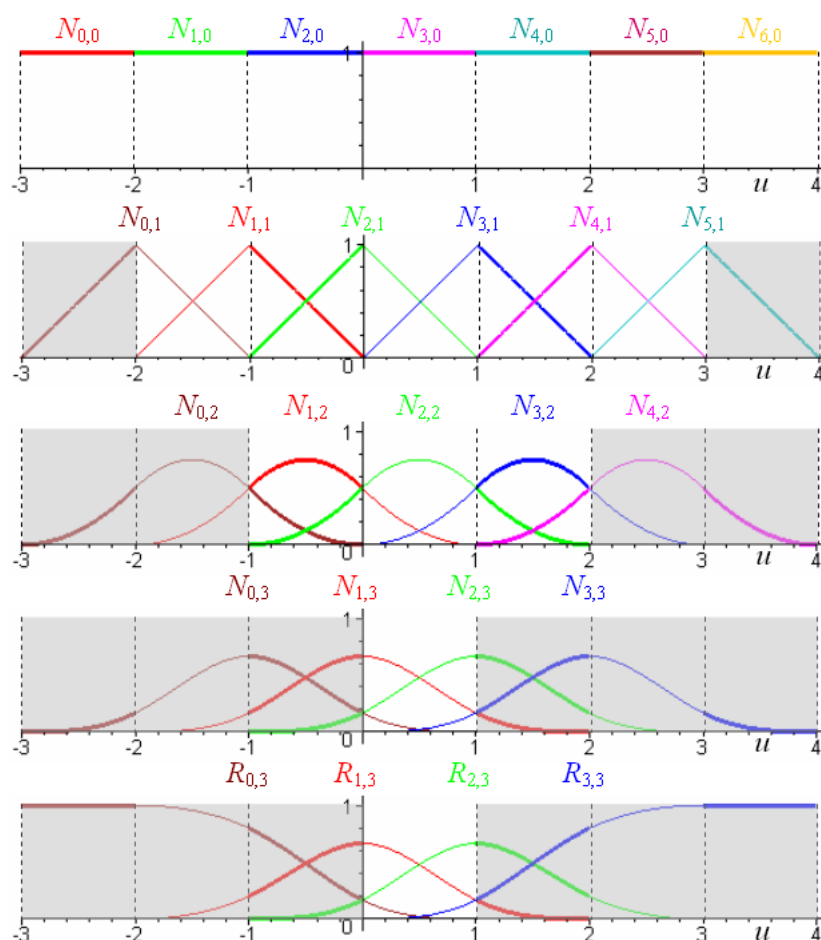
- Krajiní body otevřené B-spline křivky mají souřadnice $(0, 0)$, protože všechny B-spline básové funkce jsou pro $u = u_0$ a $u = u_m$ nulové. Krajiní body otevřené NURBS křivky jsou totožné s krajiními body řídicího polygonu, protože racionální básové funkce s nimi asociované nabývají pro $u = u_0$ a $u = u_m$ hodnoty jedna.

Tyto skutečnosti platí pro rovinnou i prostorovou otevřenou B-spline, resp. NURBS křivku obecně, nezáleží ani na volbě řídicího polygonu, uzlového vektoru nebo stupně křivky. Tvar křivek v aktivní části tím ale ovlivněn není.

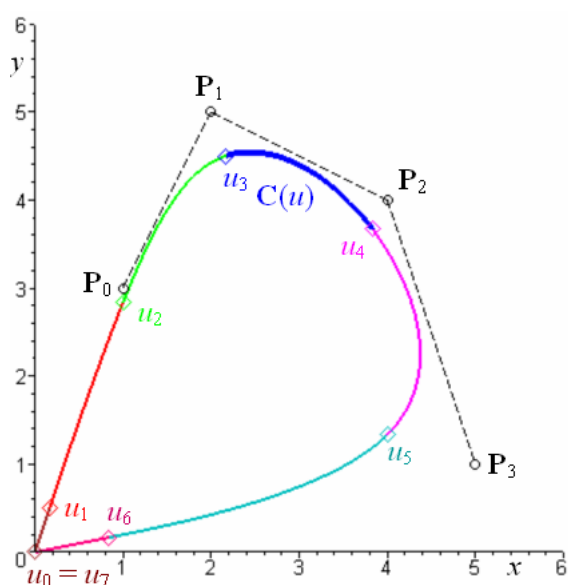
²Při zobrazování průběhů básových funkcí jsou v celé publikaci dodržována následující pravidla: jednotlivé básové funkce jsou odlišeny barevně, jednotlivé segmenty básových funkcí jsou odlišeny tloušťkou čáry a jednotlivé uzlové rozteče jsou odděleny čárkovanou čarou. Pasivní uzlové rozteče jsou vyznačeny šedou barvou.

Tab. 2.3: B-spline bázové funkce nultého až 3. stupně a racionální bázové funkce 3. stupně;
 $n = 3$, $U = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$,
 $W = (w_0, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 1, 1)$

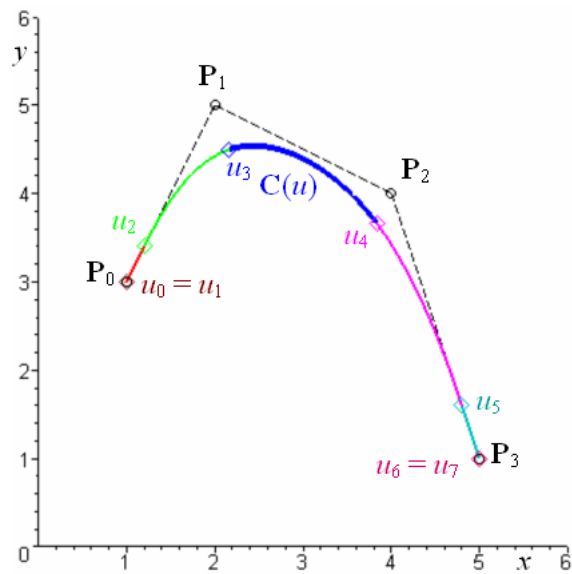
	$[u_0, u_1] = [-3, -2]$	$[u_1, u_2] = [-2, -1]$	$[u_2, u_3] = [-1, 0]$	$[u_3, u_4] = [0, 1]$	$[u_4, u_5] = [1, 2]$	$[u_5, u_6] = [2, 3]$	$[u_6, u_7] = [3, 4]$
$N_{0,0}$	1	0	0	0	0	0	0
$N_{1,0}$	0	1	0	0	0	0	0
$N_{2,0}$	0	0	1	0	0	0	0
$N_{3,0}$	0	0	0	1	0	0	0
$N_{4,0}$	0	0	0	0	1	0	0
$N_{5,0}$	0	0	0	0	0	1	0
$N_{6,0}$	0	0	0	0	0	0	1
$\sum_{i=0}^6 N_{i,0}$	1	1	1	1	1	1	1
$N_{0,1}$	$u+3$	$-u-1$	0	0	0	0	0
$N_{1,1}$	0	$u+2$	$-u$	0	0	0	0
$N_{2,1}$	0	0	$u+1$	$-u+1$	0	0	0
$N_{3,1}$	0	0	0	u	$-u+2$	0	0
$N_{4,1}$	0	0	0	0	$u-1$	$-u+3$	0
$N_{5,1}$	0	0	0	0	0	$u-2$	$-u+4$
$\sum_{i=0}^5 N_{i,1}$	$u+3$	1	1	1	1	1	$-u+4$
$N_{0,2}$	$\frac{1}{2}(u+3)^2$	$-u^2-3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^2$	0	0	0	0
$N_{1,2}$	0	$\frac{1}{2}(u+2)^2$	$-u^2-u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	0	0	0
$N_{2,2}$	0	0	$\frac{1}{2}(u+1)^2$	$-u^2+u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(u-2)^2$	0	0
$N_{3,2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}u^2$	$-u^2+3u-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}(u-3)^2$	0
$N_{4,2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(u-1)^2$	$-u^2+5u-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}(u-4)^2$
$\sum_{i=0}^4 N_{i,2}$	$\frac{1}{2}(u+3)^2$	$-\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2}$	1	1	1	$-\frac{1}{2}u^2+2u-1$	$\frac{1}{2}(u-4)^2$
$N_{0,3}$	$\frac{1}{6}(u+3)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-\frac{5}{2}u^2-\frac{7}{2}u-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}(-u+1)^3$	0	0	0
$N_{1,3}$	0	$\frac{1}{6}(u+2)^3$	$-\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}(-u+2)^3$	0	0
$N_{2,3}$	0	0	$\frac{1}{6}(u+1)^3$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}u^3-\frac{5}{2}u^2+\frac{7}{2}-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}(-u+3)^3$	0
$N_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$-\frac{1}{2}u^3+2u^2-2u+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}u^3-4u^2+10u-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{6}(-u+4)^3$
$\sum_{i=0}^3 N_{i,3}$	$\frac{1}{6}(u+3)^3$	$-\frac{1}{3}u^3-\frac{3}{2}u^2-\frac{3}{2}u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}u^3+1$	1	$-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}u^3-\frac{5}{2}u^2+\frac{11}{2}u-\frac{17}{6}$	$\frac{1}{6}(-u+4)^3$
$R_{0,3}$	1	$\frac{3u^3+15u^2+21u+5}{2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{3u^3+3u^2-3u+1}{u^3+6}$	$\frac{1}{6}(-u+1)^3$	0	0	0
$R_{1,3}$	0	$\frac{(u+2)^3}{-2u^3+9u^2+9u-3}$	$\frac{-3u^3-6u^2+4}{(u+1)^3}$	$\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{(u-2)^3}{u^3-3u^2+3u-7}$	0	0
$R_{2,3}$	0	0	$\frac{(u+1)^3}{u^3+6}$	$-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$-\frac{3u^3+15u^2-21u+5}{u^3-3u^2+3u-7}$	$-\frac{(u-3)^3}{3u^3-15u^2+33u-17}$	0
$R_{3,3}$	0	0	0	$\frac{1}{6}u^3$	$\frac{3u^3-12u^2+12u-4}{u^3-3u^2+3u-7}$	$\frac{3u^3-24u^2+60u-44}{2u^3-15u^2+33u-17}$	1
$\sum_{i=0}^3 R_{i,3}$	1	1	1	1	1	1	1



Obr. 2.1: B-spline bázové funkce nultého až 3. stupně a racionální bázové funkce 3. stupně; $n = 3$, $U = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, $W = (1, 1, 1, 1)$



Obr. 2.2: Otevřená B-spline křivka 3. stupně; $U = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$



Obr. 2.3: Otevřená NURBS křivka 3. stupně; $U = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, $W = (1, 1, 1, 1)$

- Uzlový vektor otevřené B-spline, resp. NURBS křivky obsahuje na začátku i na konci p pasivních uzlových roztečí, kterým odpovídá p pasivních částí křivky.

Pokud by pasivní uzlové rozteče měly nulovou délku, byla by nulová délka i pasivních částí křivky, a výsledná křivka by obsahovala pouze aktivní části. To je princip konstrukce ukotvené křivky, kterou se budeme zabývat dále.

Mezi nejznámější otevřené křivky patří křivka 3. stupně tvořená jediným segmentem – tzv. *Coonsova kubika*.

- **Věta 2.2 – Coonsova kubika.** Nechť jsou dány čtyři řídicí body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ a \mathbf{P}_3 , váhy w_0, w_1, w_2 a w_3 rovny stejné kladné konstantě, uniformní uzlový vektor (2.15) a stupeň $p = 3$. Potom je aktivní část NURBS křivky (2.4) na intervalu $u \in [0, 1]$ *Coonsova kubika* s následující vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^3 C_i(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [0, 1], \quad (2.16)$$

kde

$$\begin{aligned} C_0(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3, \\ C_1(u) &= \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4), \\ C_2(u) &= \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1), \\ C_3(u) &= \frac{1}{6}u^3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

jsou Coonsovy polynomy.

Důkaz: B-spline, resp. racionální bázové funkce pro $U = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$, $p = 3$, $n = 3$ a $w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = 1$ jsou uvedeny v tab. 2.3. Je zřejmé, že zde existuje jediná aktivní uzlová rozteč

$$[u_p, u_{m-p}] = [u_3, u_4] = [0, 1],$$

na které je zajištěna plná podpora B-spline, resp. racionálních bázových funkcí. Při stejných vahách jsou B-spline i racionální bázové funkce na této aktivní rozteči rovny Coonsovým polynomům. \square

Průběh Coonsových polynomů (tj. B-spline i racionálních bázových funkcí pro $u \in [0, 1]$ z obr.2.1) je ve větším měřítku zobrazen na obr. 2.4. Coonsova kubika definovaná stejným řídicím polygonem jako na obr. 2.2, resp. obr. 2.3 je nakreslena na obr. 2.5. Je zřejmé, že tato Coonsova kubika je právě aktivní část B-spline, resp. NURBS křivky z obr. 2.2, resp. obr. 2.3.

Vektorová funkce

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^3 C'_i(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [0, 1], \quad (2.18)$$

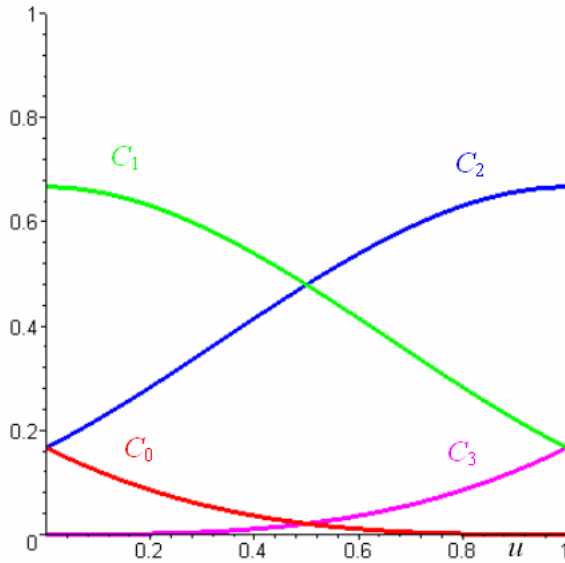
resp.

$$\mathbf{C}''(u) = \sum_{i=0}^3 C''_i(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [0, 1] \quad (2.19)$$

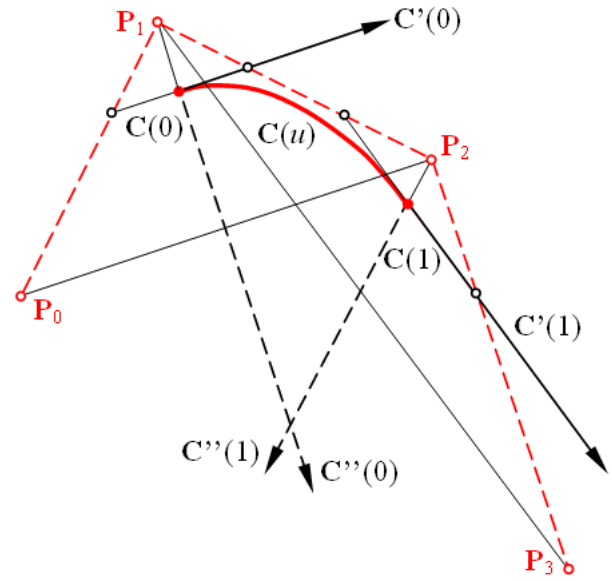
vyjadřuje pro $\alpha \in [0, 1]$ tečný vektor $\mathbf{C}'(\alpha)$, resp. vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(\alpha)$ Coonsovy kubiky $\mathbf{C}(u)$ v jejím bodě α . $C'_i(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$, resp. $C''_i(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$, je první, resp. druhá derivace Coonsových polynomů (2.17), viz tab. 2.4.

Tab. 2.4: Coonsovy polynomy a jejich derivace

$C_i(u)$	$C_i(0)$	$C_i(1)$	$C'_i(u)$	$C'_i(0)$	$C'_i(1)$	$C''_i(u)$	$C''_i(0)$	$C''_i(1)$
$C_0(u) = -\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$C'_0(u) = -\frac{1}{2}u^2 + u - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$C''_0(u) = -u + 1$	1	0
$C_1(u) = \frac{1}{2}u^3 - u^2 + \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$C'_1(u) = \frac{3}{2}u^2 - 2u$	0	$-\frac{1}{2}$	$C''_1(u) = 3u - 2$	-2	1
$C_2(u) = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$C'_2(u) = -\frac{3}{2}u^2 + u + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$C''_2(u) = -3u + 1$	1	-2
$C_3(u) = \frac{1}{6}u^3$	0	$\frac{1}{6}$	$C'_3(u) = \frac{1}{2}u^2$	0	$\frac{1}{2}$	$C''_3(u) = u$	0	1



Obr. 2.4: Coonsovy polynomy



Obr. 2.5: Vlastnosti Coonsovy kubiky

Coonsova kubika má zajímavé vlastnosti, které jsou zachyceny na obr. 2.5. Pokud do rovnic (2.16), (2.18) a (2.19) dosadíme funkční hodnoty Coonsových polynomů a jejich prvních dvou derivací pro $u = 0$ a $u = 1$ z tab. 2.4 a vztahy vhodně upravíme tak, aby byla zřejmá jejich geometrická interpretace, obdržíme následující soubor vlastností Coonsovy kubiky.

Vlastnost 2.13 Počáteční bod $\mathbf{C}(0)$, resp. koncový bod $\mathbf{C}(1)$ Coonsovy kubiky leží v jedné třetině těžnice trojúhelníka $\triangle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ sestrojené z řídicího bodu \mathbf{P}_1 , resp. v jedné třetině těžnice trojúhelníka $\triangle \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ sestrojené z řídicího bodu \mathbf{P}_2 :

$$\mathbf{C}(0) = \frac{1}{6}\mathbf{P}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_1 \right],$$

resp.

$$\mathbf{C}(1) = \frac{1}{6}\mathbf{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) - \mathbf{P}_2 \right].$$

Vlastnost 2.14 Tečný vektor $\mathbf{C}'(0)$ v počátečním bodě Coonsovy kubiky, resp. tečný vektor $\mathbf{C}'(1)$ v koncovém bodě Coonsovy kubiky je rovnoběžný se stranou $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ trojúhelníka $\triangle \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ a jeho velikost je rovna polovině délky strany $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, resp. je rovnoběžný se stranou $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ trojúhelníka $\triangle \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ a jeho velikost je rovna polovině délky strany $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$:

$$\mathbf{C}'(0) = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0), \text{ resp. } \mathbf{C}'(1) = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1).$$

Vlastnost 2.15 Tečna v počátečním bodě Coonsovy kubiky protíná rameno $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, resp. rameno $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ řídicího polygonu v jedné třetině vzdálenosti $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$, resp. $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|$ od bodu \mathbf{P}_1 . Tečna v koncovém bodě Coonsovy kubiky protíná rameno $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, resp. rameno $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ řídicího polygonu v jedné třetině vzdálenosti $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|$, resp. $|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3|$ od bodu \mathbf{P}_2 .

Vlastnost 2.16 Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(0)$ v počátečním bodě Coonsovy kubiky, resp. vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(1)$ v koncovém bodě Coonsovy kubiky je dán vektorovým součtem vektorů $\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0}$ a $\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$, resp. vektorovým součtem vektorů $\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}$ a $\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3}$:

$$\mathbf{C}''(0) = \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1) + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1),$$

resp.

$$\mathbf{C}''(1) = \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) + (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

Jak již bylo uvedeno, pro $n + 1$ zadaných řídicích bodů je možné konstruovat křivku stupně nejvýše n , tedy $p \leq n$. Zatím jsme uvažovali $p = n$, kdy výsledná B-spline, resp. NURBS křivka obsahovala jediný aktivní segment. Jestliže je stupeň p menší než počet ramen n řídicího polygonu, tedy $p < n$, vznikne křivka, která je tvořena více než jedním aktivním segmentem. Takové křivce říkáme *segmentovaná křivka*.

Příklad B-spline a racionálních bázových funkcí segmentované otevřené křivky pro $n = 6$, $p = 3$ a uniformní uzlový vektor $U = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ je uveden na obr. 2.6, odpovídající křivky jsou zobrazeny na obr. 2.7. B-spline křivka je nakreslena červenou barvou. Řídicí body NURBS křivky, která je nakreslena modrou barvou, mají váhy $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$. Aktivní části křivek jsou nakresleny tlustou čarou, jednotlivé (aktivní i pasivní) segmenty jsou odděleny symbolem \diamond v barvě křivky.

Nejjednodušší variantou otevřené segmentované NURBS křivky je křivka 3. stupně známá jako *Coonsův kubický B-spline*.

■ **Definice 2.7 – Coonsův kubický B-spline.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$, $n > 3$, stupeň $p = 3$, váhy $(w_i)_{i=0}^n$ rovny stejné kladné konstantě a uniformní uzlový vektor

$$U = (u_i)_{i=0}^m = (-3, -2, \dots, m - 3).$$

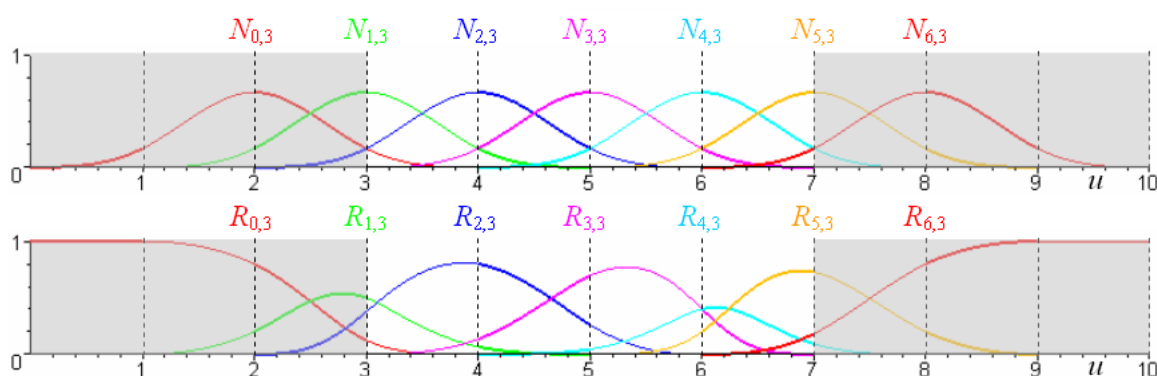
Potom se aktivní část NURBS křivky (2.4) na intervalu $u \in [u_3, u_{m-3}]$ nazývá *Coonsův kubický B-spline*. \square

Je zřejmé, že aktivní část otevřené B-spline křivky zobrazené na obr. 2.7 tlustou červenou čarou je právě Coonsův kubický B-spline. Abychom si ukázali důležité vlastnosti Coonsova kubického B-spline, je aktivní část otevřené B-spline křivky z obr. 2.7 nakreslena samostatně na obr. 2.8 s barevným odlišením jednotlivých segmentů.

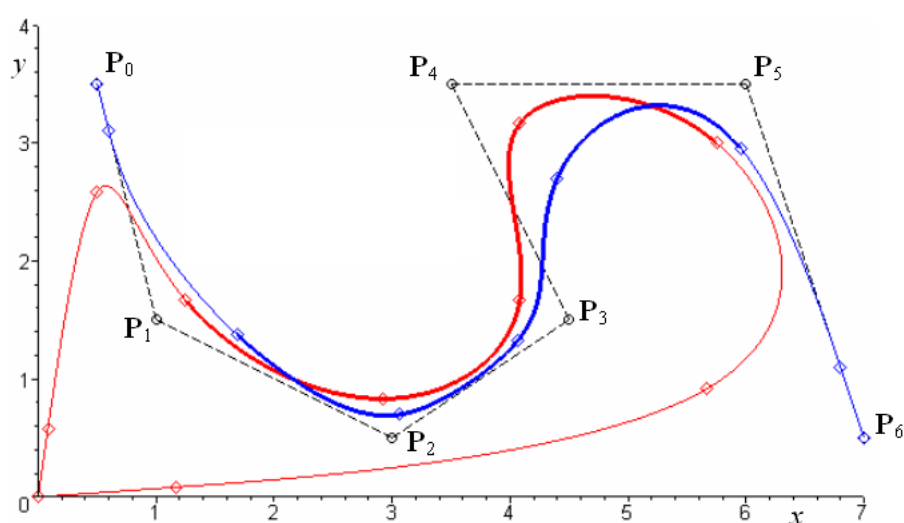
Vlastnost 2.17 Aktivní segmenty Coonsova kubického B-spline jsou Coonsovy kubiky určené dílčím řídicím polygonem.

Konkrétně na obr. 2.8 je dílčí Coonsova kubika ${}^0\mathbf{C}(u)$ určena dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, kubika ${}^1\mathbf{C}(u)$ je určena dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$, kubika ${}^2\mathbf{C}(u)$ je určena dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5)$ a konečně kubika ${}^3\mathbf{C}(u)$ je určena dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6)$.

Vlastnost 2.18 Dílčí Coonsovy kubiky Coonsova kubického B-spline jsou C^2 spojitě napojené. Tato skutečnost plyne přímo z vlastnosti 2.10, která je obzvlášť dobře patrná na obr. 2.8 – aplikací vlastností 2.13 až 2.16 na jednotlivé dílčí řídicí polygony obdržíme ve společném krajním bodě dvou po sobě následujících dílčích Coonsových kubik totožné tečné vektory i totožné vektory druhých derivací.



Obr. 2.6: B-spline a racionální bázové funkce segmentované otevřené křivky 3. stupně; $n = 6$, $U = (0, 1, \dots, 10)$, váhy pro racionální funkce $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$



Obr. 2.7: Segmentovaná B-spline (červená) a NURBS (modrá) otevřená křivka 3. stupně; $n = 6$, $U = (0, 1, \dots, 10)$, váhy řídicích bodů NURBS křivky $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$

Vlastnost 2.19 Pro uniformní uzlový vektor s délkou uzlové rozteče Δu je krajní bod dílčí Coonsovy kubiky

$$\mathbf{C}(u_i) = \frac{1}{6}\mathbf{P}_{i-3} + \frac{2}{3}\mathbf{P}_{i-2} + \frac{1}{6}\mathbf{P}_{i-1}, \quad i = 3, \dots, m-3. \quad (2.20)$$

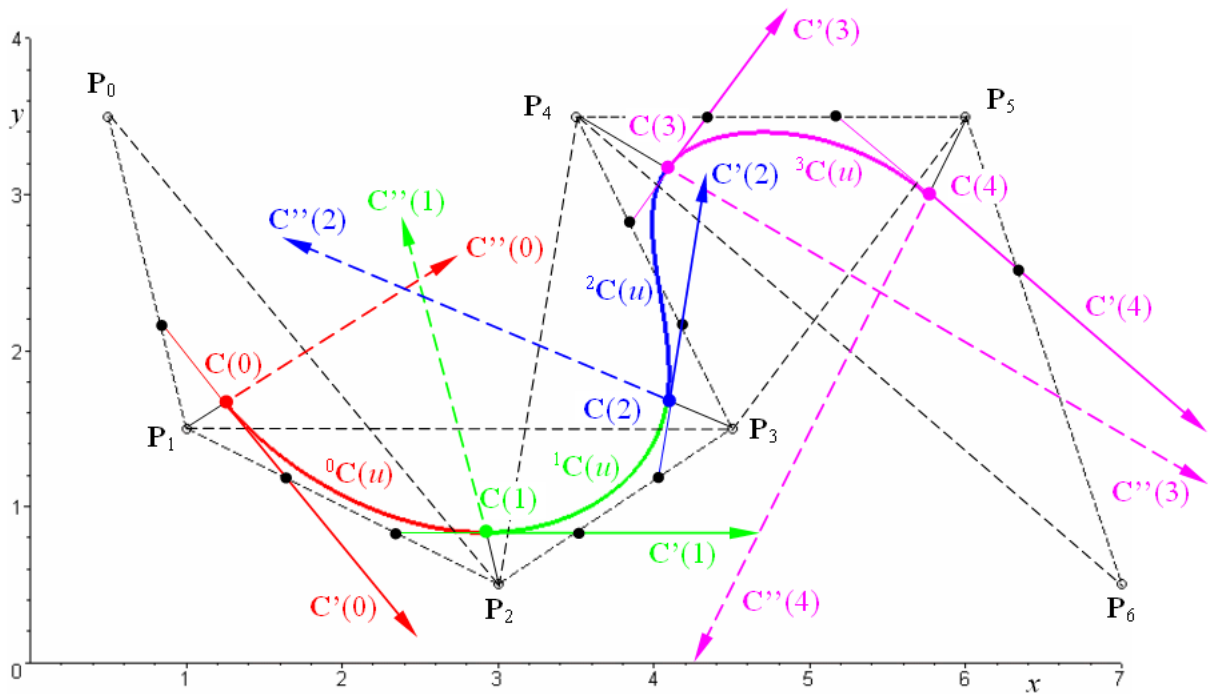
Tečný vektor v krajním bodě dílčí Coonsovy kubiky je roven

$$\mathbf{C}'(u_i) = \frac{1}{(\Delta u)^2}(\mathbf{P}_{i-1} - \mathbf{P}_{i-3}), \quad i = 3, \dots, m-3, \quad (2.21)$$

resp. vektor druhé derivace v krajním bodě dílčí Coonsovy kubiky roven

$$\mathbf{C}''(u_i) = \frac{1}{(\Delta u)^2}(\mathbf{P}_{i-3} - 2\mathbf{P}_{i-2} + \mathbf{P}_{i-1}), \quad i = 3, \dots, m-3, \quad (2.22)$$

viz také odvození (4.38) a (4.39), resp. (4.50) a (4.51).



Obr. 2.8: Coonsův kubický B-spline

2.3.2 Ukotvená křivka

Uzlový vektor ukotvené křivky obsahuje na začátku a na konci $(p + 1)$ násobné krajní uzly, vnitřní uzly opět tvoří neklesající posloupnost:

$$U = (u_0 = u_1 = \dots = u_p = a \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \dots \leq u_{m-p-1} \leq u_{m-p} = \dots = u_m = b). \quad (2.23)$$

Důsledkem opakujících se uzlů s násobností $p + 1$ vzniká na začátku a na konci uzlového vektoru p uzlových roztečí nulové délky. Pasivní segmenty ukotvené křivky se tedy redukují na bod (konkrétně na řídicí bod \mathbf{P}_0 na začátku křivky a na řídicí bod \mathbf{P}_n na konci křivky) a ukotvená křivka obsahuje pouze aktivní segmenty. Bázové funkce asociované s krajními body řídicího polygonu \mathbf{P}_0 , resp. \mathbf{P}_n dosahují pro $u = a$, resp. $u = b$ hodnoty jedna a ukotvená křivka vždy tyto krajní body interpoluje, ostatními řídicími body neprochází. Z tohoto důvodu je označována jako ukotvená (*clamped*). Speciálním případem ukotvené křivky tvořené jediným segmentem je *Bézierova křivka*.

■ **Věta 2.3 – Bézierova křivka.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$, $n \geq 0$, váhy $(w_i)_{i=0}^n$ rovny stejné kladné konstantě, uzlový vektor

$$U = (u_0, \dots, u_p, u_{m-p}, \dots, u_m) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \quad (2.24)$$

a stupeň $p = n$. Potom je aktivní část NURBS křivky (2.4) na intervalu $u \in [0, 1]$ *Bézierova křivka* s následující vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [0, 1], \quad (2.25)$$

kde

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.26)$$

jsou Bernsteinovy polynomy n -tého stupně.

Důkaz (pouze naznačíme): Pro $n = p$, $w_i = 1$, $i = 0, \dots, n$ a uzlový vektor (2.24) provedeme výpočet B-spline bázových funkcí nultého až p -tého stupně dle rekurentního vzorce (2.1) a obdržíme Bernsteinovy polynomy p -tého stupně. \square

V tab. 2.5 jsou uvedeny B-spline bázové funkce nultého až 3. stupně pro uzlový vektor $U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$, které jsou shodné s Bernsteinovými polynomy nultého až 3. stupně. Průběh těchto B-spline bázových funkcí je nakreslen na obr. 2.9. Příklad Bézierovy křivky 3. stupně (Bézierovy kubiky) zadané stejným řídicím polygonem jako Coonsova kubika z obr. 2.2 a obr. 2.3 je nakreslen na obr. 2.10.

Tab. 2.5: B-spline bázové funkce nultého až 3. stupně; $U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$
(Bernsteinovy polynomy nultého až 3. stupně)

uzlová rozteč	$N_{i,0}(u)$	$N_{i,1}(u)$	$N_{i,2}(u)$	$N_{i,3}(u)$
$[u_0, u_1] = [0, 0]$	$N_{0,0}(u) = 0$	$N_{0,1}(u) = 0$		
$[u_1, u_2] = [0, 0]$	$N_{1,0}(u) = 0$	$N_{1,1}(u) = 0$	$N_{0,2}(u) = 0$	$N_{0,3}(u) = (1 - u)^3$
$[u_2, u_3] = [0, 0]$	$N_{2,0}(u) = 0$	$N_{2,1}(u) = 1 - u$	$N_{1,2}(u) = (1 - u)^2$	$N_{1,3}(u) = 3u(1 - u)^2$
$[u_3, u_4] = [0, 1]$	$N_{3,0}(u) = 1$	$N_{3,1}(u) = u$	$N_{2,2}(u) = 2u(1 - u)^2$	$N_{2,3}(u) = 3u^2(1 - u)$
$[u_4, u_5] = [1, 1]$	$N_{4,0}(u) = 0$	$N_{4,1}(u) = 0$	$N_{3,2}(u) = u^2$	$N_{3,3}(u) = u^3$
$[u_5, u_6] = [1, 1]$	$N_{5,0}(u) = 0$	$N_{5,1}(u) = 0$	$N_{4,2}(u) = 0$	
$[u_6, u_7] = [1, 1]$	$N_{6,0}(u) = 0$			

Vzhledem k tomu, že Coonsova i Bézierova kubika jsou speciálními případy NURBS reprezentace, existuje mezi oběma kubikami vzájemný vztah (konverze), který je zachycen na obr. 2.11.

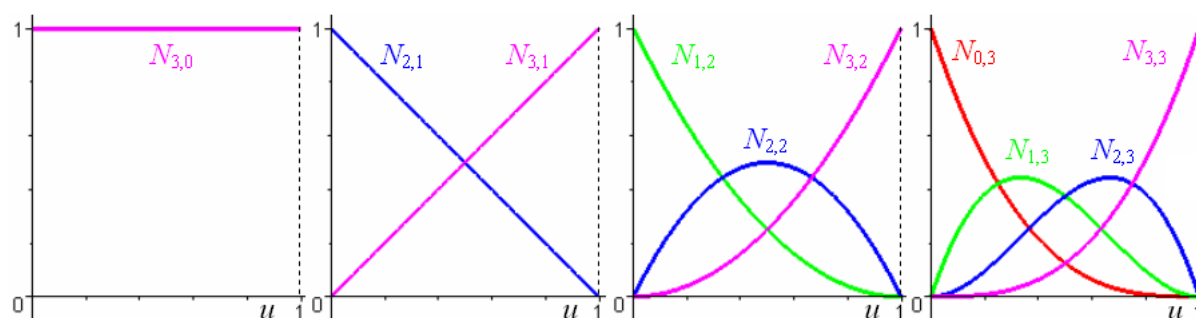
■ **Věta 2.4 – Vztah mezi Coonsovou a Bézierovou kubikou.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^3$ Coonsovy kubiky dle (2.16). Potom křivka daná vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) \mathbf{V}_i, \quad u \in [0, 1] \quad (2.27)$$

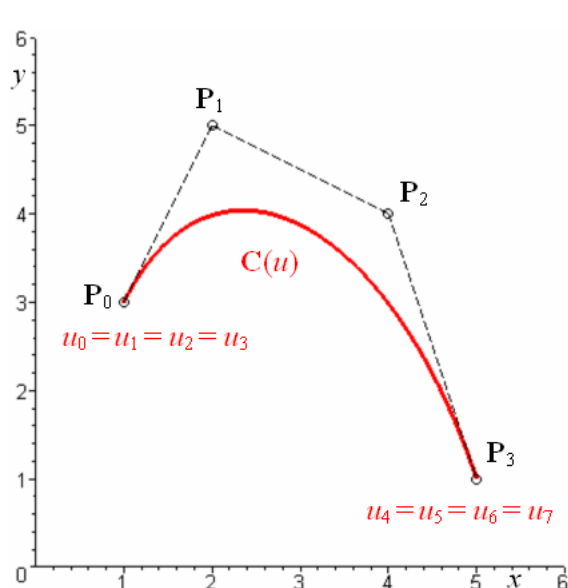
je Bézierova kubika zadaná řídicím polygonem $(\mathbf{V}_i)_{i=0}^3$, pro jehož vrcholy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \frac{1}{6} \mathbf{P}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{6} \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{V}_1 &= \frac{2}{3} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{1}{3} \mathbf{P}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{V}_3 &= \frac{1}{6} \mathbf{P}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{6} \mathbf{P}_3. \end{aligned} \quad (2.28)$$

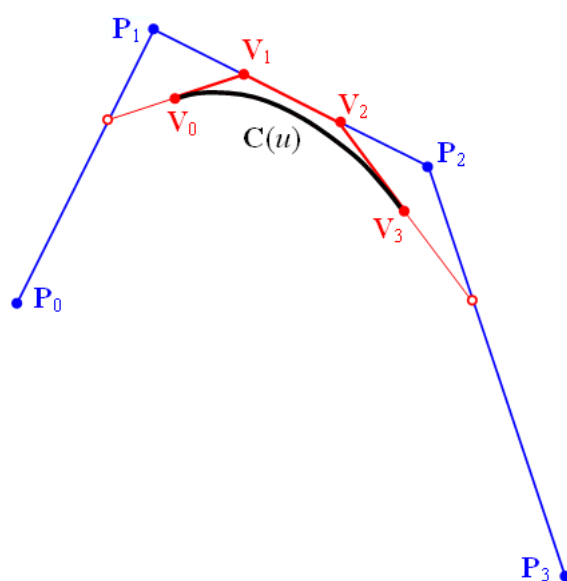
Naopak, nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{V}_i)_{i=0}^3$ Bézierovy kubiky dle (2.27). Potom křivka daná vektorovou rovnicí (2.16) je Coonsova kubika zadaná řídicím polygonem $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^3$, pro jehož



Obr. 2.9: B-spline bázové funkce nultého až 3. stupně; $U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$
(Bernsteinovy polynomy nultého až 3. stupně)



Obr. 2.10: Bézierova kubika



Obr. 2.11: Vztah mezi Coonsovou a Bézierovou kubikou

vrcholy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= 6\mathbf{V}_0 - 7\mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2, \\ \mathbf{P}_1 &= 2\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2, \\ \mathbf{P}_2 &= 2\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1, \\ \mathbf{P}_3 &= 2\mathbf{V}_1 - 7\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

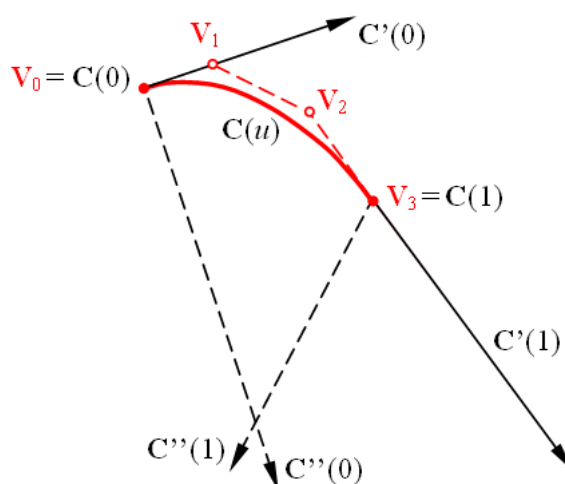
Důkaz: Dosadíme-li souřadnice řídicích bodů \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 a \mathbf{V}_3 dle (2.28) do rovnice Bézierovy kubiky (2.27), obdržíme rovnici Coonsovy kubiky (2.16). Naopak, dosadíme-li souřadnice řídicích bodů \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 a \mathbf{P}_3 dle (2.29) do rovnice Coonsovy kubiky (2.16), obdržíme rovnici Bézierovy kubiky (2.27). \square

Vlastnosti Bézierovy kubiky jsou zachyceny na obr. 2.12. Jejich geometrickou interpretaci získáme buď z jejího vztahu s Coonsovou kubikou nebo pokud do rovnice Bézierovy kubiky (2.27), resp. do rovnice tečného vektoru Bézierovy kubiky

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^3 B'_{i,3}(u)\mathbf{V}_i, \quad u \in [0, 1] \quad (2.30)$$

Tab. 2.6: Bernsteinovy polynomy 3. stupně a jejich derivace

$B_{i,3}(u)$	$B_{i,3}(0)$	$B_{i,3}(1)$	$B'_{i,3}(u)$	$B'_{i,3}(0)$	$B'_{i,3}(1)$	$B''_{i,3}(u)$	$B''_{i,3}(0)$	$B''_{i,3}(1)$
$B_{0,3}(u) = (1-u)^3$	1	0	$B'_{0,3}(u) = -3u^2 + 6u - 3$	-3	0	$B''_{0,3}(u) = -6u + 6$	6	0
$B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2$	0	0	$B'_{1,3}(u) = 9u^2 - 12u + 3$	3	0	$B''_{1,3}(u) = 18u - 12$	-12	6
$B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$	0	0	$B'_{2,3}(u) = -9u^2 + 6u$	0	-3	$B''_{2,3}(u) = -18u + 6$	6	-12
$B_{3,3}(u) = u^3$	0	1	$B'_{3,3}(u) = 3u^2$	0	3	$B''_{3,3}(u) = 6u$	0	6



Obr. 2.12: Vlastnosti Bézierovy kubiky

a do rovnice druhé derivace Bézierovy kubiky

$$\mathbf{C}''(u) = \sum_{i=0}^3 B''_{i,3}(u) \mathbf{V}_i, \quad u \in [0, 1] \quad (2.31)$$

dosadíme pro $u = 0$ a $u = 1$ funkční hodnoty Bernsteinových polynomů, resp. jejich prvních dvou derivací $B'_{i,3}(u)$ a $B''_{i,3}(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$, které jsou uvedeny v tab. 2.6.

Vlastnost 2.20 Počáteční bod $\mathbf{C}(0)$, resp. koncový bod $\mathbf{C}(1)$ Bézierovy kubiky je totožný s počátečním řídicím bodem \mathbf{V}_0 , resp. koncovým řídicím bodem \mathbf{V}_3 :

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{V}_0, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{C}(1) = \mathbf{V}_3.$$

Vlastnost 2.21 Tečný vektor $\mathbf{C}'(0)$ v počátečním bodě Bézierovy kubiky, resp. tečný vektor $\mathbf{C}'(1)$ v koncovém bodě Bézierovy kubiky je trojnásobek počátečního, resp. koncového ramene řídicího polygonu:

$$\mathbf{C}'(0) = -3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_1 = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{C}'(1) = -3\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2),$$

viz také odvození vztahu (4.62), resp. (4.63).

Vlastnost 2.22 Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(0)$ v počátečním bodě Bézierovy kubiky, resp. vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(1)$ v koncovém bodě Bézierovy kubiky je dán šestinásobkem vektorového součtu vektorů $\overrightarrow{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_0}$ a $\overrightarrow{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}$, resp. šestinásobkem vektorového součtu vektorů $\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1}$

a $\overrightarrow{\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3}$:

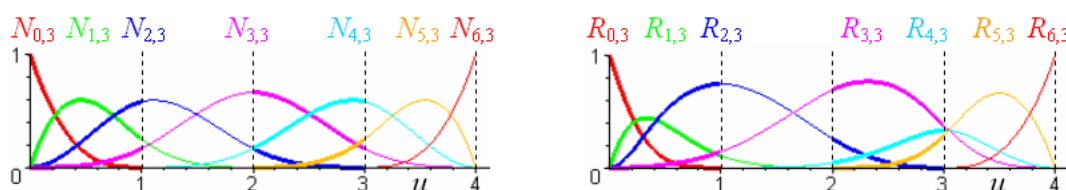
$$\mathbf{C}''(0) = 6\mathbf{V}_0 - 12\mathbf{V}_1 + 6\mathbf{V}_2 = 6[(\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1) + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)], \quad (2.32)$$

resp.

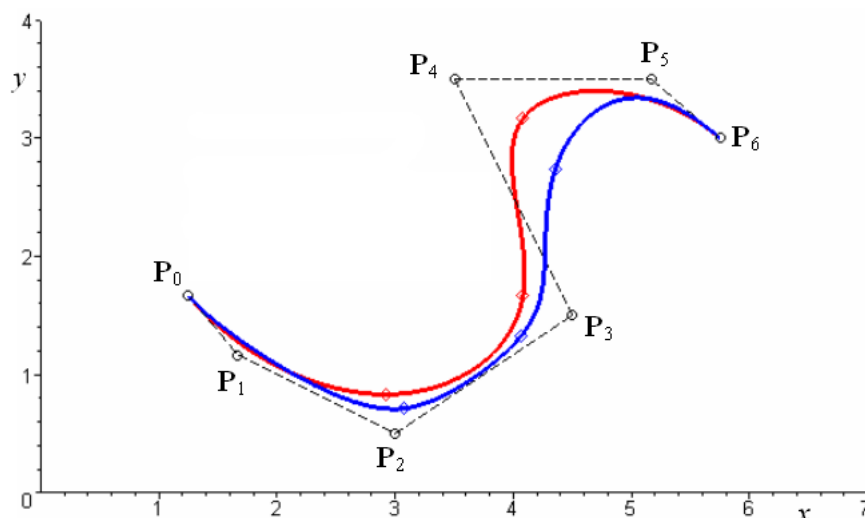
$$\mathbf{C}''(1) = 6\mathbf{V}_1 - 12\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3 = 6[(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)]. \quad (2.33)$$

viz také odvození vztahu (4.78), resp. (4.79).

Pokud bude počet ramen n řídicího polygonu větší než stupeň p křivky, obdržíme segmentovanou ukotvenou křivku. Příklad B-spline a racionálních bázových funkcí pro $n = 6$, $p = 3$ a uniformní uzlový vektor $U = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$ je nakreslen na obr. 2.13. V případě racionálních bázových funkcí byly zvoleny váhy $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$. Na obr. 2.14 jsou nakresleny příklady ukotvených křivek – B-spline křivka je nakreslena červenou barvou, NURBS křivka modrou barvou.



Obr. 2.13: B-spline a racionální bázové funkce 3. stupně segmentované ukotvené křivky; $n = 6$, $U = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$, váhy pro racionální funkce $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$



Obr. 2.14: Segmentovaná B-spline (červená) a NURBS (modrá) ukotvená křivka 3. stupně; $n = 6$, $U = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$, váhy řídicích bodů NURBS křivky $W = (1, 1, 3, 2, \frac{1}{2}, 1, 1)$

Tak, jako lze provést konverzi mezi Bézierovou kubikou (ukotvenou křivkou tvořenou jediným segmentem) a Coonsovou kubikou (otevřenou křivkou tvořenou jediným segmentem), existuje konverze i mezi segmentovanou ukotvenou B-spline křivkou a segmentovanou otevřenou B-spline křivkou. Řídicí polygon ukotvené a otevřené B-spline křivky p -tého stupně se liší pouze v prvních a v posledních $p - 1$ řídicích bodech. Protože se nejčastěji používají křivky 3. stupně, uvedeme převodní vztahy mezi otevřenou a ukotvenou B-spline křivkou 3. stupně.

Situace pro $p = 3$ je naznačena na obr. 2.15. Řídicí polygon otevřené B-spline křivky na obr. 2.15 je shodný s řídicím polygonem z obr. 2.7 a řídicí polygon ukotvené B-spline křivky na obr. 2.15 je shodný s řídicím polygonem z obr. 2.14.

■ **Věta 2.5 – Vztah mezi ukotvenou a otevřenou B-spline křivkou 3. stupně.**

Nechť jsou dány uzlové vektory

$$U = (u_0 = u_1 = u_2 = u_3, u_4, \dots, u_{m-4}, u_{m-3} = u_{m-2} = u_{m-1} = u_m) \quad (2.34)$$

a

$$\tilde{U} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m), \quad (2.35)$$

pro jejichž uzly platí $u_i = \tilde{u}_i$, $i = 3, \dots, m-3$. Nechť je dále dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ ukotvené B-spline křivky 3. stupně definované na uzlovém vektoru U dle (2.34). Potom křivka daná vektorovou rovnicí

$$\tilde{\mathbf{C}}(u) = \sum_{i=0}^n \tilde{N}_{i,3}(u) \tilde{\mathbf{P}}_i, \quad u \in [\tilde{u}_0, \tilde{u}_m] \quad (2.36)$$

je otevřená B-spline křivka 3. stupně definovaná na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35) zadaná řídicím polygonem $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^n$, pro jehož vrcholy platí

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_0 &= 6\mathbf{P}_0 - 6\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \\ \tilde{\mathbf{P}}_1 &= \frac{3}{2}\mathbf{P}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{P}_2, \\ \tilde{\mathbf{P}}_i &= \mathbf{P}_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \tilde{\mathbf{P}}_{n-1} &= -\frac{1}{2}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{3}{2}\mathbf{P}_{n-1}, \\ \tilde{\mathbf{P}}_n &= \mathbf{P}_{n-2} - 6\mathbf{P}_{n-1} + 6\mathbf{P}_n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$\tilde{N}_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce 3. stupně (2.1) definované na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35).

Naopak, nechť je dán řídicí polygon $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^n$ otevřené B-spline křivky 3. stupně definované na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35). Potom křivka daná vektorovou rovnicí

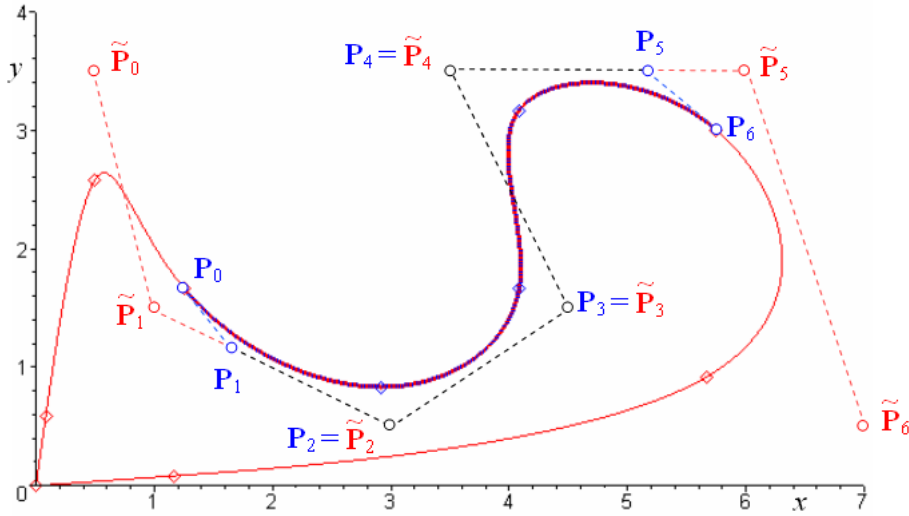
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,3}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [u_0, u_m] \quad (2.38)$$

je ukotvená B-spline křivka 3. stupně definovaná na uzlovém vektoru U dle (2.34) zadaná řídicím polygonem $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$, pro jehož vrcholy platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{P}}_0 + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{P}}_1 + \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{P}}_2, \\ \mathbf{P}_1 &= \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{P}}_1 + \frac{1}{3}\tilde{\mathbf{P}}_2, \\ \mathbf{P}_i &= \tilde{\mathbf{P}}_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \mathbf{P}_{n-1} &= \frac{1}{3}\tilde{\mathbf{P}}_{n-2} + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1}, \\ \mathbf{P}_n &= \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{P}}_{n-2} + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1} + \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{P}}_n. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$N_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce 3. stupně (2.1) definované na uzlovém vektoru U dle (2.34). Aktivní část otevřené B-spline křivky $\tilde{\mathbf{C}}(u)$, $u \in [\tilde{u}_3, \tilde{u}_{m-3}]$, dle (2.36) je shodná s ukotvenou B-spline křivkou $\mathbf{C}(u)$, $u \in [u_0, u_m]$, dle (2.38).

Důkaz (pouze naznačíme): Pro dané n sestavíme uzlové vektory U dle (2.34) a \tilde{U} dle (2.35), pro jejichž uzly platí $u_i = \tilde{u}_i$, $i = 3, \dots, m-3$, a určíme B-spline bázové funkce $N_{i,3}(u)$



Obr. 2.15: Vztah mezi ukotvenou (modrou) a otevřenou (červenou) B-spline křivkou;
 $n = 6, p = 3$

a $\tilde{N}_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$ dle (2.1). Poté dosadíme souřadnice řídicích bodů $\tilde{\mathbf{P}}_0, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_n$ dle (2.37) do vektorové rovnice otevřené B-spline křivky (2.36) a obdržíme rovnici ukotvené B-spline křivky (2.38).

Naopak, dosadíme-li souřadnice řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ dle (2.39) do vektorové rovnice ukotvené B-spline křivky (2.38), dostaneme rovnici otevřené B-spline křivky (2.36). \square

- **Věta 2.6 – Vztah mezi ukotvenou a otevřenou NURBS křivkou 3. stupně.** Nechť jsou dány uzlové vektory U dle (2.34) a \tilde{U} dle (2.35), pro jejichž uzly platí $u_i = \tilde{u}_i$, $i = 3, \dots, m-3$. Nechť je dále dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ ukotvené NURBS křivky 3. stupně definované na uzlovém vektoru U dle (2.34) a váhy řídicích bodů $\tilde{W} = (\tilde{w}_i)_{i=0}^n$, takové, že jsou jednotkové pro $i = 0, 1, 2, 3$ a pro $i = n-3, n-2, n-1, n$ a rovny nezáporným konstantám pro $i = 4, \dots, n-4$. Potom křivka daná vektorovou rovnicí

$$\tilde{\mathbf{C}}(u) = \sum_{i=0}^n \tilde{R}_{i,3}(u) \tilde{\mathbf{P}}_i, \quad u \in [\tilde{u}_0, \tilde{u}_m] \quad (2.40)$$

je otevřená NURBS křivka 3. stupně definovaná na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35) zadaná řídicím polygonem $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^n$, pro jehož vrcholy platí vztah (2.37). $\tilde{R}_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou racionální bázové funkce

$$\tilde{R}_{i,3}(u) = \frac{\tilde{N}_{i,3}(u) \tilde{w}_i}{\sum_{j=0}^n \tilde{N}_{j,3}(u) \tilde{w}_j}, \quad (2.41)$$

kde $\tilde{N}_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce 3. stupně definované na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35).

Naopak, nechť je dán řídicí polygon $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^n$ otevřené NURBS křivky 3. stupně definované na uzlovém vektoru \tilde{U} dle (2.35) a váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$, pro které platí $w_i = \tilde{w}_i$, $i = 0, \dots, n$. Potom křivka daná vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,3}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [u_0, u_m] \quad (2.42)$$

je ukotvená NURBS křivka 3. stupně definovaná na uzlovém vektoru U dle (2.34) zadaná řídicím polygonem $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$, pro jehož vrcholy platí vztah (2.39). $R_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou racionální bázové funkce

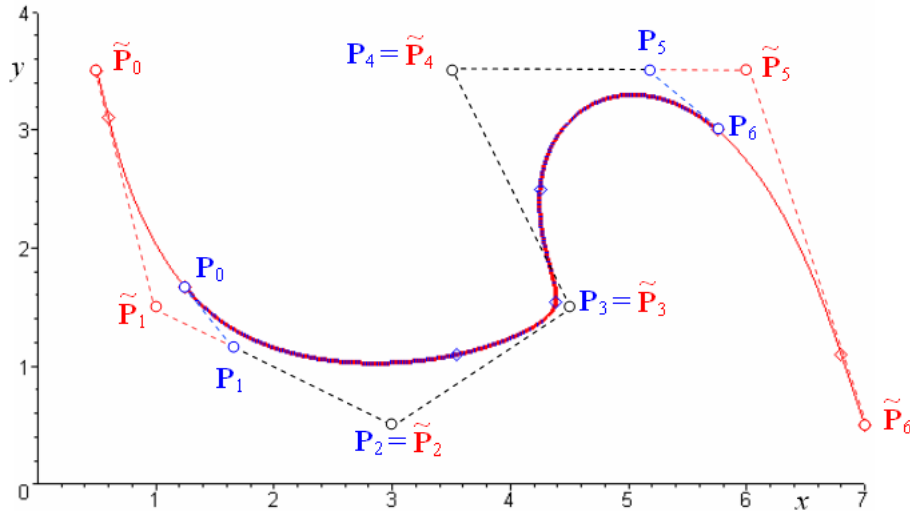
$$R_{i,3}(u) = \frac{N_{i,3}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,3}(u)w_j}, \quad (2.43)$$

kde $N_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce 3. stupně definované na uzlovém vektoru U dle (2.34).

Důkaz: je zcela obdobný jako u věty 2.5, pouze je třeba uvažovat racionální bázové funkce. \square

Pro jednoznačnou konverzi mezi aktivní částí otevřené NURBS křivky a ukotvené NURBS křivky je tedy nutné kromě podmínek na uzlové vektory (2.34) a dle (2.35) zajistit *jednotkové* váhy počátečních a koncových p řídicích bodů obou řídicích polygonů a *shodné* odpovídající váhy ostatních řídicích bodů obou řídicích polygonů.

Budeme-li uvažovat stejné řídicí polygony $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^n$ jako na obr. 2.15, lze za ne-jednotkovou volit pouze váhu řídicího bodu \mathbf{P}_3 a $\tilde{\mathbf{P}}_3$, přičemž musí platit $w_3 = \tilde{w}_3$. Příklad je nakreslen na obr. 2.16, kde je zvolena váha $w_3 = \tilde{w}_3 = 5$, váhy ostatních řídicích bodů jsou jednotkové.



Obr. 2.16: Vztah mezi ukotvenou (modrá) a otevřenou (červená) NURBS křivkou;
 $n = 6$, $p = 3$, $W = \tilde{W} = (1, 1, 1, 5, 1, 1, 1)$

2.3.3 Uzavřená křivka

Uzavřenou (*closed*) křivkou míníme takovou křivku, kdy je počáteční bod křivky totožný s koncovým bodem křivky a v tomto bodě zůstává zachována stejná spojitost, jaká je požadována podél celé křivky. Aby došlo k takovému napojení, musí se na konci řídicího polygonu cyklicky zopakovat p počátečních řídicích bodů včetně vah, které jsou s nimi asociovány:

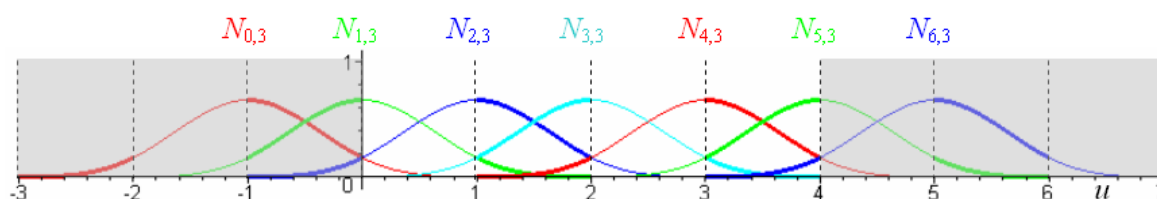
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n-p+1} &= \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-p+2} = \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{p-1}, \\ w_{n-p+1} &= w_0, w_{n-p+2} = w_1, \dots, w_n = w_{p-1}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Předpokládáme, že řídicí polygon má na začátku nejméně $p + 1$ různých řídicích bodů, tedy nejméně p různých ramen řídicího polygonu. Uzlový vektor uzavřené křivky je, stejně jako u otevřené křivky, tvořen neklesající posloupností uzlů

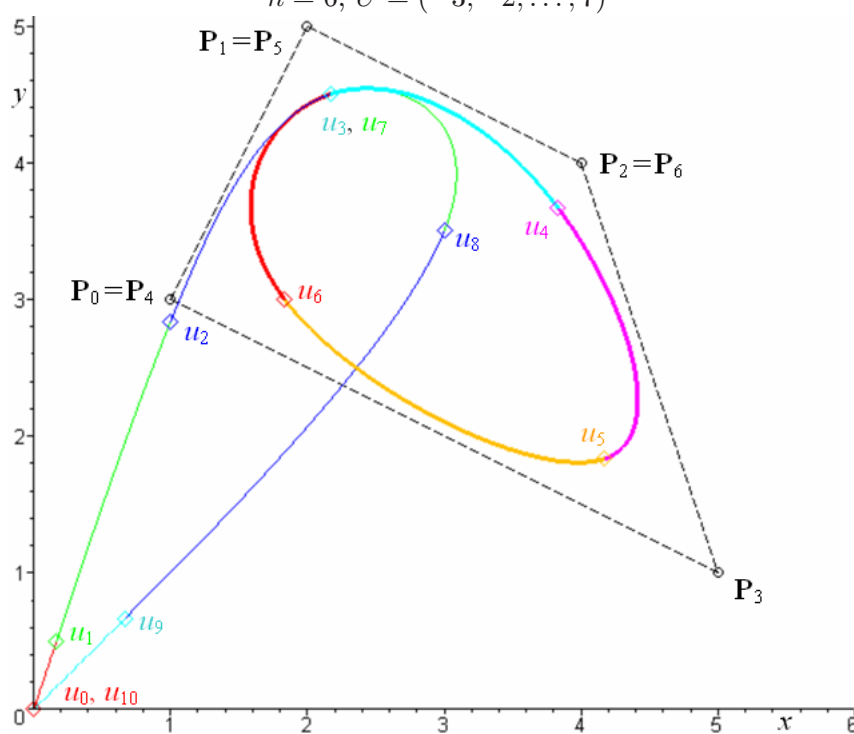
$$U = (a = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m = b). \quad (2.45)$$

Rovněž tak aktivní segmenty (obor parametrizace) uzavřené křivky připadají na interval uzlového vektoru $[u_p, u_{m-p}]$. Pasivní segmenty odpovídající intervalům $[a, u_p]$ a $(u_{m-p}, b]$ se ignorují.

Příklad B-spline bázových funkcí pro uniformní uzlový vektor $U = (-3, -2, \dots, 7)$, $p = 3$ a $n = 6$ vidíme na obr. 2.17, příklad uzavřené B-spline křivky 3. stupně na obr. 2.18.



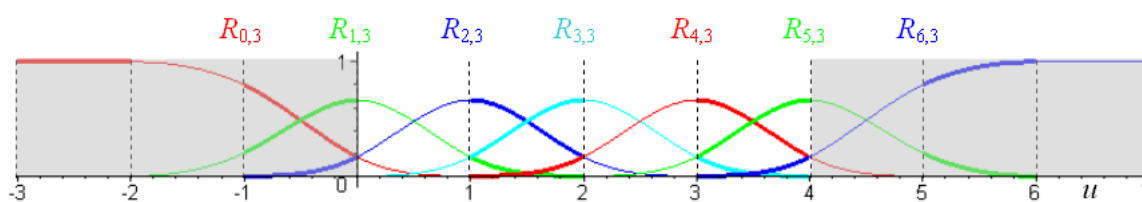
Obr. 2.17: B-spline bázové funkce 3. stupně;
 $n = 6, U = (-3, -2, \dots, 7)$



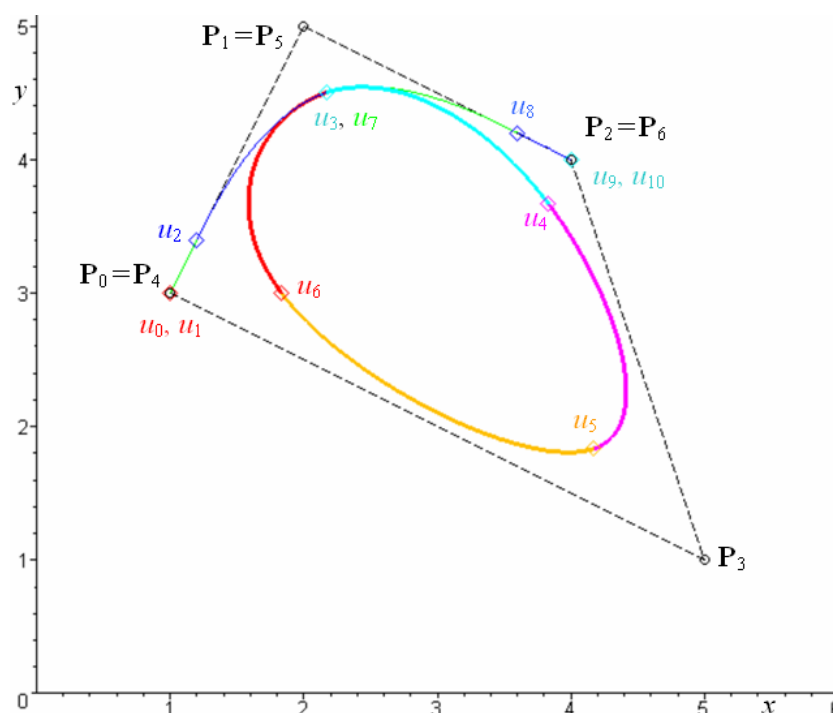
Obr. 2.18: Uzavřená B-spline křivka 3. stupně;
 $U = (-3, -2, \dots, 7)$

Příklad racionálních bázových funkcí pro uniformní uzlový vektor $U = (-3, -2, \dots, 7)$, $p = 3$, $n = 6$ a váhy všech řídicích bodů jednotkové je zobrazen na obr. 2.19, uzavřená NURBS křivka 3. stupně zadaná stejným řídicím polygonem jako v obr. 2.18 je zobrazena na obr. 2.20.

Je zřejmé, že B-spline i racionální bázové funkce uzavřené křivky mají stejný charakter jako bázové funkce otevřené křivky. Pouze větší počet řídicích bodů (daný opakováním) při stejném stupni vede na větší počet uzlových roztečí. Na obr. 2.17 i obr. 2.19 jsou stejnou barvou nakresleny grafy bázových funkcí, které jsou asociovány s řídicími body, jejichž poloha je totožná.



Obr. 2.19: Racionální bázové funkce 3. stupně;
 $n = 6$, $U = (-3, -2, \dots, 7)$, $W = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$



Obr. 2.20: Uzavřená NURBS křivka 3. stupně;
 $U = (-3, -2, \dots, 7)$, $W = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$

Konkrétně červeně zobrazené $N_{0,3}(u)$ a $N_{4,3}(u)$ jsou asociovány s $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_4$, zeleně zobrazené $N_{1,3}(u)$ a $N_{5,3}(u)$ jsou asociovány s $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_5$ a modře zobrazené $N_{2,3}(u)$ a $N_{6,3}(u)$ jsou asociovány s $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_6$.

Aktivní část B-spline i NURBS křivky je shodná a v obr. 2.18 a obr. 2.20 je vyznačena tlustou čarou. Pasivní části křivek se liší, což je dáno rozdílným chováním B-spline a racionálních bázových funkcí na pasivních uzlových roztečích. Segmenty křivek v obou obrázcích jsou odlišeny barevně.

■ **Věta 2.7 – Počet aktivních segmentů uzavřené NURBS křivky.** Nechť je dán stupeň $p > 0$ a řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ takový, že platí $\mathbf{P}_{n-p+1+i} = \mathbf{P}_i$, $i = 0, \dots, p-1$, a zároveň $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_1 \neq \dots \neq \mathbf{P}_p$. Nechť jsou dále dány nezáporné váhy řídicích bodů $(w_i)_{i=0}^n$ takové, že platí $w_{n-p+1+i} = w_i$, $i = 0, \dots, p-1$. Potom je aktivní část uzavřené NURBS křivky dle (2.4) vždy segmentovaná a počet aktivních segmentů je roven

$$n - p + 1. \quad (2.46)$$

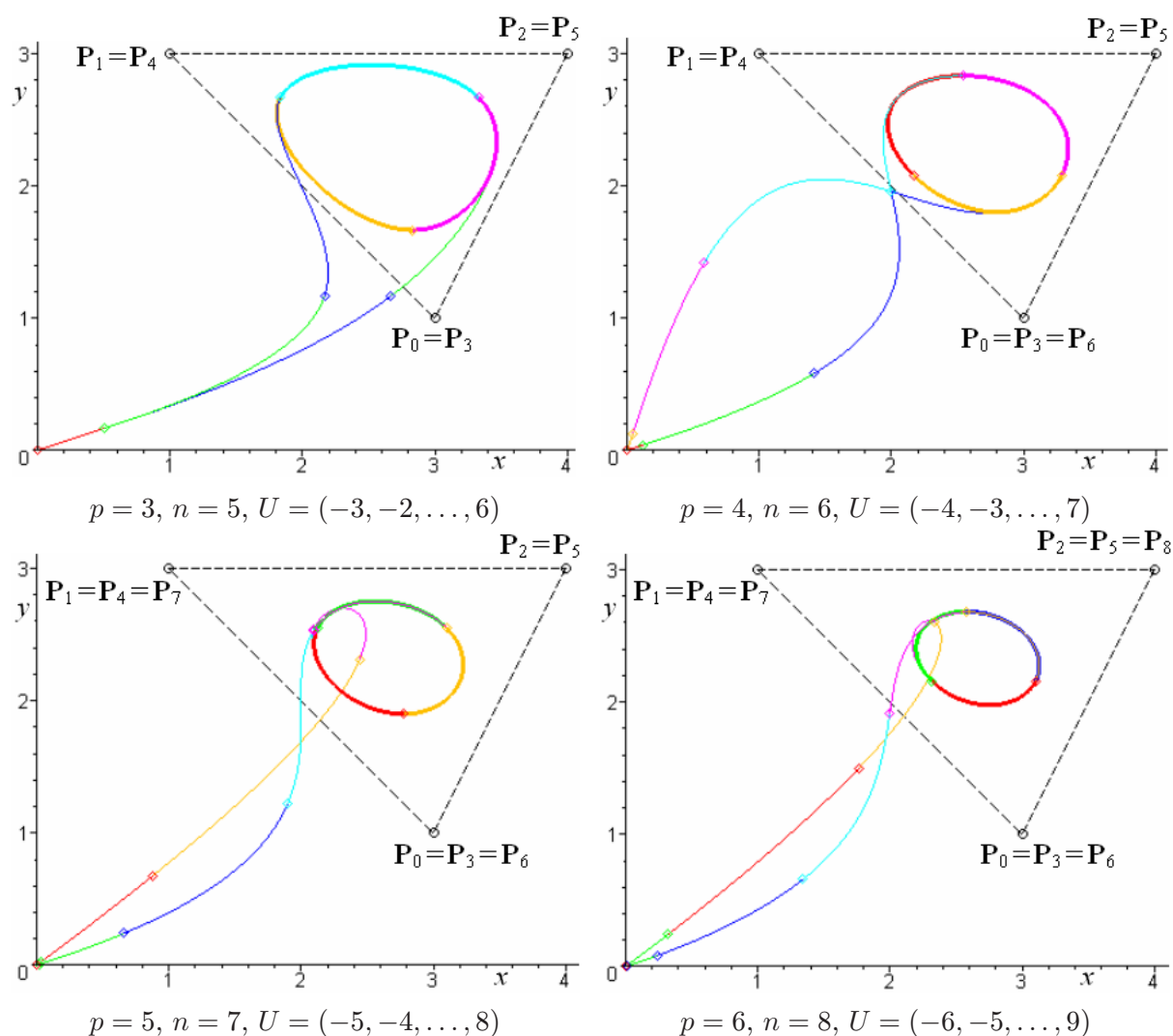
Důkaz: Pro daný stupeň $p > 0$ uzavřené NURBS křivky musí být celkový počet ramen n řídicího polygonu $n \geq 2p$. Odečteme-li od celkového počtu uzlových roztečí $m = n + p + 1$

počet pasivních uzlových roztečí $2p$, dostaneme počet aktivních roztečí $n - p + 1$, kterých je nejméně $p + 1 > 1$, tedy aktivní část uzavřené NURBS křivky je vždy segmentovaná. \square

Poznamenejme, že podmínka $p+1$ různých počátečních řídicích bodů, tedy nejméně p různých ramen řídicího polygonu, není pro vytvoření uzavřené křivky nutná, ale je vhodná pro praktické modelování uzavřených křivek obecného tvaru.

Teoreticky vzato, pro konstrukci uzavřené křivky stupně $p \geq 2$ vystačíme minimálně se třemi různými řídicími body. Základním řídicím polygonem je potom trojúhelník $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ a uzavřená křivka je tvořena třemi aktivními segmenty. Podle zvoleného stupně křivky je celkový počet ramen řídicího polygonu $n = 2 + p$, přičemž pro další řídicí body platí $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-3}$, $i = 3, \dots, n$.

Příklad uzavřených B-spline křivek definovaných řídicím polygonem s minimálním počtem ramen pro $p = 3, 4, 5, 6$ je uveden na obr. 2.21. Je zřejmé, že křivky tohoto typu zřejmě nena- leznou hlubší praktické využití v oblasti modelování obecných tvarů.



Obr. 2.21: Vliv stupně p na tvar uzavřené B-spline křivky definované řídicím polygonem s minimálním počtem ramen

Kapitola 3

Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek

Doposud jsme ve většině příkladů uvažovali jednotkové váhy všech řídicích bodů, stupeň $p = 3$ a uniformní uzlový vektor. V této části budeme diskutovat vliv stupně na tvar modelované křivky a uvedeme přímou metodu stanovení vah řídicích bodů a uzlového vektoru.

3.1 Stupeň

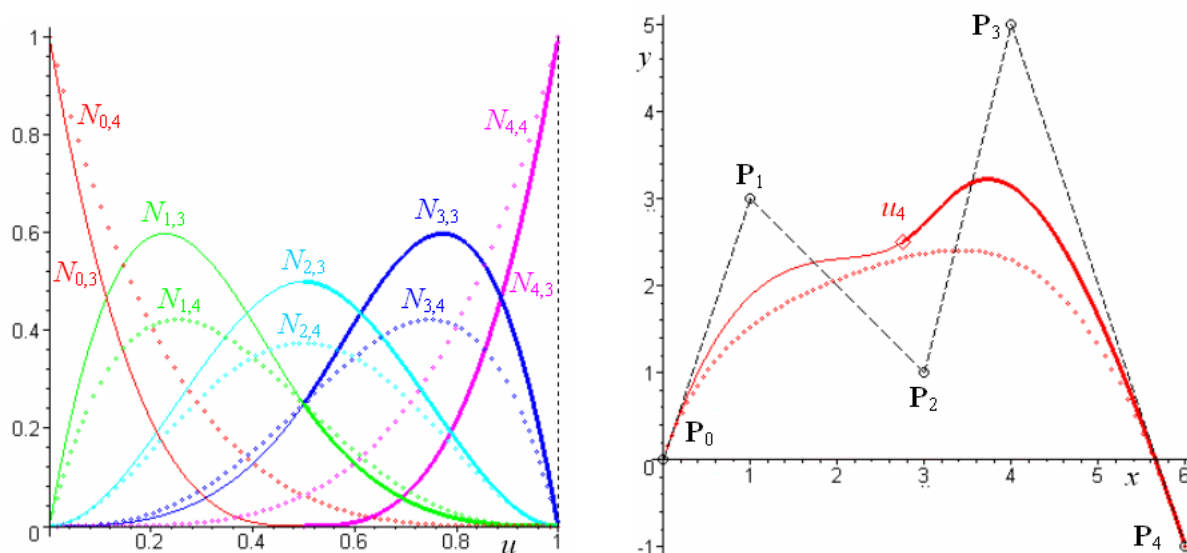
Pokud není křivka segmentovaná, je popsána jedinou rovnicí a její tvar ovlivňuje jediná sada bázových funkcí. Takový matematický model křivky ale nenachází širší praktické uplatnění, neboť vede na vysoký stupeň křivky při zvyšujícím se počtu řídicích bodů. Navíc změna jediného tvarovacího nástroje (poloha řídicího bodu nebo jeho váhy) ovlivní tvar celé křivky. Vhodnější je proto matematický model, který umožňuje lokální změny tvaru křivky, tj. změnou polohy libovolného řídicího bodu nebo jeho váhy (popř. změnou délek dvou po sobě následujících uzlových roztečí při zachování délek ostatních uzlových roztečí) se změní pouze tvar části křivky. Znamená to, že zvolený stupeň p křivky musí být menší než počet ramen řídicího polygonu n . Tím dojde k segmentaci bázových funkcí i k segmentaci křivky. Každý (i -tý) segment křivky je definován pouze dílčím řídicím polygonem s $p + 1$ řídicími body: $(\mathbf{P}_j)_{j=i}^{i+p}$, $i = 0, \dots, n - p$. Tvar každého segmentu křivky řídí bázové funkce definované na příslušné uzlové rozteči. Hodnoty parametru u , ve kterých na sebe jednotlivé segmenty křivky navazují (tj. ve kterých se mění bázové funkce), jsou vnitřní uzly uzlového vektoru.

Porovnejme nyní vliv stupně $p = 4$ a $p = 3$ na tvar bázových funkcí a na tvar výsledné křivky pro řídicí polygon s pěti řídicími body ($n = 4$). Uvažujme (bez újmy na obecnosti) váhy všech řídicích bodů jednotkové a ukotvenou křivku.

Uzlový vektor pro $p = 4$ má tvar $U = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ a obsahuje pouze jedinou uzlovou rozteč nenulové délky $[u_4, u_5] = [0, 1]$. B-spline bázové funkce i výsledná křivka jsou tvořeny jediným segmentem.

Pro $p = 3$ zvolme uniformní uzlový vektor ve tvaru $U = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1)$, který obsahuje dvě uzlové rozteče nenulové délky $[u_3, u_4] = [0, \frac{1}{2}]$ a $[u_4, u_5] = [\frac{1}{2}, 1]$. B-spline bázové funkce jsou segmentované, tj. mají jiné analytické vyjádření na uzlové rozteči $[0, \frac{1}{2})$ než na uzlové rozteči $[\frac{1}{2}, 1]$. Výsledná křivka je složena ze dvou segmentů. První segment je definován na uzlové rozteči $u \in [0, \frac{1}{2})$ a jeho tvar je ovlivňován dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, popř. vahami těchto řídicích bodů, druhý segment je definován na uzlové rozteči $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ a jeho tvar je ovlivňován dílčím řídicím polygonem $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$, popř. vahami těchto řídicích bodů.

Vliv vnitřních uzlových roztečí nenulové délky na segmentaci B-spline bázových funkcí a na tvar výsledné B-spline křivky demonstruje obr. 3.1. Tečkovanou čarou jsou zde znázorněny B-spline bázové funkce 4. stupně a B-spline křivka 4. stupně, plnou čarou jsou znázorněny segmentované B-spline bázové funkce 3. stupně a segmentovaná B-spline křivka 3. stupně. Jednotlivé segmenty jsou odlišeny tloušťkou čáry.



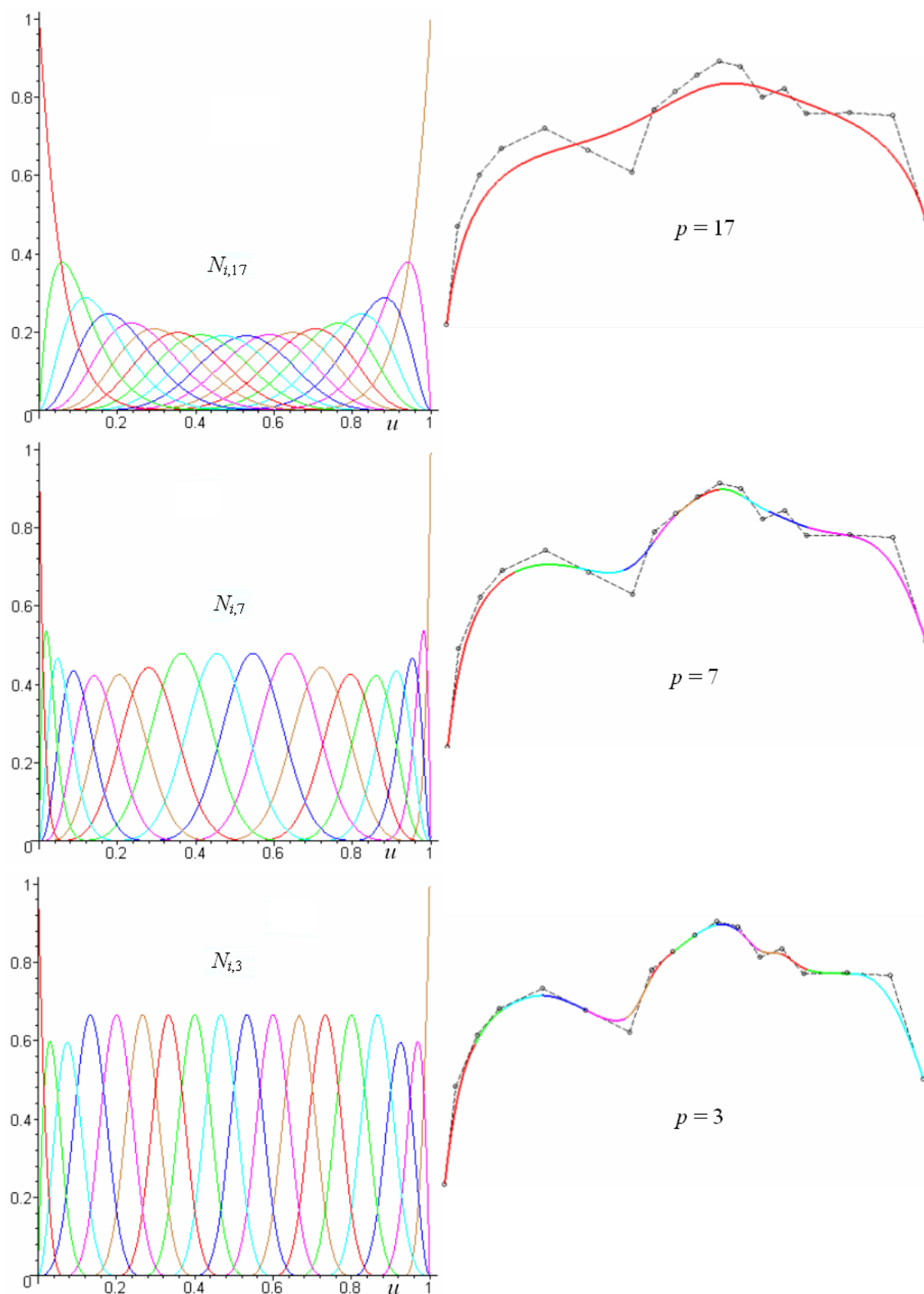
Obr. 3.1: B-spline bázové funkce a B-spline křivka;
 $n = 4, p = 4$ (plná čára), $n = 4, p = 3$ (tečkovaná čára)

Všimněme si nejprve strmějšího poklesu funkce $N_{0,3}(u)$ oproti $N_{0,4}(u)$ a zároveň strmějšího nárůstu $N_{4,3}(u)$ oproti $N_{4,4}(u)$. Tento pokles, resp. nárůst má za následek jednak pozdější odklon křivky 3. stupně od počátečního, resp. koncového ramene řídicího polygonu než je tomu u křivky 4. stupně, jednak vyšší maxima zbývajících bázových funkcí 3. stupně (tj. bázových funkcí vnitřních bodů řídicího polygonu) oproti maximům zbývajících bázových funkcí 4. stupně. Křivka 3. stupně je tedy více tvarována řídicím polygonem než křivka 4. stupně, což je přímý důsledek segmentace. Zároveň je to také další z důvodů, proč se segmentované křivky používají.

Pro interaktivní modelování NURBS křivky prostřednictvím stupně bázových funkcí, a tím i stupně křivky, lze vyslovit následující pravidlo:

- Čím je stupeň bázových funkcí nižší, tím nižší je počet bodů dílčího řídicího polygonu, které definují konkrétní segment křivky, a tím více se každý z těchto řídicích bodů uplatní a ovlivní tvar výsledné křivky.
- Naopak, čím je stupeň křivky vyšší, tím vyšší je počet bodů dílčího řídicího polygonu, které definují konkrétní segment křivky, a tím méně každý z bodů dílčího řídicího polygonu ovlivní tvar výsledné křivky.

V praktických případech, kdy je třeba modelovat křivky zadané řídicími polygony se značným počtem řídicích bodů, je naprosto nevhodné volit stupeň p blízký počtu ramen řídicího polygonu. Na obr. 3.2 je nakreslen průběh B-spline bázových funkcí (barevně jsou odlišeny jednotlivé bázové funkce) a výsledná B-spline křivka (barevně jsou odlišeny jednotlivé segmenty křivky) zadaná řídicím polygonem s osmnácti řídicími body pro $p = 17$, $p = 7$ a $p = 3$ a uniformní uzlový vektor.

Obr. 3.2: Vliv stupně p na tvar B-spline bázových funkcí a B-spline křivky

Povšimněme si velmi nízkých maxim bazových funkcí 17. stupně, a tím i velmi malého vlivu polohy vnitřních řídicích bodů na tvar B-spline křivky. Maxima bazových funkcí se při snižování stupně zvyšují a výsledná křivka se více přibližuje řídicím bodům. Se snižujícím se stupněm se zvyšuje počet segmentů, ze kterých se křivka skládá, což umožňuje efektivnější lokální změnu tvaru.

Efekt vzdalování výsledné křivky od řídicích bodů se zvyšujícím se stupněm můžeme také pozorovat na obr. 2.21, kde jsou znázorněny uzavřené B-spline křivky definované řídicími polygony s minimálním počtem ramen pro $p = 3, 4, 5, 6$.

3.2 Váhy řídicích bodů

S každým řídicím bodem je asociována jeho váha, která vyjadřuje relativní důležitost polohy řídicího bodu na konečný tvar NURBS křivky. Důsledkem různých vah má NURBS reprezentace racionální charakter, tedy analytické vyjádření ve tvaru podílu dvou polynomů. Důsledkem zavedení vah je možnost přesného popisu kuželoseček v NURBS reprezentaci, a tím pádem i možnost použít jednotnou reprezentaci k vyjádření analytických i zcela obecných tvarů. Právě tato vlastnost řadí NURBS reprezentaci na přední místo z hlediska jejího použití v CA systémech (podrobně viz [17]).

Zde se budeme nejprve zabývat vlivem změny vah řídicích bodů na tvar bazových funkcí a NURBS křivky. Tento přístup lze přirovnat k interaktivnímu návrhu, kdy uživatel mění vstupní parametry a sleduje důsledky. Proces končí, pokud je uživatel spokojen s dosaženým tvarem. Dále potom uvedeme metodu přímého stanovení vah řídicích bodů na základě geometrických vlastností řídicího polygonu, kterou lze použít při automatickém návrhu křivky.

3.2.1 Interaktivní změna vah

Sledujme nyní vliv vah na tvar racionálních bazových funkcí a na tvar NURBS křivky pro $n = 4$, $p = 4$ a uzlový vektor pro ukotvenou křivku ve tvaru $U = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$.

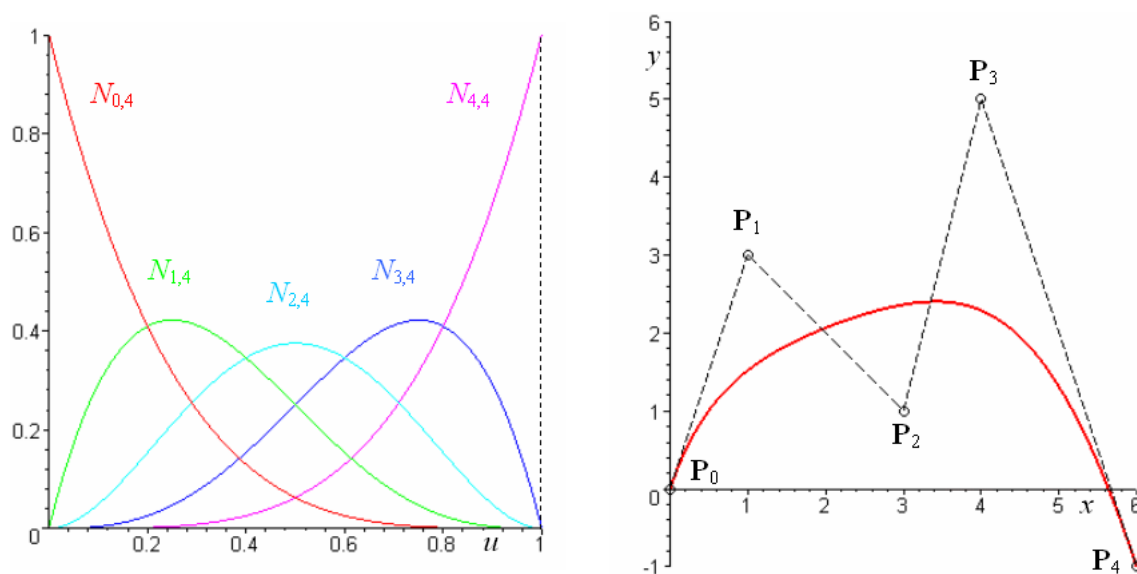
Konkrétně uvažujme čtyři varianty vah:

- Váhy všech řídicích bodů jednotkové: $W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 1, 1, 1, 1)$.
- Váha řídicího bodu \mathbf{P}_3 nejednotková, váhy všech ostatních řídicích bodů jednotkové: $W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 1, 1, 5, 1)$.
- Různé nejednotkové váhy vnitřních řídicích bodů ($w_1 \neq w_2 \neq w_3$), váhy krajních řídicích bodů jednotkové: $W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 10, 2, 5, 1)$.
- Nejednotkové váhy vnitřních řídicích bodů zvolené tak, aby $w_1 = w_3 \neq w_2$, váhy krajních řídicích bodů jednotkové: $W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 10, 20, 10, 1)$.

Jsou-li váhy všech řídicích bodů jednotkové, jsou racionální bazové funkce ukotvené křivky rovny B-spline bazovým funkcím a výsledná křivka je B-spline křivka. V případě, že $p = n$, jsou to přímo Bernsteinovy polynomy p -tého stupně, jejichž průběh pro $p = 4$ je nakreslen na obr. 3.3 společně s příkladem B-spline křivky určené řídicím polygonem $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^4$.

Jakmile změníme váhu byt jen jediného řídicího bodu, není jmenovatel rov. (2.3) jednotkový a bazové funkce jsou racionální. Tvar racionálních bazových funkcí pro $W = (1, 1, 1, 5, 1)$ je odlišný od tvaru původních B-spline bazových funkcí, jak můžeme sledovat na obr. 3.4.

K největší změně tvaru dochází u $R_{3,4}(u)$, jejíž maximum je díky $w_3 = 5$ výrazně vyšší než maxima bazových funkcí $R_{1,4}(u)$ a $R_{2,4}(u)$. Tyto skutečnosti ovlivňují tvar výsledné NURBS

Obr. 3.3: B-spline bázové funkce a B-spline křivka; $n = 4$, $p = 4$, $W = (1, 1, 1, 1, 1)$

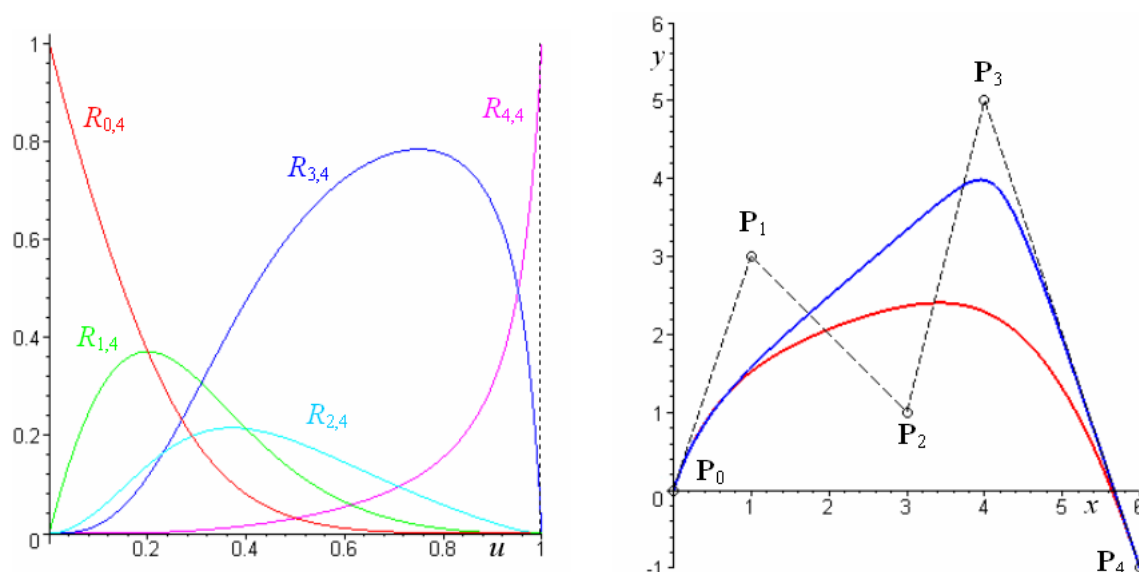
křivky, která je nakreslena na obr. 3.4 modrou barvou. NURBS křivka probíhá podstatně blíže bodu \mathbf{P}_3 než původní B-spline křivka, která je červenou barvou nakreslena v obr. 3.4 také.

Tvar racionálních bázových funkcí pro $W = (1, 10, 2, 5, 1)$ je nakreslen na obr. 3.5. Díky $w_1 = 10$ a $w_3 = 5$ dosahují funkce $R_{1,4}(u)$ a $R_{3,4}(u)$ výrazně vyššího maxima než funkce $R_{2,4}(u)$, přičemž maximum $R_{1,4}(u)$ je větší než maximum $R_{3,4}(u)$. Proto NURBS křivka probíhá blíže bodům \mathbf{P}_1 a \mathbf{P}_3 než bodu \mathbf{P}_2 . Dále probíhá křivka relativně blíže bodu \mathbf{P}_1 než bodu \mathbf{P}_3 . To je způsobeno tím, že váha w_1 je větší než váha w_3 . Z průběhu NURBS křivky na obr. 3.5 je také zřejmé, že vliv váhy $w_2 = 2$ řídicího bodu \mathbf{P}_2 na výsledný tvar křivky je díky vysokým vahám w_1 a w_3 zcela zanedbatelný – křivka nevykazuje žádné znatelné přiblížení k řídicímu bodu \mathbf{P}_2 .

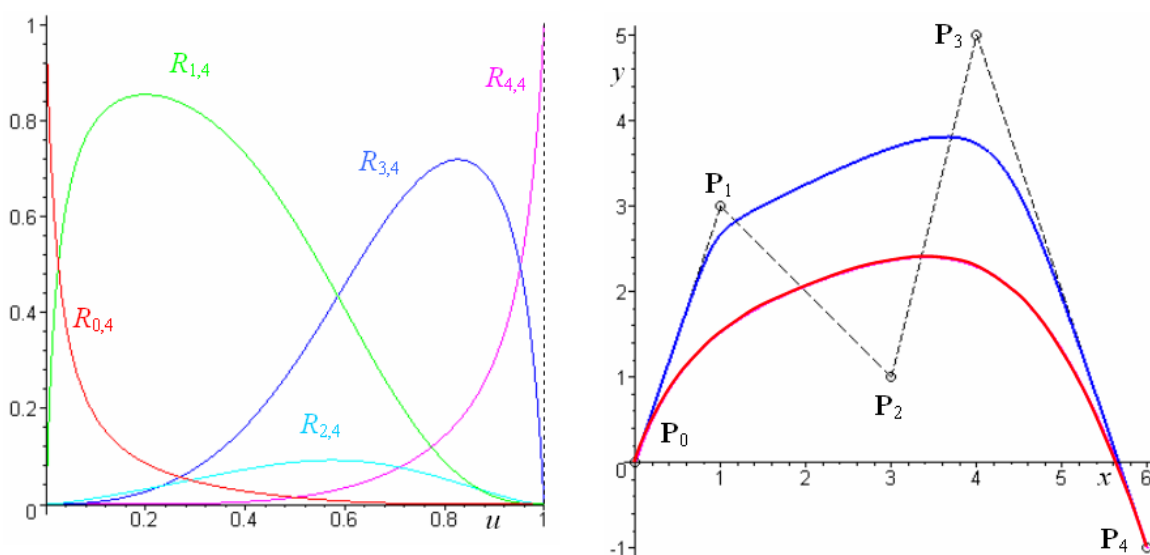
Zajímavý tvar racionálních bázových funkcí i výsledné aproximační křivky dostaneme pro poslední variantu vah řídicích bodů $W = (1, 10, 20, 10, 1)$. Sledujme racionální bázové funkce a výslednou NURBS křivku na obr. 3.6 a povšimněme si několika skutečností:

- Díky $w_1 = w_3$ dosahuje racionální bázová funkce $R_{1,4}(u)$ stejného maxima jako $R_{3,4}(u)$.
- I když je w_2 dvakrát větší než w_1 nebo w_3 , není maximum funkce $R_{2,4}(u)$ větší než maximum funkce $R_{1,4}(u)$ nebo $R_{3,4}(u)$, nicméně je podstatně větší než maximum racionální bázové funkce $R_{2,4}(u)$ z obr. 3.5, kde byla váha $w_2 = 2$.
- Tvar NURBS křivky je ovlivněn všemi řídicími body. Nelze však jednoznačně říci, ke kterému bodu je křivka přitažena relativně více nebo méně. To je důsledek skutečnosti, že součet bázových funkcí je pro libovolnou hodnotu parametru $u \in [0, 1]$ vždy jedna. Zvýšením váhy jednoho bodu zvýšíme maximum příslušné bázové funkce, a tím posílíme vliv tohoto bodu na tvar křivky. Zároveň se však snižují maxima ostatních bázových funkcí a tlumí se vliv ostatních bodů na tvar křivky.

Z výše uvedených úvah plyne následující závěr: při větším počtu řídicích bodů nelze dosáhnout výrazné změny tvaru křivky změnou vah většiny řídicích bodů, neboť jejich účinek se eliminuje. Pokud máme jasnou představu o tvaru křivky, kterého bychom chtěli pro zadanou sérii řídicích bodů dosáhnout, je velmi obtížné – a pro větší počet řídicích bodů zcela nemožné – stanovit interaktivně takové váhy, které požadovaný tvar křivky zajistí. Interaktivní modelování



Obr. 3.4: Racionální bázové funkce, B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka;
 $n = 4, p = 4, W = (1, 1, 1, 5, 1)$

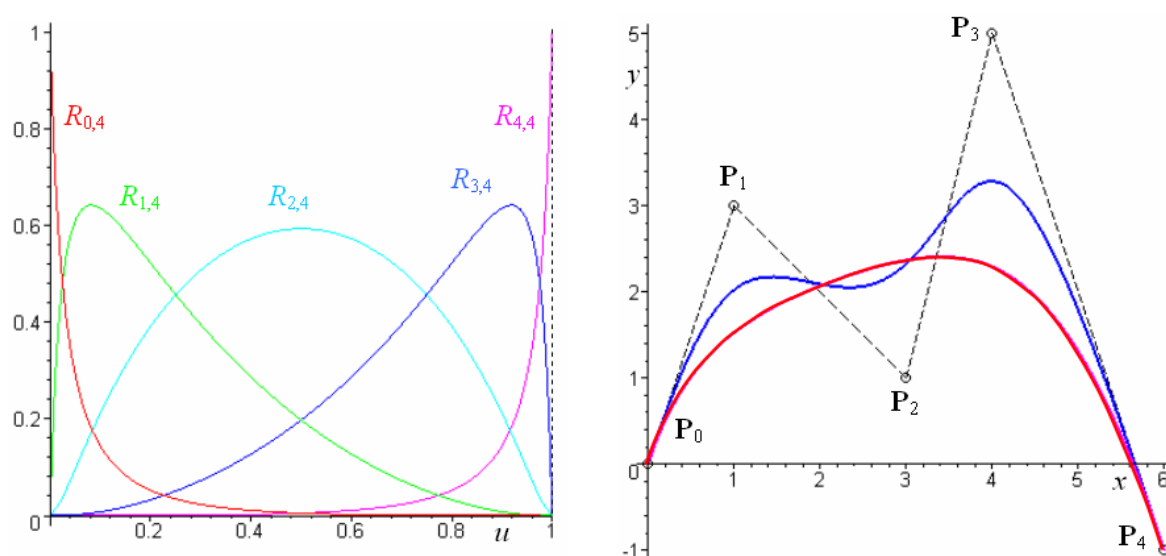


Obr. 3.5: Racionální bázové funkce, B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka;
 $n = 4, p = 4, W = (1, 10, 2, 5, 1)$

tvaru NURBS křivky pomocí vah řídicích bodů lze doporučit pouze v případech, kdy měníme váhu jediného řídicího bodu ze všech řídicích bodů dílčího řídicího polygonu $(\mathbf{P}_j)_{j=i}^{i+p}$, který definuje i -tý segment NURBS křivky, $i = 0, \dots, n - p$.

3.2.2 Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů

Metody automatického určení vah řídicích bodů lze rozdělit do dvou skupin – metody optimalizační, kdy jsou váhy jednotlivým řídicím bodům přiřazeny na základě určitého optimalizačního kritéria, a metody geometrické, které vycházejí z konfigurace řídicích bodů. Zde se budeme věnovat geometrické metodě, kterou nazveme *těžišťovou*. Těžišťová metoda je inspirována optimalizační metodou uvedenou v [1], která k optimalizaci uzlového vektoru využívá kritérium



Obr. 3.6: Racionální bázové funkce, B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka;
 $n = 4$, $p = 4$, $W = (1, 10, 20, 10, 1)$

minimálního součtu vzdáleností bodů křivky od daného pevného bodu. Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů vychází z několika pevných bodů – těžišť dílčích řídicích polygonů a jednotlivým řídicím bodům přiřazuje váhy odvozené z polohy těchto těžišť. Váhy stanovené těžišťovou metodou budeme označovat stručně jako *těžišťové váhy*.

Pro definici těžišťových vah budeme předpokládat (bez újmy na obecnosti) ukotvenou křivku a uniformní uzlový vektor tvaru (3.3).

■ **Definice 3.1 – Těžišťové váhy řídicích bodů aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ aproximační NURBS křivky a nechť \mathbf{T}_i je těžiště dílčího řídicího polygonu

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{p+1} \sum_{j=i}^{i+p} \mathbf{P}_j, \quad i = 0, \dots, n-p. \quad (3.1)$$

Potom jsou *těžišťové váhy* řídicích bodů dány následovně

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i |\mathbf{P}_i \mathbf{T}_j|, \quad i < p, \\ w_i &= \frac{1}{p+1} \sum_{j=i-p}^i |\mathbf{P}_i \mathbf{T}_j|, \quad p \leq i \leq n-p, \\ w_i &= \frac{1}{n-i+1} \sum_{j=i-p}^{n-p} |\mathbf{P}_i \mathbf{T}_j|, \quad i > n-p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

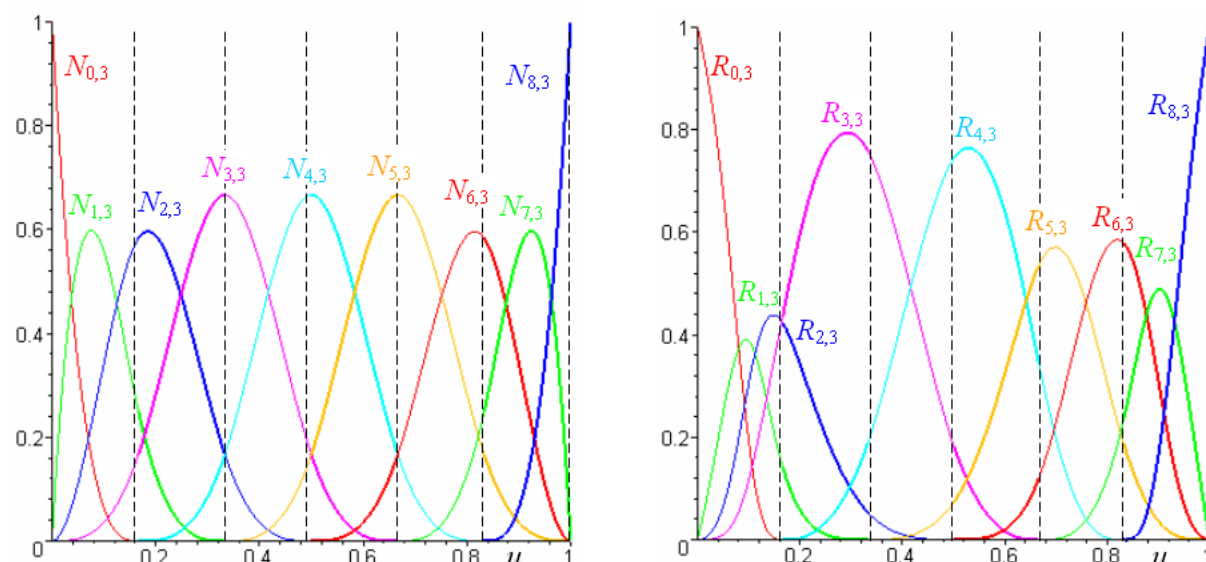
Těžišťová váha w_i řídicího bodu \mathbf{P}_i je tedy rovna průměrné vzdálenosti řídicího bodu od těžišť všech dílčích polygonů, v nichž se bod \mathbf{P}_i zúčastňuje konstrukce křivky. \square

Intuitivně lze vysvětlit vliv takto stanovených vah na tvar aproximační křivky následovně: pokud je průměrná vzdálenost všech řídicích bodů od příslušných těžišť stejná, jsou stejné i váhy

přiřazené jednotlivým řídicím bodům a výsledná křivka prochází v relativně stejné vzdálenosti od všech řídicích bodů. Je-li průměrná vzdálenost řídicího bodu od odpovídajících těžišť větší, je řídicímu bodu přiřazena vyšší váha a výsledná křivka prochází relativně blíže tomuto řídicímu bodu. Modifikace tvaru pomocí těžišťových vah se výrazněji projeví v případě řídicího polygonu s vyšším počtem řídicích bodů nebo řídicích bodů velmi nerovnoměrně rozložených.

Vliv těžišťových vah na tvar bázových funkcí pro $p = 3$ a $n = 6$ můžeme porovnat na obr. 3.7. Vlevo jsou nakresleny grafy B-spline bázových funkcí, vpravo grafy racionálních bázových funkcí. Odpovídající křivky jsou nakresleny na obr. 3.8. Červenou barvou je nakreslena B-spline křivka, modrou barvou NURBS křivka.

Řídicí body na obr. 3.8 jsou rozloženy dosti nerovnoměrně, takže je podle předpokladu průběh racionálních bázových funkcí značně odlišný od průběhu odpovídajících B-spline bázových funkcí. Vysoká maxima racionálních bázových funkcí $R_{3,3}(u)$ a $R_{4,3}(u)$ způsobují zřetelné přiblížení NURBS křivky řídicím bodům \mathbf{P}_3 a \mathbf{P}_4 . Naopak, nižší maxima $R_{2,3}(u)$ a $R_{5,3}(u)$ způsobují oddálení NURBS křivky od řídicích bodů \mathbf{P}_2 a \mathbf{P}_5 .

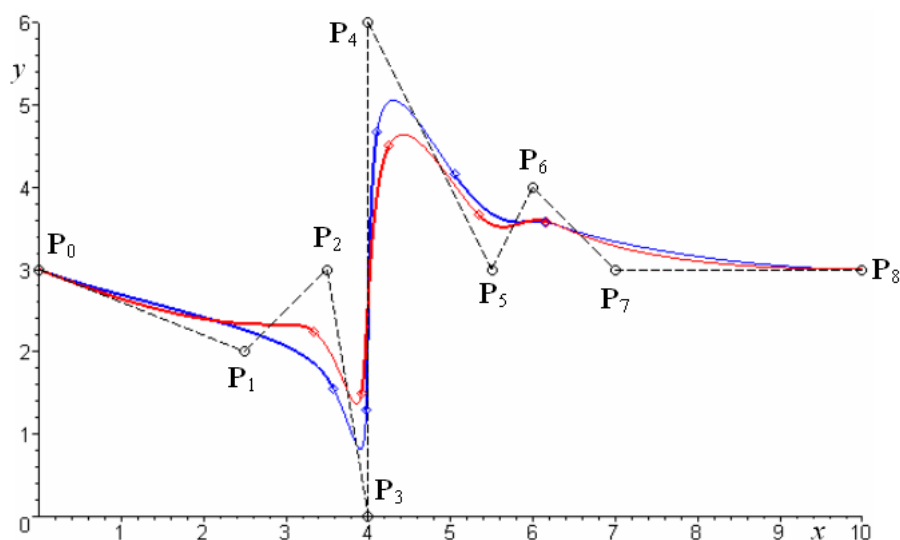


Obr. 3.7: Porovnání B-spline a racionálních bázových funkcí 3. stupně; uzlový vektor uniformní, váhy pro racionální funkce těžišťové

3.3 Uzlový vektor

Mnoho vědeckých prací se věnuje optimalizačním metodám návrhu uzlového vektoru. Tyto metody, podobně jako optimalizační metody stanovení vah, jsou založeny na minimalizaci délky křivky, vzdálenosti bodů křivky od daného pevného bodu [1], apod. Zde se, kromě nejčastěji používaného uniformního uzlového vektoru, budeme věnovat metodě přímého stanovení uzlového vektoru, která opět vychází z geometrických vlastností řídicího polygonu.

V dalším budeme předpokládat, že aktivní část křivky je definována na intervalu $u \in [0, 1]$, neboť pro každý jiný interval $\tilde{u} \in [a, b]$ lze provést změnu parametrizace $u = \frac{\tilde{u}-a}{b-a}$ a normovat tak původní interval $\tilde{u} \in [a, b]$ na interval $u \in [0, 1]$.



Obr. 3.8: Porovnání B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivky 3. stupně; uzlový vektor uniformní, váhy řídicích bodů NURBS křivky těžišťové

3.3.1 Uniformní uzlový vektor

Uniformní uzlový vektor splňuje podmínku stejné délky všech uzlových roztečí a jeho konstrukce je nejjednodušší.

■ **Definice 3.2 – Uniformní uzlový vektor ukotvené aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a stupeň p . Potom je *uniformní uzlový vektor* ukotvené aproximační NURBS křivky dán

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ u_i &= \frac{i-p}{m-2p}, \quad i = p+1, \dots, m-p-1, \\ u_i &= 1, \quad i = m-p, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde m je počet uzlových roztečí (2.5). □

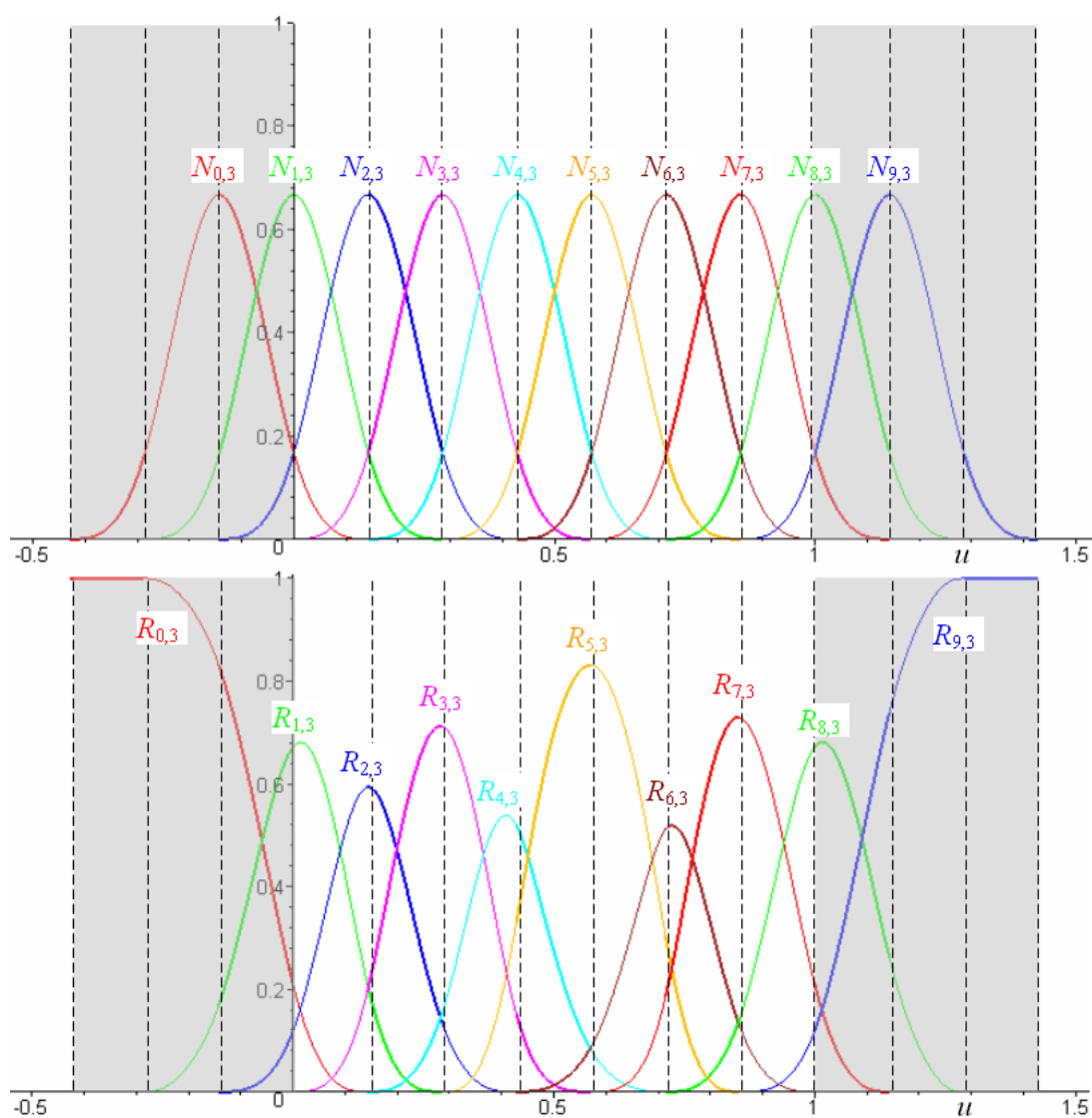
Průběhy básových funkcí a výsledných ukotvených křivek definovaných na uniformním uzlovém vektoru (3.3) jsme viděli např. na obr. 3.7 a obr. 3.8.

■ **Definice 3.3 – Uniformní uzlový vektor otevřené, resp. uzavřené aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a stupeň p . Potom je *uniformní uzlový vektor* otevřené, resp. uzavřené aproximační NURBS křivky dán

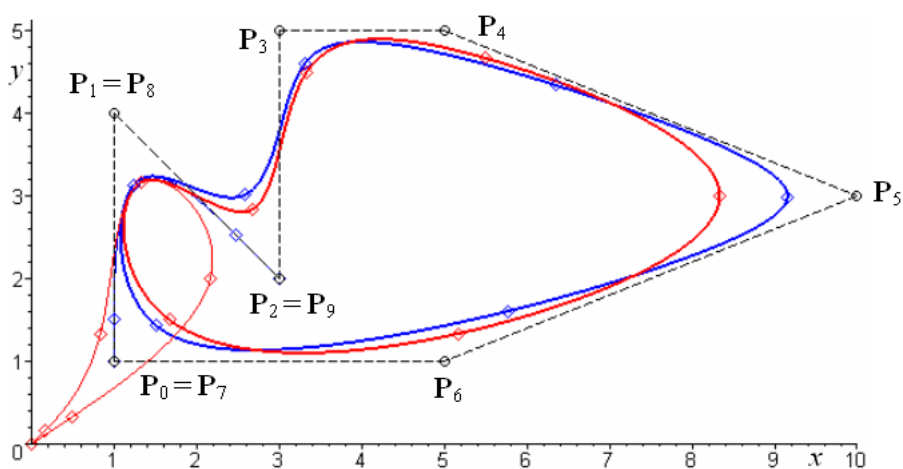
$$u_i = \frac{i-p}{m-2p}, \quad i = 0, \dots, m. \quad (3.4)$$

kde m je počet uzlových roztečí (2.5). □

Průběh B-spline a racionálních básových funkcí uzavřené křivky definované na uniformním uzlovém vektoru (3.4) je nakreslen na obr. 3.9, uzavřená B-spline a NURBS křivka na obr. 3.10. Navazující básově funkce na začátku ($u = 0$) a na konci ($u = 1$) aktivní části křivky jsou nakresleny stejnou barvou.



Obr. 3.9: Porovnání B-spline a racionálních bázových funkcí 3. stupně; $n = 9$, uzlový vektor uniformní, váhy pro racionální funkce těžišťové



Obr. 3.10: Porovnání B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivky 3. stupně; uzlový vektor uniformní, váhy řídicích bodů NURBS křivky těžišťové

3.3.2 Těžišťová metoda stanovení uzlového vektoru

Tato metoda vychází z polohy těžišť dílčích řídicích polygonů $(\mathbf{P}_j)_{j=i-1}^{i+p}$, $i = 1, \dots, n - p$, s $p + 2$ řídicími body, kterým jsou definovány dva sousední segmenty křivky napojené v uzlu u_i a zohledňuje tak polohu řídicích bodů. Uzlový vektor stanovený těžišťovou metodou budeme stručně nazývat *těžišťovým uzlovým vektorem*.

■ **Definice 3.4 – Těžišťový uzlový vektor ukotvené aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a stupeň křivky p . Nechť dále \mathbf{T}_i je těžiště dílčího řídicího polygonu

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{T}_i &= \frac{1}{p+2} \sum_{j=i-1}^{i+p} \mathbf{P}_j, \quad i = 1, \dots, n - p, \\ \mathbf{T}_{n-p+1} &= \mathbf{P}_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Označme

$$l_i = |\mathbf{T}_{i-1}\mathbf{T}_i|, \quad i = 1, \dots, n - p + 1, \quad (3.6)$$

vzdálenost dvou po sobě následujících těžišť (3.5) a

$$L = \sum_{i=1}^{n-p+1} l_i \quad (3.7)$$

součet všech těchto vzdáleností. Potom je *těžišťový uzlový vektor* ukotvené aproximační NURBS křivky dán

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ u_i &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-p} l_j, \quad i = p + 1, \dots, m - p - 1, \\ u_i &= 1, \quad i = m - p, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.8)$$

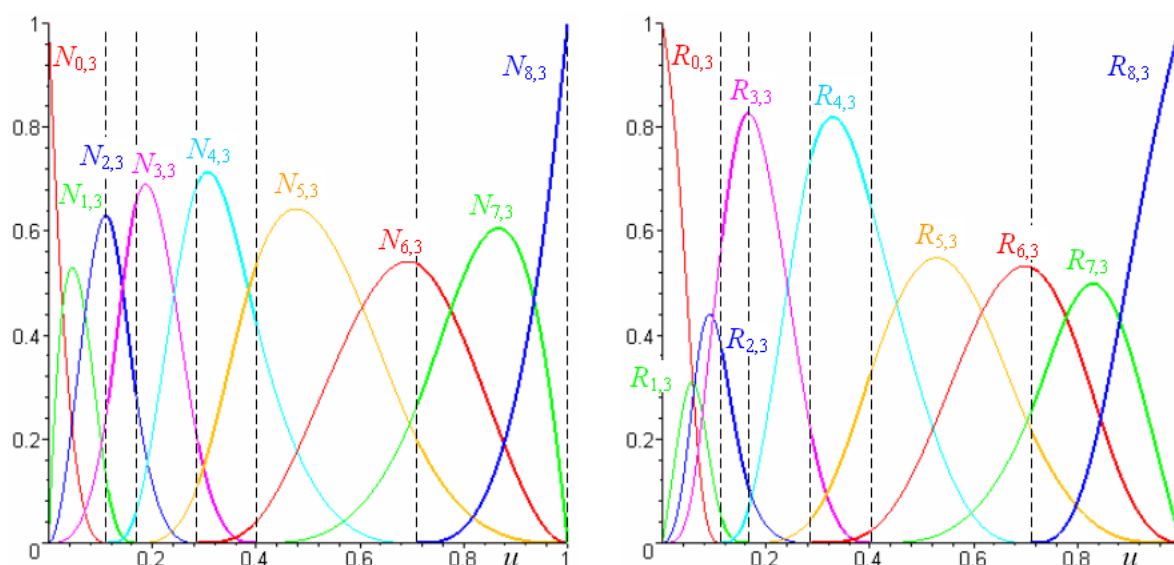
Délka aktivní uzlové rozteče ukotvené aproximační NURBS křivky je tedy úměrná vzdálenosti těžišť dílčích řídicích polygonů tvořených $p - 2$ řídicími body. \square

Na obr. 3.11 jsou nakresleny průběhy B-spline a racionálních bázových funkcí definovaných na těžišťovém uzlovém vektoru pro jinak stejná vstupní data jako na obr. 3.7 a obr. 3.8. Je zřejmé, že tvar bázových funkcí se značně změnil oproti bázovým funkcím definovaným na uniformním uzlovém vektoru, které jsou nakresleny na obr. 3.7.

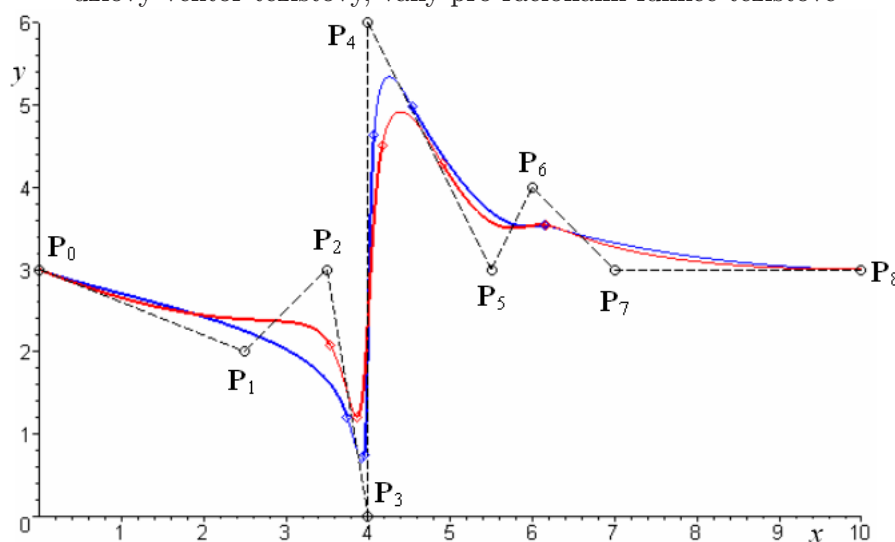
Vliv těžišťového uzlového vektoru na tvar B-spline a NURBS křivky můžeme posoudit na obr. 3.12. Je zřejmé, že změna uzlového vektoru se projevila mnohem výrazněji na tvaru bázových funkcí než na tvaru výsledné křivky.

Výše uvedenou definici 3.4 lze s mírnou modifikací použít i při konstrukci těžišťového uzlového vektoru otevřené B-spline nebo NURBS křivky. Aktivní uzly uzlového vektoru otevřené křivky jsou shodné s aktivními uzly ukotvené křivky, pasivní uzly musíme stanovit jiným způsobem – např. uniformní metodou.

Zásadně jiné jsou ovšem podmínky při konstrukci uzavřené B-spline nebo NURBS křivky definované na libovolném neuniformním uzlovém vektoru. Aby se B-spline, resp. NURBS křivka skutečně uzavřela, musí se počátečních p pasivních uzlových roztečí uzlového vektoru shodovat



Obr. 3.11: Porovnání B-spline a racionálních bázových funkcí 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, váhy pro racionální funkce těžišťové



Obr. 3.12: Porovnání B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivky 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, váhy řídicích bodů NURBS křivky těžišťové

s koncovými p aktivními uzlovými roztečemi a koncových p pasivních uzlových roztečí se musí shodovat s počátečními p aktivními uzlovými roztečemi.

Než uvedeme definici těžišťového uzlového vektoru uzavřené aproximační NURBS křivky, musíme si uvědomit, že krajní aktivní uzly $u_p = 0$ a $u_{m-p} = 1$ uzavřené křivky od sebe oddělují krajní aktivní segmenty křivky, a proto zavedeme *rozšířený řídicí polygon*.

- Definice 3.5 – Rozšířený řídicí polygon uzavřené aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán stupeň p , řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$ splňující podmínku (2.44) pro uzavřenou NURBS křivku. Potom je *rozšířený řídicí polygon* $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^{n+2(p-2)}$

dán následovně:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_i &= \mathbf{P}_{p+2-i}, \quad i = 0, \dots, p-3, \\ \tilde{\mathbf{P}}_i &= \mathbf{P}_{i-p+2}, \quad i = p-2, \dots, n+p-2, \\ \tilde{\mathbf{P}}_i &= \mathbf{P}_{i-n+1}, \quad i = n+p-1, \dots, n+2(p-2).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Rozšířený řídicí polygon je původní řídicí polygon, který je na obou koncích rozšířen o dalších $p-2$ opakujících se řídicích bodů. \square

Nyní můžeme uvést definici těžišťového uzlového vektoru uzavřené aproximační NURBS křivky.

■ **Definice 3.6 – Těžišťový uzlový vektor uzavřené aproximační NURBS křivky.** Nechť je dán stupeň p , řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n$ a váhy řídicích bodů $W = (w_i)_{i=0}^n$ splňující podmínku (2.44) pro uzavřenou NURBS křivku. Nechť \mathbf{T}_i je těžiště dílčího řídicího polygonu

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{p+2} \sum_{j=i}^{i+p+1} \tilde{\mathbf{P}}_j, \quad i = 0, \dots, n-p+1, \quad (3.10)$$

kde $(\tilde{\mathbf{P}}_i)_{i=0}^{n+2(p-2)}$ je rozšířený řídicí polygon (3.9). Potom je *těžišťový uzlový vektor* uzavřené aproximační NURBS křivky dán

$$\begin{aligned}u_i &= -\frac{1}{L} \sum_{j=m-2(p+1)+i}^{m-2p} l_j, \quad i = 0, \dots, p-1, \\ u_p &= 0, \\ u_i &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-p} l_j, \quad i = p+1, \dots, m-p, \\ u_i &= 1 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-n+1} l_j, \quad i = m-p+1, \dots, m,\end{aligned}\quad (3.11)$$

kde l_j , $j = 1, \dots, n-p$, je vzdálenost (3.6) dvou po sobě následujících těžišť (3.10) a L je součet všech těchto vzdáleností (3.7). \square

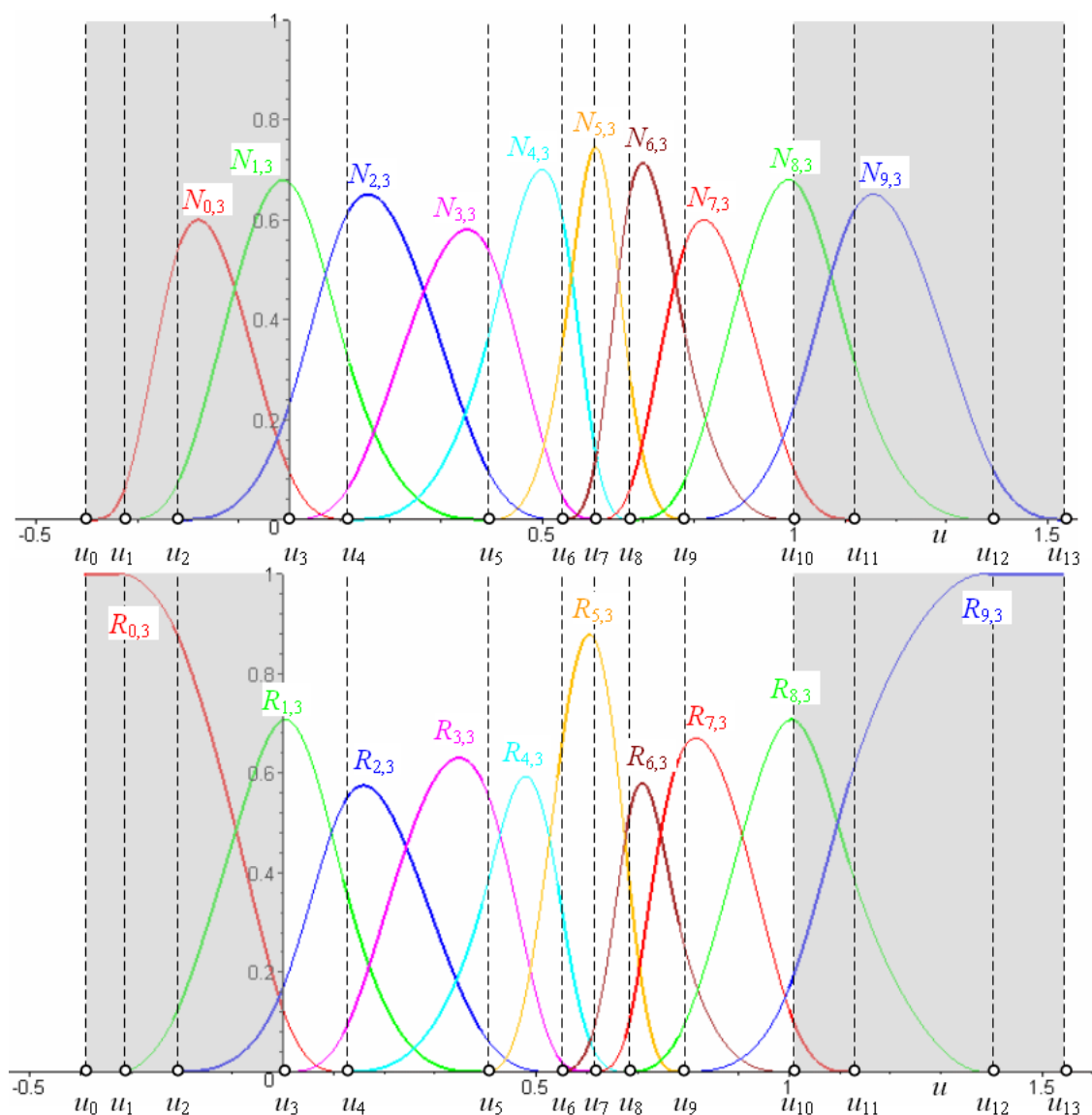
Na obr. 3.13 je uveden příklad B-spline, resp. racionálních bázových funkcí definovaných na těžišťovém uzlovém vektoru pro uzavřenou B-spline, resp. NURBS křivku 3. stupně zadanou stejným řídicím polygonem jako na obr. 3.10. Navazující bázové funkce na začátku ($u = 0$) a na konci ($u = 1$) aktivní části křivky jsou nakresleny stejnou barvou a pro lepší orientaci jsou zde jednotlivé uzly znázorněny symbolem \circ na ose u .

Povšimněme si shodné délky následujících uzlových roztečí na obr. 3.13:

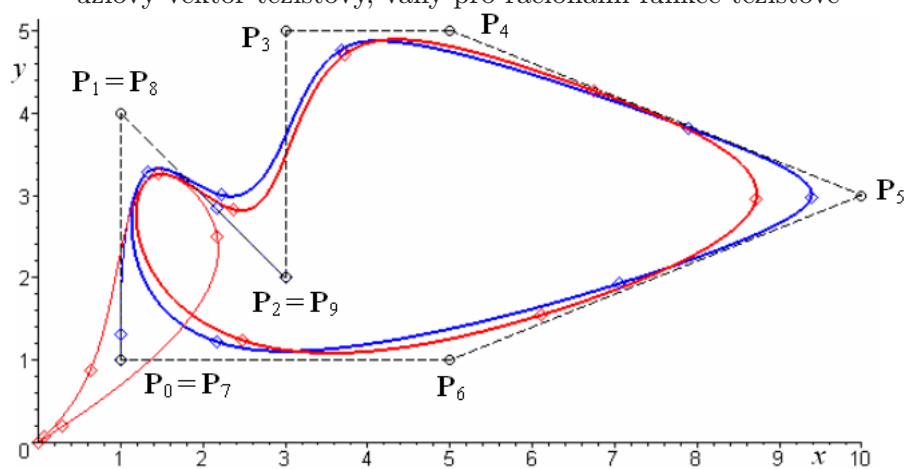
$$\begin{aligned}u_1 - u_0 &= u_8 - u_7, \quad u_2 - u_1 = u_9 - u_8, \quad u_3 - u_2 = u_{10} - u_9, \\ u_{11} - u_{10} &= u_4 - u_3, \quad u_{12} - u_{11} = u_5 - u_4, \quad u_{13} - u_{12} = u_6 - u_5,\end{aligned}$$

které, společně s opakujícími se příslušnými řídicími body, zajišťují uzavření křivky.

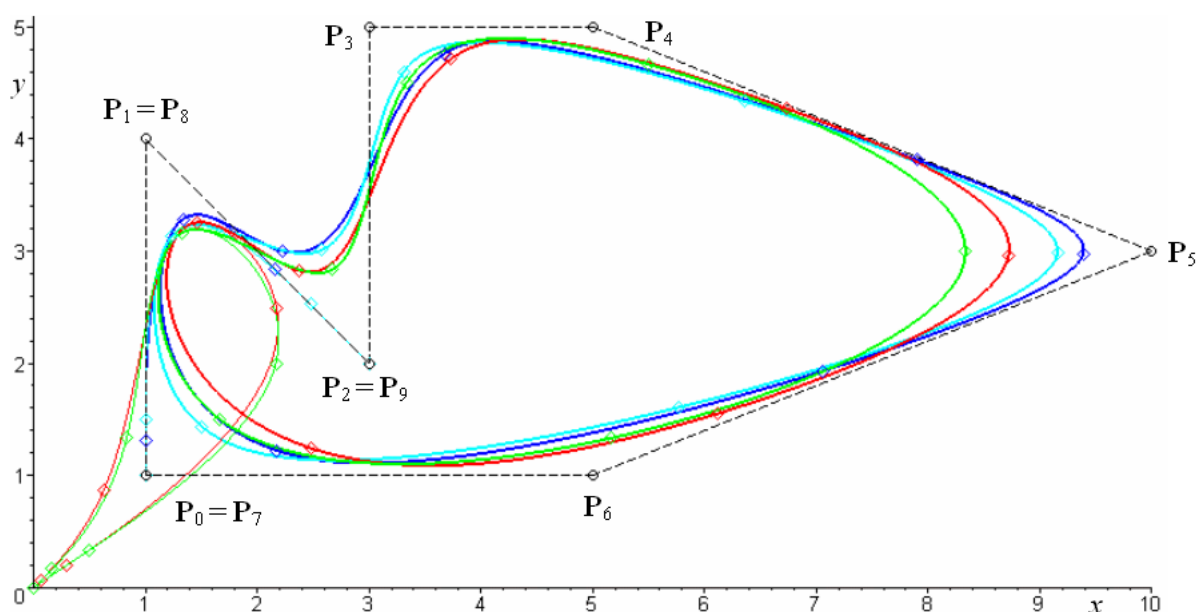
Pokud vykreslíme všechny křivky z obr. 3.10 a obr. 3.14 do jednoho grafu, který je na obr. 3.15, můžeme porovnat jak vliv konstrukce uzlového vektoru, tak i vliv vah na tvar výsledných křivek. Je zřejmé, že více se těžišťový uzlový vektor i těžišťové váhy řídicích bodů projeví tam, kde jsou řídicí body nerovnoměrně rozloženy.



Obr. 3.13: Porovnání B-spline a racionálních bázových funkcí pro uzavřenou křivku 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, váhy pro racionální funkce těžišťové



Obr. 3.14: Porovnání uzavřené B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivky 3. stupně; $n = 9$, uzlový vektor těžišťový, váhy řídicích bodů NURBS křivky těžišťové



Obr. 3.15: Porovnání B-spline a NURBS uzavřených křivek 3. stupně; $n = 9$

- B-spline křivka, uzlový vektor uniformní (zelená),
- B-spline křivka, uzlový vektor těžištvý (červená),
- NURBS křivka, uzlový vektor uniformní, váhy těžištvé (světle modrá),
- NURBS křivka, uzlový vektor těžištvý, váhy těžištvé (modrá)

3.3.3 Efekt vícenásobných uzlů

S důsledkem vícenásobných krajních uzlů jsme se seznámili v části 2.3.2 Ukotvená křivka. Zde se budeme zabývat vlivem vícenásobného vnitřního uzlu na tvar B-spline a racionálních bázových funkcí a na tvar výsledné B-spline a NURBS křivky.

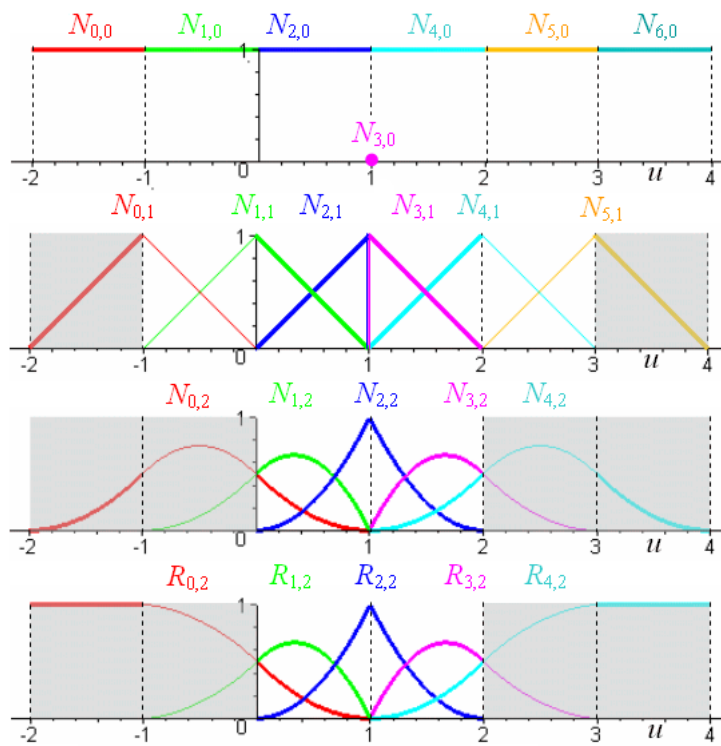
Efekt vícenásobného vnitřního uzlu si ukážeme na příkladu výpočtu bázových funkcí 2. stupně pro $n = 4$ a uzlový vektor otevřené křivky ve tvaru

$$U = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7) = (-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4).$$

Nulová délka uzlové rozteče $[u_3, u_4] = [1, 1]$ se projeví nulovou B-spline bázovou funkcí $N_{3,0}(u)$, viz obr. 3.16. Důsledek je následující: B-spline bázová funkce $N_{2,2}(u)$, resp. racionální bázová funkce $R_{2,2}(u)$ nabývá pro $u = u_3 = u_4 = 1$ hodnoty jedna a všechny ostatní bázové funkce hodnoty nula. Díky tomu B-spline, resp. NURBS křivka prochází řídicím bodem \mathbf{P}_2 , který je s B-spline bázovou funkcí $N_{2,2}(u)$, resp. s racionální bázovou funkcí $R_{2,2}(u)$ asociován.

Průběh otevřené B-spline, resp. NURBS křivky pro uzlový vektor $U = (-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4)$ je nakreslen červenou barvou na obr. 3.17, resp. obr. 3.18. Pro porovnání je v obou obrázcích modrou barvou nakreslena B-spline, resp. NURBS křivka definovaná na uniformním uzlovém vektoru $U = (-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$. Je zřejmé, že dvojnásobný uzel vede na snížení počtu aktivních segmentů B-spline, resp. NURBS křivky, neboť pro $u = u_3 = u_4$ je $\mathbf{C}(u_3) = \mathbf{C}(u_4)$, a tím i na snížení spojitosti B-spline, resp. NURBS křivky v bodech $\mathbf{C}(u_3)$, resp. $\mathbf{C}(u_4)$. Původní C^1 spojitost křivky se v těchto bodech snižuje na C^0 spojitost.

Opakování uzlů se využívá pro vytvoření bodu vratu (ostrého rohu) na jinak plynulé křivce nebo při specifické konfiguraci řídicích bodů a jejich vah k modelování kuželoseček (podrobně viz [17]).



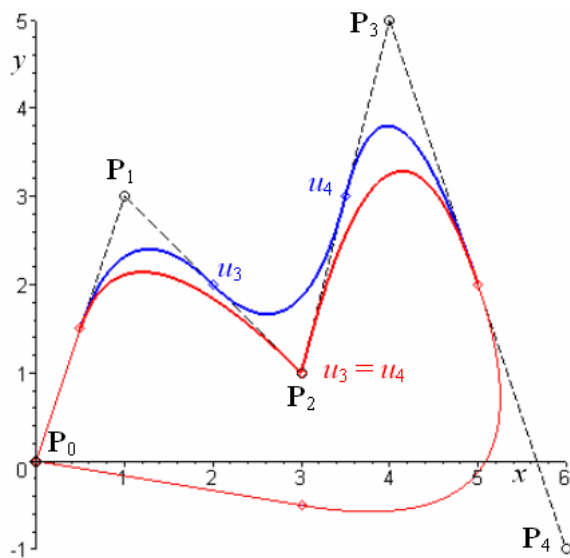
Obr. 3.16: B-spline bázové funkce multého až 2. stupně a racionální bázové funkce 2. stupně;
 $n = 4, U = (-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4)$,
 váhy pro racionální funkce $W = (1, 1, 1, 1, 1)$

$$U = (-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4)$$

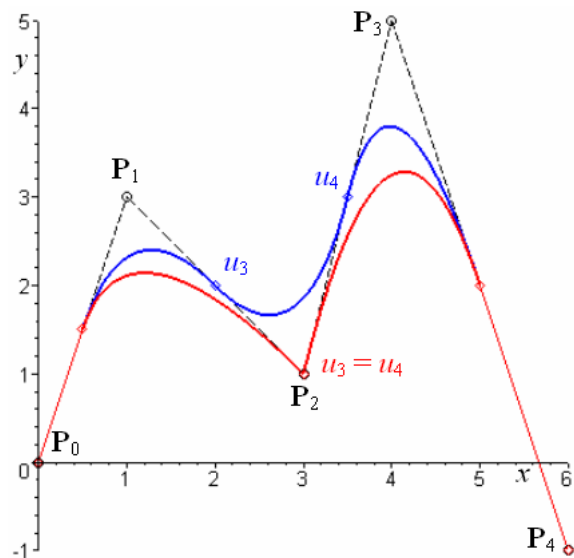
$$U = (-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$U = (-2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 4)$$

$$U = (-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$



Obr. 3.17: B-spline křivky 2. stupně;
 $n = 4, p = 2$



Obr. 3.18: NURBS křivky 2. stupně;
 $n = 4, p = 2, W = (1, 1, 1, 1, 1)$

Kapitola 4

Interpolační NURBS křivky

Doposud jsme uvažovali aproximační křivky, kde křivka nemusí zadanými řídicími body procházet. Tato metoda je velmi úspěšná při vyhlazení naměřených dat zatížených značnou chybou měření. Pokud však pracujeme s přesnými daty, není účelné konstruovat aproximační křivku, ale naopak křivku interpolační, která danými body, v tomto případě tzv. *definičními* body, prochází.

Vektorovou rovnici interpolační B-spline, resp. NURBS křivky nelze napsat přímo. Stále máme k dispozici pouze analytické vyjádření aproximační křivky dle (2.2), resp. (2.4). Známe sice přesnou polohu definičních bodů \mathbf{Q}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, které leží na křivce, ale neznáme polohu řídicích bodů \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$, které vystupují v rovnicích (2.2), resp. (2.4). Je tedy nutné nejprve sestavit soustavu rovnic, jejímž řešením jsou právě souřadnice neznámých řídicích bodů, a teprve poté můžeme napsat vektorovou rovnici interpolační křivky.

Úloha zkonstruovat interpolační B-spline, resp. NURBS křivku je inverzní úlohou k úloze zkonstruovat aproximační B-spline, resp. NURBS křivku.

Rozlišujeme dva různé přístupy k problému interpolace. V prvním případě vycházíme z podmínky, že počet řídicích bodů $n + 1$ je stejný jako počet definičních bodů $\tilde{n} + 1$. Tento způsob interpolace označíme jako *prostou* interpolaci a výslednou interpolační křivku jako *prostou* interpolační křivku.

Druhý přístup vychází z logického požadavku, aby výsledná interpolační křivka měla právě tolik aktivních segmentů, kolik je ramen definičního polygonu \tilde{n} , a aby uzly oddělující jednotlivé segmenty křivky ležely přímo v definičních bodech. Tento způsob interpolace označíme jako *uzlovou* interpolaci a výslednou interpolační křivku jako *uzlovou* interpolační křivku. Jak uvidíme dále, počet řídicích bodů uzlové interpolační křivky bude vyšší než počet zadaných definičních bodů a pro výpočet souřadnic řídicích bodů bude třeba definovat dodatečné podmínky.

Při matematickém modelování interpolační křivky je třeba ještě zvážit úlohu vah řídicích bodů. U aproximační křivky má vyšší váha řídicího bodu za následek přiblížení křivky k tomuto řídicímu bodu. V případě interpolační křivky, kdy je poloha řídicího bodu neznámá, je třeba efekt vah chápat opačně: zvýší-li se váha řídicího bodu interpolační křivky, přiblíží se řídicí bod více k definičnímu polygonu. To vede ve svém důsledku k plynulejšímu průběhu interpolační křivky a vhodně stanovené váhy řídicích bodů omezí nežádoucí překmity a zvlnění výsledné křivky.

Návrh vah řídicích bodů interpolační křivky nemůže probíhat interaktivně. Neznámým řídicím bodům musíme *předem* přiřadit vhodné váhy, abychom mohli určit racionální bázové funkce a sestavit soustavu rovnic pro výpočet souřadnic řídicích bodů interpolační NURBS křivky. Jakmile bychom dodatečně změnilí váhu řídicího bodu interpolační křivky, změnil se i příslušná racionální bázová funkce. Tím pádem by část interpolační křivky, která odpovídá uzlovým roztečím, na kterých je změněná racionální bázová funkce nenulová, již neprocházela zadanými definičními body.

Z výše uvedeného důvodu se budeme zabývat přímou metodou stanovení vah řídicích bodů pouze u prosté interpolační křivky. Pokud je počet řídicích i definičních bodů stejný, lze při stanovení vah vyjít z geometrických vlastností definičního polygonu a použít modifikovanou těžišťovou metodu, která byla popsána v kap. 3 Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek. U uzlové interpolace, kde je počet řídicích bodů vyšší než počet zadaných definičních bodů, budeme uvažovat váhy všech řídicích bodů vždy jednotkové.

4.1 Prostá interpolace

■ **Definice 4.1 – Vektor parametrizace.** Nechť H je neklesající posloupnost $\tilde{n} + 1$ reálných čísel $h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\tilde{n}}$. Potom čísla h_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, nazýváme *hodnotami parametru*, množinu $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ nazýváme *vektorem parametrizace* a polootevřený interval $[h_i, h_{i+1}]$ nazýváme *i -tou roztečí vektoru parametrizace*.

Mají-li všechny rozteče vektoru parametrizace stejnou délku, tj.

$$h_{i+1} - h_i = \Delta h = \text{konst.}, \quad i = 0, \dots, \tilde{n} - 1, \quad (4.1)$$

nazýváme vektor parametrizace *uniformní*. Pokud je délka roztečí vektoru parametrizace různá, hovoříme o *neuniformním* vektoru parametrizace. \square

■ **Definice 4.2 – Prostá interpolační B-spline křivka.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$ a stupeň křivky p . Potom je vektorová rovnice prosté interpolační B-spline křivky $\mathbf{C}(u)$ stupně p následující:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [u_0, u_m], \quad (4.2)$$

kde $N_{i,p}(u)$, $u \in [u_0, u_m]$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou B-spline bázové funkce dle (2.1). \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou řídicí body, jejichž souřadnice obdržíme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{C}(h_i) = \sum_{j=0}^{\tilde{n}} N_{j,p}(h_i) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, \dots, \tilde{n}, \quad (4.3)$$

jejíž maticový tvar je následující:

$$\begin{pmatrix} N_{0,p}(h_0) & N_{1,p}(h_0) & \cdots & N_{\tilde{n},p}(h_0) \\ N_{0,p}(h_1) & N_{1,p}(h_1) & \cdots & N_{\tilde{n},p}(h_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{0,p}(h_{\tilde{n}}) & N_{1,p}(h_{\tilde{n}}) & \cdots & N_{\tilde{n},p}(h_{\tilde{n}}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\tilde{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

\square

■ **Definice 4.3 – Prostá interpolační NURBS křivka.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$ a stupeň křivky p . Nechť jsou dále známy kladné váhy $W = (w_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$. Potom je vektorová rovnice prosté interpolační NURBS křivky $\mathbf{C}(u)$ stupně p následující:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i, \quad u \in [u_0, u_m], \quad (4.5)$$

kde $R_{i,p}(u)$, $u \in [u_0, u_m]$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou racionální bázové funkce dle (2.3). \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou řídicí body, které obdržíme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{C}(h_i) = \sum_{j=0}^{\tilde{n}} R_{j,p}(h_i) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, \dots, \tilde{n}, \quad (4.6)$$

jejíž maticový tvar je následující:

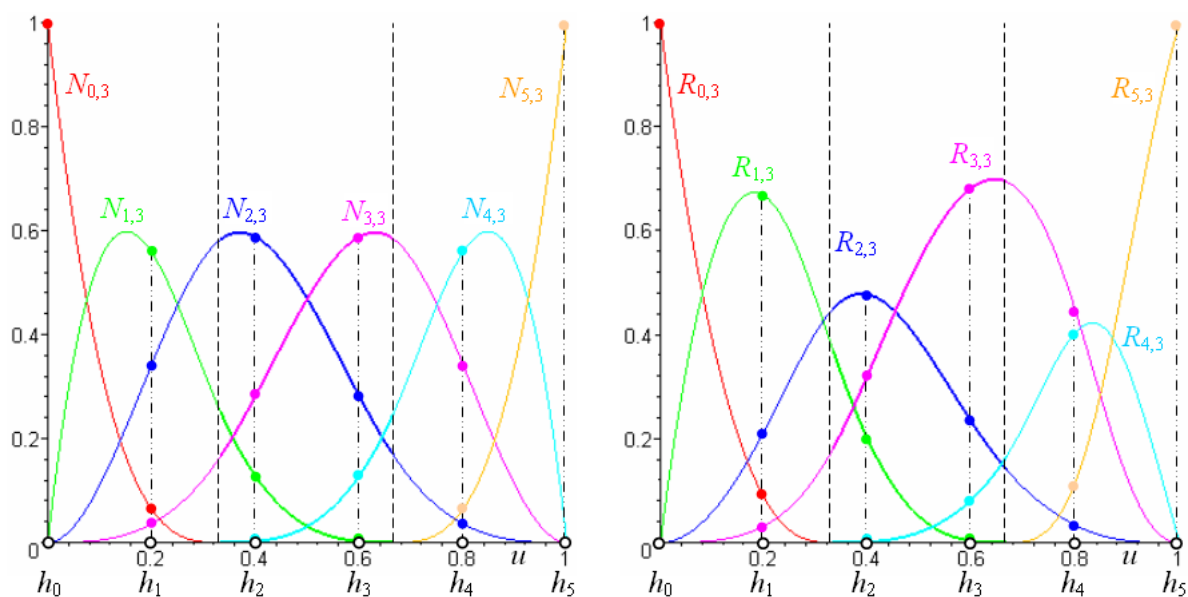
$$\begin{pmatrix} R_{0,p}(h_0) & R_{1,p}(h_0) & \cdots & R_{\tilde{n},p}(h_0) \\ R_{0,p}(h_1) & R_{1,p}(h_1) & \cdots & R_{\tilde{n},p}(h_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{0,p}(h_{\tilde{n}}) & R_{1,p}(h_{\tilde{n}}) & \cdots & R_{\tilde{n},p}(h_{\tilde{n}}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\tilde{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

□

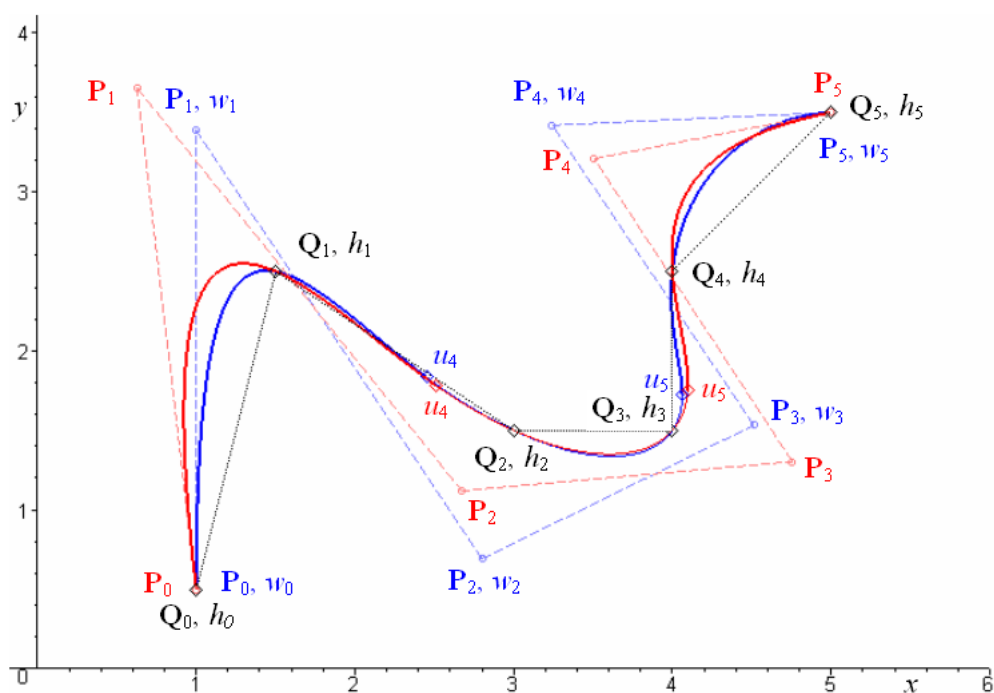
Pokud bude počet definičních bodů větší než je požadovaný stupeň křivky, je výsledná prostá interpolační křivka tvořena $m - 2p$ aktivními segmenty, kde $m = n + p + 1$ je počet všech uzlových roztečí uzlového vektoru.

Princip prosté interpolace je naznačen na obr. 4.1 a obr. 4.2. Postup konstrukce prosté interpolační ukotvené B-spline, resp. NURBS křivky je následující:

1. Pro zadaný definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ určíme vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ dle def. 4.1, tj. přiřadíme jednotlivým definičním bodům hodnoty parametru, ve kterých bude interpolační křivka procházet právě definičními body. V příkladu na obr. 4.1 a obr. 4.2 je uvažován uniformní vektor parametrizace s $h_0 = 0$ a $h_{\tilde{n}} = 1$. Dalšími metodami určení vektoru parametrizace se zabývá část 5.4 Uzlový vektor a vektor parametrizace. Jednotlivé hodnoty parametru h_i jsou v grafu bázových funkcí na obr. 4.1 vyznačeny symbolem \circ na ose u .
2. Pro zvolený stupeň křivky p a druh křivky určíme uzlový vektor $U = (u_i)_{i=0}^m$. Zde uvažujeme 3. stupeň a uniformní uzlový vektor. Další metody stanovení uzlového vektoru interpolační křivky jsou popsány v části 5.4 Uzlový vektor a vektor parametrizace.
3. V případě konstrukce NURBS křivky potřebujeme znát váhy řídicích bodů. V našem příkladu jsou váhy řídicích bodů NURBS křivky stanoveny postupem uvedeným v části 5.3.1 Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů.
4. Nalezneme vyjádření B-spline bázových funkcí $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, p -tého stupně dle rov. (2.1) definovaných na uzlovém vektoru U , resp. racionálních bázových funkcí $R_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, p -tého stupně dle rov. (2.3) definovaných na uzlovém vektoru U .
5. Vypočteme funkční hodnoty B-spline, resp. racionálních bázových funkcí pro všechny hodnoty parametru $u = h_i$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, z vektoru parametrizace. Tyto funkční hodnoty jsou v grafech B-spline a racionálních bázových funkcí vyznačeny symboly \bullet v barvě příslušné funkce, souvislost s hodnotou parametru h_i je vyznačena čerchovanou čarou.
6. Sestavíme soustavu rovnic (4.4) pro výpočet souřadnic řídicích bodů \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, B-spline křivky, resp. soustavu rovnic (4.7) pro výpočet souřadnic řídicích bodů \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, NURBS křivky.



Obr. 4.1: B-spline a racionální bázové funkce ukotvené prosté interpolační křivky; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní, váhy pro racionální funkce těžišťové



Obr. 4.2: Ukotvená prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní, váhy pro racionální funkce těžišťové

7. B-spline, resp. NURBS křivka je dána vektorovou rovnicí (2.2), resp. (2.4). Na obr. 4.2 je B-spline křivka a její řídicí polygon nakreslen červenou barvou, NURBS křivka a její řídicí polygon je nakreslen modrou barvou.

Z průběhu křivek na obr. 4.2 je zřejmé, že předpokládaný efekt různých vah řídicích bodů na tvar výsledné interpolační křivky se uplatnil. Vyšší váha řídicího bodu, tj. vyšší maximum racionální báze funkce oproti maximum příslušné B-spline funkce, má za následek menší vzdálenost tohoto řídicího bodu od definičního bodu. To ve svém důsledku potlačuje možnost vzniku oscilační křivky a vede k jejímu plynulejšímu průběhu.

Naopak, nižší váha řídicího bodu oddaluje řídicí bod od definičního polygonu a umožňuje tak vznik často velmi nežádoucích překmitů křivky mezi jednotlivými definičními body. Je zřejmé, že vhodně stanovené váhy řídicích bodů interpolační křivky jsou efektivním tvarovacím nástrojem. Blíže se touto problematikou zabývá část 5.3 Váhy řídicích bodů interpolační křivky a celá kap. 6 Porovnání přesnosti interpolačních metod.

Detailní postup konstrukce prosté interpolační B-spline i NURBS křivky je uveden v Příloze B. Zdrojový kód některých algoritmů je k dispozici v [13].

4.2 Uzlová interpolace

Základním požadavkem uzlové interpolace je, aby počet aktivních segmentů interpolační křivky (počet aktivních uzlových roztečí) byl shodný s počtem ramen definičního polygonu \tilde{n} a aby body křivky, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů, byly právě definiční body. Vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ je potom vybranou (aktivní) částí uzlového vektoru $U = (u_i)_{i=0}^m$.

Abychom mohli sestavit soustavu rovnic pro výpočet souřadnic řídicích bodů uzlové interpolační křivky, musíme nejprve znát počet řídicích bodů, který bude v tomto případě různý od počtu definičních bodů. Víme, že pro daný stupeň p je počet pasivních uzlových roztečí $2p$. Celkový počet uzlových roztečí m uzlového vektoru U je tedy roven

$$m = \tilde{n} + 2p. \quad (4.8)$$

I pro uzlovou interpolační křivku musí platit vztah (2.5), ze kterého vypočteme počet ramen n řídicího polygonu

$$n = m - p - 1. \quad (4.9)$$

Do rov. (4.9) dosadíme za m z rov. (4.8) a obdržíme:

$$n = \tilde{n} + p - 1. \quad (4.10)$$

K soustavě (4.4), eventuálně (4.7) při různých vahách řídicích bodů, je tedy třeba přidat $p - 1$ dodatečných rovnic, většinou okrajových podmínek. Okrajové podmínky pro uzlovou interpolaci vyjadřují nejčastěji geometrické požadavky, které lze rozdělit do dvou skupin: podmínka uzavřenosti křivky a zadané vektory derivací interpolační křivky v jejích krajních bodech.

4.2.1 Podmínka uzavřenosti křivky

Učiňme nejprve několik úvah. Pro definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} \geq 3$, uzavřené interpolační křivky musí platit $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$. Neznámý řídicí polygon musí umožnit konstrukci uzavřené křivky, což znamená, že po \tilde{n} řídicích bodech, kde $\mathbf{P}_{\tilde{n}} = \mathbf{P}_0$, se musí ještě dalších $p - 1$ řídicích bodů opakovat. Řídicí polygon, který má podle (4.10) celkem $n = \tilde{n} + p - 1$ řídicích bodů, má potom následující tvar:

$$(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{p-1}, \dots, \mathbf{P}_{\tilde{n}} = \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{\tilde{n}+1} = \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{p-1}), \quad (4.11)$$

přičemž rovnosti

$$\mathbf{P}_{\tilde{n}+1} = \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_{\tilde{n}+2} = \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{p-1} \quad (4.12)$$

představují $p-1$ potřebných okrajových podmínek pro konstrukci uzavřené uzlové křivky. Uzlový vektor uzavřené uzlové křivky má

$$m = n + p + 1 = \tilde{n} + 2p \quad (4.13)$$

uzlových roztečí. Prvních p a posledních p uzlových roztečí je pasivních, aktivní část křivky připadá na vnitřních \tilde{n} uzlových roztečí. Protože aktivních uzlových roztečí je stejný počet jako ramen definičního polygonu, může být vektor parametrizace $H = (h_0, \dots, h_{\tilde{n}})$ vybranou (aktivní) částí uzlového vektoru:

$$\begin{aligned} U = (u_i)_{i=0}^m &= (u_0, \dots, u_{p-1}, u_p, \dots, u_{m-p}, u_{m-p+1}, \dots, u_m) = \\ &= (u_0, \dots, u_{p-1}, h_0, \dots, h_{\tilde{n}}, u_{m-p+1}, \dots, u_m). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nyní můžeme uvést definici uzavřené interpolační křivky.

■ **Definice 4.4 – Uzavřená interpolační B-spline křivka.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} \geq 3$, pro který platí $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, stupeň křivky p a vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, který je vybranou částí uzlového vektoru U splňující rov. (4.14). Potom je uzavřená interpolační B-spline křivka dána vektorovou rovnicí (2.2), kde $N_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou B-spline bázové funkce (2.1) a \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$, jsou řídicí body, které obdržíme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{C}(h_i) = \sum_{j=0}^{p-1} [N_{j,p}(h_i) + N_{\tilde{n}+j,p}(h_i)] \mathbf{P}_j + \sum_{j=p}^{\tilde{n}-1} N_{j,p}(h_i) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, \dots, \tilde{n} - 1. \quad (4.15)$$

□

■ **Definice 4.5 – Uzavřená interpolační NURBS křivka.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, $\tilde{n} \geq 3$, pro který platí $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, stupeň křivky p , vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, který je vybranou částí uzlového vektoru U splňující rov. (4.14) a kladné váhy $W = (w_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, které splňují podmínku

$$w_{\tilde{n}} = w_0, \quad w_{\tilde{n}+1} = w_1, \dots, w_n = w_{p-1}. \quad (4.16)$$

Potom je uzavřená interpolační NURBS křivka dána vektorovou rovnicí (2.4), kde $R_{i,p}(u)$, $i = 0, \dots, n$, jsou racionální bázové funkce (2.3) a \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$, jsou řídicí body, které obdržíme řešením soustavy rovnic

$$\mathbf{C}(h_i) = \sum_{j=0}^{p-1} [R_{j,p}(h_i) + R_{\tilde{n}+j,p}(h_i)] \mathbf{P}_j + \sum_{j=p}^{\tilde{n}-1} R_{j,p}(h_i) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, \dots, \tilde{n} - 1. \quad (4.17)$$

□

Velmi často se uvažuje $p = 3$ a uniformní vektor parametrizace ve tvaru

$$H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}} = \left(0, \frac{1}{\tilde{n}}, \frac{2}{\tilde{n}}, \dots, \frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}}, 1 \right). \quad (4.18)$$

Odpovídající uniformní uzlový vektor uzavřené křivky 3. stupně má potom tvar:

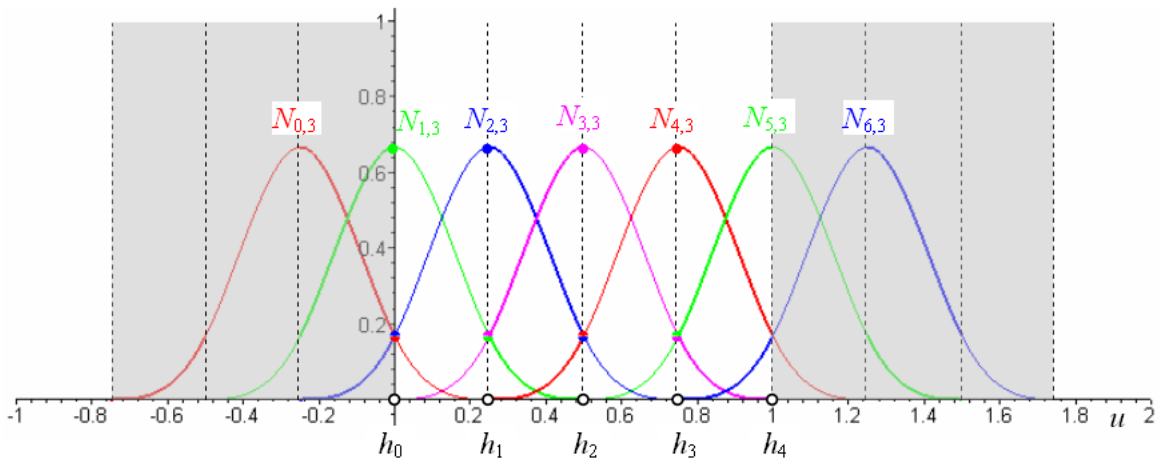
$$U = (u_i)_{i=0}^m = \left(-\frac{3}{\tilde{n}}, -\frac{2}{\tilde{n}}, -\frac{1}{\tilde{n}}, 0, \frac{1}{\tilde{n}}, \frac{2}{\tilde{n}}, \dots, \frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}}, 1, \frac{\tilde{n}+1}{\tilde{n}}, \frac{\tilde{n}+2}{\tilde{n}}, \frac{\tilde{n}+3}{\tilde{n}} \right). \quad (4.19)$$

Soustava rovnic (4.15) pro výpočet neznámých řídicích bodů uzavřené interpolační B-spline křivky 3. stupně se v takovém případě zjednoduší následovně:

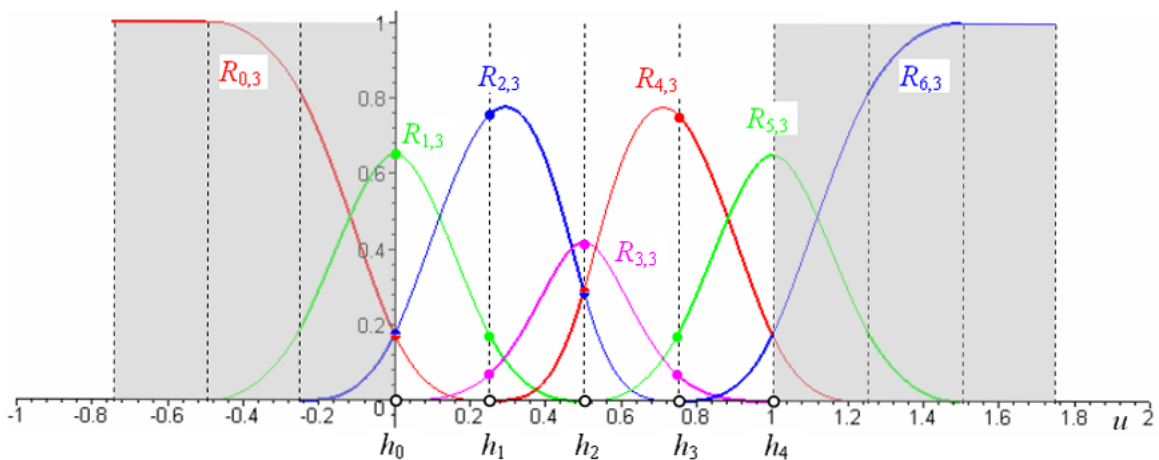
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{\tilde{n}-3} \\ \mathbf{P}_{\tilde{n}-2} \\ \mathbf{P}_{\tilde{n}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}-3} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}-2} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Postup konstrukce uzavřené interpolační B-spline, resp. NURBS křivky probíhá podle postupu na str. 69, pouze je třeba při sestavování matice soustavy respektovat specifika uzavřené křivky, tedy návaznost básových funkcí.

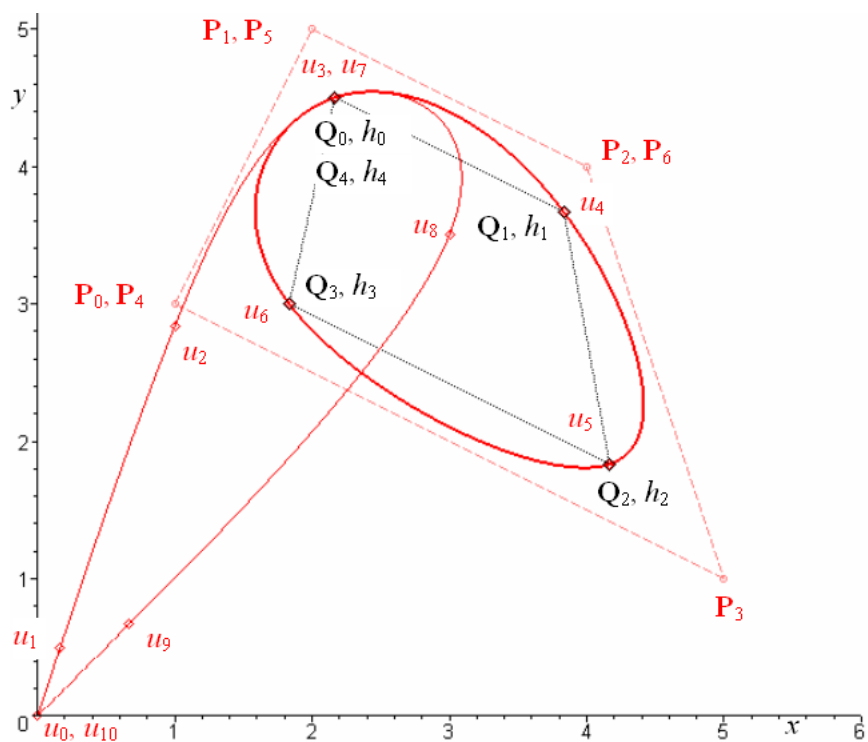
Na obr. 4.3, resp. obr. 4.4 je příklad B-spline, resp. racionálních básových funkcí pro uzavřenou křivku zadanou pěti definičními body ($\tilde{n} = 4$, $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}_0$). Výsledné křivky jsou zobrazeny na obr. 4.5, resp. obr. 4.6.



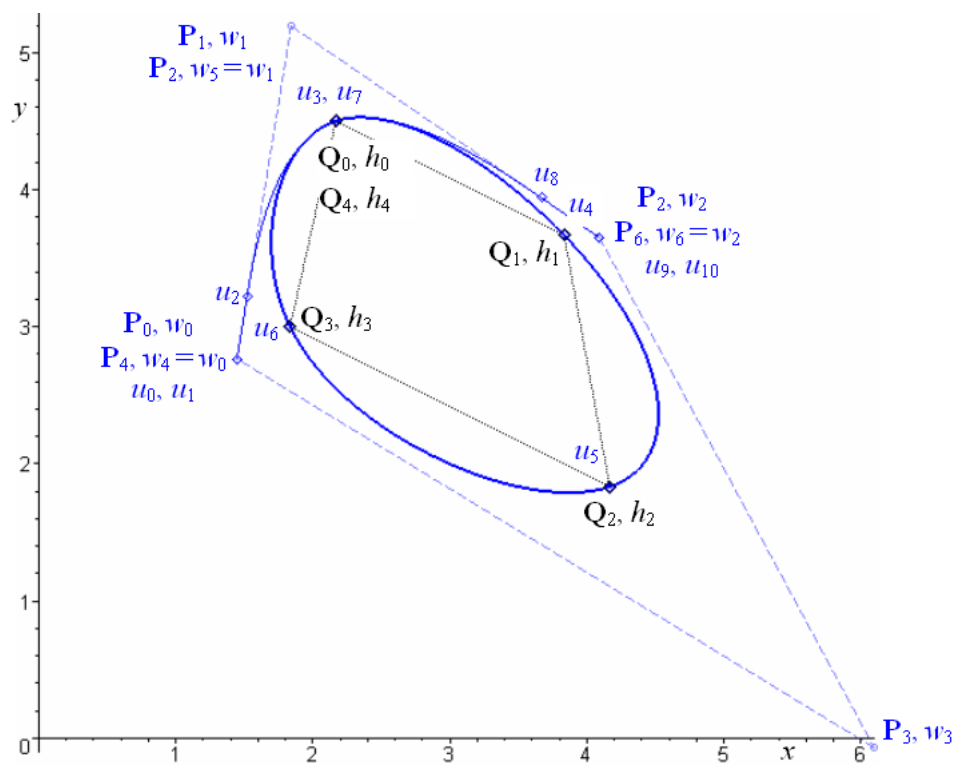
Obr. 4.3: B-spline básová funkce uzavřené interpolační křivky;
 $\tilde{n} = 4$, $n = 6$, $p = 3$, uzlový vektor i vektor parametrizace uniformní



Obr. 4.4: Racionální básová funkce uzavřené interpolační křivky;
 $\tilde{n} = 4$, $n = 6$, $p = 3$, uzlový vektor i vektor parametrizace uniformní, váhy těžiškové



Obr. 4.5: Uzavřená interpolační B-spline křivka;
 $\tilde{n} = 4$, $n = 6$, $p = 3$, uzlový vektor i vektor parametrizace uniformní



Obr. 4.6: Uzavřená interpolační NURBS křivka;
 $\tilde{n} = 4$, $n = 6$, $p = 3$, uzlový vektor i vektor parametrizace uniformní, váhy těžiškové

B-spline i racionální bázové funkce jsou definovány na uniformním uzlovém vektoru, váhy pro racionální bázové funkce jsou váhy určeny těžišťovou metodou popsanou v části 5.3.1 Těžišťová metoda stanovení vah řídicích bodů. Bázové funkce, které jsou asociovány se dvěma řídicími body, jejichž poloha je totožná, jsou v grafech vyznačeny stejnou barvou. Formálně jsou B-spline bázové funkce na obr. 4.3 stejné jako B-spline bázové funkce uzavřené aproximační křivky z části 2.3.3 Uzavřená křivka na obr. 2.17, pouze mají jinou parametrizaci.

Funkční hodnoty B-spline i racionálních bázových funkcí pro potřebné hodnoty parametrů $u = h_i$, $i = 0, \dots, \tilde{n} - 1$, z vektoru parametrizace jsou vyznačeny symboly \bullet v barvě příslušné funkce. Samotné hodnoty parametru h_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou vyznačeny na ose u symboly \circ . Je vidět, že tyto hodnoty parametru jsou shodné s uzly u_p, \dots, u_{m-p} ohraničujícími aktivní uzlové rozteče a že vektor parametrizace je vybranou, aktivní částí uzlového vektoru.

Zbývá dodat, že pro $p = 3$ je uzavřená interpolační B-spline křivka Coonsův kubický B-spline zadaný řídicími body, které jsou řešením soustavy rovnic (4.20). Konkrétně uzavřená interpolační B-spline křivka nakreslená na obr. 4.5, která je zadaná definičními body

$$\mathbf{Q}_0 = \left(\frac{13}{6}, \frac{9}{2} \right), \mathbf{Q}_1 = \left(\frac{23}{6}, \frac{11}{3} \right), \mathbf{Q}_2 = \left(\frac{25}{6}, \frac{11}{6} \right), \mathbf{Q}_3 = \left(\frac{11}{6}, 3 \right), \mathbf{Q}_4 = \left(\frac{13}{6}, \frac{9}{2} \right), \quad (4.21)$$

je tvarově naprosto shodná s uzavřenou aproximační B-spline křivkou z obr. 2.18 zadanou řídicími body

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_4 = (1, 3), \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_5 = (2, 5), \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_6 = (4, 4), \mathbf{P}_3 = (5, 1), \quad (4.22)$$

neboť poloha definičních bodů (4.21) z obr. 4.5 splňuje podmínku (2.20) vzhledem k řídicím bodům (4.22) z obr. 2.18.

4.2.2 Vektory derivací křivky v krajních bodech definičního polygonu

Oproti prosté interpolaci, kde byly neznámé řídicí body řešením soustavy $\tilde{n} + 1$ rovnic o $\tilde{n} + 1$ neznámých, uzlová interpolace vyžaduje sestavit soustavu $n + 1$ rovnic o $n + 1$ neznámých, kde $n = \tilde{n} + p - 1$. Z důvodů symetrie se používají interpolační křivky lichého stupně, neboť vyžadují sudý počet dodatečných podmínek.

V dalším se budeme zabývat pouze interpolačními B-spline křivkami 3. stupně, které jsou v praxi nejrozšířenější. Pro křivky 3. stupně platí $n = \tilde{n} + 2$. Interpolační křivky vyššího stupně nemívají vhodný tvar, neboť vysoký stupeň vede na nežádoucí zákmitý a zvlnění křivek, viz část 5.2 Stupeň v kap. 5 Tvarovací nástroje interpolačních NURBS křivek.

■ **Definice 4.6 – Uzlová interpolační B-spline křivka 3. stupně.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, stupeň křivky $p = 3$, vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, který je vybranou, aktivní částí uzlového vektoru U splňující rov. (4.14), a po jednom vektoru k -té derivace ($k = 1$ nebo $k = 2$), $\mathbf{Q}_0^{(k)}$, resp. $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{(k)}$ v počátečním bodě \mathbf{Q}_0 , resp. v koncovém bodě $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ definičního polygonu. Potom je otevřená nebo ukotvená uzlová interpolační B-spline křivka dána vektorovou rovnicí (2.2). Souřadnice řídicích bodů \mathbf{P}_i , $i = 0, \dots, n$, které se v rov. (2.2) vyskytují, jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(h_i) &= \sum_{j=0}^n N_{j,3}(h_i) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_i, \quad i = 0, \dots, \tilde{n} \\ \mathbf{C}^{(k)}(h_0) &= \sum_{j=0}^n N_{j,3}^{(k)}(h_0) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_0^{(k)} \\ \mathbf{C}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) &= \sum_{j=0}^n N_{j,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) \mathbf{P}_j = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

jejíž maticový tvar je následující:

$$\begin{pmatrix} N_{0,3}(h_0) & N_{1,3}(h_0) & \cdots & N_{n,3}(h_0) \\ N_{0,3}(h_1) & N_{1,3}(h_1) & \cdots & N_{n,3}(h_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ N_{0,3}(h_{\tilde{n}}) & N_{1,3}(h_{\tilde{n}}) & \cdots & N_{n,3}(h_{\tilde{n}}) \\ N_{0,3}^{(k)}(h_0) & N_{1,3}^{(k)}(h_0) & \cdots & N_{n,3}^{(k)}(h_0) \\ N_{0,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) & N_{1,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) & \cdots & N_{n,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ \mathbf{P}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}} \\ \mathbf{Q}_0^{(k)} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

□

Odvoďme nyní vyjádření vektorů první derivace B-spline křivky 3. stupně v krajních bodech, tj. tečných vektorů $\mathbf{C}'(h_0) = \mathbf{Q}'_0$, resp. $\mathbf{C}'(h_{\tilde{n}}) = \mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ a vektorů druhé derivace B-spline křivky 3. stupně v krajních bodech $\mathbf{C}''(h_0) = \mathbf{Q}''_0$, resp. $\mathbf{C}''(h_{\tilde{n}}) = \mathbf{Q}''_{\tilde{n}}$ pouze pomocí vrcholů řídicího polygonu s respektováním zvolené parametrizace. Takové vyjádření vektorů \mathbf{Q}'_0 , $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$, \mathbf{Q}''_0 a $\mathbf{Q}''_{\tilde{n}}$ je velmi praktické, neboť se, obzvláště pro uniformní parametrizaci, značně zjednoduší určení prvků posledních dvou řádků matice soustavy (4.24), tj. výpočet funkčních hodnot první a druhé derivace B-spline báze funkcí pro $u = h_0$ a $u = h_{\tilde{n}}$.

Vektory \mathbf{Q}'_0 , $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$, \mathbf{Q}''_0 a $\mathbf{Q}''_{\tilde{n}}$, funkční hodnoty první derivace B-spline báze funkcí $N'_{i,3}(h_0)$, $N'_{i,3}(h_{\tilde{n}})$, $i = 0, \dots, n$, a funkční hodnoty druhé derivace B-spline báze funkcí $N''_{i,3}(h_0)$, $N''_{i,3}(h_{\tilde{n}})$, $i = 0, \dots, n$, vyjádříme nejprve obecně pro neuniformní uzlový vektor. Získané výsledky potom zjednodušíme pro dvě nejčastěji užívané uniformní parametrizace – budeme uvažovat uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem, kdy $u_i - u_{i-1} = \Delta u = 1$, a uniformní uzlový vektor s krokem o velikosti $\Delta u = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, m$.

Pro neuniformní uzlový vektor a pro uniformní uzlový vektor s krokem $\Delta u = \frac{1}{n}$ budeme předpokládat, že aktivní část křivky je definována na intervalu $u \in [0, 1]$, neboť pro každý jiný interval $\tilde{u} \in [a, b]$ lze provést změnu parametrizace $u = \frac{\tilde{u}-a}{b-a}$ a normovat tak původní interval $\tilde{u} \in [a, b]$ na interval $u \in [0, 1]$.

Tečné vektory v krajních bodech otevřené B-spline křivky

Neuniformní uzlový vektor. Podle výše uvedených předpokladů je neuniformní uzlový vektor otevřené B-spline křivky 3. stupně

$$U = (u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 = 0 \leq u_4 \leq \dots \leq u_{m-4} \leq u_{m-3} = 1 \leq u_{m-2} \leq u_{m-1} \leq u_m). \quad (4.25)$$

Vektor první derivace $\mathbf{C}'(0)$ otevřené B-spline křivky 3. stupně v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$, tj. tečný vektor \mathbf{Q}'_0 vyjádříme podle (2.9):

$$\mathbf{C}'(0) = \mathbf{Q}'_0 = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,2}(0) \mathbf{P}_i^{(1)} = \frac{u_4}{u_4 - u_2} \mathbf{P}_0^{(1)} - \frac{u_2}{u_4 - u_2} \mathbf{P}_1^{(1)}, \quad (4.26)$$

neboť $N_{0,2}(0) = \frac{u_4}{u_4 - u_2}$, $N_{1,2}(0) = -\frac{u_2}{u_4 - u_2}$ a $N_{i,2}(0) = 0$, $i = 2, \dots, n-1$. $\mathbf{P}_0^{(1)}$, resp. $\mathbf{P}_1^{(1)}$ je podle (2.10)

$$\mathbf{P}_0^{(1)} = \frac{3}{u_4 - u_1} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{P}_1^{(1)} = \frac{3}{u_5 - u_2} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1). \quad (4.27)$$

Tedy tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) je dán

$$\mathbf{Q}'_0 = -\frac{3u_4}{(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)} \mathbf{P}_0 + \frac{3[u_4(u_5 - u_2) + u_2(u_4 - u_1)]}{(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)(u_5 - u_2)} \mathbf{P}_1 - \frac{3u_2}{(u_4 - u_2)(u_5 - u_2)} \mathbf{P}_2. \quad (4.28)$$

Vektor první derivace $\mathbf{C}'(1)$ otevřené B-spline křivky 3. stupně v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$, tj. tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ vyjádříme podle (2.9):

$$\mathbf{C}'(1) = \mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,2}(1) \mathbf{P}_i^{(1)} = \frac{u_{m-2} - u_{m-3}}{u_{m-2} - u_{m-4}} \mathbf{P}_{n-2}^{(1)} + \frac{u_{m-3} - u_{m-4}}{u_{m-2} - u_{m-4}} \mathbf{P}_{n-1}^{(1)}, \quad (4.29)$$

neboť $N_{n-2,2}(1) = \frac{u_{m-2}-u_{m-3}}{u_{m-2}-u_{m-4}}$, $N_{n-1,2}(1) = \frac{u_{m-3}-u_{m-4}}{u_{m-2}-u_{m-4}}$ a $N_{i,2}(1) = 0$, $i = 0, \dots, n-3$. $\mathbf{P}_{n-2}^{(1)}$, resp. $\mathbf{P}_{n-1}^{(1)}$ je podle (2.10)

$$\mathbf{P}_{n-2}^{(1)} = \frac{3}{u_{m-2} - u_{m-5}} (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}), \text{ resp. } \mathbf{P}_{n-1}^{(1)} = \frac{3}{u_{m-1} - u_{m-4}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \quad (4.30)$$

Tedy tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě otevřené B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) je dán

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = & -\frac{3(u_{m-2} - u_{m-3})}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})} \mathbf{P}_{n-2} + \\ & + \frac{3[(u_{m-2} - u_{m-3})(u_{m-1} - u_{m-4}) - (u_{m-3} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})]}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})(u_{m-1} - u_{m-4})} \mathbf{P}_{n-1} + \\ & + \frac{3(u_{m-3} - u_{m-4})}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-1} - u_{m-4})} \mathbf{P}_n. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Předposlední řádek matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) obsahuje funkční hodnoty první derivace B-spline bázeových funkcí pro $u = 0$. Vzhledem k (4.28) vypočteme tyto hodnoty následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -\frac{3u_4}{(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)}, \\ N'_{1,3}(0) &= \frac{3[u_4(u_5 - u_2) + u_2(u_4 - u_1)]}{(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)(u_5 - u_2)}, \\ N'_{2,3}(0) &= -\frac{3u_2}{(u_4 - u_2)(u_5 - u_2)}, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, \quad i = 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Poslední řádek matice soustavy (4.24) obsahuje funkční hodnoty první derivace B-spline bázeových funkcí pro $u = 1$. Vzhledem k (4.31) jsou tyto hodnoty následující:

$$\begin{aligned} N'_{i,3}(1) &= 0, \quad i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{n-2,3}(1) &= -\frac{3(u_{m-2} - u_{m-3})}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})}, \\ N'_{n-1,3}(1) &= \frac{3[(u_{m-2} - u_{m-3})(u_{m-1} - u_{m-4}) - (u_{m-3} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})]}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})(u_{m-1} - u_{m-4})}, \\ N'_{n,3}(1) &= \frac{3(u_{m-3} - u_{m-4})}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-1} - u_{m-4})}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem. Předpokládejme následující tvar uniformního uzlového vektoru s jednotkovým krokem otevřené B-spline křivky:

$$\begin{aligned} U = & (u_0 = -3, u_1 = -2, u_2 = -1, u_3 = 0 = h_{\tilde{n}}, \dots \\ & \dots, u_{m-4} = m-4, u_{m-3} = m-3 = h_{\tilde{n}} = \tilde{n}, u_{m-2} = m-2, u_{m-1} = m-1, u_m = m). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s jednotkovým krokem dostaneme, pokud do (4.28) dosadíme za jednotlivé uzly jejich hodnoty:

$$\mathbf{Q}'_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0). \quad (4.35)$$

Podobně dosadíme hodnoty uzlů do (4.31) a dostaneme tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(\tilde{n})$:

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-2}). \quad (4.36)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s jednotkovým krokem jsou s ohledem na (4.35), resp. (4.36):

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -\frac{1}{2}, & N'_{i,3}(\tilde{n}) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= 0, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(\tilde{n}) &= -\frac{1}{2}, \\ N'_{2,3}(0) &= \frac{1}{2}, & N'_{n-1,3}(\tilde{n}) &= 0, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(\tilde{n}) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$. Předpokládejme uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ otevřené B-spline křivky ve tvaru

$$\begin{aligned} U &= \left(u_0 = -\frac{3}{\tilde{n}}, u_1 = -\frac{2}{\tilde{n}}, u_2 = -\frac{1}{\tilde{n}}, u_3 = 0, u_4 = \frac{1}{\tilde{n}}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, u_{m-4} = \frac{m-4}{\tilde{n}}, u_{m-3} = 1, u_{m-2} = \frac{m-2}{\tilde{n}}, u_{m-1} = \frac{m-1}{\tilde{n}}, u_m = \frac{m}{\tilde{n}} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.37) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.28) dosadíme za jednotlivé uzly jejich hodnoty:

$$\mathbf{Q}'_0 = \frac{\tilde{n}}{2}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0). \quad (4.38)$$

Podobně dostaneme tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$:

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \frac{\tilde{n}}{2}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-2}), \quad (4.39)$$

viz také vlastnost 2.19.

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.37) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ vypočteme s ohledem na (4.38), resp. (4.39) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -\frac{\tilde{n}}{2}, & N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= 0, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(1) &= -\frac{\tilde{n}}{2}, \\ N'_{2,3}(0) &= \frac{\tilde{n}}{2}, & N'_{n-1,3}(1) &= 0, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(1) &= \frac{\tilde{n}}{2}. \end{aligned}$$

Vektory druhých derivací v krajních bodech otevřené B-spline křivky

Neuniformní uzlový vektor. Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(0)$ v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$, tj. vektor \mathbf{Q}_0'' otevřené uzlové B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) je podle (2.9) roven:

$$\mathbf{C}''(0) = \mathbf{Q}_0'' = \sum_{i=0}^{n-2} N_{i,1}(0) \mathbf{P}_i^{(2)} = \mathbf{P}_0^{(2)}, \quad (4.40)$$

protože $N_{0,1}(0) = 1$ a $N_{i,1}(0) = 0$, $i = 1, \dots, n-2$. $\mathbf{P}_0^{(2)}$ je podle (2.10)

$$\mathbf{P}_0^{(2)} = \frac{2}{u_4 - u_2} \left[\mathbf{P}_1^{(1)} - \mathbf{P}_0^{(1)} \right] = \frac{2}{u_4 - u_2} \left[\frac{3}{u_5 - u_2} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - \frac{3}{u_4 - u_1} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \right]. \quad (4.41)$$

Po dosazení (4.41) do (4.40) obdržíme

$$\mathbf{Q}_0'' = \frac{6}{u_4 - u_2} \left[\frac{1}{u_4 - u_1} \mathbf{P}_0 - \frac{(u_4 - u_1) + (u_5 - u_2)}{(u_5 - u_2)(u_4 - u_1)} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{u_5 - u_2} \mathbf{P}_2 \right]. \quad (4.42)$$

Analogicky je podle (2.9) vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(1)$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$, tj. vektor \mathbf{Q}_n'' otevřené uzlové B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) roven

$$\mathbf{C}''(1) = \mathbf{Q}_n'' = \sum_{i=0}^{n-2} N_{i,1}(1) \mathbf{P}_i^{(2)} = \mathbf{P}_{n-2}^{(2)}, \quad (4.43)$$

neboť $N_{n-2,1}(1) = 1$ a $N_{i,1}(1) = 0$, $i = 0, \dots, n-3$. $\mathbf{P}_{n-2}^{(2)}$ je podle (2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n-2}^{(2)} &= \frac{2}{u_{m-2} - u_{m-4}} \left[\mathbf{P}_{n-1}^{(1)} - \mathbf{P}_{n-2}^{(1)} \right] = \\ &= \frac{2}{u_{m-2} - u_{m-4}} \left[\frac{3}{u_{m-1} - u_{m-4}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) - \frac{3}{u_{m-2} - u_{m-5}} (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dosadíme-li (4.44) do (4.43), dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n'' &= \frac{6}{u_{m-2} - u_{m-4}} \left[\frac{1}{u_{m-2} - u_{m-5}} \mathbf{P}_{n-2} - \frac{(u_{m-2} - u_{m-5}) + (u_{m-1} - u_{m-4})}{(u_{m-1} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})} \mathbf{P}_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u_{m-1} - u_{m-4}} \mathbf{P}_n \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

viz také vlastnost 2.19.

Prvky předposledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) stanovíme s ohledem na (4.42) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= \frac{6}{(u_4 - u_2)(u_4 - u_1)}, \\ N'_{1,3}(0) &= -6 \frac{(u_4 - u_1) + (u_5 - u_2)}{(u_4 - u_2)(u_5 - u_2)(u_4 - u_1)}, \\ N'_{2,3}(0) &= \frac{6}{(u_4 - u_2)(u_5 - u_2)}, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, \quad i = 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.46)$$

a prvky posledního řádku matice soustavy (4.24) vypočteme s ohledem na (4.45) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{n-2,3}(1) &= \frac{6}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})}, \\ N'_{n-1,3}(1) &= -6 \frac{(u_{m-2} - u_{m-5}) + (u_{m-1} - u_{m-4})}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-1} - u_{m-4})(u_{m-2} - u_{m-5})}, \\ N'_{n,3}(1) &= \frac{6}{(u_{m-2} - u_{m-4})(u_{m-1} - u_{m-4})}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem. Vektor druhé derivace \mathbf{Q}''_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s jednotkovým krokem dostaneme, pokud do (4.42) dosadíme za $u_4 - u_2 = 2$, $u_4 - u_1 = 3$ a $u_5 - u_2 = 3$:

$$\mathbf{Q}''_0 = \mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2. \quad (4.48)$$

Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(1)$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$, tj. vektor \mathbf{Q}''_n dostaneme, pokud dosadíme za $u_{m-2} - u_{m-4} = 2$, $u_{m-1} - u_{m-4} = 3$ a $u_{m-2} = u_{m-5} = 3$:

$$\mathbf{Q}''_n = \mathbf{P}_{n-2} - 2\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n, \quad (4.49)$$

viz také vlastnost 2.19.

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s jednotkovým krokem jsou s ohledem na (4.48), resp. (4.49) následující:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= 1, & N'_{i,3}(\tilde{n}) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= -2, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(\tilde{n}) &= 1, \\ N'_{2,3}(0) &= 1, & N'_{n-1,3}(\tilde{n}) &= -2, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(\tilde{n}) &= 1. \end{aligned}$$

Uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$. Vektor druhé derivace \mathbf{Q}''_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.37) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.42) dosadíme za $u_4 - u_2 = \frac{2}{\tilde{n}}$, $u_4 - u_1 = \frac{3}{\tilde{n}}$ a $u_5 - u_2 = \frac{3}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{C}''(0) = \mathbf{Q}''_0 = \tilde{n}^2(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2). \quad (4.50)$$

Analogicky, vektor druhé derivace \mathbf{Q}''_n v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$ otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.37) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.45) dosadíme za $u_{m-2} - u_{m-4} = \frac{2}{\tilde{n}}$, $u_{m-1} - u_{m-4} = \frac{3}{\tilde{n}}$ a $u_{m-2} - u_{m-5} = \frac{3}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{C}''(1) = \mathbf{Q}''_n = \tilde{n}^2(\mathbf{P}_{n-2} - 2\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_n), \quad (4.51)$$

viz také vlastnost 2.19.

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů otevřené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.37) stanovíme s ohledem na (4.50), resp. (4.51) následovně:

$$\begin{aligned}
N'_{0,3}(0) &= \tilde{n}^2, & N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\
N'_{1,3}(0) &= -2\tilde{n}^2, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(1) &= \tilde{n}^2, \\
N'_{2,3}(0) &= \tilde{n}^2, & N'_{n-1,3}(1) &= -2\tilde{n}^2, \\
N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(1) &= \tilde{n}^2.
\end{aligned}$$

Tečné vektory v krajních bodech ukotvené B-spline křivky

První a \tilde{n} -tý řádek matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené křivky se zjednoduší, neboť platí $N_{0,3}(h_0) = 1$, $N_{i,3}(h_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, a $N_{n,3}(h_{\tilde{n}}) = 1$, $N_{i,3}(h_{\tilde{n}}) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
N_{0,3}(h_1) & N_{1,3}(h_1) & \dots & N_{n,3}(h_1) \\
\vdots & & & \vdots \\
N_{0,3}(h_{\tilde{n}-1}) & N_{1,3}(h_{\tilde{n}-1}) & \dots & N_{n,3}(h_{\tilde{n}-1}) \\
0 & 0 & \dots & 1 \\
N_{0,3}^{(k)}(h_0) & N_{1,3}^{(k)}(h_0) & \dots & N_{n,3}^{(k)}(h_0) \\
N_{0,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) & N_{1,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}}) & \dots & N_{n,3}^{(k)}(h_{\tilde{n}})
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n-3} \\ \mathbf{P}_{n-2} \\ \mathbf{P}_{n-1} \\ \mathbf{P}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}} \\ \mathbf{Q}_0^{(k)} \\ \mathbf{Q}_{\tilde{n}}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Neuniformní uzlový vektor. Neuniformní uzlový vektor ukotvené B-spline křivky 3. stupně má tvar

$$U = (u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0 \leq u_4 \leq \dots \leq u_{m-4} \leq u_{m-3} = u_{m-2} = u_{m-1} = u_m = 1). \quad (4.53)$$

Vektor první derivace $\mathbf{C}'(0)$, tj. tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.53) je podle (2.9)

$$\mathbf{C}'(0) = \mathbf{Q}'_0 = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,2}(0) \mathbf{P}_i^{(1)} = \mathbf{P}_0^{(1)}, \quad (4.54)$$

neboť $N_{0,2}(0) = 1$ a $N_{i,2}(0) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. $\mathbf{P}_0^{(1)}$ určíme podle (2.10)

$$\mathbf{P}_0^{(1)} = \frac{3}{u_4} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad (4.55)$$

tudíž

$$\mathbf{Q}'_0 = \frac{3}{u_4} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0). \quad (4.56)$$

Analogicky je vektor první derivace $\mathbf{C}'(1)$, tj. tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.53) podle (2.9)

$$\mathbf{C}'(1) = \mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,2}(1) \mathbf{P}_i^{(1)} = \mathbf{P}_{n-1}^{(1)}, \quad (4.57)$$

neboť $N_{n-1,2}(1) = 1$ a $N_{i,2}(1) = 0$, $i = 0, \dots, n-2$. $\mathbf{P}_{n-1}^{(1)}$ určíme podle (2.10)

$$\mathbf{P}_{n-1}^{(1)} = \frac{3}{1 - u_{m-4}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}), \quad (4.58)$$

tudíž

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \frac{3}{1 - u_{m-4}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \quad (4.59)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.52) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.53) stanovíme s ohledem na (4.56), resp. (4.59):

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -\frac{3}{u_4}, & N'_{i,3}(1) &= 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \\ N'_{1,3}(0) &= \frac{3}{u_4}, & \text{resp. } N'_{n-1,3}(1) &= -\frac{3}{1 - u_{m-4}}, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, \quad i = 2, \dots, n, & N'_{n,3}(1) &= \frac{3}{1 - u_{m-4}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem. Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem $\Delta u = 1$ ukotvené B-spline křivky 3. stupně je

$$\begin{aligned} U &= (u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_4 = 1, u_5 = 2, \dots \\ &\dots, u_{m-4} = m-4, u_{m-3} = u_{m-2} = u_{m-1} = u_m = h_{\tilde{n}} = \tilde{n}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně dostaneme, pokud do (4.56) dosadíme za $u_4 = 1$:

$$\mathbf{Q}'_0 = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0). \quad (4.62)$$

Obdobně, tečný vektor $\mathbf{C}'(h_{\tilde{n}}) = \mathbf{C}'(\tilde{n})$, tj tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(\tilde{n})$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.61) dostaneme, pokud do (4.59) dosadíme za $1 - u_{m-4} = 1$:

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = 3(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \quad (4.63)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.52) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.53) s jednotkovým krokem jsou s ohledem na (4.62), resp. (4.63) následující:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -3, & N'_{i,3}(\tilde{n}) &= 0, \quad i = 0, \dots, n-2, \\ N'_{1,3}(0) &= 3, & \text{resp. } N'_{n-1,3}(\tilde{n}) &= -3, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, \quad i = 2, \dots, n, & N'_{n,3}(\tilde{n}) &= 3. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní nejjednodušší situaci, kdy je ukotvená uzlová interpolační křivka 3. stupně tvořena jediným segmentem mezi dvěma zadanými definičními body \mathbf{Q}_0 a \mathbf{Q}_1 , tedy $\tilde{n} = 1$ a $n = 3$. B-spline bázové funkce jsou v tomto případě Bernsteinovy polynomy 3. stupně a výsledná křivka je Bézierova kubika. Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}'_0 \\ \mathbf{Q}'_1 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

jsou řídicí body Bézierovy kubiky

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0 &= \mathbf{Q}_0, \\ \mathbf{V}_1 &= \mathbf{Q}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{Q}'_0, \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{Q}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{Q}'_1, \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{Q}_1.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Křivka, která je zadaná právě dvěma krajními definičními body $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ a tečnými vektory $\mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1$ v těchto krajních bodech je známa jako *Fergusonova kubika*.

■ **Věta 4.1 – Fergusonova kubika.** Nechť jsou dány dva definiční body $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$, tečné vektory $\mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1$ a stupeň $p = 3$. Potom je aktivní část ukotvené uzlové B-spline křivky (2.2) na intervalu $u \in [0, 1]$ *Fergusonova kubika* s následující vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(u) = H_0(u)\mathbf{Q}_0 + H_1(u)\mathbf{Q}_1 + H_2(u)\mathbf{Q}'_0 + H_3(u)\mathbf{Q}'_1,\tag{4.66}$$

kde

$$\begin{aligned}H_0(u) &= 2u^3 - 3u^2 + 1, \\ H_1(u) &= -2u^3 + 3u^2, \\ H_2(u) &= u^3 - 2u^2 + u, \\ H_3(u) &= u^3 - u^2\end{aligned}\tag{4.67}$$

jsou tzv. Hermitovy polynomy.

Důkaz: Dosadíme-li do rovnice Bézierovy kubiky (2.27) řídicí body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ a \mathbf{V}_3 dle (4.65), dostaneme

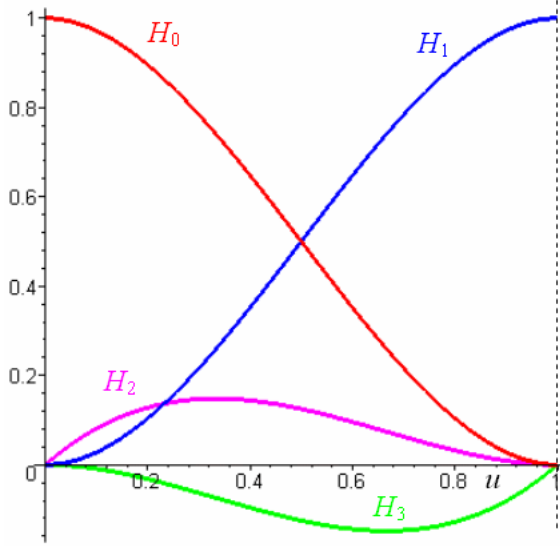
$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u) &= (1-u)^3\mathbf{Q}_0 + 3u(1-u)^2 \left[\mathbf{Q}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{Q}'_0 \right] + 3u^2(1-u) \left[\mathbf{Q}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{Q}'_1 \right] + u^3\mathbf{Q}_1 = \\ &= (2u^3 - 3u^2 + 1)\mathbf{Q}_0 + (-2u^3 + 3u^2)\mathbf{Q}_1 + (u^3 - 2u^2 + u)\mathbf{Q}'_0 + (u^3 - u^2)\mathbf{Q}'_1.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Součinitelé u vstupních dat $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}'_0$ a \mathbf{Q}'_1 jsou Hermitovy polynomy (4.67). \square

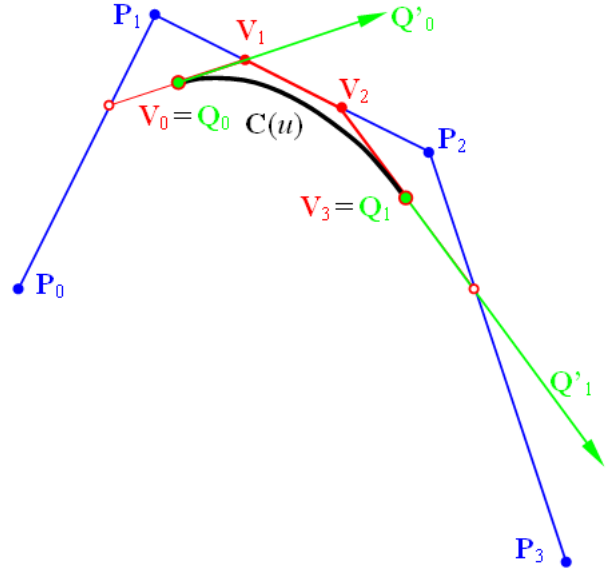
Na obr. 4.7 je nakreslen průběh Hermitových polynomů (4.67). Příklad Fergusonovy kubiky vidíme na obr. 4.8. Na tomto obrázku je zachycen i vzájemný vztah všech tří kubik – Fergusonovy zadané krajními body $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ a tečnými vektory $\mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1$, Bézierovy zadané řídicím polygonem $(\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ a Coonsovy zadané řídicím polygonem $(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, které patří ke klasickým reprezentacím křivek obecného tvaru. Zevšeobecněním těchto klasických reprezentací se NURBS reprezentace postupně vyvinula a klasické reprezentace nyní zahrnuje jako své speciální případy (viz také obr. 2.11).

Uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$. Uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ ukotvené B-spline křivky 3. stupně má tvar

$$\begin{aligned}U &= \left(u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_4 = \frac{1}{\tilde{n}}, u_5 = \frac{2}{\tilde{n}}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, u_{m-4} = \frac{m-4}{\tilde{n}}, u_{m-3} = u_{m-2} = u_{m-1} = u_m = \tilde{n} \right).\end{aligned}\tag{4.69}$$



Obr. 4.7: Hermitovy polynomy



Obr. 4.8: Vztah mezi Fergusonovou, Bézierovou a Coonsovou kubikou

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.69) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.56) dosadíme za $u_4 = \frac{1}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{Q}'_0 = 3\tilde{n}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0). \quad (4.70)$$

Tečný vektor $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(\tilde{n})$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.69) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.59) dosadíme za $u_{m-1} - u_{m-4} = \frac{1}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = 3\tilde{n}(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}). \quad (4.71)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.52) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.69) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ jsou s ohledem na (4.70), resp. (4.71) následující:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= -3\tilde{n}, & \text{resp.} & & N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-2, \\ N'_{1,3}(0) &= 3\tilde{n}, & & & N'_{n-1,3}(1) &= -3\tilde{n}, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 2, \dots, n, & & & N'_{n,3}(1) &= 3\tilde{n}. \end{aligned}$$

Vektory druhých derivací v krajních bodech ukotvené B-spline křivky

Neuniformní uzlový vektor. Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(0)$ (tj. vektor \mathbf{Q}''_0) v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.53) je podle (2.9) roven:

$$\mathbf{C}''(0) = \mathbf{Q}''_0 = \sum_{i=0}^{n-2} N_{i,1}(0) \mathbf{P}_i^{(2)} = \mathbf{P}_0^{(2)}, \quad (4.72)$$

protože $N_{0,1}(0) = 1$ a $N_{i,1}(0) = 0$, $i = 1, \dots, n-2$. $\mathbf{P}_0^{(2)}$ je podle (2.10)

$$\mathbf{P}_0^{(2)} = \frac{2}{u_4} [\mathbf{P}_1^{(1)} - \mathbf{P}_0^{(1)}] = \frac{2}{u_4} \left[\frac{3}{u_5} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) - \frac{3}{u_4} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \right]. \quad (4.73)$$

Po dosazení (4.73) do (4.72) obdržíme

$$\mathbf{Q}_0'' = \frac{6}{u_4} \left[\frac{1}{u_4} \mathbf{P}_0 - \frac{u_4 + u_5}{u_4 u_5} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{u_5} \mathbf{P}_2 \right]. \quad (4.74)$$

Analogicky je podle (2.9) vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(1)$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$ (tj. vektor $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}''$) ukotvené uzlové B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) roven

$$\mathbf{C}''(1) = \mathbf{Q}_{\tilde{n}}'' = \sum_{i=0}^{n-2} N_{i,1}(1) \mathbf{P}_i^{(2)} = \mathbf{P}_{n-2}^{(2)}, \quad (4.75)$$

neboť $N_{n-2,1}(1) = 1$ a $N_{i,1}(1) = 0$, $i = 0, \dots, n-3$. $\mathbf{P}_{n-2}^{(2)}$ je podle (2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n-2}^{(2)} &= \frac{2}{1 - u_{m-4}} \left[\mathbf{P}_{n-1}^{(1)} - \mathbf{P}_{n-2}^{(1)} \right] = \\ &= \frac{2}{1 - u_{m-4}} \left[\frac{3}{1 - u_{m-4}} (\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) - \frac{3}{1 - u_{m-5}} (\mathbf{P}_{n-1} - \mathbf{P}_{n-2}) \right]. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Dosadíme-li (4.76) do (4.75), dostaneme

$$\mathbf{Q}_{\tilde{n}}'' = \frac{6}{1 - u_{m-4}} \left[\frac{1}{1 - u_{m-5}} \mathbf{P}_{n-2} - \frac{(1 - u_{m-5}) + (1 - u_{m-4})}{(1 - u_{m-4})(1 - u_{m-5})} \mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{1 - u_{m-4}} \mathbf{P}_n \right]. \quad (4.77)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na neuniformním uzlovém vektoru (4.25) vypočteme s ohledem na (4.74), resp. (4.77) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= \frac{6}{u_4^2}, & N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= -6 \frac{u_4 + u_5}{u_4^2 u_5}, & N'_{n-2,3}(1) &= \frac{6}{(1 - u_{m-4})(1 - u_{m-5})}, \\ N'_{2,3}(0) &= \frac{6}{u_4 u_5}, & N'_{n-1,3}(1) &= -6 \frac{(1 - u_{m-4}) + (1 - u_{m-5})}{(1 - u_{m-4})^2 (1 - u_{m-5})}, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(1) &= \frac{6}{(1 - u_{m-4})^2}. \end{aligned} \quad \text{resp.}$$

Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem. Zde musíme rozlišit případy, kdy $\tilde{n} = 1$ a $\tilde{n} > 1$. Jestliže $\tilde{n} = 1$, je $n = 3$ a počet roztečí uzlového vektoru $m = 7$. Uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem má tvar $U = (u_i)_{i=0}^7 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$. Vektor druhé derivace \mathbf{Q}_0'' v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ této ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně dostaneme, pokud do (4.74) dosadíme za $u_4 = 1$ a $u_5 = 1$:

$$\mathbf{Q}_0'' = 6\mathbf{P}_0 - 12\mathbf{P}_1 + 6\mathbf{P}_2. \quad (4.78)$$

Obdobně, vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(\tilde{n})$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(1)$ dostaneme, pokud do (4.77) dosadíme za $1 - u_{m-4} = 1$ a za $1 - u_{m-5} = 1$:

$$\mathbf{Q}_{\tilde{n}}'' = 6\mathbf{P}_1 - 12\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3, \quad (4.79)$$

což jsou vektory druhých derivací v krajních bodech Bézierovy kubiky, viz vlastnost 2.22.

Je tedy zřejmé, že ukotvená uzlová interpolační B-spline křivka 3. stupně definovaná na uniformním uzlovém vektoru s jednotkovým krokem zadaná dvěma definičními body je Bézierova kubika.

Pro $\tilde{n} > 1$ dostaneme vektor druhé derivace \mathbf{Q}_0'' v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.61) s jednotkovým krokem dostaneme, pokud do (4.74) dosadíme za $u_4 = 1$ a $u_5 = 2$:

$$\mathbf{Q}_0'' = 3(2\mathbf{P}_0 - 3\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2). \quad (4.80)$$

Vektor druhé derivace $\mathbf{C}''(\tilde{n})$ (vektor $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}''$) v koncovém bodě $\mathbf{C}(\tilde{n})$ ukotvené B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru dostaneme, pokud do (4.77) dosadíme za $1 - u_{m-4} = 1$ a za $1 - u_{m-5} = 2$:

$$\mathbf{Q}_{\tilde{n}}'' = 3(\mathbf{P}_{n-2} - 3\mathbf{P}_{n-1} + 2\mathbf{P}_n). \quad (4.81)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s jednotkovým krokem vypočteme s ohledem na (4.80), resp. (4.81) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= 6, & N'_{i,3}(\tilde{n}) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= -9, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(\tilde{n}) &= 3, \\ N'_{2,3}(0) &= 3, & N'_{n-1,3}(\tilde{n}) &= -9, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(\tilde{n}) &= 6. \end{aligned}$$

Uniformní uzlový vektor s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$. I zde je nutné rozlišit případ, kdy $\tilde{n} = 1$ (stejně jako v předchozím odstavci je výslednou křivkou Bézierova kubika) a $\tilde{n} > 1$.

Pro $\tilde{n} > 1$ vektor druhé derivace \mathbf{Q}_0'' v počátečním bodě $\mathbf{C}(0)$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.69) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.74) dosadíme za $u_4 = \frac{1}{\tilde{n}}$ a $u_5 = \frac{2}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{Q}_0'' = 3\tilde{n}^2(2\mathbf{P}_0 - 3\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2). \quad (4.82)$$

Vektor druhé derivace $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}''$ v koncovém bodě $\mathbf{C}(\tilde{n})$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.69) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ dostaneme, pokud do (4.77) dosadíme za $\frac{1}{\tilde{n}} 1 - u_{m-4} = \frac{1}{\tilde{n}}$ a $1 - u_{m-5} = \frac{2}{\tilde{n}}$:

$$\mathbf{Q}_{\tilde{n}}'' = 3\tilde{n}^2(\mathbf{P}_{n-2} - 3\mathbf{P}_{n-1} + 2\mathbf{P}_n). \quad (4.83)$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy (4.24) pro výpočet souřadnic řídicích bodů ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru (4.34) s krokem $\frac{1}{\tilde{n}}$ vypočteme s ohledem na (4.82), resp. (4.83) následovně:

$$\begin{aligned} N'_{0,3}(0) &= 6\tilde{n}^2, & N'_{i,3}(1) &= 0, i = 0, \dots, n-3, \\ N'_{1,3}(0) &= -9\tilde{n}^2, & \text{resp. } N'_{n-2,3}(1) &= 3\tilde{n}^2, \\ N'_{2,3}(0) &= 3\tilde{n}^2, & N'_{n-1,3}(1) &= -9\tilde{n}^2, \\ N'_{i,3}(0) &= 0, i = 3, \dots, n, & N'_{n,3}(1) &= 6\tilde{n}^2. \end{aligned}$$

Kapitola 5

Tvarovací nástroje interpolačních NURBS křivek

V této kapitole se budeme zabývat přímými metodami stanovení tvarovacích nástrojů interpolačních NURBS křivek. Počet tvarovacích nástrojů je dán především zvolenou metodou interpolace – prostou nebo uzlovou. Kromě samotné polohy definičních bodů ovlivňují výsledný tvar prosté interpolační křivky následující tvarovací nástroje: stupeň, vektor parametrizace, uzlový vektor a váhy řídicích bodů. Tvar uzlové interpolační křivky je dán polohou definičních bodů, stupněm, vektorem parametrizace a způsobem stanovení okrajových podmínek.

Vzhledem k možné konverzi mezi otevřenou a ukotvenou B-spline křivkou, kterou vyjadřuje věta 2.5, budeme bez újmy na obecnosti v příkladech uvedených dále v této kapitole uvažovat pouze ukotvenou křivku, a pokud nebude řečeno jinak, s oborem parametrizace $u \in [0, 1]$. Uzavřenou interpolační křivku ze svých úvah již nadále také vynecháme. Uzavřená křivka patří sice svým charakterem a vlastnostmi do uzlových interpolačních křivek, ale způsob její konstrukce je shodný s konstrukcí prosté interpolační křivky. Veškeré dále uvedené metody stanovení tvarovacích nástrojů prostých interpolačních křivek lze tedy použít i při konstrukci uzavřené křivky.

V této kapitole se budeme nejprve věnovat metodám stanovení okrajových podmínek uzlových interpolačních křivek, konkrétně metodám stanovení tečných vektorů a vektorů druhých derivací v krajních bodech uzlové interpolační křivky. Jedná se o tvarovací nástroje, které jsou specifické pouze pro uzlovou interpolaci a v případě prosté interpolace nemají žádné uplatnění. Dále budeme diskutovat vliv stupně na tvar interpolační křivky, poté uvedeme přímou metodu stanovení vah řídicích bodů prosté interpolační křivky a nakonec se seznámíme s různými (opět přímými) metodami konstrukce uzlového vektoru a vektoru parametrizace.

5.1 Okrajové podmínky uzlové interpolační křivky

Okrajovou podmínku, která předpokládá uzavřenost křivky, jsme diskutovali v části 4.2.1 Podmínka uzavřenosti křivky. Zde se budeme věnovat metodám stanovení tečných vektorů a vektorů druhých derivací v krajních bodech uzlové interpolační křivky.

5.1.1 Tečné vektory v krajních bodech křivky

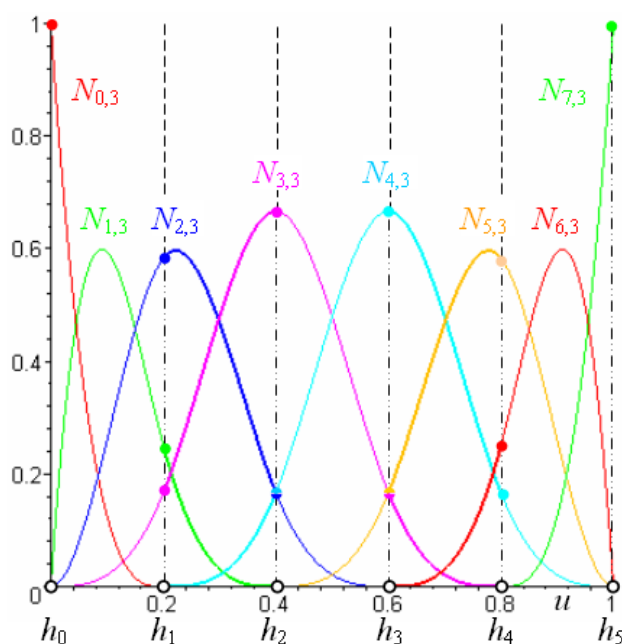
Asi nejrozšířenější metodou stanovení tečných vektorů v krajních bodech interpolační křivky je Lagrangeova interpolace, kdy se tečné vektory stanoví jako vektory prvních derivací v počátečním, resp. koncovém bodě Lagrangeovy interpolační křivky konstruované pro tři počáteční, resp. tři poslední body definičního polygonu. Tečné vektory takto stanovené budeme stručně označovat jako *Lagrangeovy* tečné vektory.

Dále uvedeme metodu stanovení tečných vektorů pomocí osově souměrných těžnic trojúhelníka tvořeného prvními, resp. posledními třemi body definičního polygonu. Tečné vektory stanovené touto metodou budeme stručně označovat jako *těžnicové* tečné vektory.

Jako zajímavost si uvedeme i metodu, která předpokládá nulové tečné vektory v krajních bodech uzlové interpolační křivky, neboť je velmi jednoduchá a křivky takto získané jsou překvapivě dobře tvarovány.

Všechny metody budeme demonstrovat na stejném definičním polygonu, který je tvořen šesti definičními body ($\tilde{n} = 5$), uzlový vektor zvolíme uniformní s krokem $\Delta u = \frac{1}{\tilde{n}}$.

B-spline bázové funkce pro uzlovou interpolační křivku definované na uniformním uzlovém vektoru s krokem $\Delta u = \frac{1}{\tilde{n}}$, na jejichž průběh volba okrajových podmínek nemá vliv, jsou narysované na obr. 5.1.



Obr. 5.1: B-spline bázové funkce uzlové interpolační křivky; uzlový vektor uniformní

Lagrangeovy tečné vektory v krajních bodech křivky

■ **Definice 5.1 – Lagrangeova interpolace.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ a vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$. Potom je vektorová rovnice Lagrangeovy interpolační křivky \tilde{n} -tého stupně následující:

$$\mathbf{L}(u) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} L_i(u) \mathbf{Q}_i, \quad u \in [h_0, h_{\tilde{n}}], \quad (5.1)$$

kde $L_i(u)$, $i = 0, \dots, \tilde{n}$, jsou Lagrangeovy polynomy \tilde{n} -tého stupně

$$L_i(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^{\tilde{n}} \frac{u - h_j}{h_i - h_j}. \quad (5.2)$$

□

Pro přímou konstrukci interpolačních křivek se Lagrangeova interpolace nehodí díky vysokým stupňům výsledného interpolačního polynomu při vysokém počtu definičních bodů. Velmi často se ale používá Lagrangeova interpolace pro tři body ke stanovení tečného vektoru v krajních bodech interpolační křivky konstruované jinou metodou, kde jsou tečné vektory v krajních bodech vyžadovány jako součást vstupních dat.

Princip stanovení tečných vektorů \mathbf{Q}'_0 a $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v krajních bodech definičního polygonu $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ je následující: pro zadaný vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ nejprve vyjádříme Lagrangeovy polynomy 2. stupně $L_i(u)$ pro interpolaci prvních tří a posledních tří definičních bodů:

$$\begin{aligned} L_0(u) &= \frac{(u-h_1)(u-h_2)}{(h_0-h_1)(h_0-h_2)}, \\ L_1(u) &= \frac{(u-h_0)(u-h_2)}{(h_1-h_0)(h_1-h_2)}, \\ L_2(u) &= \frac{(u-h_0)(u-h_1)}{(h_2-h_0)(h_2-h_1)}, \\ L_{\tilde{n}-2}(u) &= \frac{(u-h_{\tilde{n}-1})(u-h_{\tilde{n}})}{(h_{\tilde{n}-2}-h_{\tilde{n}-1})(h_{\tilde{n}-2}-h_{\tilde{n}})}, \\ L_{\tilde{n}-1}(u) &= \frac{(u-h_{\tilde{n}-2})(u-h_{\tilde{n}})}{(h_{\tilde{n}-1}-h_{\tilde{n}-2})(h_{\tilde{n}-1}-h_{\tilde{n}})}, \\ L_{\tilde{n}}(u) &= \frac{(u-h_{\tilde{n}-2})(u-h_{\tilde{n}-1})}{(h_{\tilde{n}}-h_{\tilde{n}-2})(h_{\tilde{n}}-h_{\tilde{n}-1})}. \end{aligned}$$

Dále vyjádříme první derivace $L'_i(u)$, $i = 0, 1, 2$, Lagrangeových polynomů, do kterých dosadíme za $u = h_0 = 0$, a první derivace $L'_i(u)$, $i = \tilde{n} - 2, \tilde{n} - 1, \tilde{n}$, Lagrangeových polynomů, do kterých dosadíme $u = h_{\tilde{n}} = 1$:

$$\begin{aligned} L'_0(u) &= \frac{2u - h_1 - h_2}{(h_0 - h_1)(h_0 - h_2)}, & L'_0(0) &= -\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}, \\ L'_1(u) &= \frac{2u - h_0 - h_2}{(h_1 - h_0)(h_1 - h_2)}, & L'_1(0) &= \frac{h_2}{h_1(h_2 - h_1)}, \\ L'_2(u) &= \frac{2u - h_0 - h_1}{(h_2 - h_0)(h_2 - h_1)}, & L'_2(0) &= \frac{h_1}{h_2(h_1 - h_2)}, \\ L'_{\tilde{n}-2}(u) &= \frac{2u - h_{\tilde{n}-1} - h_{\tilde{n}}}{(h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}-1})(h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}})}, & L'_{\tilde{n}-2}(1) &= \frac{1 - h_{\tilde{n}-1}}{(h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}-1})(h_{\tilde{n}-2} - 1)}, \\ L'_{\tilde{n}-1}(u) &= \frac{2u - h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}}}{(h_{\tilde{n}-1} - h_{\tilde{n}-2})(h_{\tilde{n}-1} - h_{\tilde{n}})}, & L'_{\tilde{n}-1}(1) &= \frac{1 - h_{\tilde{n}-2}}{(h_{\tilde{n}-1} - h_{\tilde{n}-2})(h_{\tilde{n}-1} - 1)}, \\ L'_{\tilde{n}}(u) &= \frac{2u - h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}-1}}{(h_{\tilde{n}} - h_{\tilde{n}-2})(h_{\tilde{n}} - h_{\tilde{n}-1})}, & L'_{\tilde{n}}(1) &= \frac{2 - h_{\tilde{n}-2} - h_{\tilde{n}-1}}{(1 - h_{\tilde{n}-2})(1 - h_{\tilde{n}-1})}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 , resp. $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ má potom tvar:

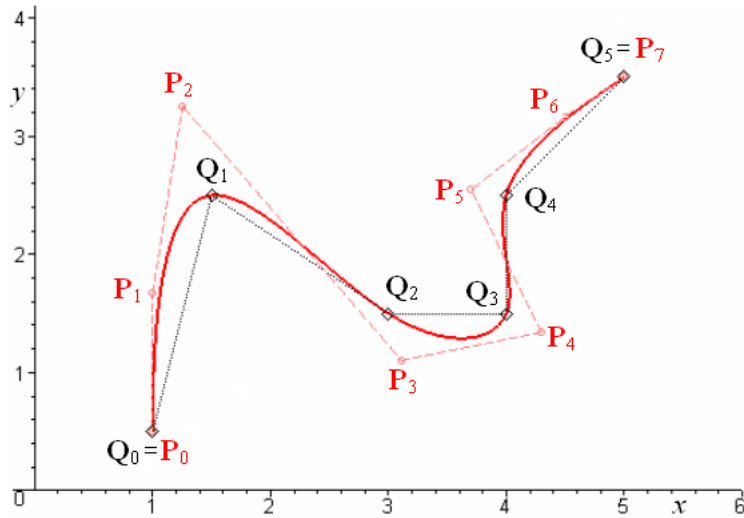
$$\mathbf{Q}'_0 = L'_0(0)\mathbf{Q}_0 + L'_1(0)\mathbf{Q}_1 + L'_2(0)\mathbf{Q}_2, \tag{5.4}$$

resp.

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = L'_{\tilde{n}-2}(1)\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2} + L'_{\tilde{n}-1}(1)\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} + L'_{\tilde{n}}(1)\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2}, \tag{5.5}$$

kde za $L'_i(0)$, $i = 0, 1, 2$, resp. $L'_i(1)$, $i = \tilde{n} - 2, \tilde{n} - 1, \tilde{n}$, dosadíme z (5.3).

Příklad interpolační křivky, jejíž krajní tečné vektory byly stanoveny pomocí Lagrangeovy interpolace, je nakreslen na obr. 5.2.



Obr. 5.2: Interpolační uzlová křivka;
krajní tečné vektory stanoveny Lagrangeovou interpolací

Těžnicové tečné vektory v krajních bodech křivky

Tato metoda odvozuje směr, orientaci a velikost tečných vektorů v krajních bodech uzlové interpolační B-spline křivky z geometrických vlastností definičního polygonu. Je navržena tak, aby tečné vektory reagovaly na konfiguraci počátečních a koncových definičních bodů a vhodně tvarovaly křivku v jejich okolí.

Princip metody je naznačen na obr. 5.3. Směr a orientace tečného vektoru \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě interpolační křivky je určen orientovanou přímkou $\mathbf{Q}_0\mathbf{A}^*$, která je osově souměrná s těžnicí $\mathbf{Q}_0\mathbf{A}$ trojúhelníka $\triangle\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ konstruovanou z bodu \mathbf{Q}_0 . Osou souměrnosti je počáteční rameno $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ definičního polygonu. Směr a orientace tečného vektoru $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ v koncovém bodě interpolační křivky je určen orientovanou přímkou $\mathbf{B}^*\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, která je osově souměrná s těžnicí $\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ trojúhelníka $\triangle\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ konstruovanou z bodu $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$. Osou souměrnosti je koncové rameno $\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ definičního polygonu, viz obr. 5.3.

Nejenom směr a orientace, ale i velikost krajních tečných vektorů má značný vliv na výsledný tvar křivky v okolí krajních bodů. Proto v případě, že krajní rameno $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, resp. $\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ definičního polygonu je stejně dlouhé jako délka těžnice $\mathbf{Q}_0\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, je délka tečného vektoru \mathbf{Q}'_0 , resp. $\mathbf{Q}'_{\tilde{n}}$ rovna vzdálenosti $|\mathbf{Q}_0\mathbf{A}^*| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{A}| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, resp. $|\mathbf{B}^*\mathbf{Q}_{\tilde{n}}| = |\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}| = |\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|$. Není-li délka krajního ramene definičního polygonu a příslušné těžnice stejná, násobí se původní velikost tečného vektoru korekčním součinitelem, který je roven poměru délky krajního ramene definičního polygonu a délky příslušné těžnice.

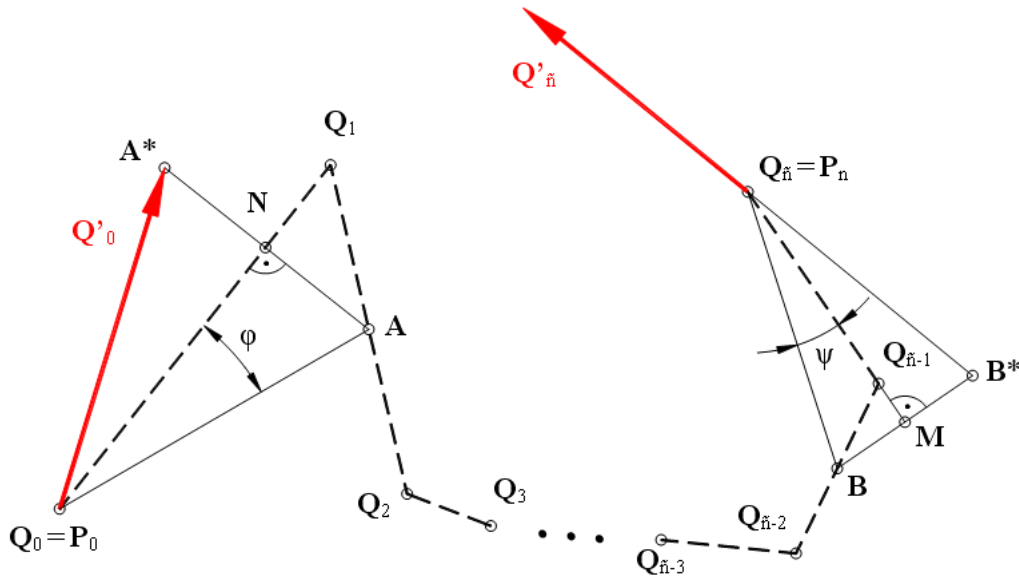
Tečný vektor v počátečním bodě definičního polygonu je potom

$$\mathbf{Q}'_0 = (\mathbf{A}^* - \mathbf{Q}_0) \frac{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{A}|} \quad (5.6)$$

a tečný vektor v koncovém bodě definičního polygonu je

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = (\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{B}^*) \frac{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|}{|\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|}. \quad (5.7)$$

Pro praktické použití je třeba vyjádřit tečné vektory (5.6) a (5.7) pouze pomocí vstupních dat, tedy definičních bodů a zvolené parametrizace. Podle konstrukce naznačené na obr. 5.3 leží



Obr. 5.3: Konstrukce krajních tečných vektorů pomocí osově souměrných těžnic

bod \mathbf{A}^* na přímce procházející středem $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)$ ramene $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ a patou \mathbf{N} kolmice konstruované z bodu \mathbf{A} na počáteční rameno $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ definičního polygonu:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + 2(\mathbf{N} - \mathbf{A}) = 2\mathbf{N} - \mathbf{A}. \quad (5.8)$$

Bod \mathbf{N} leží na úsečce $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ ve vzdálenosti

$$|\mathbf{Q}_0\mathbf{N}| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{A}| \cos \varphi = |\mathbf{Q}_0\mathbf{A}| \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{A}| |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|} = \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|} \quad (5.9)$$

od bodu \mathbf{Q}_0 , kde φ je úhel $\angle \mathbf{A}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ a $(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ je skalární součin vektorů $(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0)$ a $(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$. Pro bod \mathbf{N} tedy platí

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}_0 + |\mathbf{Q}_0\mathbf{N}| \frac{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|} = \mathbf{Q}_0 + \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0). \quad (5.10)$$

Jestliže (5.10) dosadíme do (5.8), dostaneme vztah pro výpočet bodu \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{A}^* = 2 \left[\mathbf{Q}_0 + \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \right] - \mathbf{A}. \quad (5.11)$$

(5.11) dosadíme do (5.6) a obdržíme vztah pro výpočet tečného vektoru v počátečním bodě ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky

$$\mathbf{Q}'_0 = \left[\mathbf{Q}_0 - \mathbf{A} + 2 \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \right] \frac{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|}{|\mathbf{Q}_0\mathbf{A}|}, \quad (5.12)$$

ve kterém se vyskytují pouze zadané definiční body, neboť $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)$.

Obdobně odvodíme vzorec pro výpočet tečného vektoru v koncovém bodě interpolační křivky: bod \mathbf{B}^* leží na přímce procházející středem $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2} + \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1})$ ramene $\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}$ a patou \mathbf{M} kolmice konstruované z bodu \mathbf{B} na koncové rameno $\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ definičního polygonu:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + 2(\mathbf{M} - \mathbf{B}) = 2\mathbf{M} - \mathbf{B}. \quad (5.13)$$

Bod \mathbf{M} leží na úsečce $\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ ve vzdálenosti

$$|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{M}| = |\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{B}| \cos \psi = |\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{B}| \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{B}| |\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}|} = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}|} \quad (5.14)$$

od bodu $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$, kde ψ je úhel $\angle \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}$ a $(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})$ je skalární součin vektorů $(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})$ a $(\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})$. Pro bod \mathbf{M} dostáváme

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}_{\tilde{n}} + |\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{M}| \frac{\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}|} = \mathbf{Q}_{\tilde{n}} + \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}|^2} (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}). \quad (5.15)$$

Jestliže (5.15) dosadíme do (5.13), dostaneme vztah pro výpočet bodu \mathbf{B}^*

$$\mathbf{B}^* = 2 \left[\mathbf{Q}_{\tilde{n}} + \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}})}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}}\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}|^2} (\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \right] - \mathbf{B}. \quad (5.16)$$

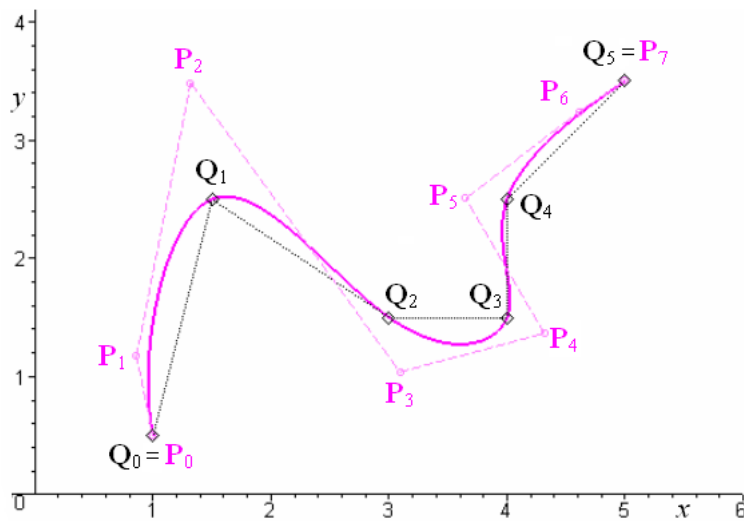
(5.16) dosadíme do (5.7) a obdržíme vztah pro výpočet tečného vektoru v koncovém bodě ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně

$$\mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \left[-\mathbf{Q}_{\tilde{n}} + \mathbf{B} + 2 \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}}) \cdot (\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1})}{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|^2} (\mathbf{Q}_{\tilde{n}} - \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}) \right] \frac{|\mathbf{Q}_{\tilde{n}-1}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|}{|\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\tilde{n}}|}, \quad (5.17)$$

ve kterém se opět vyskytují pouze zadané definiční body, neboť $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\tilde{n}-2} + \mathbf{Q}_{\tilde{n}-1})$.

Protože metoda osově souměrných těžnic vychází pouze z geometrických vlastností definičního polygonu, je třeba při vlastním výpočtu tečných vektorů respektovat konkrétní zvolenou parametrizaci. Pouze pro uniformní uzlový vektor s jednotkovým krokem budou poslední dva řádky pravé strany soustavy (4.24) přímo rovny tečným vektorům dle (5.12) a (5.17). Pokud bude krok uniformního uzlového vektoru $\frac{1}{\tilde{n}}$, je nutné vynásobit tečné vektory (5.12), resp. (5.17) součinitelem \tilde{n} , bude-li uzlový vektor neuniformní, je nutné vynásobit tečné vektory (5.12), resp. (5.17) součinitelem $\frac{1}{u_4}$, resp. $\frac{1}{1-u_{m-4}}$.

Interpolační křivka s těžnicovými krajními tečnými vektory je nakreslena na obr. 5.4.



Obr. 5.4: Uzlová interpolační křivka;
krajní tečné vektory těžnicové

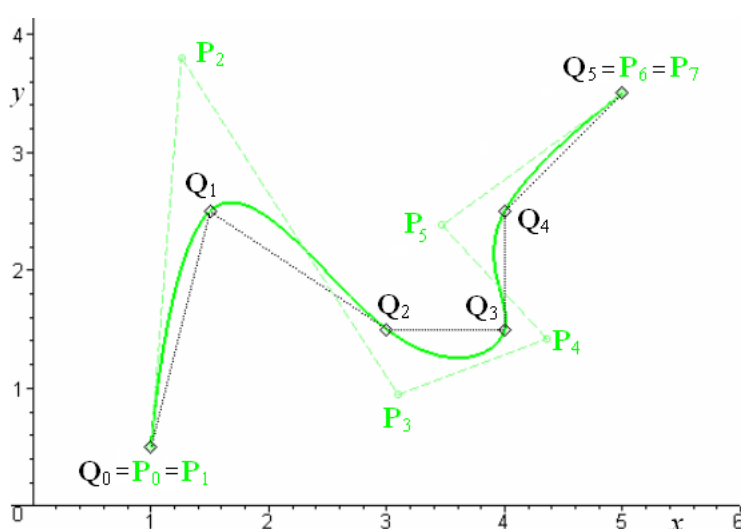
Nulové tečné vektory v krajních bodech křivky

Metoda, kdy jsou tečné vektory v krajních bodech uzlové interpolační křivky nulové

$$\mathbf{Q}'_0 = \mathbf{0}, \text{ resp. } \mathbf{Q}'_{\tilde{n}} = \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

se vyznačuje velmi jednoduchým určením tečných vektorů a velmi dobře tvarovanými interpolačními křivkami, jak můžeme posoudit na obr. 5.5, kde je příklad této křivky uveden. Obecně je krajní tečný vektor ukotvené B-spline křivky určitým násobkem (závislým na parametrizaci) krajního ramene řídicího polygonu.

Protože jsou krajní tečné vektory nulové, mají krajní ramena řídicího polygonu nulovou délku a interpolační křivka prochází dvojnásobnými body svého řídicího polygonu shodnými s definičními body: $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$ a $\mathbf{Q}_{\tilde{n}} = \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n-1}$.



Obr. 5.5: Uzlová interpolační křivka; krajní tečné vektory nulové

5.1.2 Vektory druhých derivací v krajních bodech křivky

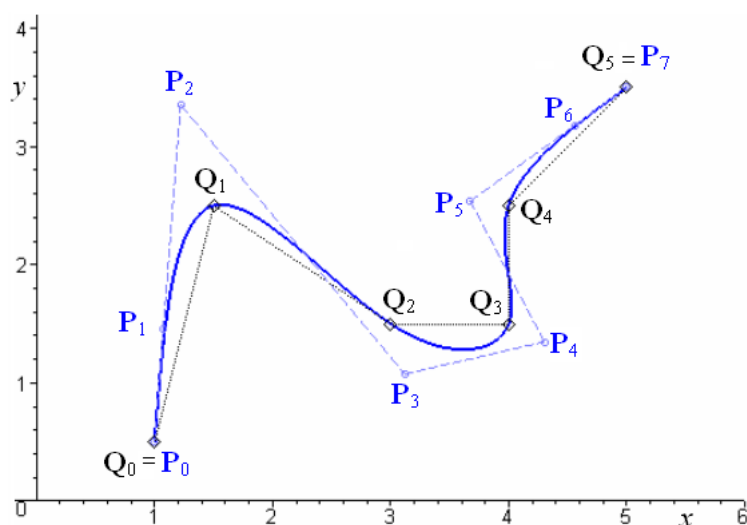
Pokud jsou okrajové podmínky určeny vektory druhých derivací v krajních bodech křivky, jsou směr, orientace a velikost těchto vektorů buď známy nebo se volí nulové. Zde budeme uvažovat druhou možnost, tedy nulové vektory druhých derivací v počátečním, resp. koncovém bodě uzlové interpolační křivky:

$$\mathbf{Q}''_0 = \mathbf{0}, \text{ resp. } \mathbf{Q}''_{\tilde{n}} = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

B-spline křivky, jejichž krajní vektory druhých derivací jsou nulové, se označují jako *přirozené spline*.

Druhá derivace vektorové funkce křivky souvisí s první křivostí křivky. Jestliže je druhá derivace nulová, přechází křivka v přímku. Interpolační křivka vypočtená z podmínky nulových krajních vektorů druhých derivací je v okolí definičních bodů \mathbf{Q}_0 a $\mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ přímka, a proto jsou tři počáteční, resp. tři poslední řídicí body kolineární.

Příklad interpolační křivky, jejíž krajní vektory druhých derivací jsou nulové, je nakreslen na obr. 5.6.



Obr. 5.6: Uzlová interpolační křivka; krajní vektory druhých derivací nulové

5.1.3 Porovnání vlivu okrajových podmínek na tvar uzlové interpolační křivky

Abychom mohli porovnat tvary uzlových interpolačních křivek ovlivněných různě stanovenými okrajovými podmínkami, jsou všechny čtyři interpolační křivky nakresleny do jednoho grafu ve zvětšeném měřítku na obr. 5.7. Z důvodů lepší čitelnosti obrázku nejsou popsány řídicí body. Rozdíly v průbězích jednotlivých křivek v okolí krajních definičních bodů jsou dobře patrné, nelze však jednoznačně říci, která z křivek má nejvhodnější tvar. Uvážíme-li, že kromě okrajových podmínek ovlivňují tvar interpolační křivky ještě další faktory (viz dále), je volba „nejlepší“ metody skutečně obtížná a nejednoznačná.

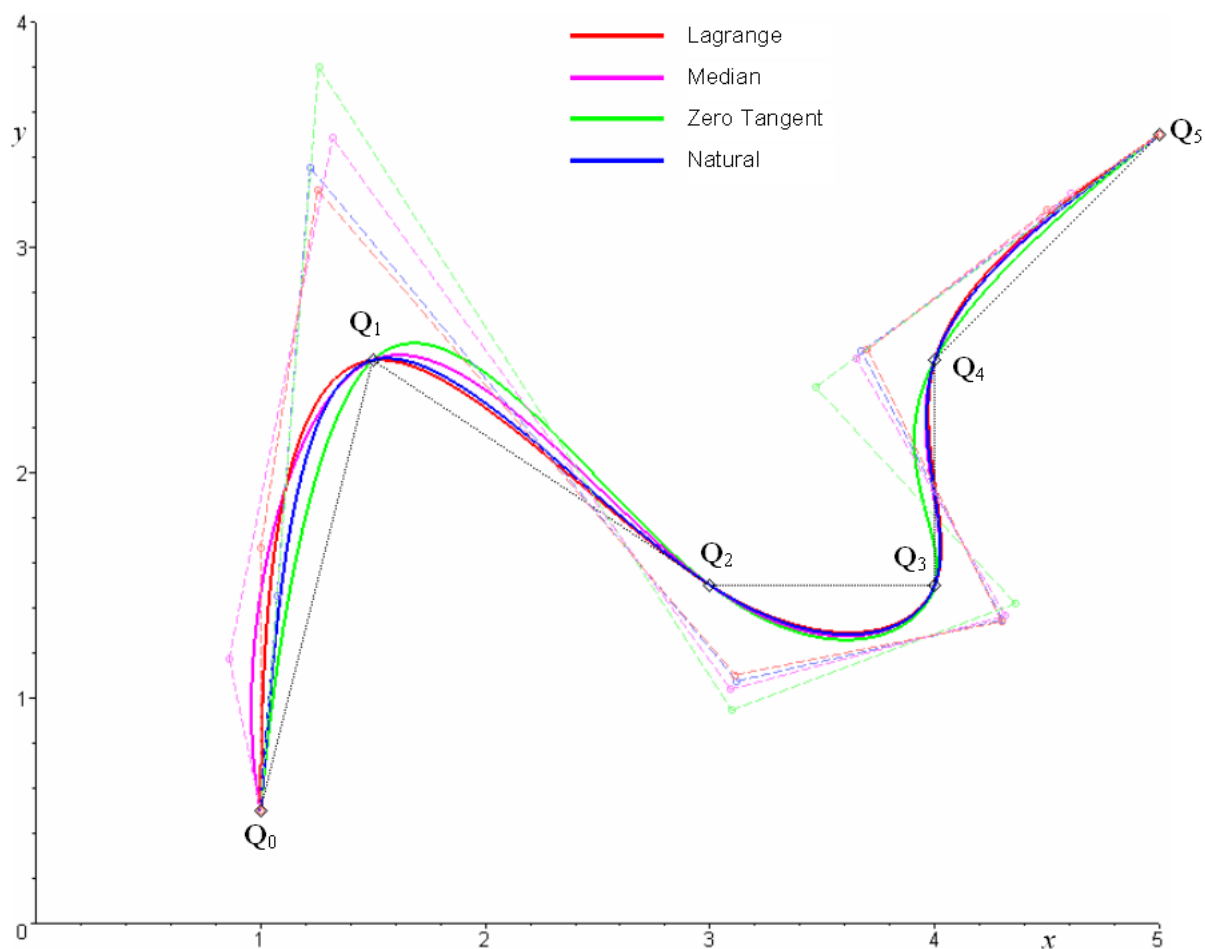
Pro odlišení jednotlivých metod stanovení tečných vektorů a vektorů druhých derivací v krajních bodech definičního polygonu zavedeme následující stručné označení, které budeme používat v legendách grafů uzlových interpolačních křivek: *Lagrange* – Lagrangeovy tečné vektory, *Median* – těžnicové tečné vektory, *Zero Tangent* – nulové tečné vektory, *Natural* – nulové vektory druhých derivací křivky v krajních bodech.

5.2 Stupeň

Volba stupně p uzlové interpolační křivky představuje zcela zásadní rozhodnutí, neboť ovlivňuje počet rovnic, které musí být sestaveny pro výpočet řídicích bodů. Jak již bylo řečeno v části 4.2 Uzlová interpolace, pro lichý stupeň p je třeba sestavit sudý počet dodatečných podmínek, a proto se z důvodů symetrie používají uzlové interpolační křivky pouze lichého stupně. V převážné většině praktických aplikací vyhovují křivky 3. stupně, proto se zde dalšími stupni uzlových interpolačních křivek již zabývat nebudeme.

U *prosté* interpolační křivky je volba stupně p zcela svobodná, ale vzhledem k velmi nevhodnému tvaru křivek vyšších stupňů se i v tomto případě používají křivky 2. nebo 3. stupně. Vliv stupně na tvar B-spline i racionálních funkcí a na tvar *prosté* interpolační B-spline i NURBS křivky si ukážeme na příkladu interpolace definičního polygonu s deseti ($\tilde{n} = 9$) definičními body. Pro B-spline křivku budeme předpokládat váhy všech řídicích bodů jednotkové, pro NURBS křivku bude použita ke stanovení vah těžištvá metoda popsaná v následující části.

Na obr. 5.8, resp. obr. 5.11, resp. obr. 5.14 jsou nakresleny průběhy B-spline bázových funkcí $N_{i,4}(u)$, resp. $N_{i,3}(u)$, resp. $N_{i,2}(u)$, $i = 0, \dots, 9$. Jakým způsobem ovlivní průběh bázových



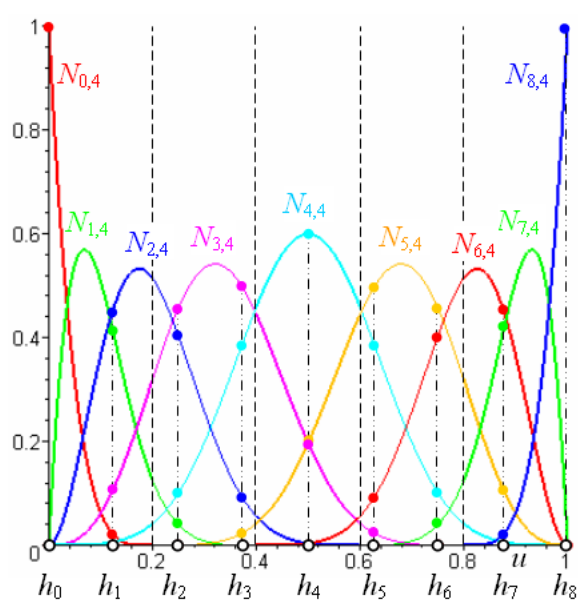
Obr. 5.7: Uzlové interpolační křivky

funkcí zavedení vah, můžeme porovnat na obr. 5.9, resp. obr. 5.12, resp. obr. 5.15, kde jsou nakresleny racionální báze funkce $R_{i,4}(u)$, resp. $R_{i,3}(u)$, resp. $R_{i,2}(u)$, $i = 0, \dots, 9$. Prosté interpolační křivky můžeme sledovat na obr. 5.10, resp. obr. 5.13, resp. obr. 5.16, kde jsou červenou barvou nakresleny průběhy B-spline křivky 4., resp. 3., resp. 2. stupně a modrou barvou průběhy NURBS křivky 4., resp. 3., resp. 2. stupně.

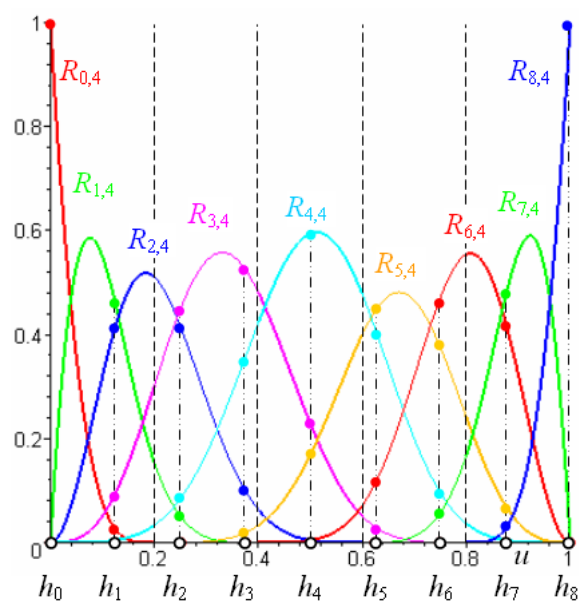
V případě aproximační křivky (viz obr. 3.2) má stupeň p jednoznačný vliv: čím vyšší je stupeň, tím více je výsledná křivka vzdálena od vnitřních řídicích bodů. U interpolačních křivek je tento vliv stejný, jen je třeba jej jinak formulovat: čím vyšší je stupeň, tím více jsou vypočtené řídicí body vzdálené od definičního polygonu, a tím větší zákmity na interpolační křivce mohou vzniknout. Křivky na obr. 5.10, obr. 5.13 a obr. 5.16 dobře dokumentují tuto skutečnost. Při konstrukci interpolačních křivek však není cílem co nejlépe vystihnout tvar řídicího polygonu, ale dosáhnout co nejplynulejšího průběhu křivky zadanými definičními body. Z tohoto důvodu nejsou prudké překmitý a oscilace na interpolačních křivkách žádoucí.

5.3 Váhy řídicích bodů interpolační křivky

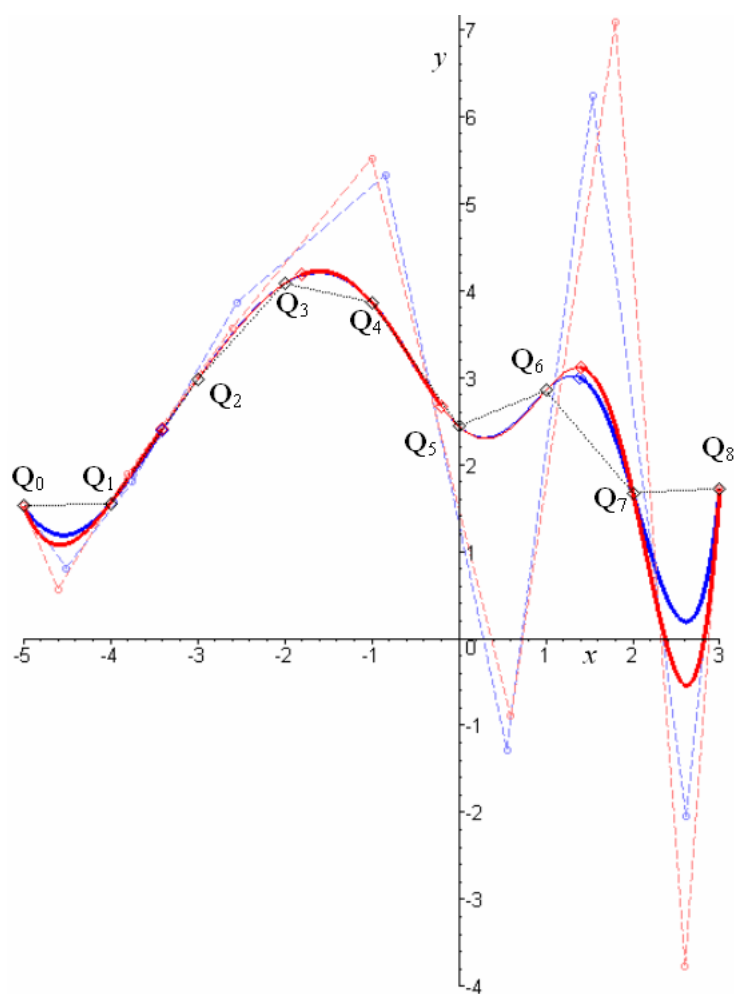
Z diskuse uvedené v kap. 3 Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek víme, že vliv vah na tvar aproximační křivky není zcela jednoznačný, ale že jej lze zjednodušeně vyjádřit následovně: pokud se váha řídicího bodu zvyšuje, přibližuje se křivka tomuto řídicímu bodu. Pokud se váha



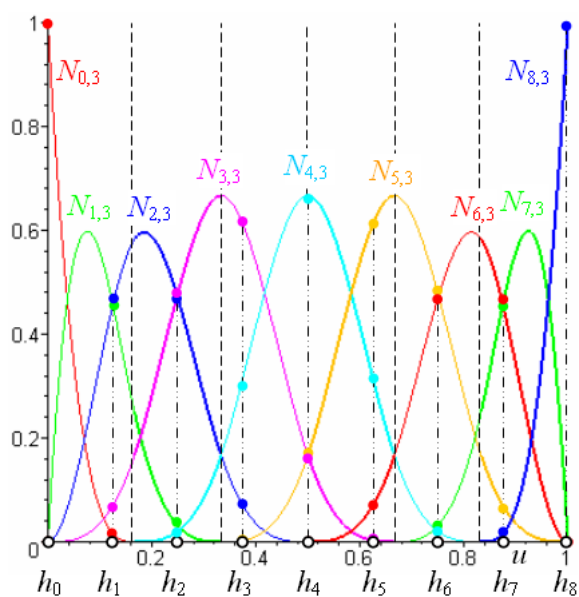
Obr. 5.8: B-spline bázové funkce 4. stupně



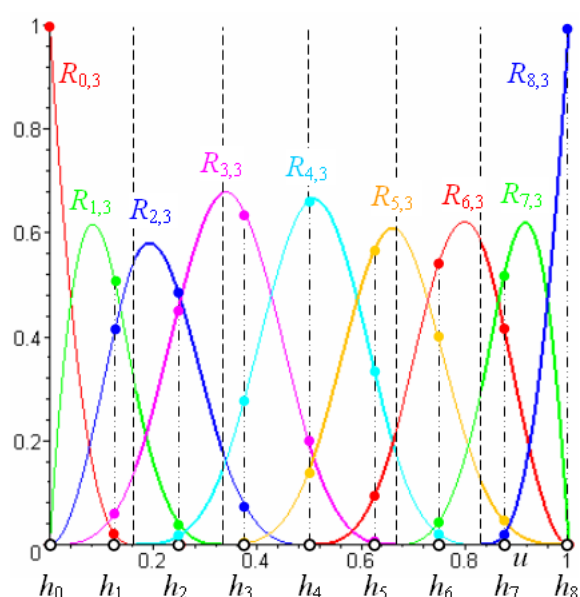
Obr. 5.9: Racionální bázové funkce 4. stupně



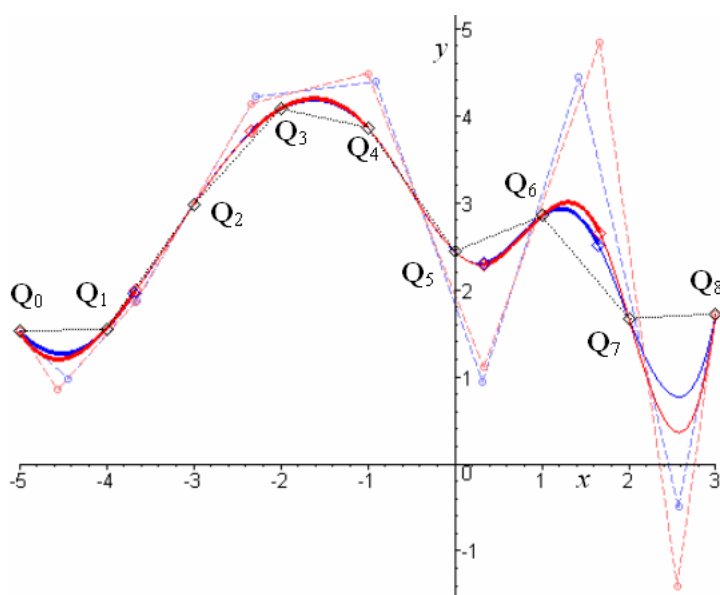
Obr. 5.10: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 4. stupně



Obr. 5.11: B-spline bázové funkce 3. stupně



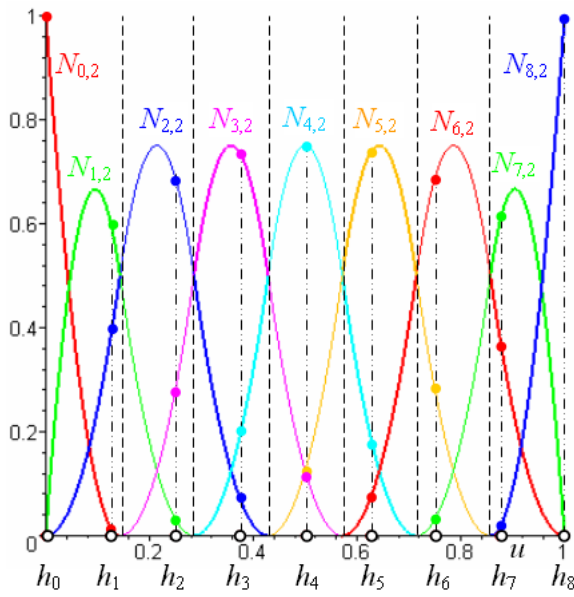
Obr. 5.12: Racionální bázové funkce 3. stupně



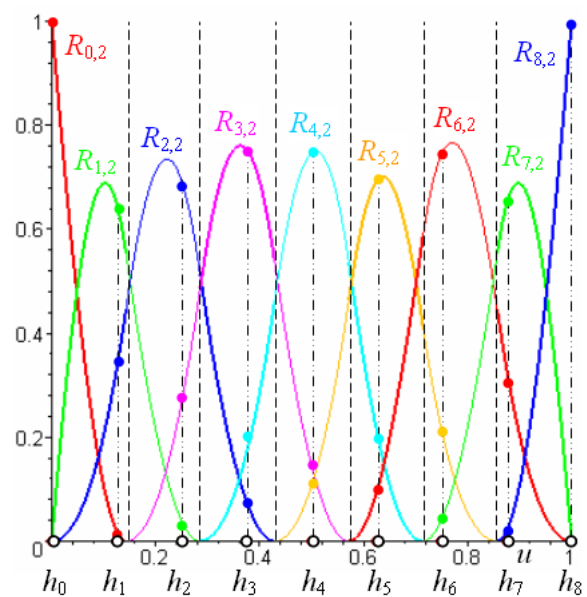
Obr. 5.13: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně

řídícího bodu snižuje, oddaluje se křivka od tohoto řídícího bodu. Kde konkrétně bude křivka probíhat, to záleží, při jinak stejných ostatních tvarovacích nástrojích, ještě na vahách okolních $p + 1$ řídících bodů.

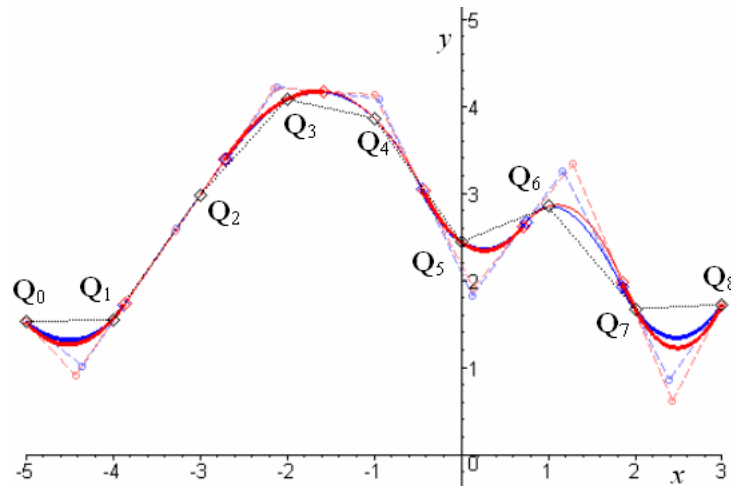
Úloha vah u interpolační křivky je následující: čím je váha jednoho řídícího bodu vyšší při jinak stejných vahách ostatních řídících bodů, tím menší je vzdálenost tohoto řídícího bodu od definičního polygonu a tím plynulejší průběh výsledná interpolační křivka má. Naopak, pokud bude váha jednoho řídícího bodu nižší při jinak stejných vahách ostatních řídících bodů, bude poloha tohoto řídícího bodu od definičního polygonu vzdálenější a na křivce může vzniknout nevhodný zákmit. Cílem tedy je stanovit takové váhy řídících bodů, které povedou na plynulejší průběh interpolační křivky.



Obr. 5.14: B-spline bázové funkce 2. stupně



Obr. 5.15: Racionální bázové funkce 2. stupně



Obr. 5.16: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 2. stupně

5.3.1 Těžištvá metoda stanovení vah řídicích bodů

Těžištvá metoda stanovení vah řídicích bodů interpolační křivky je inspirována jednak metodou popsanou v [1], kde se optimalizuje uzlový vektor minimalizací vzdáleností bodů křivky od daného pevného bodu, jednak dostředivou metodou, která odvozuje délku roztečí vektoru parametrizace od odmocniny délky ramene definičního polygonu (viz část 5.4 Uzlový vektor a vektor parametrizace). Váhy řídicích bodů interpolační křivky stanovené těžištvou metodou budeme i zde označovat jako *těžištvé váhy*.

■ **Definice 5.2 – Těžištvé váhy řídicích bodů prosté interpolační křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ prosté interpolační NURBS křivky a nechť

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\tilde{n} + 1} \sum_{i=0}^{\tilde{n}} \mathbf{Q}_i \quad (5.20)$$

je těžiště definičního polygonu. Potom je těžišťová váha řídicího bodu \mathbf{P}_i

$$w_i = \sqrt{|\mathbf{Q}_i\mathbf{T}|}, \quad i = 0, \dots, \tilde{n}. \quad (5.21)$$

Těžišťová váha w_i řídicího bodu \mathbf{P}_i je rovna odmocnině vzdálenosti definičního bodu \mathbf{Q}_i od těžiště definičního polygonu. \square

Intuitivně lze vysvětlit vliv takto stanovených vah na tvar interpolační NURBS křivky následovně: kdyby definiční body ležely na kružnici, byly by stejně vzdáleny od jejího středu (těžiště definičního polygonu) a všem řídicím bodům by byly přiřazeny stejné váhy. Všechny řídicí body by ležely relativně stejně daleko od definičního polygonu. Jakmile jsou definiční body nerovnoměrně rozloženy, jsou odpovídajícím řídicím bodům přiřazeny různé váhy. Druhá odmocnina potlačuje přiřazení velmi vysoké váhy takovému řídicímu bodu, jehož odpovídající definiční bod má značnou vzdálenost od těžiště definičního polygonu. Jsou-li definiční body interpolační křivky velmi nerovnoměrně rozloženy, je jejich nerovnoměrnost většinou záměrná a nejedná se o chybu vstupních dat.

Racionální bázové funkce $R_{i,4}(u)$, resp. $R_{i,3}(u)$, resp. $R_{i,2}(u)$, $i = 0, \dots, 9$, pro váhy řídicích bodů stanovené těžišťovou metodou jsou nakresleny na již zmíněných obr. 5.9, resp. obr. 5.12, resp. obr. 5.15. Odpovídající NURBS křivky jsou nakresleny na obr. 5.10, resp. obr. 5.13, resp. obr. 5.16. Můžeme tedy porovnat jednak vliv samotných vah na tvar bázových funkcí i na tvar výsledné křivky, ale také jejich vývoj s ohledem na stupeň křivky p . Je zřejmé, že čím nerovnoměrněji jsou definiční body rozloženy, tím více se projevuje vliv vyšších vah řídicích bodů. Řídicí body NURBS křivky jsou potom blíže definičnímu polygonu než řídicí body B-spline křivky a nevhodné zákřivky a oscilace křivky jsou utlumeny.

5.4 Uzlový vektor a vektor parametrizace

Jedním z nejdůležitějších kroků, které zásadním způsobem ovlivňují tvar výsledné interpolační křivky, je volba vhodného uzlového vektoru a vektoru parametrizace. Vliv způsobu konstrukce uzlového vektoru a vektoru parametrizace budeme sledovat na sérii definičních bodů z obr. 5.13, které budeme interpolovat prostou i uzlovou interpolační křivkou 3. stupně. U prosté interpolace použijeme těžišťovou metodu ke stanovení vah řídicích bodů.

Metody konstrukce vektoru parametrizace jsou stejné pro prostou i uzlovou interpolační křivku a jsou popsány dále. Metoda konstrukce uzlového vektoru se pro prostou a uzlovou křivku liší.

Pokud konstruuujeme uzlovou interpolační křivku, jejíž jednotlivé segmenty jsou napojeny právě v definičních bodech, je vektorem parametrizace jednoznačně určen i uzlový vektor, na kterém jsou definovány B-spline bázové funkce.

■ **Definice 5.3 – Uzlový vektor ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$, vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ a stupeň p . Potom jsou uzly *uzlového vektoru* $U = (u_i)_{i=0}^m$ ukotvené uzlové interpolační B-spline křivky dány

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \\ u_i &= h_{i-p}, \quad i = p, \dots, m-p, \\ u_i &= 1, \quad i = m-p+1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Vektor parametrizace je tedy vybranou, aktivní částí uzlového vektoru. \square

Poznamenejme, že teoreticky vzato lze i pro uzlovou interpolační B-spline křivku zkonstruovat uzlový vektor, který je nezávislý na vektoru parametrizace. Počet segmentů je opět roven počtu ramen definičního polygonu, ale díky vzájemnému nesouladu uzlového vektoru a vektoru parametrizace nejsou jednotlivé segmenty napojeny v definičních bodech. Tvar výsledné křivky je potom dosti nepředvídatelný.

V případě prosté interpolace je třeba uzlový vektor vhodně stanovit, a to buď závisle nebo nezávisle na hodnotách vektoru parametrizace. Nejznámější metody používané ke konstrukci uzlového vektoru prosté interpolační křivky jsou dvě: *uniformní* a *průměrová*. Zde si uvedeme ještě *těžišťovou* metodu konstrukce uzlového vektoru, která je modifikací těžišťové metody použité ke konstrukci uzlového vektoru aproximační křivky popsané v části 3.3.2 Těžišťová metoda stanovení uzlového vektoru.

5.4.1 Uniformní uzlový vektor

Uniformní uzlový vektor je nezávislý na hodnotách parametru vektoru parametrizace.

■ **Definice 5.4 – Uniformní uzlový vektor ukotvené prosté interpolační NURBS křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ a stupeň p . Potom jsou uzly *uniformního uzlového vektoru* $U = (u_i)_{i=0}^m$ ukotvené prosté interpolační NURBS křivky dány

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ u_i &= \frac{i-p}{m-2p}, \quad i = p+1, \dots, m-p-1, \\ u_i &= 1, \quad i = m-p, \dots, m, \end{aligned} \tag{5.23}$$

kde $m = \tilde{n} + p + 1$ je počet uzlových roztečí. □

5.4.2 Průměrový uzlový vektor

Průměrový uzlový vektor je závislý na vektoru parametrizace, neboť vnitřní uzly uzlového vektoru jsou *průměrem hodnot parametrů* z vektoru parametrizace. Krajní uzly se nemění.

■ **Definice 5.5 – Průměrový uzlový vektor ukotvené prosté interpolační NURBS křivky.** Nechť je dán vektor parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky a stupeň p . Potom jsou uzly *průměrového uzlového vektoru* $U = (u_i)_{i=0}^m$ ukotvené prosté interpolační NURBS křivky dány

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ u_i &= \frac{1}{p} \sum_{j=i-p}^{i-1} h_j, \quad i = p+1, \dots, m-p-1, \\ u_i &= 1, \quad i = m-p, \dots, m, \end{aligned} \tag{5.24}$$

kde $m = \tilde{n} + p + 1$ je počet uzlových roztečí. □

5.4.3 Těžišťový uzlový vektor

Tato metoda je modifikací těžišťové metody stanovení uzlového vektoru aproximační NURBS křivky popsané v kap. 3 Tvarovací nástroje aproximačních NURBS křivek. Rozdíl je pouze v tom, že namísto vzdálenosti těžišť dílčích řídicích polygonů tvořených $p-2$ řídicími body se zde uvažují vzdálenosti těžišť dílčích definičních polygonů tvořených $p-2$ definičními body a metoda

tak zohledňuje prostorovou konfiguraci definičních bodů. Uzlový vektor stanovený těžišťovou metodou budeme i v případě interpolační křivky nazývat *těžišťovým uzlovým vektorem*.

Podobně jako uniformní, ani těžišťový uzlový vektor není závislý na konstrukci vektoru parametrizace.

■ **Definice 5.6 – Těžišťový uzlový vektor ukotvené prosté interpolační NURBS křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky, stupeň p a nechť \mathbf{T}_i je těžiště dílčího definičního polygonu

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0 &= \mathbf{Q}_0, \\ \mathbf{T}_i &= \frac{1}{p+2} \sum_{j=i-1}^{i+p} \mathbf{Q}_j, \quad i = 1, \dots, \tilde{n} - p, \\ \mathbf{T}_{\tilde{n}-p+1} &= \mathbf{Q}_{\tilde{n}}.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Potom jsou uzly *těžišťového uzlového vektoru* $U = (u_i)_{i=0}^m$ interpolační NURBS křivky dány

$$\begin{aligned}u_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p, \\ u_i &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-p} l_j, \quad i = p+1, \dots, m-p-1, \\ u_i &= 1, \quad i = m-p, \dots, m,\end{aligned}\tag{5.26}$$

kde l_i , $i = 1, \dots, \tilde{n} - p$, je vzdálenost (3.6) dvou po sobě následujících těžišť (5.25) a L je součet (3.7) všech těchto vzdáleností. $m = \tilde{n} + p + 1$ je počet uzlových roztečí.

Délka uzlové rozteče je tedy úměrná vzdálenosti těžišť dílčích definičních polygonů. \square

Mezi nejznámější metody konstrukce vektoru parametrizace patří metoda *uniformní, těžišťová* a *dostředivá*. Zajímavou možnost představuje metoda *univerzální*, u které se předpokládá uniformní uzlový vektor a jednotlivé hodnoty parametru z vektoru parametrizace jsou hodnoty, ve kterých bázové funkce dosahují svého maxima. Zde si uvedeme i univerzální metodu, kdy ke konstrukci uzlového vektoru použijeme metodu těžišťovou.

5.4.4 Uniformní vektor parametrizace

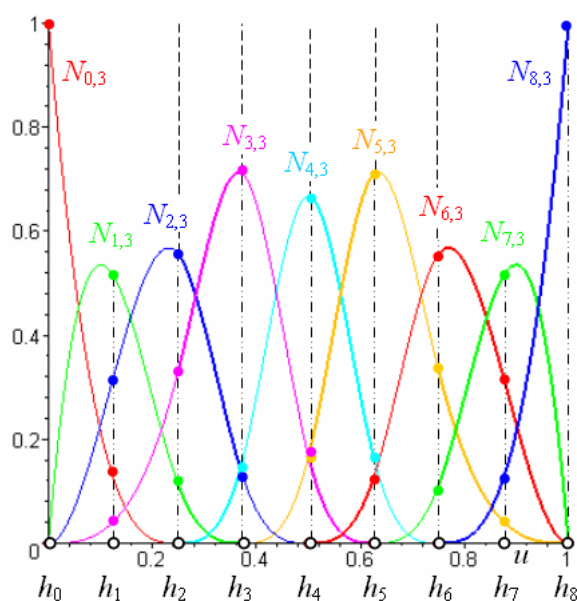
■ **Definice 5.7 – Uniformní vektor parametrizace interpolační NURBS křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru *uniformního vektoru parametrizace* $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky dány

$$h_i = \frac{i}{\tilde{n}}, \quad i = 0, \dots, \tilde{n}.\tag{5.27}$$

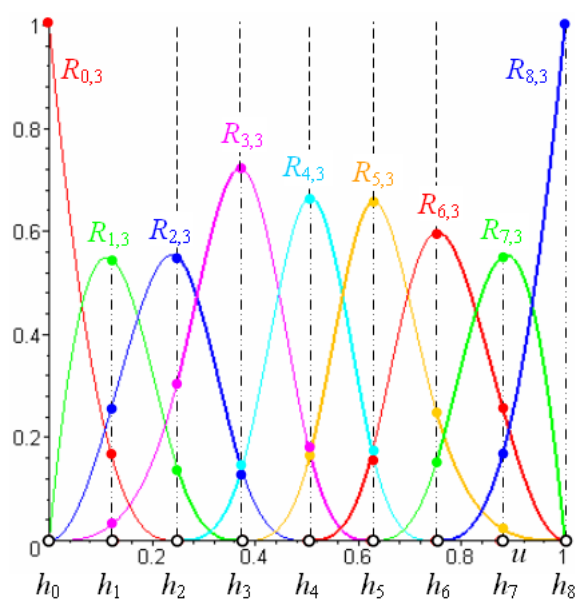
Vzdálenost hodnot parametru v uniformním vektoru parametrizace je konstantní. \square

B-spline, resp. racionální bázové funkce 3. stupně definované na uniformním uzlovém vektoru s uniformním vektorem parametrizace jsou zobrazeny na obr. 5.11, resp. obr. 5.12. Odpovídající prostá interpolační B-spline i NURBS křivka jsou zobrazeny na obr. 5.13.

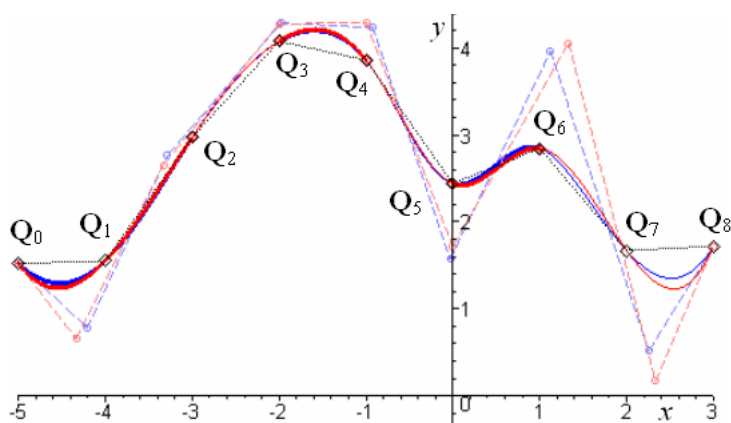
Pro představu, jak na jiné rozložení uzlů reagují bázové funkce, jsou na obr. 5.17, resp. obr. 5.18 nakresleny B-spline, resp. racionální bázové funkce definované na průměrovém uzlovém vektoru dle (5.24) s uniformním vektorem parametrizace. Změna tvaru křivek oproti obr. 5.13 je velmi zřetelná. Nežádoucí překmitý jsou značně omezeni tím, že rozložení vnitřních uzlů je odvozeno od rozložení hodnot parametru.



Obr. 5.17: B-spline bázové funkce 3. stupně; vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor průměrový



Obr. 5.18: Racionální bázové funkce 3. stupně; vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor průměrový

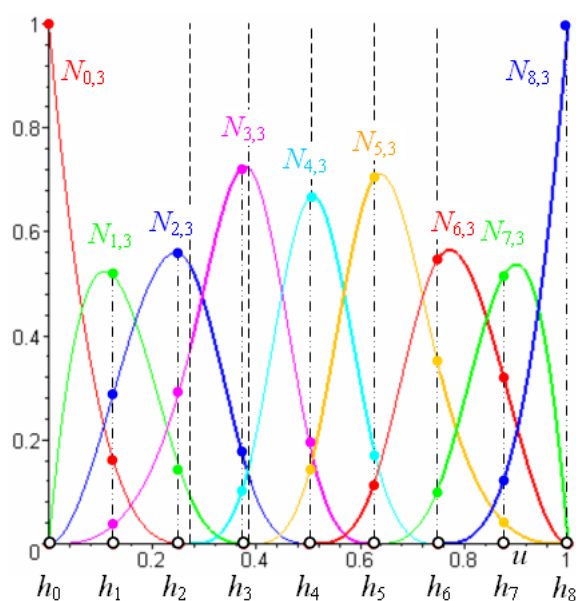


Obr. 5.19: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně; vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor průměrový

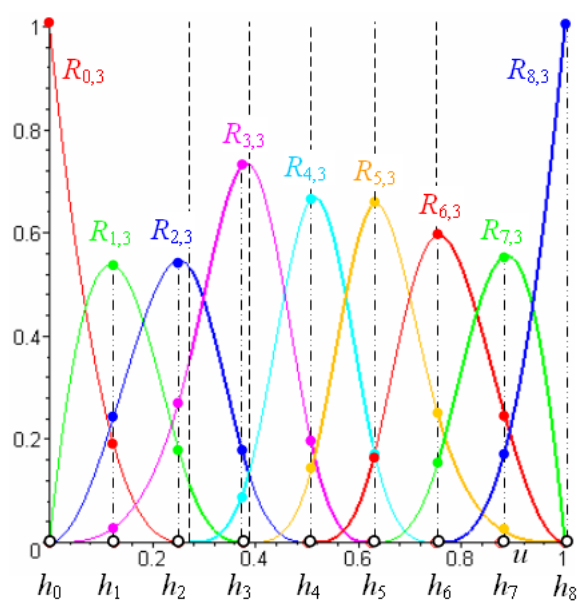
Vliv těžišťového uzlového vektoru na průběh B-spline, resp. racionálních bázových funkcí, resp. prostých interpolačních křivek můžeme sledovat na obr. 5.20, resp. obr. 5.21, resp. obr. 5.22.

B-spline bázové funkce uzlových interpolačních křivek jsou nakresleny na obr. 5.23, uzlové interpolační křivky vypočtené pro okrajové podmínky uvedené v kap. 4.2.2 Vektory derivací křivky v krajních bodech definičního polygonu jsou nakresleny na obr. 5.24. Vzhledem k velmi malým rozdílům v průbězích křivek jsou všechny čtyři křivky nakresleny ve větším měřítku než předchozí grafy prostých interpolačních křivek. S ohledem na zachování čitelnosti obrázku nejsou nakresleny řídicí polygony uzlových interpolačních křivek.

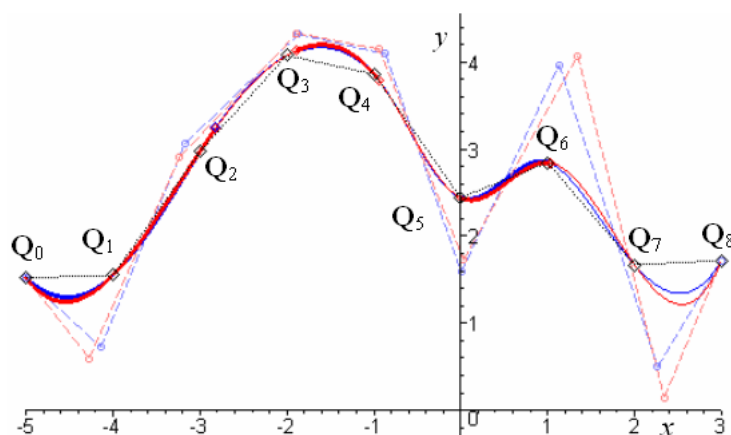
Tvar jednotlivých uzlových interpolačních křivek se výrazněji liší v okolí krajních bodů definičního polygonu. Je to dáno tím, že vliv okrajových podmínek klesá se vzdáleností od krajního definičního bodu. Střední část všech křivek se liší pouze minimálně. Z grafu uzlových interpolačních křivek na obr. 5.24 je také zřejmé, že díky okrajovým podmínkám jsou nežádoucí překlmuty



Obr. 5.20: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace uniformní,
uzlový vektor těžišťový



Obr. 5.21: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace uniformní,
uzlový vektor těžišťový



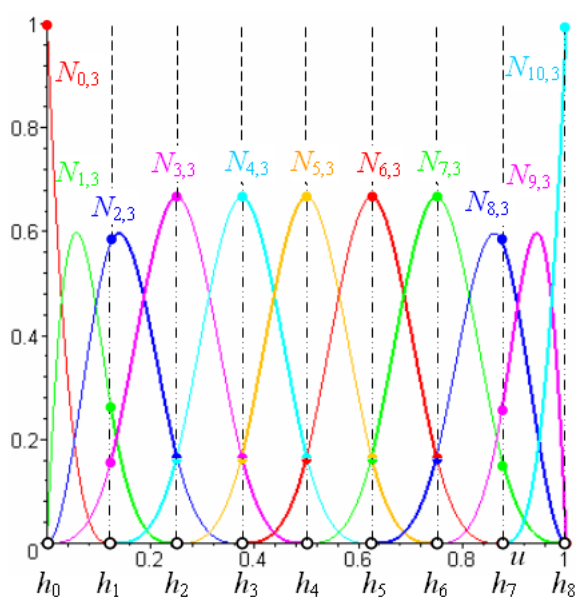
Obr. 5.22: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor těžišťový

v okolí krajních bodů značně omezeny. Nejzajímavější je z tohoto hlediska (a pro tento definiční polygon) uzlová interpolační křivka s nulovými tečnými vektory v krajních bodech. Na obr. 5.24 je nakreslena zelenou barvou.

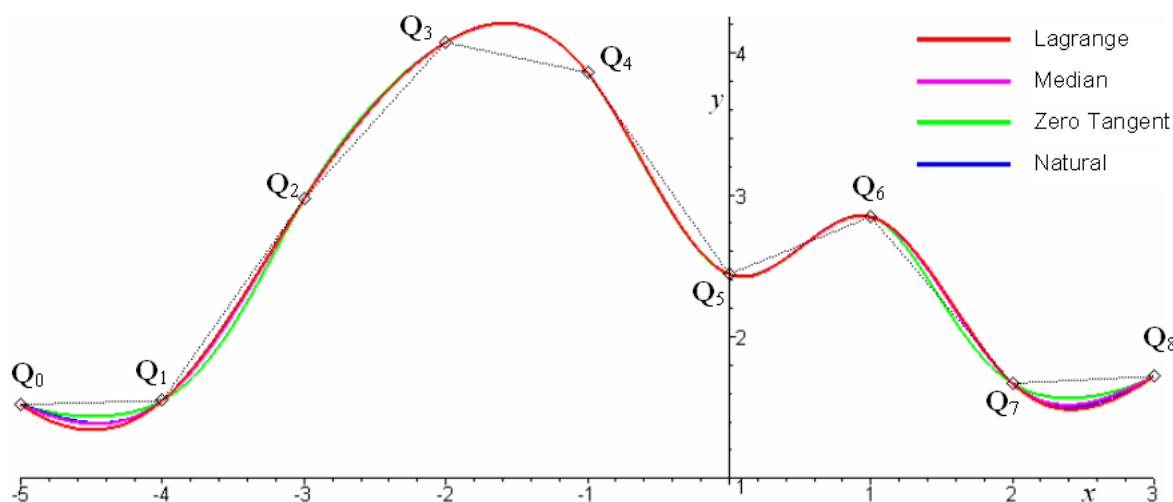
Konstrukce uniformního vektoru parametrizace je velmi jednoduchá, ale vznik nežádoucích překmitů prostých interpolačních křivek při interpolaci definičních polygonů s velmi různými vzdálenostmi definičních bodů značným způsobem omezuje praktické použití této metody.

5.4.5 Tětivová metoda konstrukce vektoru parametrizace

Tětivová metoda konstrukce vektoru parametrizace patří k nejrozšířenějším metodám. Princip této metody spočívá ve snaze přiblížit obecnou parametrizaci křivky její přirozené parametrizaci obloukem. Jednotlivé hodnoty parametru ve vektoru parametrizace nejsou stanoveny nezávisle



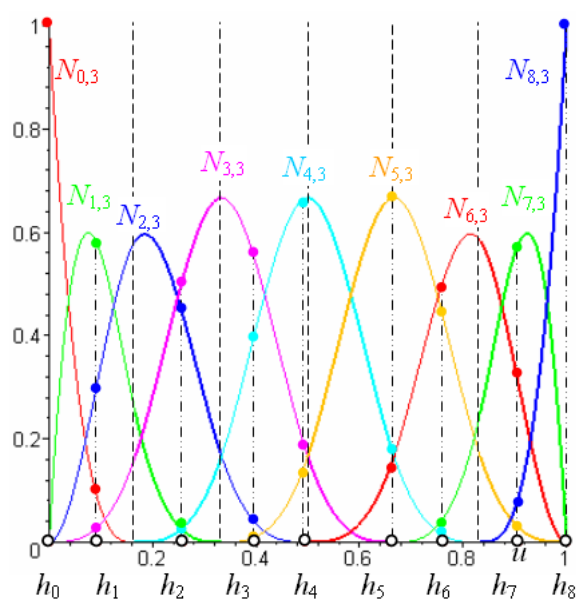
Obr. 5.23: B-spline bázové funkce 3. stupně pro uzlovou interpolaci; vektor parametrizace uniformní



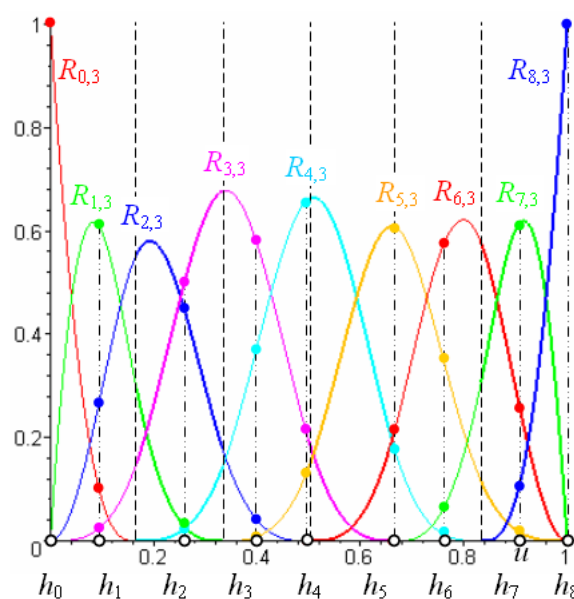
Obr. 5.24: Uzlové interpolační křivky 3. stupně; vektor parametrizace uniformní

na geometrii definičního polygonu, jako je tomu v případě uniformního vektoru parametrizace, ale jsou odvozeny od délky ramen definičního polygonu. Pokud křivka probíhá blízko definičního polygonu, je její délka srovnatelná s délkou polygonu a parametrizace takto získaná je aproximací přirozené parametrizace obloukem.

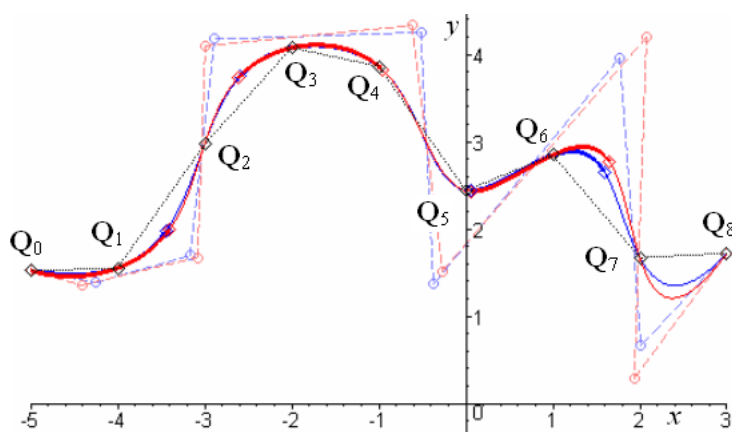
■ **Definice 5.8 – Tětivový vektor parametrizace interpolační NURBS křivky.** Nechtě je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru tětivového vektoru parametrizace $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky dány



Obr. 5.25: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor uniformní



Obr. 5.26: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor uniformní



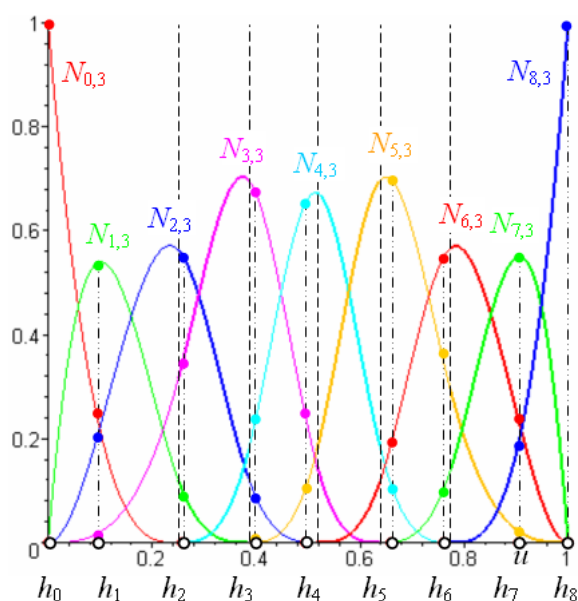
Obr. 5.27: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový, uzlový vektor uniformní

$$h_0 = 0,$$

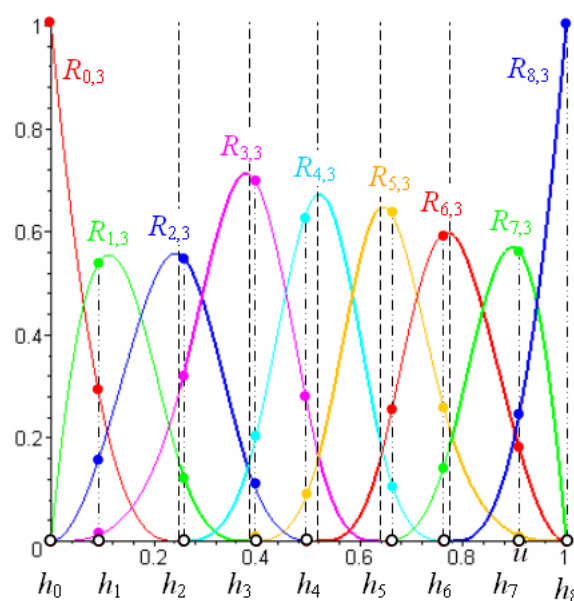
$$h_i = \frac{\sum_{j=1}^i |\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_j|}{\sum_{j=1}^{\tilde{n}} |\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_j|}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}. \quad (5.28)$$

Vzdálenost hodnot parametru v tětívovém vektoru parametrizace je úměrná délce ramen definičního polygonu – tětív. \square

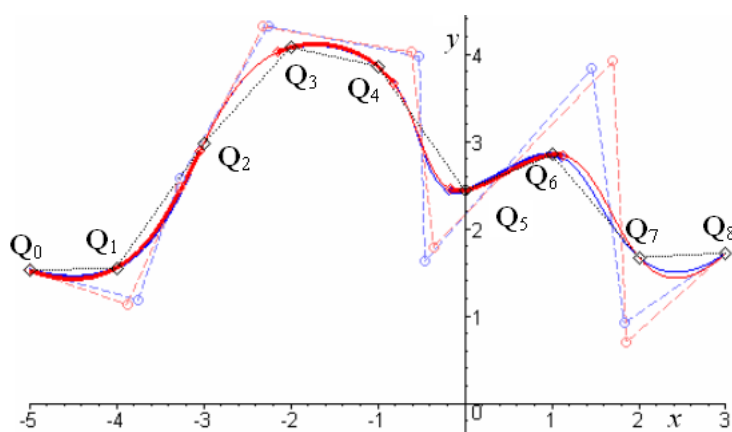
Aplikaci tětívového vektoru parametrizace můžeme sledovat na obr. 5.25, resp. obr. 5.26, kde jsou zobrazeny průběhy B-spline, resp. racionálních bázových funkcí 3. stupně pro prostou interpolační křivku definovanou na uniformním uzlovém vektoru.



Obr. 5.28: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor průměrový



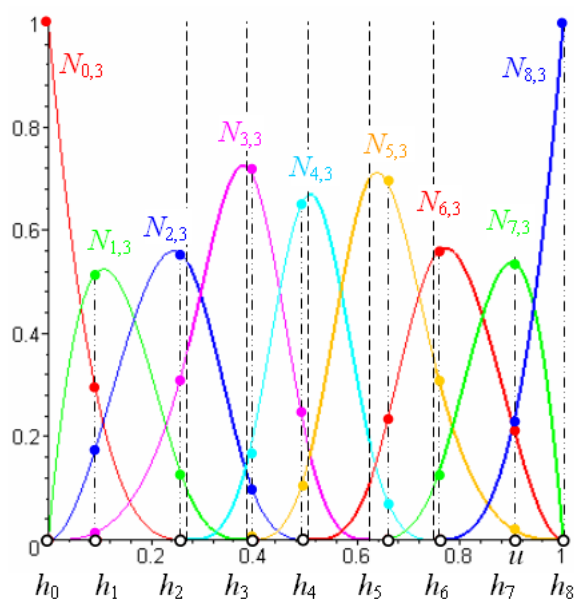
Obr. 5.29: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor průměrový



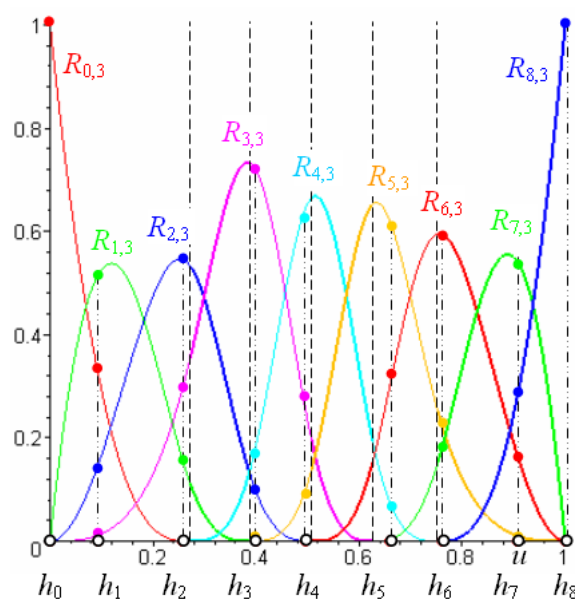
Obr. 5.30: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový, uzlový vektor průměrový

B-spline, resp. racionální bázové funkce na obr. 5.25, resp. obr. 5.26 mají stejný průběh jako na obr. 5.11, resp. obr. 5.12. Tětívový vektor parametrizace se projeví pouze jinými funkčními hodnotami B-spline, resp. racionálních bázových funkcí, které tvoří prvky matice soustavy (4.4), resp. (4.7) pro výpočet souřadnic řídicích bodů B-spline, resp. NURBS křivky. Tvar prosté interpolační B-spline a NURBS křivky definované na uniformním uzlovém vektoru s tětívovým vektorem parametrizace je nakreslen na obr. 5.27.

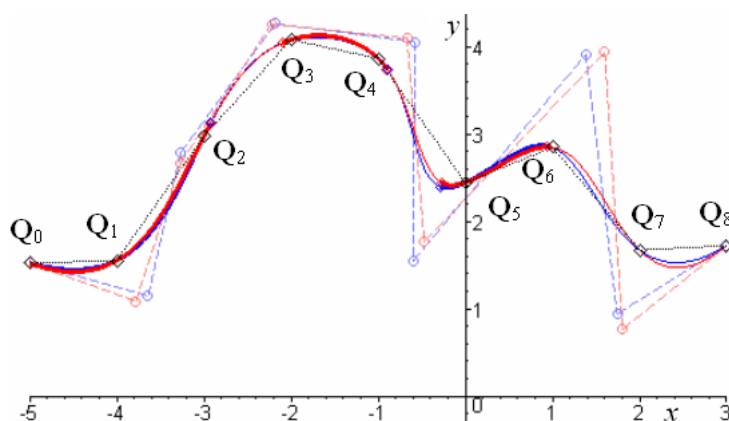
Příklad B-spline, resp. racionálních bázových funkcí 3. stupně pro prostou interpolační křivku definovanou na průměrovém uzlovém vektoru s tětívovým vektorem parametrizace je uveden na obr. 5.28, resp. obr. 5.29. Tvar příslušných prostých interpolačních křivek můžeme sledovat na obr. 5.30. Příklad B-spline, resp. racionálních bázových funkcí 3. stupně pro prostou interpolační křivku definovanou na těžišťovém uzlovém vektoru s tětívovým vektorem parametrizace je uveden na obr. 5.31, resp. obr. 5.32, prosté interpolační křivky jsou nakresleny na obr. 5.33.



Obr. 5.31: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor těžišťový



Obr. 5.32: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový,
uzlový vektor těžišťový

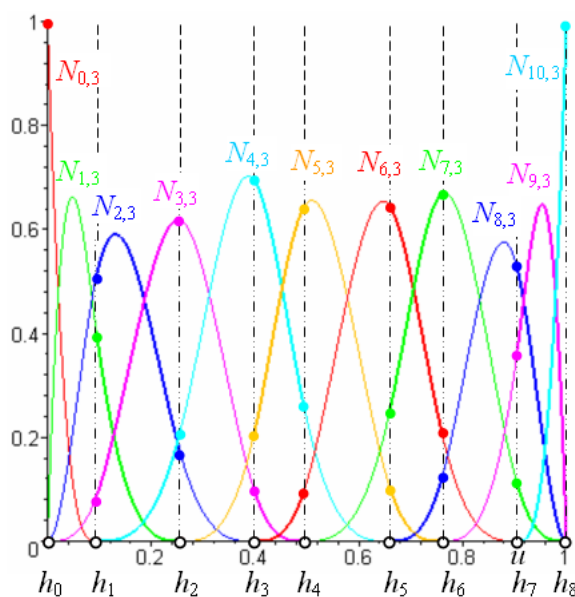


Obr. 5.33: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace tětívový, uzlový vektor těžišťový

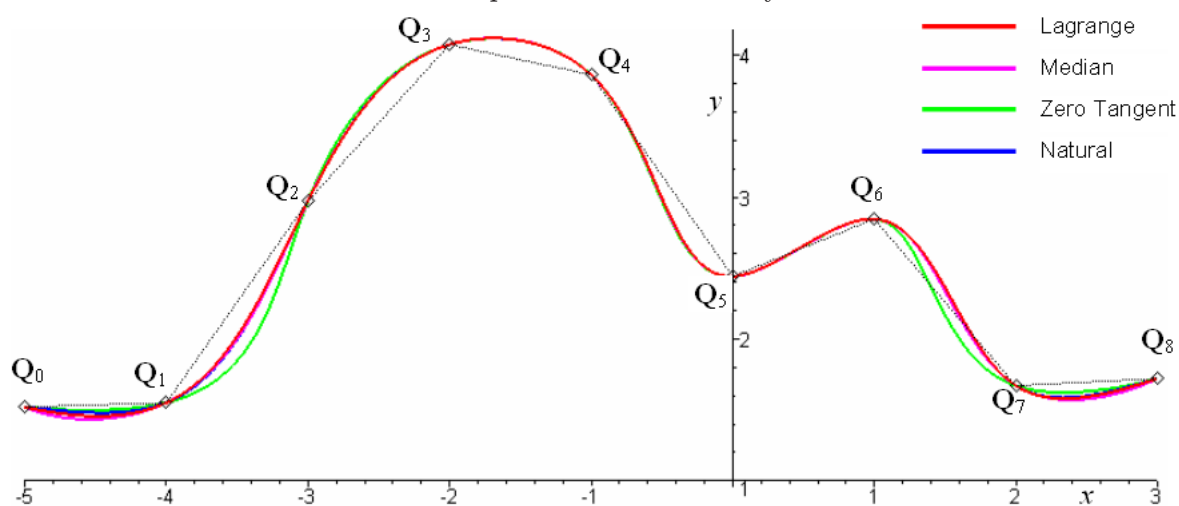
B-spline bázové funkce 3. stupně uzlové interpolační křivky s vektorem parametrizace stanoveným tětívovou metodou jsou zobrazeny na obr. 5.34, uzlové interpolační křivky jsou zobrazeny na obr. 5.35. Tak jako v případě uniformního vektoru parametrizace, tak i v případě tětívového vektoru parametrizace lze zaznamenat značné omezení překmitů výsledných interpolačních křivek v okolí krajních bodů. Je zřejmé, že okrajové podmínky ovlivňují tvar interpolační křivky velmi významnou měrou.

5.4.6 Dostředivá metoda konstrukce vektoru parametrizace

Dostředivá metoda se snaží omezit nežádoucí překmity na křivce, které mohou vzniknout díky ostrým zlomům definičního polygonu, tedy velmi malým úhlům mezi dvěma přilehlými rameny. Svůj název získala vzhledem k podobnosti s dostředivou silou, která u křivočarého pohybu prudce narůstá se zmenšujícím se poloměrem křivosti dráhy.



Obr. 5.34: B-spline bázové funkce 3. stupně pro uzlovou interpolaci; vektor parametrizace tětívový

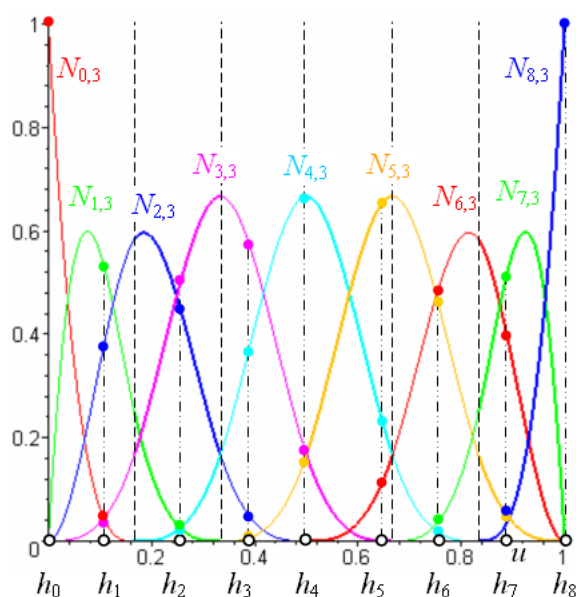


Obr. 5.35: Uzlové interpolační křivky 3. stupně; vektor parametrizace tětívový

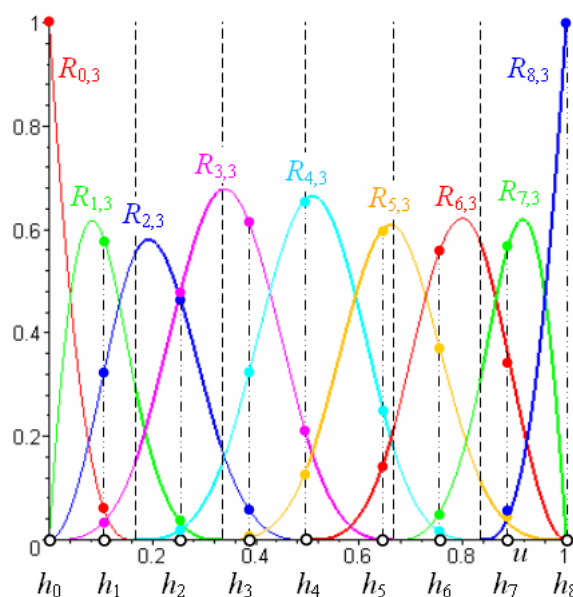
Ve skutečnosti jde o rozšíření metody tětívové, neboť vzdálenost hodnot parametrů ve vektoru parametrizace je úměrná odmocnině (zpravidla druhé) délky ramen definičního polygonu.

■ **Definice 5.9 – Dostředivý vektor parametrizace interpolační NURBS křivky.** Nechť je dán definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky. Potom jsou hodnoty parametru *dostředivého vektoru parametrizace* $H = (h_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$ interpolační NURBS křivky dány

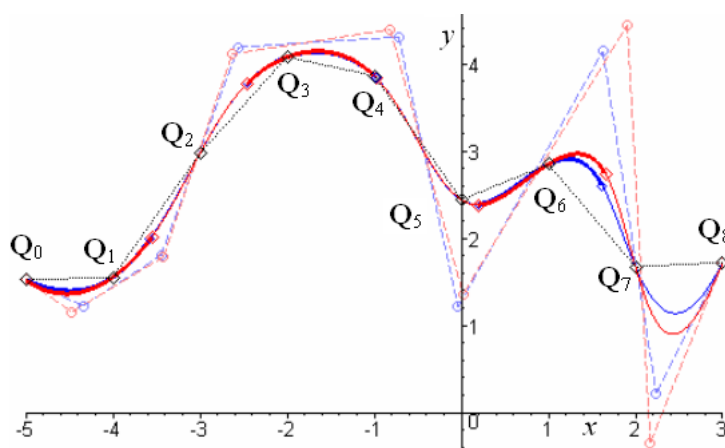
$$h_0 = 0, \quad h_i = \frac{\sum_{j=1}^i \sqrt{|\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_j|}}{\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \sqrt{|\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_j|}}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}. \quad (5.29)$$



Obr. 5.36: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor uniformní



Obr. 5.37: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor uniformní

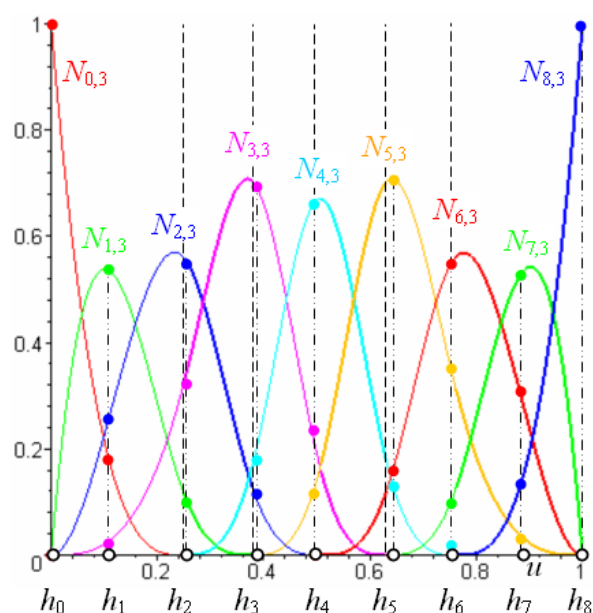


Obr. 5.38: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor uniformní

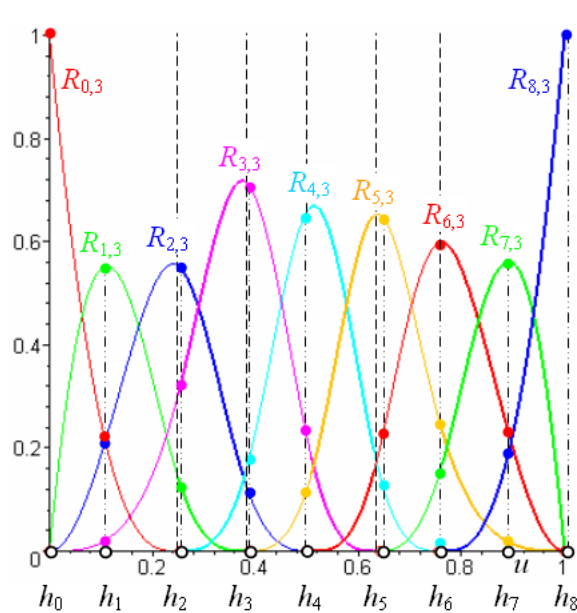
Vzdálenost hodnot parametru v dostředivém vektoru parametrizace je úměrná druhé odmocnině z délky ramen definičního polygonu. \square

Příklad B-spline, resp. racionálních bázových funkcí, resp. prostých interpolačních křivek s dostředivým vektorem parametrizace a uniformním uzlovým vektorem je uveden na obr. 5.36, resp. obr. 5.37, resp. obr. 5.38, s průměrovým uzlovým vektorem je uveden na obr. 5.39, resp. obr. 5.40, resp. obr. 5.41 a s těžišťovým uzlovým vektorem je uveden na obr. 5.42, resp. obr. 5.43, resp. obr. 5.44.

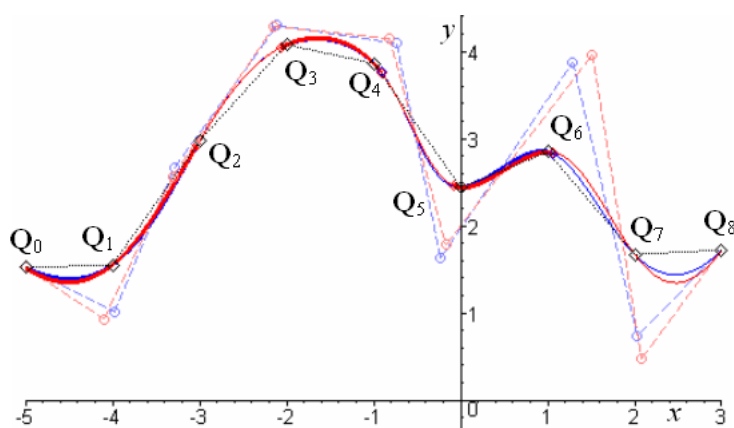
B-spline bázové funkce uzlové interpolační křivky s dostředivým vektorem parametrizace jsou nakresleny na obr. 5.45, příslušné uzlové interpolační křivky jsou nakresleny na obr. 5.46. Opět si můžeme všimnout, že ve své vnitřní části jsou rozdíly mezi jednotlivými křivkami nepatrné.



Obr. 5.39: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor průměrový



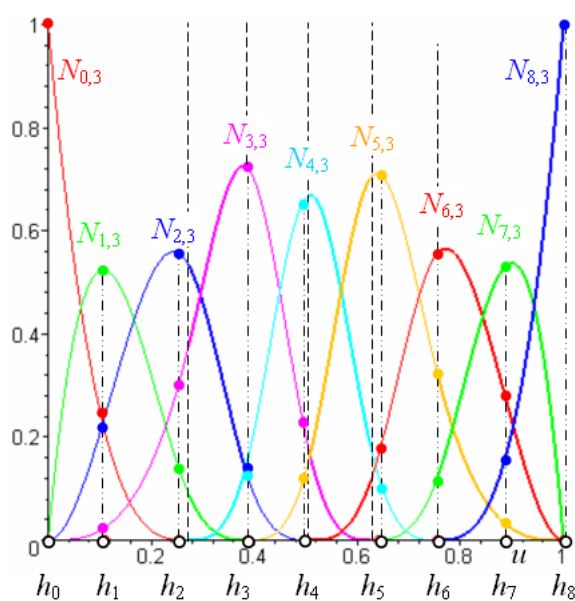
Obr. 5.40: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor průměrový



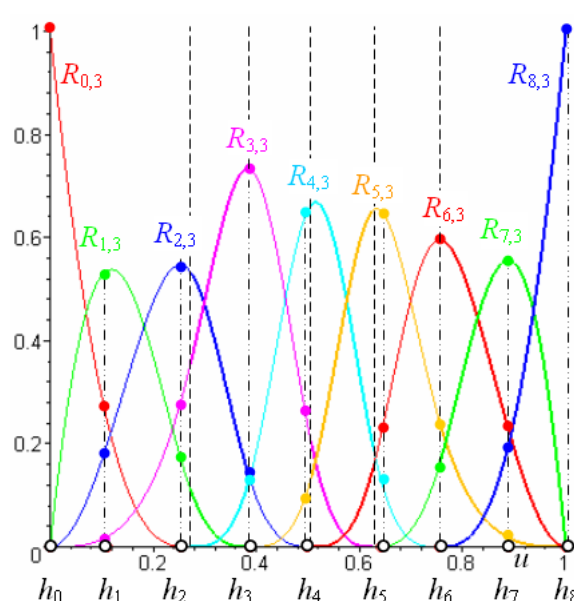
Obr. 5.41: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor průměrový

Porovnáme-li průběhy dosud zkonstruovaných prostých interpolačních křivek na následujících obrázcích:

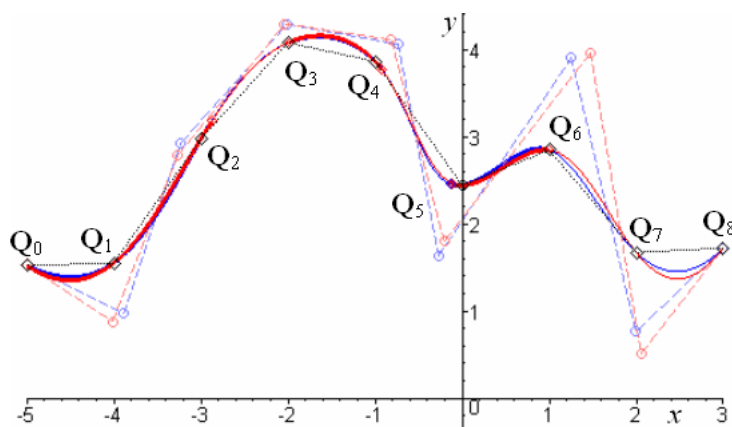
- obr. 5.13 – vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor uniformní,
 - obr. 5.19 – vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor průměrový,
 - obr. 5.22 – vektor parametrizace uniformní, uzlový vektor těžišťový,
 - obr. 5.27 – vektor parametrizace tětiový, uzlový vektor uniformní,
 - obr. 5.30 – vektor parametrizace tětiový, uzlový vektor průměrový,
 - obr. 5.33 – vektor parametrizace tětiový, uzlový vektor těžišťový,
 - obr. 5.38 – vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor uniformní,
 - obr. 5.41 – vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor průměrový,
 - obr. 5.44 – vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor těžišťový,
- vidíme, že všechny metody konstrukce vektoru parametrizace vykazují pro průměrový a pro tě-



Obr. 5.42: B-spline bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor těžišťový



Obr. 5.43: Racionální bázové funkce 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý,
uzlový vektor těžišťový



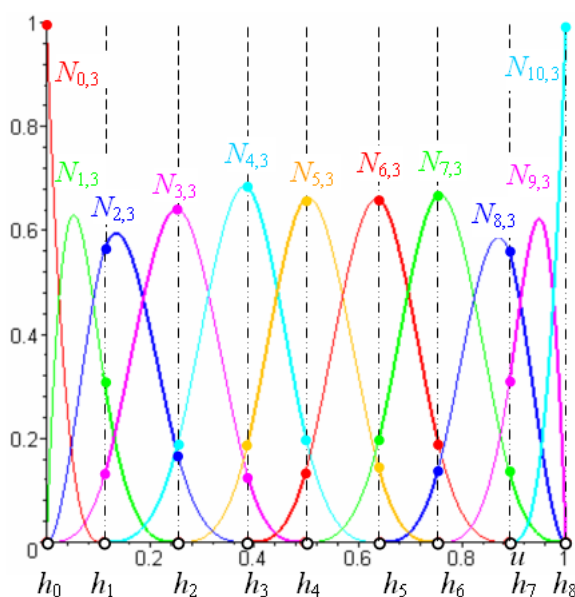
Obr. 5.44: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně;
vektor parametrizace dostředivý, uzlový vektor těžišťový

žišťový uzlový vektor podstatně lepší tvar prostých interpolačních křivek, než pro uniformní uzlový vektor. Dále je zřejmé, že zavedení těžišťových vah vede ke zmenšení nežádoucích překmitů interpolačních křivek.

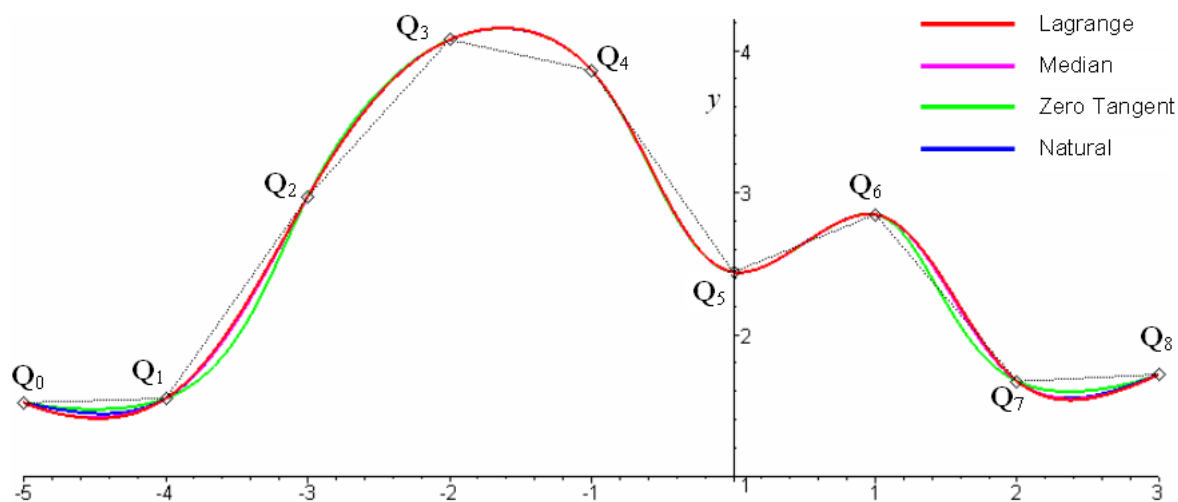
Uzlové interpolační křivky jsou zobrazeny na obr. 5.24 (vektor parametrizace uniformní), obr. 5.35 (vektor parametrizace těživový) a na obr. 5.46 (vektor parametrizace dostředivý). Porovnáním jejich průběhů vidíme, že způsob konstrukce vektoru parametrizace, zrovna tak jako volba okrajových podmínek, významným způsobem ovlivňuje tvar uzlové interpolační křivky.

5.4.7 Univerzální metoda

Univerzální metodu lze použít pouze pro prostou interpolaci, neboť se nejprve stanoví uzlový vektor, poté se vyjádří bázové funkce a nakonec se naleznou takové hodnoty parametru, pro



Obr. 5.45: B-spline bázové funkce 3. stupně pro uzlovou interpolaci; vektor parametrizace dostředivý

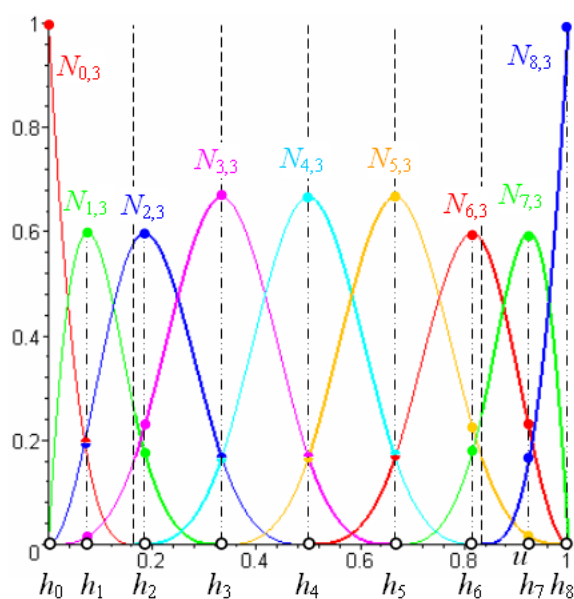


Obr. 5.46: Uzlové interpolační křivky 3. stupně; vektor parametrizace dostředivý

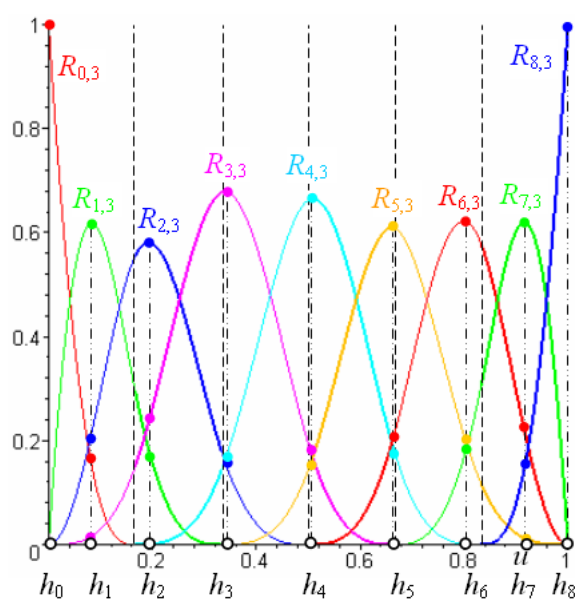
keré bázové funkce asociované s příslušnými řídicími body dosahují svého maxima. Vzhledem k tomu, že každá B-spline $N_{i,p}(u)$, resp. racionální $R_{i,p}(u)$ bázová funkce dosahuje na intervalu $[u_i, u_{i+p})$ pouze jediného maxima, je tento způsob konstrukce vektoru parametrizace velmi přirozený a maximálně zúročuje vliv bázových funkcí na tvar křivky.

B-spline, resp. racionální bázové funkce pro prostou interpolační křivku definovanou na uniformním uzlovém vektoru s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou jsou nakresleny na obr. 5.47, resp. obr. 5.48. Příslušné prosté interpolační křivky jsou nakresleny na obr. 5.49. B-spline, resp. racionální bázové funkce pro prostou interpolační křivku definovanou na těžišovém uzlovém vektoru s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou jsou nakresleny na obr. 5.50, resp. obr. 5.51. Příslušné prosté interpolační křivky jsou nakresleny na obr. 5.52.

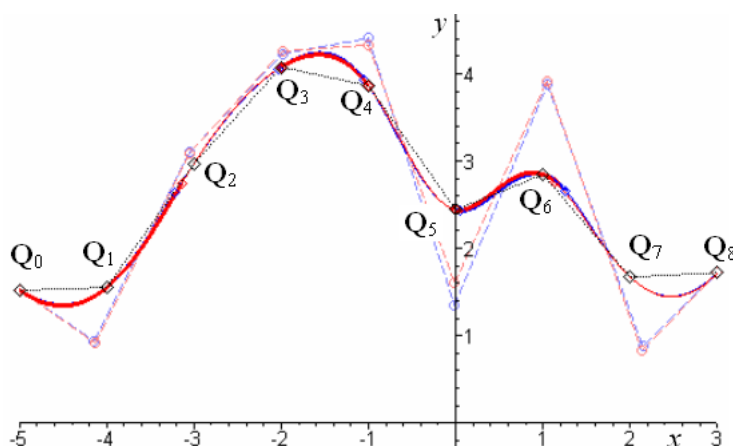
Tvar křivek na obr. 5.49 a na obr. 5.52 je velmi podobný, což by znamenalo, že tato metoda



Obr. 5.47: B-spline bázové funkce 3. stupně; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou



Obr. 5.48: racionální bázové funkce 3. stupně; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou

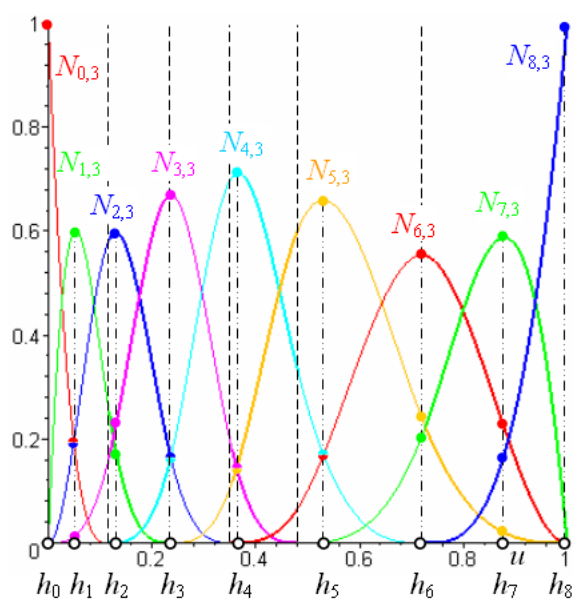


Obr. 5.49: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně; uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou

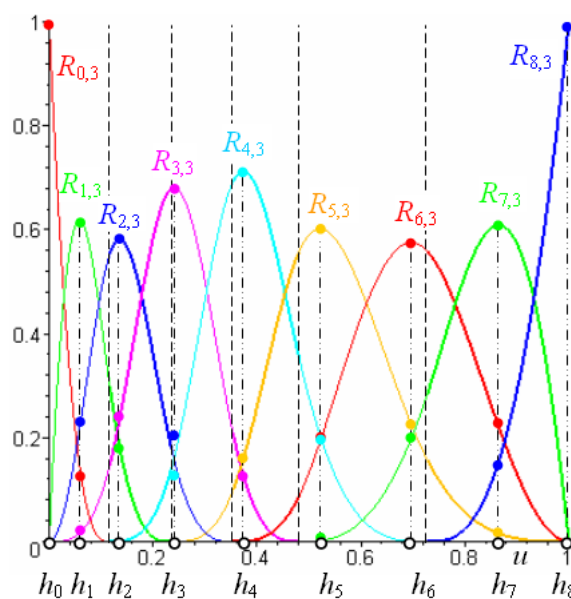
konstrukce vektoru parametrizace je v pravém slova smyslu univerzální – metoda konstrukce uzlového vektoru ani zavedení různých vah řídicích bodů nemají zásadní vliv na tvar výsledné křivky. Podrobněji budeme tuto domněnku zkoumat v kap. 6 Porovnání přesnosti interpolačních metod. Za zmínku také stojí skutečnost, že všechny interpolační křivky, jejichž vektor parametrizace je stanoven univerzální metodou, mají velmi dobrý průběh.

5.5 Rozdělení interpolačních metod

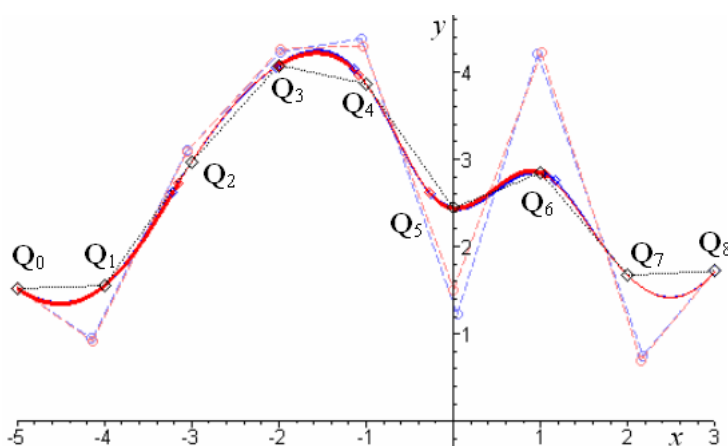
V této kapitole jsme se zabývali obecným principem konstrukce interpolační NURBS křivky a vybranými metodami stanovení jednotlivých tvarovacích nástrojů, které ovlivňují konečný tvar interpolační křivky. Uvedme si nyní souhrn poznatků o řešení problému interpolace za-



Obr. 5.50: B-spline bázové funkce 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou



Obr. 5.51: Racionální bázové funkce 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou



Obr. 5.52: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně; uzlový vektor těžišťový, vektor parametrizace stanoven univerzální metodou

dané posloupnosti definičních bodů a možnostech konstrukce jednotlivých tvarovacích nástrojů interpolačních B-spline a NURBS křivek.

- Podle základního přístupu k problému interpolace rozlišujeme *prostou* interpolační křivku, kdy je počet řídicích bodů roven počtu zadaných definičních bodů, nebo *uzlovou* interpolační křivku, kdy je počet segmentů výsledné křivky roven počtu ramen definičního polygonu.
- Prosté interpolační křivky
 - Prostou interpolační křivku můžeme konstruovat jako *B-spline* křivku, kdy můžeme považovat váhy všech řídicích bodů za jednotkové, nebo jako *NURBS* křivku, kdy jsou

váhy jednotlivých řídicích bodů různé. Váhy řídicích bodů NURBS křivky stanovíme *těžišťovou* metodou.

- K určení vektoru parametrizace a uzlového vektoru lze přistupovat nezávisle – potom konstruujeme vektor parametrizace *uniformní*, *tětivovou* nebo *dostředivou* metodou a uzlový vektor *uniformní* nebo *těžišťovou* metodou.
 - Pokud mají být vektor parametrizace a uzlový vektor ve vzájemné vazbě, lze nejprve stanovit vektor parametrizace (*uniformní*, *tětivový* nebo *dostředivý*) a uzlový vektor konstruovat jako *průměrový* nebo použít *univerzální* metodu, kdy se nejprve stanoví uzlový vektor (*uniformní* nebo *těžišťový*) a hodnoty parametru se určí tak, aby v nich bázové funkce dosahovaly svého maxima.
- Uzlové interpolační křivky
 - Při konstrukci uzlové interpolační křivky je vektor parametrizace vybranou částí uzlového vektoru, proto se nejprve stanoví vektor parametrizace – opět metodou *uniformní*, *tětivovou* nebo *dostředivou*.
 - Pokud jsou okrajové podmínky určeny tečnými vektory v krajních bodech křivky, můžeme je stanovit na základě *Lagrangeovy interpolace*, metodou *osově souměrných těžnic* nebo zvolíme *nulové* tečné vektory. V případě, že jsou okrajové podmínky určeny vektory druhých derivací v krajních bodech křivky, volíme je *nulové*.

Výše uvedený výčet metod stanovení tvarovacích nástrojů interpolačních B-spline a NURBS křivek nezahrnuje veškeré známé metody, ale pouze takové, jejichž konstrukce byla popsána v této publikaci. I tak máme k dispozici značně širokou paletu (celkem 34) interpolačních metod, jejichž schopností interpolace vhodně zvolených modelových dat se budeme zabývat v následující kapitole. Rozdělení interpolačních metod podle způsobu konstrukce tvarovacích nástrojů je uvedeno v tab. 5.1 společně s číselným kódem, který použijeme pro stručné rozlišení jednotlivých metod v dalším textu. Uzlový vektor je v tabulce označen symbolem U , vektor parametrizace symbolem H .

Dvojitou čarou jsou v tab. 5.1 odděleny následující skupiny interpolačních metod:

- Prosté interpolační metody s uniformním uzlovým vektorem: **1 až 6**.
- Prosté interpolační metody s průměrovým uzlovým vektorem: **7 až 12**.
- Prosté interpolační metody s těžišťovým uzlovým vektorem: **13 až 18**.
- Prosté interpolační metody s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou: **19 až 22**.
- Uzlové interpolační metody s uniformním vektorem parametrizace: **23 až 26**.
- Uzlové interpolační metody s tětivovým vektorem parametrizace: **27 až 30**.
- Uzlové interpolační metody s dostředivým vektorem parametrizace: **31 až 34**.

Šedé podbarvení číselného kódu označuje metodu, jejíž alespoň jeden tvarovací nástroj je konstruován postupem, který byl navržen autorkou publikace: těžnicové tečné vektory v krajních bodech uzlové interpolační NURBS křivky (část 5.1.1), nulové tečné vektory v krajních bodech uzlové interpolační NURBS křivky (část 5.1.1), těžišťové váhy řídicích bodů prosté interpolační NURBS křivky (část 5.3.1), těžišťový uzlový vektor ukotvené prosté interpolační NURBS křivky (část 5.4.3) nebo univerzální metoda konstrukce vektoru parametrizace prosté interpolační NURBS křivky s těžišťovým uzlovým vektorem (část 5.4.7).

Tab. 5.1: Číselný kód interpolačních metod

Kód	Metoda
1	Prostá interpolace, U uniformní, H uniformní, B-spline
2	Prostá interpolace, U uniformní, H uniformní, NURBS
3	Prostá interpolace, U uniformní, H třetivý, B-spline
4	Prostá interpolace, U uniformní, H třetivý, NURBS
5	Prostá interpolace, U uniformní, H dostředivý, B-spline
6	Prostá interpolace, U uniformní, H dostředivý, NURBS
7	Prostá interpolace, U průměrový, H uniformní, B-spline
8	Prostá interpolace, U průměrový, H uniformní, NURBS
9	Prostá interpolace, U průměrový, H třetivý, B-spline
10	Prostá interpolace, U průměrový, H třetivý, NURBS
11	Prostá interpolace, U průměrový, H dostředivý, B-spline
12	Prostá interpolace, U průměrový, H dostředivý, NURBS
13	Prostá interpolace, U těžišťový, H uniformní, B-spline
14	Prostá interpolace, U těžišťový, H uniformní, NURBS
15	Prostá interpolace, U těžišťový, H třetivý, B-spline
16	Prostá interpolace, U těžišťový, H třetivý, NURBS
17	Prostá interpolace, U těžišťový, H dostředivý, B-spline
18	Prostá interpolace, U těžišťový, H dostředivý, NURBS
19	Prostá interpolace, univerzální metoda, U uniformní, B-spline
20	Prostá interpolace, univerzální metoda, U uniformní, NURBS
21	Prostá interpolace, univerzální metoda, U těžišťový, B-spline
22	Prostá interpolace, univerzální metoda, U těžišťový, NURBS
23	Uzlová interpolace, H uniformní, krajní tečné vektory Lagrangeovy
24	Uzlová interpolace, H uniformní, krajní tečné vektory těžnicové
25	Uzlová interpolace, H uniformní, krajní tečné vektory nulové
26	Uzlová interpolace, H uniformní, krajní vektory druhých derivací nulové
27	Uzlová interpolace, H třetivý, krajní tečné vektory Lagrangeovy
28	Uzlová interpolace, H třetivý, krajní tečné vektory těžnicové
29	Uzlová interpolace, H třetivý, krajní tečné vektory nulové
30	Uzlová interpolace, H třetivý, krajní vektory druhých derivací nulové
31	Uzlová interpolace, H dostředivý, krajní tečné vektory Lagrangeovy
32	Uzlová interpolace, H dostředivý, krajní tečné vektory těžnicové
33	Uzlová interpolace, H dostředivý, krajní tečné vektory nulové
34	Uzlová interpolace, H dostředivý, krajní vektory druhých derivací nulové

Kapitola 6

Porovnání přesnosti interpolačních metod

Přesnost interpolační metody je pojem relativní. Pokud není k dispozici originální model křivky, ze kterého byly definiční body získány, lze úspěšnost použité interpolační metody při interpolaci konkrétních dat posoudit pouze vizuálně. Zde budeme posuzovat interpolační metody obecněji. Použijeme je k interpolaci modelových dat získaných výpočtem souřadnic bodů z analytické rovnice známé (teoretické) křivky a porovnáme interpolovaná data s teoretickými.

6.1 Stanovení přesnosti interpolační metody

Základem pro porovnání úspěšnosti interpolačních metod je výpočet vzdálenosti teoretické a interpolační křivky. V definičních bodech bude tato vzdálenost nulová, mezi definičními by měla být co nejmenší, aby se interpolační křivka svým tvarem co nejvíce blížila tvaru teoretické křivky. Zavedeme tzv. *odchylku* křivek, kterou budeme vzdálenost mezi křivkami měřit. Maximální hodnotu odchylky nazveme *absolutní chybou interpolace*. Porovnání úspěšnosti interpolačních metod budeme provádět na základě výpočtu *relativní chyby interpolace*, kterou získáme z absolutní chyby interpolace vhodným normováním.

6.1.1 Odchylka křivek

Podle způsobu určení odchylek křivek definujeme *odchylku interpolační křivky od teoretické, odchylku teoretické křivky od interpolační a odchylku teoretické a interpolační křivky*.

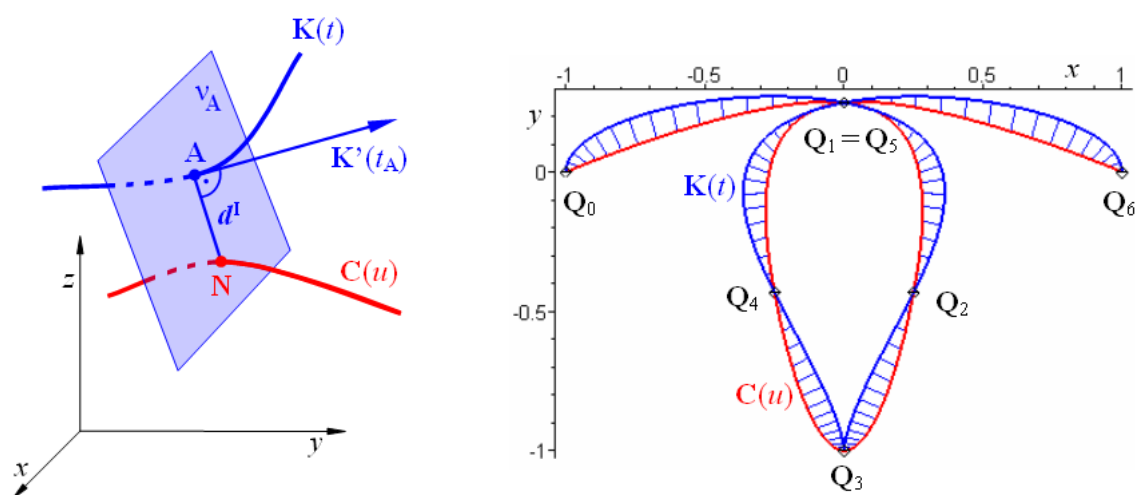
■ **Definice 6.1 – Odchylka interpolační křivky od teoretické.** Nechť definiční body \mathbf{Q}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, leží na dané teoretické křivce $\mathbf{K}(t)$, $t \in [a, b]$, která je spojitá na svém oboru parametrizace a má zde spojitě i první derivace, a nechť bod $\mathbf{A} = \mathbf{K}(t_{\mathbf{A}})$, $t_{\mathbf{A}} \in [a, b]$, je zvolený bod na křivce $\mathbf{K}(t)$. Nechť dále křivka $\mathbf{C}(u)$, $u \in [0, 1]$, je interpolační křivka vypočtená dle (4.4), (4.7) nebo (4.24). Potom odchylka d^I interpolační křivky $\mathbf{C}(u)$ od teoretické křivky $\mathbf{K}(t)$ v bodě \mathbf{A} je dána

$$d^I = |\mathbf{AN}|, \quad (6.1)$$

kde bod \mathbf{N} je průsečík křivky $\mathbf{C}(u)$ a normálové roviny $\nu_{\mathbf{A}}$ konstruované v bodě \mathbf{A} ke křivce $\mathbf{K}(t)$

$$\nu_{\mathbf{A}} : (\mathbf{N} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{K}'(t_{\mathbf{A}}) = 0. \quad (6.2)$$

$\mathbf{K}'(t_{\mathbf{A}})$ je tečný vektor křivky $\mathbf{K}(t)$ v bodě \mathbf{A} . Odchylka d^I je délka úsečky \mathbf{AN} ležící v normálové rovině $\nu_{\mathbf{A}}$ teoretické křivky měřená od teoretické křivky k interpolační. \square



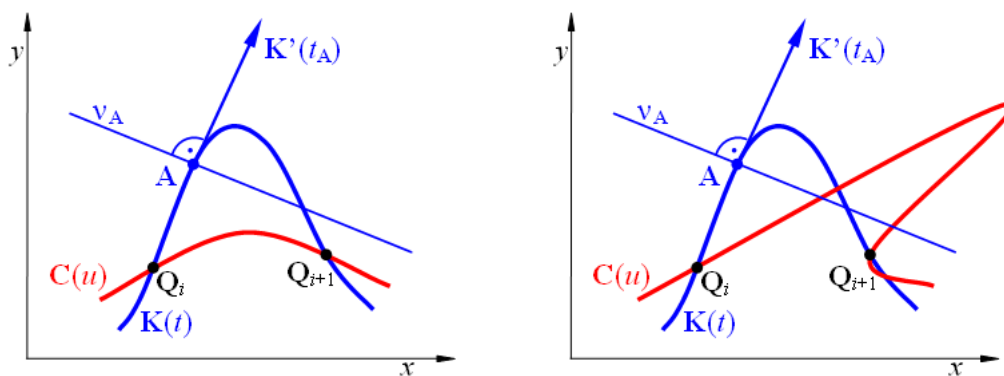
Obr. 6.1: Odchylka interpolační křivky od teoretické

Způsob určení odchylky d^I interpolační křivky od teoretické je znázorněn na obr. 6.1 vlevo. Příklad průběhu odchylek d_j^I , $j = 0, \dots, 90$, podél teoretické křivky

$$\mathbf{K}(t) = (\cos 3t \cos t^2, \cos 2t \sin t), \quad t \in [0, \pi],$$

vidíme na obr. 6.1 vpravo. Interpolační křivka $\mathbf{C}(u)$ byla vypočtena uzlovou interpolací pro uniformní vektor parametrizace a s krajními tečnými vektory stanovenými metodou osově souměrných těžnic.

Může však nastat případ, kdy odchylku d^I interpolační křivky od teoretické nelze ve všech bodech teoretické křivky $\mathbf{K}(t)$ stanovit, neboť nemusí existovat průsečík normálové roviny ν_A s interpolační křivkou $\mathbf{C}(u)$, popř. průsečík může ležet mimo uvažovaný obor parametrizace interpolační křivky. Taková situace je znázorněna na obr. 6.2 vlevo. Důvodem může být malý počet definičních bodů, jejichž poloha nevystihuje významné tvarové podrobnosti teoretické křivky v dostatečné míře. V těchto případech lze získat představu o přesnosti interpolace vyhodnocením *odchylky teoretické křivky od interpolační*, kterou označíme d^{II} .

Obr. 6.2: Neexistující (vlevo) a nejednoznačný (vpravo) průsečík normálové roviny ν s interpolační křivkou

■ **Definice 6.2 – Odchylka teoretické křivky od interpolační.** Nechť definiční body \mathbf{Q}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, leží na dané teoretické křivce $\mathbf{K}(t)$, $t \in [a, b]$, která je spojitá na svém oboru

parametrizace a má zde spojitě i první derivace. Nechť dále křivka $\mathbf{C}(u)$, $u \in [0, 1]$, je interpolační křivka vypočtená dle (4.4), (4.7) nebo (4.24) a nechť dále bod $\mathbf{B} = \mathbf{C}(u_{\mathbf{B}})$, $u_{\mathbf{B}} \in [0, 1]$, je zvolený bod na křivce $\mathbf{C}(u)$. Potom odchylka d^{II} teoretické křivky $\mathbf{K}(t)$ od interpolační křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě \mathbf{B} je dána

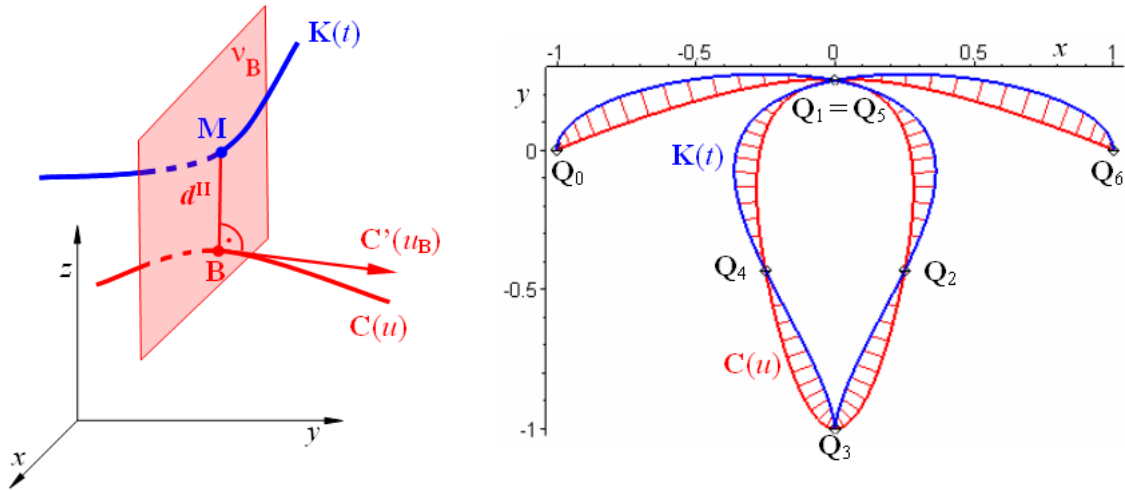
$$d^{\text{II}} = |\mathbf{BM}|, \quad (6.3)$$

kde bod \mathbf{M} je průsečík křivky $\mathbf{K}(t)$ a normálové roviny $\nu_{\mathbf{B}}$ konstruované v bodě \mathbf{B} ke křivce $\mathbf{C}(u)$

$$\nu_{\mathbf{B}} : (\mathbf{M} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}'(u_{\mathbf{B}}) = 0. \quad (6.4)$$

$\mathbf{C}'(u_{\mathbf{B}})$ je tečný vektor křivky $\mathbf{C}(u)$ v bodě \mathbf{B} . Odchylka d^{II} je délka úsečky \mathbf{BM} ležící v normálové rovině $\nu_{\mathbf{B}}$ interpolační křivky měřená od interpolační křivky k teoretické. \square

Určení odchylky d^{II} teoretické křivky od interpolační je nakresleno na obr. 6.3 vlevo. Vpravo je znázorněn příklad průběhu odchylek d_j^{II} , $j = 0, \dots, 90$, podél stejné teoretické křivky, jako na obr. 6.1. Interpolační křivka $\mathbf{C}(u)$ na obr. 6.3 byla získána opět stejnou interpolační metodou jako na obr. 6.1.



Obr. 6.3: Odchylka teoretické křivky od interpolační

Pokud je zvolena vhodná metoda interpolace, probíhá interpolační křivka v blízkosti teoretické křivky. Jestliže je ale interpolační metoda zvolena nevhodně, nemusíme vždy obdržet jednoznačný výsledek. Taková situace je zobrazena na obr. 6.2 vpravo, kde normálová rovina $\nu_{\mathbf{A}}$ protíná interpolační křivku dvakrát. Proto zavedeme *odchylku teoretické a interpolační křivky*, kterou označíme d^{III} .

■ **Definice 6.3 – Odchylka teoretické a interpolační křivky.** Nechť definiční body \mathbf{Q}_i , $i = 0, \dots, \tilde{n}$, leží na dané teoretické křivce $\mathbf{K}(t)$, $t \in [a, b]$, a nechť křivka $\mathbf{C}(u)$, $u \in [0, 1]$, je interpolační křivka vypočtená dle (4.4), (4.7) nebo (4.24). Nechť je dále stanoven dostatečný počet bodů $\mathbf{A}_j = \mathbf{K}(t_j)$, $j = 0, \dots, m$, na teoretické křivce $\mathbf{K}(t)$ a stejný počet bodů $\mathbf{B}_j = \mathbf{C}(u_j)$ na interpolační křivce $\mathbf{C}(u)$ a nechť pro hodnoty parametrů t_j a u_j platí

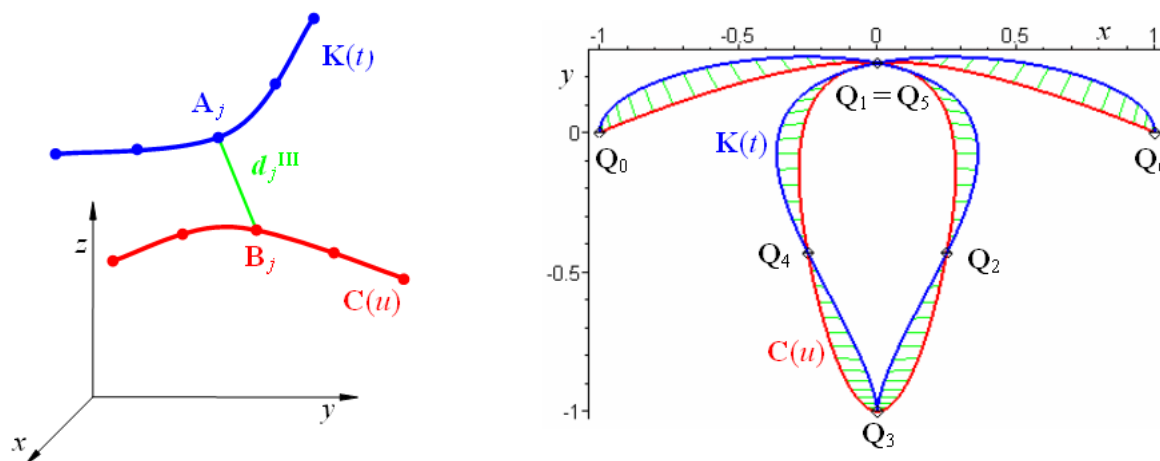
$$t_j = \frac{j}{b-a}, \quad u_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, \dots, m. \quad (6.5)$$

Potom je odchylka d_j^{III} teoretické a interpolační křivky

$$d_j^{\text{III}} = |\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j|. \quad (6.6)$$

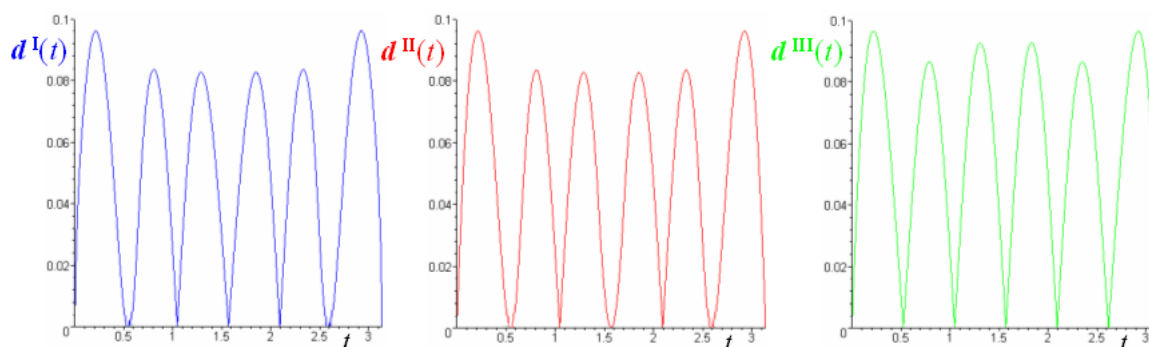
Odchylka d_j^{III} je délka úsečky $\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j$, která spojuje body teoretické a interpolační křivky odpovídající stejnému dílu parametru. \square

Na obr. 6.4 vlevo je nakreslen princip stanovení odchylky d_j^{III} teoretické křivky (stejně jako na obr. 6.1) a interpolační křivky, vpravo jsou zobrazeny tyto odchylky podél obou křivek. Interpolační křivka $\mathbf{C}(u)$ byla opět získána stejnou interpolační metodou jako na obr. 6.1.



Obr. 6.4: Odchylka teoretické a interpolační křivky

Abychom získali představu o průběhu odchylek podél křivek, vypočteme odchylky $d^{\text{I}}(t_j)$, resp. $d^{\text{II}}(t_j)$, resp. $d^{\text{III}}(t_j)$ v dostatečně mnoha bodech $j = 0, \dots, m$, a vyneseme je do grafu. Na vodorovnou osu vynášíme hodnoty parametru t_j teoretické křivky $\mathbf{K}(t)$ a na svislou osu odpovídající velikosti odchylek. Pokud je vhodně zvolena interpolační metoda, je průběh odchylek $d^{\text{I}}(t)$ jen velmi málo odlišný od průběhu $d^{\text{II}}(t)$, resp. $d^{\text{III}}(t)$. Příklad takových grafů vidíme na obr. 6.5, kde jsou uvedeny průběhy všech tří typů odchylek podél křivek z obr. 6.1, obr. 6.3 a obr. 6.4.



Obr. 6.5: Graf odchylek $d^{\text{I}}(t)$, $d^{\text{II}}(t)$ a $d^{\text{III}}(t)$ podél křivek $\mathbf{K}(t)$ a $\mathbf{C}(u)$

6.1.2 Absolutní chyba interpolace

Pro porovnání různých interpolačních metod použitých k interpolaci *stejného* definičního polygonu zavedeme *absolutní chybu interpolace*.

- **Definice 6.4 – Absolutní chyba interpolace.** Nechť jsou vypočteny odchylky d_j^{I} dle (6.1) v dostatečně mnoha bodech \mathbf{A}_j , $j = 0, \dots, m$, resp. odchylky d_j^{II} dle (6.3) v dostatečně mnoha

bodech \mathbf{B}_j , $j = 0, \dots, m$, resp. odchylky d_j^{III} dle (6.6) mezi dostatečně mnoha body \mathbf{A}_j a \mathbf{B}_j , $j = 0, \dots, m$. Potom je absolutní chyba interpolace D^{I} , resp. D^{II} , resp. D^{III} dána

$$D^{\text{I}} = \max_{j=0, \dots, m} (d_j^{\text{I}}), \quad (6.7)$$

resp.

$$D^{\text{II}} = \max_{j=0, \dots, m} (d_j^{\text{II}}), \quad (6.8)$$

resp.

$$D^{\text{III}} = \max_{j=0, \dots, m} (d_j^{\text{III}}). \quad (6.9)$$

Absolutní chyba interpolace je tedy maximální hodnota vypočtené odchylky křivek. \square

Pro zajímavost uvedeme absolutní chyby interpolace pro křivku $\mathbf{C}(u)$ z obr. 6.1, obr. 6.3 a obr. 6.4:

$$\begin{aligned} D^{\text{I}} &= 0.09615263770, \\ D^{\text{II}} &= 0.09614824748, \\ D^{\text{III}} &= 0.09651540802. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že absolutní chyby interpolace se v uvedeném příkladu od sebe liší pouze nepatrně.

6.1.3 Relativní chyba interpolace

Na základě absolutní chyby interpolace již můžeme porovnávat interpolační metody použité ke konstrukci interpolační křivky definované jediným definičním polygonem. Aby bylo možné porovnávat interpolační metody obecně, budeme absolutní chybu interpolace vhodně normovat a zavedeme tak veličinu, kterou označíme jako *relativní chybu interpolace*.

■ **Definice 6.5 – Relativní chyba interpolace.** Nechť jsou vypočteny absolutní chyby interpolace D^{I} dle (6.7), resp. D^{II} dle (6.8), resp. D^{III} dle (6.9). Nechť dále

$$L = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} |\mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{Q}_i| \quad (6.10)$$

je délka definičního polygonu $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}}$. Potom je relativní chyba interpolace ε^{I} , resp. ε^{II} , resp. ε^{III} dána

$$\varepsilon^{\text{I}} = \frac{D^{\text{I}}}{L} \cdot 100 \%, \quad (6.11)$$

resp.

$$\varepsilon^{\text{II}} = \frac{D^{\text{II}}}{L} \cdot 100 \%, \quad (6.12)$$

resp.

$$\varepsilon^{\text{III}} = \frac{D^{\text{III}}}{L} \cdot 100 \%. \quad (6.13)$$

Relativní chyba interpolace je tedy absolutní chyba interpolace vyjádřená v procentech délky definičního polygonu. \square

V našem příkladu z obr. 6.1, obr. 6.3 a obr. 6.4, který byl zvolen tak, aby odchylky křivek byly z důvodu názornosti obrázků značné, je relativní chyba interpolace následující:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{I}} &= 2.021915126 \%, \\ \varepsilon^{\text{II}} &= 2.021822808 \%, \\ \varepsilon^{\text{III}} &= 2.029543526 \%. \end{aligned}$$

6.2 Interpolace modelových dat

Abychom mohli interpolační metody uvedené v tab. 5.1 posoudit objektivně, budeme modelová data simulovat definičními body ležícími na různě tvarovaných prostorových teoretických křivkách. Prostorové křivky byly zvoleny proto, abychom dosáhli větší obecnosti získaných výsledků. Konkrétně budeme uvažovat tři následující prostorové teoretické křivky:

- Křivku bez singulárních bodů, kterou označíme $\mathbf{K}^1(t)$:

$$\mathbf{K}^1(t) = (\cos 2t, \sin t \cos t, \sin 3t), \quad t \in [0, \pi]. \quad (6.14)$$

- Křivku s jedním singulárním bodem (uzlovým bodem), kterou označíme $\mathbf{K}^2(t)$:

$$\mathbf{K}^2(t) = (\cos 2t \cos t, \sin 2t \cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi]. \quad (6.15)$$

- Křivku s více singulárními body (jedním uzlovým bodem a jedním bodem vratu), kterou označíme $\mathbf{K}^3(t)$:

$$\mathbf{K}^3(t) = (\cos 3t \cos t^2, -\cos 2t \sin t^2, \cos^2 t), \quad t \in [0, \pi]. \quad (6.16)$$

Vzhledem k tomu, že přesnost interpolační křivky je značným způsobem ovlivněna hustotou definičních bodů, budou definiční body vypočteny se třemi různými hustotami danými vzorkovacím krokem Δt_i , $i = 1, 2, 3$, parametru t :

$$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta t_2 = \frac{\pi}{10}, \quad \Delta t_3 = \frac{\pi}{18}. \quad (6.17)$$

Z důvodů stručnosti budeme dále termínem *hustota definičních bodů* (popř. pouze *hustota*) Δt_i , $i = 1, 2, 3$, rozumět soubor všech definičních bodů, které byly vypočteny na teoretické křivce pro hodnoty parametru t odpovídající vzorkovacímu kroku Δt_i , $i = 1, 2, 3$ dle (6.17).

Celkem budeme posuzovat přesnost 34 interpolačních metod, které označíme pořadovým číslem dle tab. 5.1. Pro každou teoretickou křivku $\mathbf{K}^l(t)$, $l = 1, 2, 3$, obdržíme tedy 34 interpolačních křivek, které označíme $\mathbf{C}_k^l(u)$. Dolní index $k = 1, \dots, 34$ označuje interpolační metodu a horní index $l = 1, 2, 3$ označuje teoretickou křivku, ze které byly vypočteny definiční body.

Protože budeme přednostně vyhodnocovat pouze odchylky d^l , tj. odchylky interpolační křivky $\mathbf{C}_k^l(u)$ od teoretické křivky $\mathbf{K}^l(t)$, budeme nadále vynechávat horní index l v označení odchylek i absolutní a relativní chyby interpolace. Souvislosti těchto vypočtených hodnot s použitou metodou a teoretickou křivkou budeme označovat analogicky jako interpolační křivky: odchylka křivek d_k^l , absolutní chyba interpolace D_k^l a relativní chyba interpolace ε_k^l .

Pro účely komplexního porovnání interpolačních metod stanovíme pro každou metodu veličinu, kterou označíme jako *chybu interpolační metody* E_k , $k = 1, \dots, 34$.

- **Definice 6.6 – Chyba interpolační metody.** Nechť $\varepsilon_{k_1}^l$, resp. $\varepsilon_{k_2}^l$, resp. $\varepsilon_{k_3}^l$, $l = 1, 2, 3$, označuje relativní chyby interpolace k -té metody vypočtené pro hustotu definičních bodů Δt_1 , resp. Δt_2 , resp. Δt_3 dle (6.17). Potom je *chyba interpolační metody* E_k dána

$$E_k = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{k_1}^l + \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{k_2}^l + \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{k_3}^l = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{k_i}^l. \quad (6.18)$$

Chyba interpolační metody je tedy součet všech dosažených relativních chyb interpolace této metody použité k interpolaci definičních bodů ležících na všech třech teoretických křivkách se všemi třemi uvažovanými hustotami definičních bodů. \square

Při posuzování interpolačních metod budeme postupovat následujícím způsobem:

- Pro teoretickou křivku $\mathbf{K}^l(t)$, $l = 1, 2, 3$, nejprve zobrazíme její graf (v Mongeově promítání doplněný vhodně orientovaným axonometrickým průmětem), abychom si mohli utvořit správnou představu o jejím tvaru.
- Úspěšnost interpolační metody závisí do značné míry na rozmístění definičních bodů, proto zobrazíme graf teoretické křivky (axonometrický průmět doplněný půdorysem) včetně definičních bodů pro všechny tři uvažované hustoty Δt_1 , Δt_2 a Δt_3 .
- Pro skupiny interpolačních metod (v tab. 5.1 jsou od sebe odděleny dvojitou čarou) nakreslíme do jednoho grafu teoretickou křivku a interpolační křivky. Tím získáme vizuální představu o vhodnosti zvolené interpolační metody pro interpolaci konkrétních dat. Tyto grafy sestojíme pro všechny tři uvažované hustoty definičních bodů.

Jednotlivé křivky v grafech odlišíme barevně takto: teoretická – světle modrá, prostá B-spline – červená, prostá NURBS – modrá; uzlová s krajními tečnými vektory stanovenými Lagrangeovou metodou – červená, uzlová s těžnicovými krajními tečnými vektory – růžová, uzlová s nulovými krajními tečnými vektory – zelená, uzlová s nulovými krajními vektory druhých derivací – modrá.

- Je-li interpolační metoda velmi přesná, nelze rozdíl mezi teoretickou a interpolační křivkou posoudit vizuálně, proto vyneseme pro všechny tři uvažované hustoty definičních bodů graf velikostí odchylek $d_k^l(t)$ podél teoretické křivky.

Jednotlivé grafy velikostí odchylek $d_k^l(t)$ odlišíme barevně takto: odchylky prosté interpolační křivky s uniformním vektorem parametrizace – červená, odchylky prosté interpolační křivky s těživým vektorem parametrizace – modrá, odchylky prosté interpolační křivky s dostředivým vektorem parametrizace – zelená; odchylky prosté interpolační křivky s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou a uniformním uzlovým vektorem – červená, odchylky prosté interpolační křivky s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou a těžišťovým uzlovým vektorem – červená; odchylky uzlových křivek – v barvě interpolační křivky.

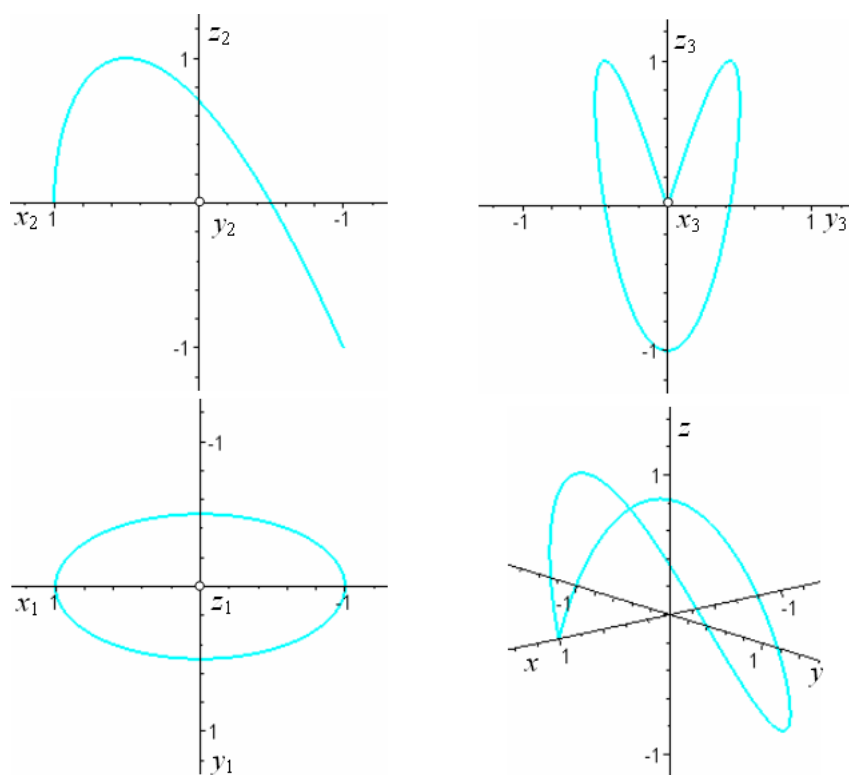
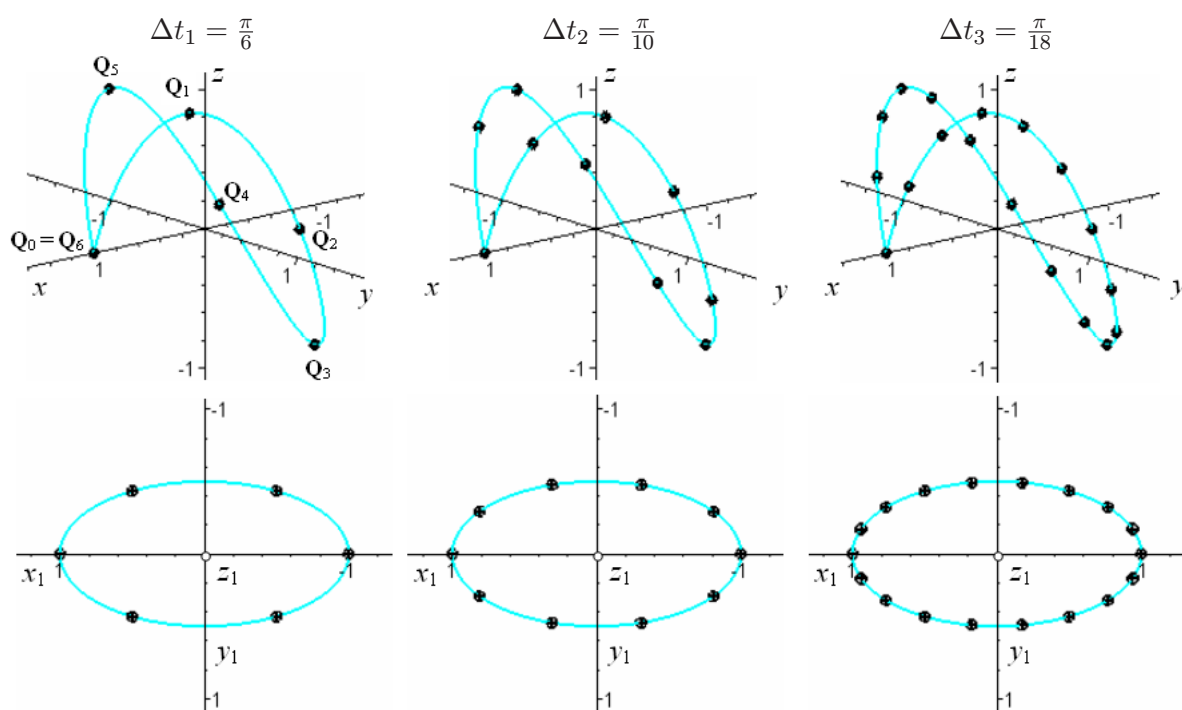
- Číselně vyhodnotíme absolutní chybu interpolace D_k^l a relativní chybu interpolace ε_k^l pro všechny interpolační metody z posuzované skupiny a porovnáme jejich úspěšnost při interpolaci konkrétních dat.
- Provedeme komplexní porovnání úspěšnosti všech 34 interpolačních metod při interpolaci definičních bodů ležících na všech třech teoretických křivkách se všemi třemi uvažovanými hustotami definičních bodů.

6.2.1 Modelová data na křivce bez singulárních bodů

Křivka bez singulárních bodů $\mathbf{K}^1(t)$ s vektorovou rovnicí (6.14) má velmi jednoduchý průběh a v uvažovaném oboru parametrizace nevykazuje žádné prudké změny tvaru, jak můžeme sledovat na obr. 6.6. Rozmístění definičních bodů pro uvažované hustoty Δt_1 , Δt_2 a Δt_3 je patrné z obr. 6.7. Definiční body jsou z důvodu čitelnosti obrázku popsány pouze v případě nejnižší hustoty Δt_1 . Orientace definičních bodů na teoretické křivce pro hustoty Δt_2 a Δt_3 je shodná.

Prosté interpolační metody

Průběh interpolačních křivek a jejich odchylek ze skupiny prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem je znázorněn na obr. 6.8. Už z tvaru interpolačních křivek je vidět, že zvyšování

Obr. 6.6: Průběh křivky $\mathbf{K}^1(t)$ Obr. 6.7: Rozmístění definičních bodů na křivce $\mathbf{K}^1(t)$

hustoty definičních bodů nemusí vždy vést k lepšímu výsledku. Obzvláště citlivá je metoda s tětí-
vovým vektorem parametrizace, která v kombinaci s uniformním uzlovým vektorem a nevhodnou
konfigurací definičních bodů může vést na singulární řešení soustavy (4.4), resp. (4.7). Výsledná
křivka potom sice prochází definičními body, ale mezi nimi se prudce rozkmitá. Na obr. 6.8 se
tato skutečnost již začíná projevovat.

Číselné hodnoty absolutní a relativní chyby interpolace definičních bodů ležících na křivce
 $\mathbf{K}^1(t)$ jsou uvedeny v tab. 6.1. Nejlepší výsledky ze skupiny prosté interpolace s uniformním
uzlovým vektorem vykazuje pro hustotu Δt_1 metoda **5** (B-spline, vektor parametrizace dostře-
divý), pro hustotu Δt_2 a Δt_3 metoda **1** (B-spline, vektor parametrizace uniformní). Metoda **3**
(B-spline, vektor parametrizace tětí-
vový) a **4** (NURBS, vektor parametrizace tětí-
vový) se jeví jako zcela nevhodná pro vyšší hustoty definičních bodů.

Tab. 6.1: Metody **1** až **6**:

Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
1	$7.87 \cdot 10^{-2}$	1.033	$3.50 \cdot 10^{-3}$	0.045	$2.83 \cdot 10^{-4}$	0.004
2	$4.11 \cdot 10^{-2}$	0.539	$8.77 \cdot 10^{-2}$	1.122	$1.68 \cdot 10^{-2}$	0.211
3	$5.19 \cdot 10^{-2}$	0.681	$7.38 \cdot 10^{-2}$	0.944	$2.86 \cdot 10^{-1}$	3.592
4	$1.25 \cdot 10^{-1}$	1.640	$1.17 \cdot 10^{-1}$	1.494	$3.16 \cdot 10^{-1}$	3.964
5	$2.93 \cdot 10^{-2}$	0.384	$7.41 \cdot 10^{-2}$	0.948	$4.89 \cdot 10^{-2}$	0.614
6	$7.55 \cdot 10^{-2}$	0.990	$9.86 \cdot 10^{-2}$	1.262	$6.87 \cdot 10^{-2}$	0.864

Interpolační metody **7** až **12** ze skupiny prosté interpolace s průměrovým uzlovým vektorem
dosahují vesměs velmi dobrých výsledků, jak můžeme vizuálně posoudit z průběhů interpolačních
křivek a odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$ na obr. 6.9.

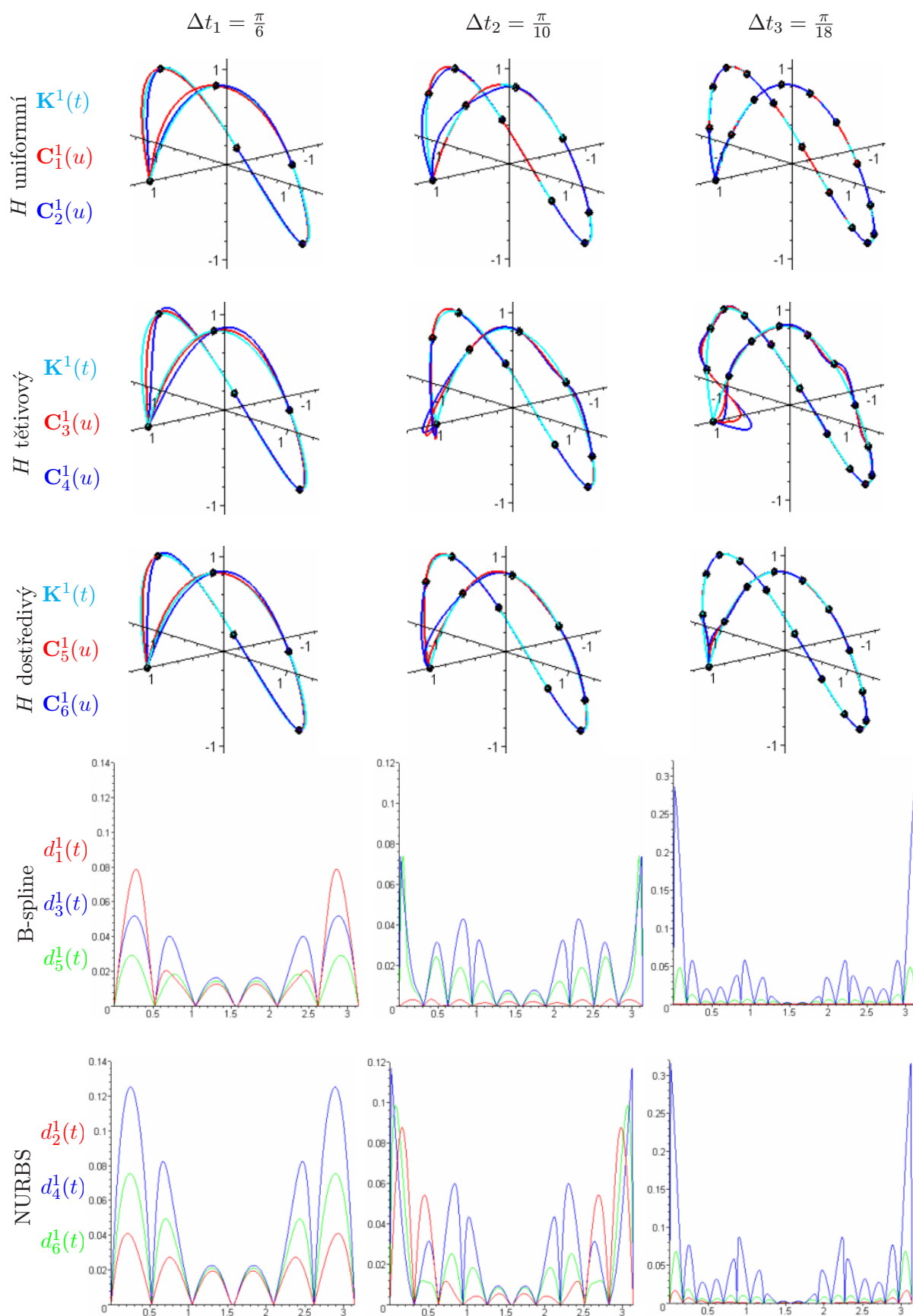
Všechny metody z této skupiny se také chovají dle očekávání – se zvyšující se hustotou
definičních bodů poskytují lepší tvar interpolační křivky. Číselně jsou výsledky shrnuty v tab. 6.2.

Nejlépe pro hustotu Δt_1 dosahuje metoda **9** (B-spline, vektor parametrizace
tětí-
vový) a pro hustotu Δt_2 a Δt_3 metoda **7** (B-spline, vektor parametrizace uniformní). Tato
metoda se zároveň jeví jako nejméně přesná pro hustotu Δt_1 . Pro hustotu Δt_2 a Δt_3 je nejméně
přesná metoda **10** (NURBS, vektor parametrizace tětí-
vový).

Také v případě těžišového uzlového vektoru pro prosté interpolační metody **13** až **18** do-
stáváme velmi dobré výsledky, v řadě případů lepší než u metod **7** až **12** s uzlovým vektorem
průměrovým. Průběh interpolačních křivek a odchylek od teoretické interpolační křivky $\mathbf{K}^1(t)$
je nakreslen na obr. 6.10, číselné hodnoty jsou uvedeny v tab. 6.3.

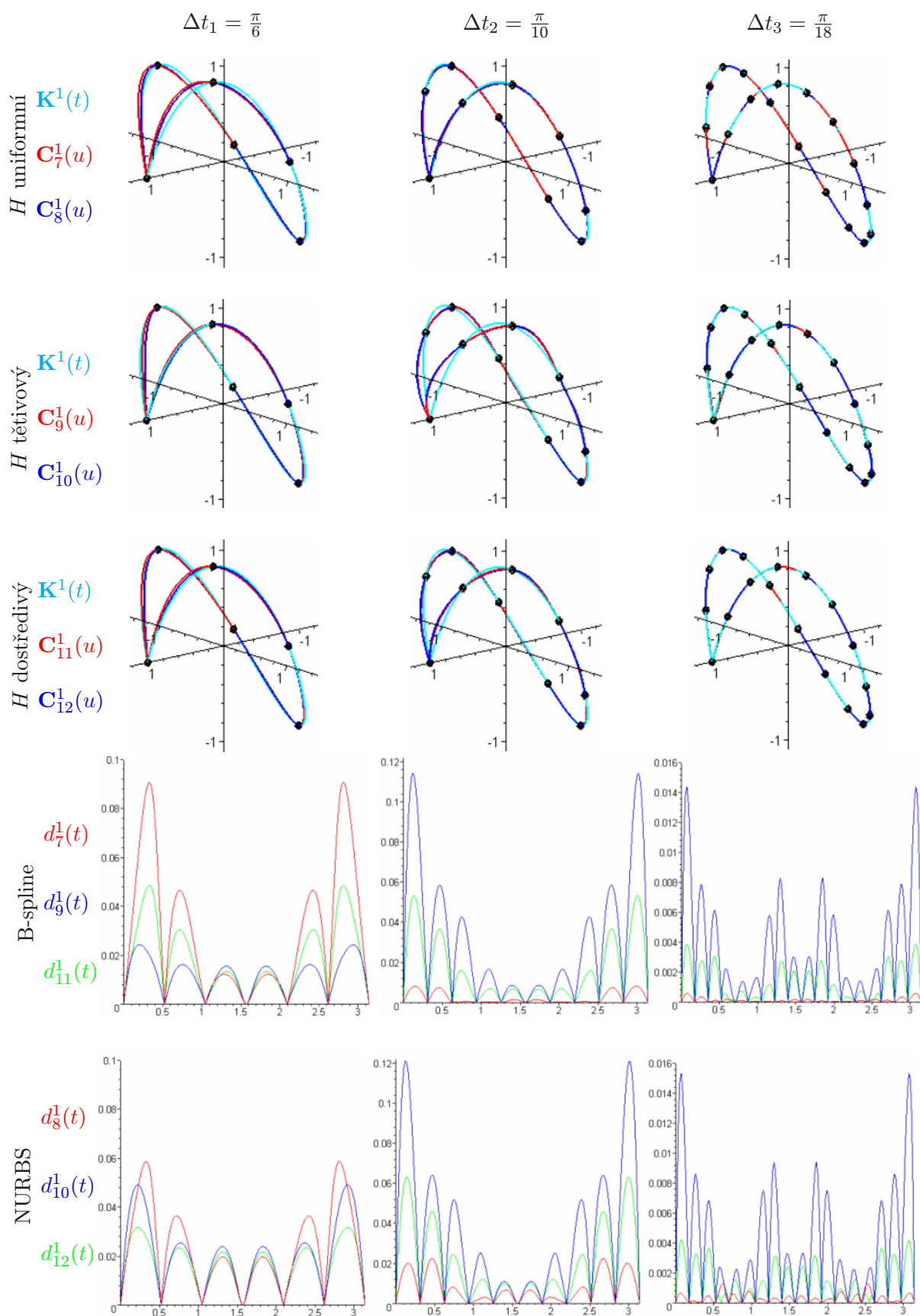
Nejlépe si v této skupině vede metoda **15** (B-spline, vektor parametrizace tětí-
vový) při inter-
polaci definičních bodů s hustotou Δt_1 a metoda **13** (B-spline, vektor parametrizace uniformní)
při interpolaci definičních bodů s hustotou Δt_2 i Δt_3 . Metoda **13** dosahuje zároveň nejhorších
výsledků pro hustotu Δt_1 a metoda **16** (NURBS, vektor parametrizace tětí-
vový) pro hustotu
 Δt_2 a Δt_3 .

Další skupinu tvoří metody **19** až **22**, což jsou prosté interpolační metody, u kterých je vektor
parametrizace stanoven univerzální metodou. Z průběhů interpolačních křivek na obr. 6.11 je
zřejmé, že žádná z těchto metod nevede na neočekávané oscilace interpolačních křivek a že

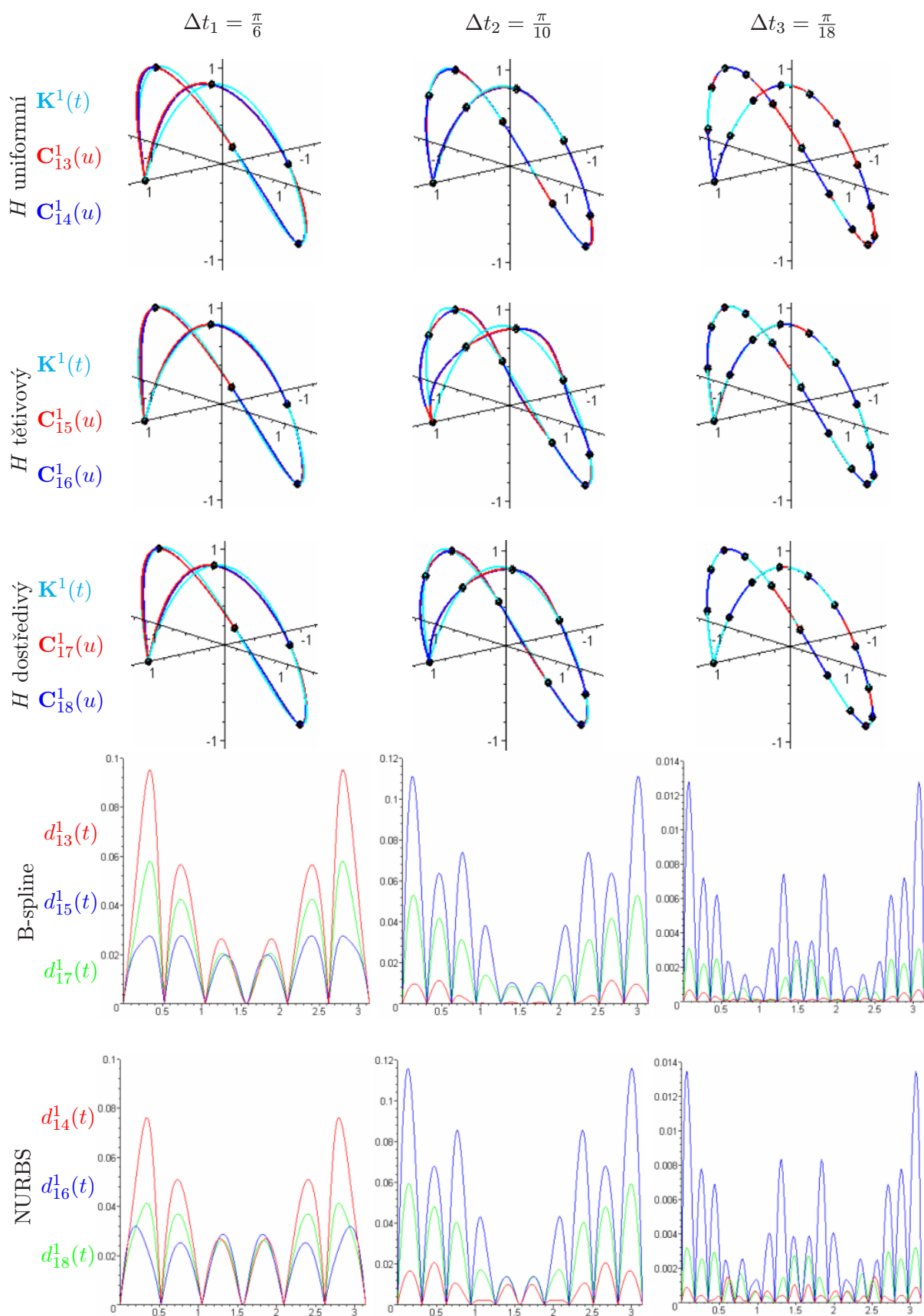


Obr. 6.8: Metody 1 až 6:

Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$



Obr. 6.9: Metody 7 až 12:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$



Obr. 6.10: Metody 13 až 18:

Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$

Tab. 6.2: Metody **7** až **12**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
7	$9.07 \cdot 10^{-2}$	1.190	$8.09 \cdot 10^{-3}$	0.103	$5.56 \cdot 10^{-4}$	0.007
8	$5.88 \cdot 10^{-2}$	0.771	$2.25 \cdot 10^{-2}$	0.288	$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.016
9	$2.43 \cdot 10^{-2}$	0.319	$1.14 \cdot 10^{-1}$	1.462	$1.44 \cdot 10^{-2}$	0.181
10	$4.91 \cdot 10^{-2}$	0.644	$1.21 \cdot 10^{-1}$	1.549	$1.53 \cdot 10^{-2}$	0.193
11	$4.86 \cdot 10^{-2}$	0.637	$5.33 \cdot 10^{-2}$	0.683	$3.88 \cdot 10^{-3}$	0.049
12	$3.17 \cdot 10^{-2}$	0.415	$6.33 \cdot 10^{-2}$	0.810	$4.19 \cdot 10^{-3}$	0.053

Tab. 6.3: Metody **13** až **18**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

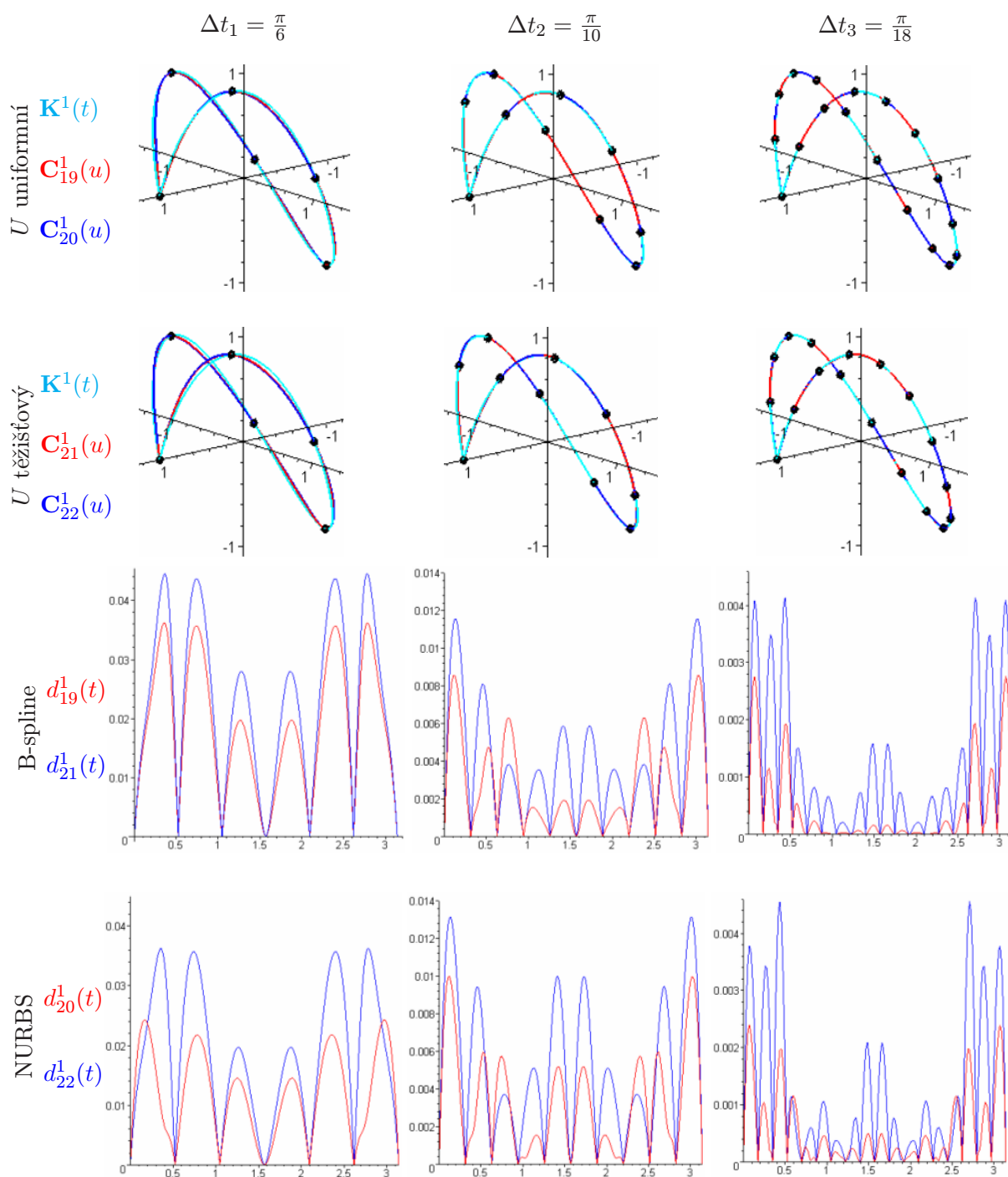
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
13	$9.51 \cdot 10^{-2}$	1.247	$1.15 \cdot 10^{-2}$	0.147	$6.66 \cdot 10^{-4}$	0.008
14	$7.61 \cdot 10^{-2}$	0.998	$2.07 \cdot 10^{-2}$	0.265	$1.49 \cdot 10^{-3}$	0.019
15	$2.76 \cdot 10^{-2}$	0.363	$1.11 \cdot 10^{-1}$	1.418	$1.28 \cdot 10^{-2}$	0.161
16	$3.19 \cdot 10^{-2}$	0.418	$1.16 \cdot 10^{-1}$	1.482	$1.35 \cdot 10^{-2}$	0.169
17	$5.80 \cdot 10^{-2}$	0.761	$5.31 \cdot 10^{-2}$	0.679	$3.09 \cdot 10^{-3}$	0.039
18	$4.13 \cdot 10^{-2}$	0.542	$5.92 \cdot 10^{-2}$	0.758	$3.20 \cdot 10^{-3}$	0.040

pro všechny hustoty definičních bodů dostáváme velmi dobrý tvar výsledné křivky. Co se týče velikosti odchylek a absolutní a relativní chyby interpolace, vykazují metody **19** až **22** zatím nejlepší výsledky, které jsou číselně shrnuty v tab. 6.4.

Nejpřesnější je metoda **19** (B-spline, uzlový vektor uniformní) při interpolaci definičních bodů ležících na křivce $\mathbf{K}^1(t)$ s hustotou Δt_1 i s hustotou Δt_2 . Pro hustotu Δt_3 dosahuje nejlepších výsledků metoda **20** (NURBS, uzlový vektor uniformní). Nejméně přesnou metodou z této skupiny je metoda **22** (NURBS, uzlový vektor těžišťový) pro všechny tři hustoty definičních bodů.

Skupina prostých interpolačních metod s vektorem parametrizace konstruovaným univerzální metodou poskytuje velmi spolehlivý nástroj pro konstrukci interpolačních křivek, což se nedalo jednoznačně prohlásit o metodách ze skupin předcházejících.

Pokud si pozorně prohlédneme průběhy odchylek prostých interpolačních křivek na obr. 6.8 až obr. 6.11, můžeme si povšimnout ještě jedné skutečnosti – všechny metody vykazují největší odchylku vždy ve velmi blízkém okolí krajních bodů. Z tohoto důvodu bude velmi zajímavé srovnání průběhu odchylek u uzlových interpolačních metod, kde by se měl projevit vliv okrajových podmínek na průběh odchylek v okolí krajních bodů.



Obr. 6.11: Metody **19** až **22**:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$

Uzlové interpolační metody

Skupiny uzlových interpolačních metod jsou rozděleny podle konstrukce vektoru parametrizace. První skupinu s uniformním vektorem parametrizace tvoří metody **23** až **26**, jejichž interpolační křivky a průběhy odchylek jsou znázorněny na obr. 6.12. Je zřejmé, že všechny čtyři způsoby stanovení okrajových podmínek vedou k přijatelnému tvaru interpolačních křivek pro všechny

Tab. 6.4: Metody **19** až **22**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
19	$2.43 \cdot 10^{-2}$	0.319	$8.57 \cdot 10^{-3}$	0.110	$2.75 \cdot 10^{-3}$	0.035
20	$2.98 \cdot 10^{-2}$	0.391	$9.99 \cdot 10^{-3}$	0.128	$2.40 \cdot 10^{-3}$	0.030
21	$3.62 \cdot 10^{-2}$	0.475	$1.16 \cdot 10^{-2}$	0.148	$4.13 \cdot 10^{-3}$	0.052
22	$4.46 \cdot 10^{-2}$	0.585	$1.31 \cdot 10^{-2}$	0.168	$4.55 \cdot 10^{-3}$	0.057

hustoty definičních bodů, a že tedy dostáváme další spolehlivý nástroj pro konstrukci interpolačních křivek.

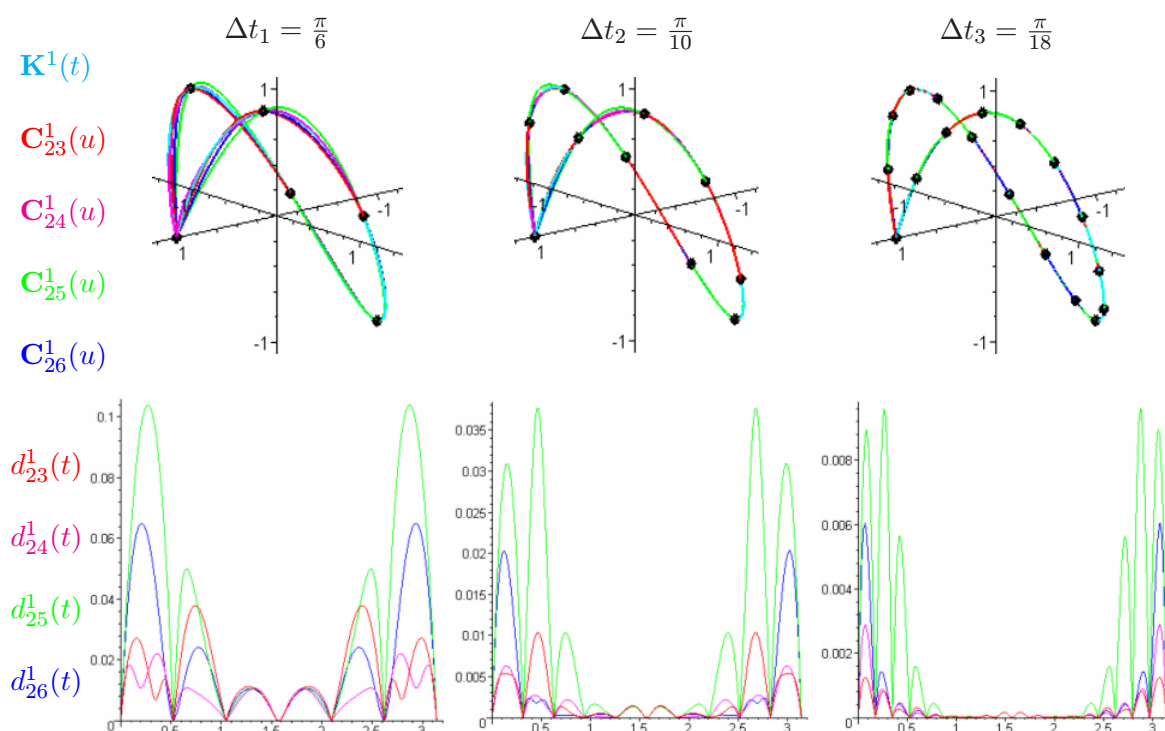
Z číselných údajů, které jsou uvedeny v tab. 6.5, je vidět, že nejlepších výsledků dosahuje metoda **24** (krajní tečné vektory těžnicové) pro hustotu Δt_1 a Δt_2 definičních bodů ležících na křivce $\mathbf{K}^1(t)$ a pro hustotu Δt_3 metoda **23** (krajní tečné vektory Lagrangeovy). Nejhorších výsledků dosahuje metoda **25** (krajní tečné vektory nulové) pro všechny tři hustoty definičních bodů. Co se týče průběhu odchylek, lze opět říci, že metody **23** až **26** vykazují největší odchylky v okolí krajních bodů. Se zvyšující se vzdáleností od krajních bodů velmi prudce klesá hodnota lokální chyby interpolace (maximální hodnota odchylky mezi dvěma definičními body). Nejvýraznější pokles (téměř o dva řády) můžeme zaznamenat pro hustotu Δt_3 u metod **25** a **26**.

Ve střední části intervalu parametru t si lze povšimnout velmi podobného průběhu odchylek všech interpolačních metod. Tato skutečnost je dána poklesem vlivu okrajových podmínek na tvar interpolační křivky se vzrůstající vzdáleností od krajních bodů.

Tab. 6.5: Metody **23** až **26**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
23	$3.79 \cdot 10^{-2}$	0.497	$1.04 \cdot 10^{-3}$	0.132	$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.016
24	$2.21 \cdot 10^{-2}$	0.290	$6.31 \cdot 10^{-3}$	0.081	$2.89 \cdot 10^{-3}$	0.036
25	$1.04 \cdot 10^{-1}$	1.362	$3.76 \cdot 10^{-2}$	0.482	$9.61 \cdot 10^{-3}$	0.121
26	$6.49 \cdot 10^{-2}$	0.852	$2.03 \cdot 10^{-2}$	0.260	$6.05 \cdot 10^{-3}$	0.076

Také druhá skupina uzlových interpolačních metod **27** až **30**, u kterých je vektor parametrizace stanoven tětíovou metodou, vykazuje velmi dobré výsledky. Tvar interpolačních křivek a průběhy odchylek jsou zobrazeny na obr. 6.13, číselné údaje jsou shrnuty v tab. 6.6. Z průběhů odchylek na obr. 6.13 je zřejmé, že zdaleka ne všechny metody vykazují nejvyšší odchylky v okolí krajních bodů definičního polygonu. Vliv okrajových podmínek je tedy v kombinaci s tětíovým vektorem parametrizace mnohem příznivější, než tomu bylo v případě uniformního vektoru parametrizace.

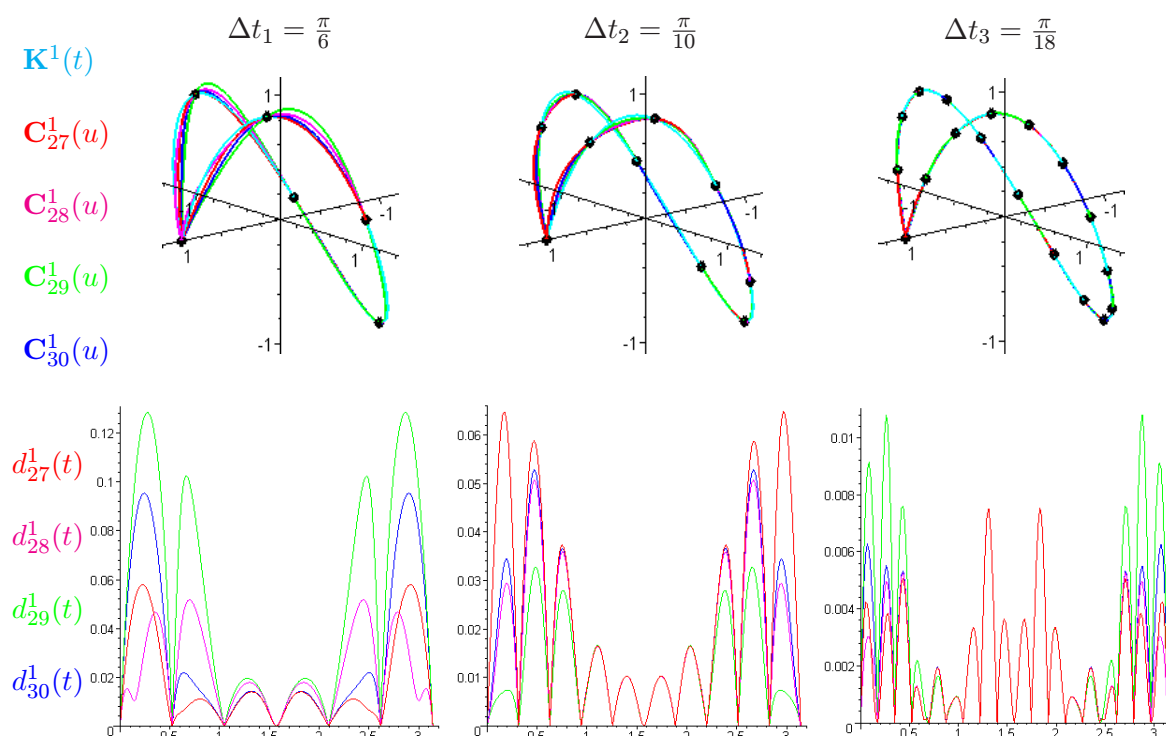


Obr. 6.12: Metody **23** až **26**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$

Tab. 6.6: Metody **27** až **30**:
Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
27	$5.80 \cdot 10^{-2}$	0.761	$6.48 \cdot 10^{-2}$	0.829	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095
28	$5.18 \cdot 10^{-2}$	0.679	$5.07 \cdot 10^{-2}$	0.649	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095
29	$1.29 \cdot 10^{-1}$	1.685	$3.28 \cdot 10^{-2}$	0.419	$1.08 \cdot 10^{-2}$	0.136
30	$9.55 \cdot 10^{-2}$	1.252	$5.28 \cdot 10^{-2}$	0.676	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095

Pro hustotu Δt_1 definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$ je nejlepší metoda **28** (krajní tečné vektory těžnicové), pro hustotu Δt_2 metoda **29** (krajní tečné vektory nulové) a pro hustotu Δt_3 metody **27** (krajní tečné vektory Lagrangeovy), **28** (krajní tečné vektory těžnicové) i **30** (krajní vektory druhých derivací nulové). Tyto tři metody dosahují pro nejvyšší hustotu definičních bodů stejných hodnot chyb interpolace, a tudíž i stejných hodnot přesnosti interpolace. Ve skutečnosti se od sebe dosažené hodnoty nepatrně liší, ale díky použitému zaokrouhlení výsledků není tento rozdíl patrný. Důvod je zřejmý – k maximální odchylce dochází v okolí $t = \frac{\pi}{2}$, tedy ve střední části oboru parametrizace, kde se vliv okrajových podmínek projevuje velmi málo. Nejméně přesná je metoda **29** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_1 a Δt_3 . Pro hustotu Δt_2 je nejméně přesná metoda **27** (krajní tečné vektory Lagrangeovy).



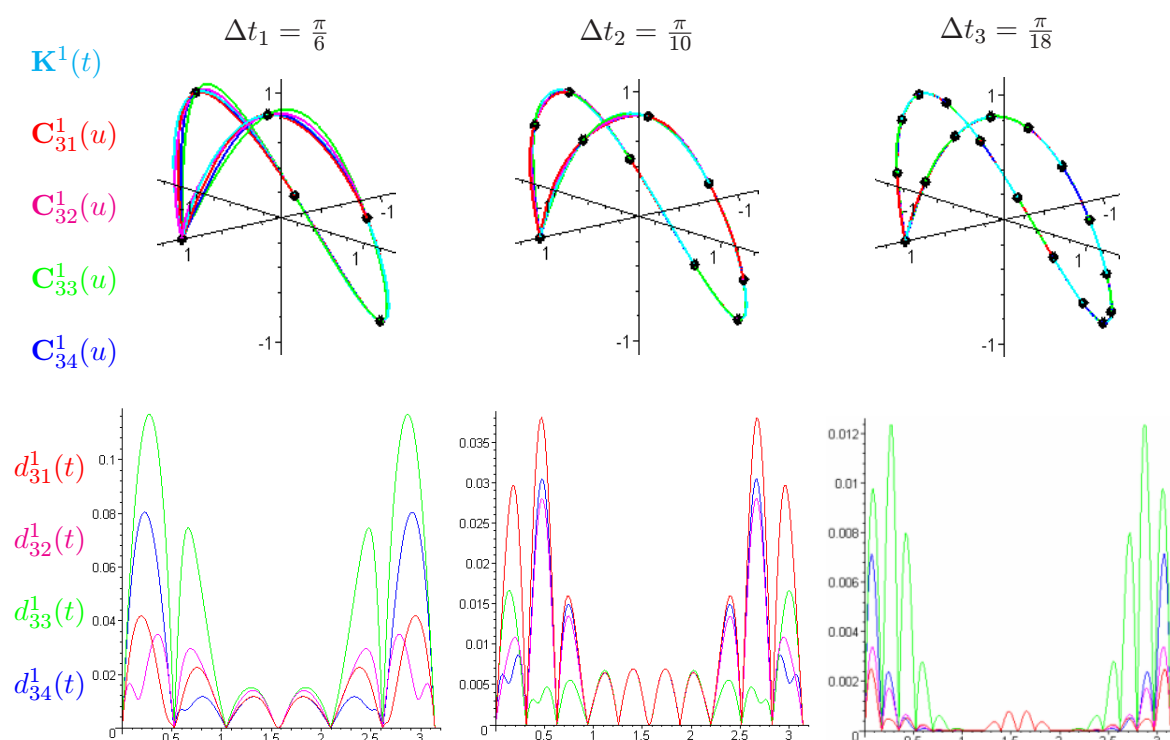
Obr. 6.13: Metody **27** až **30**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$

Poslední skupina uzlových interpolačních křivek (metody **31** až **34**), tj. s dostředivým vektorem parametrizace, je zobrazena na obr. 6.14 společně s průběhem odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$. Číselné hodnoty, které jsou shrnuty v tab. 6.7, jsou ve všech případech nižší než hodnoty uzlových interpolačních metod s těživým vektorem parametrizace. Nejlépe si vede metoda **32** (krajní tečné vektory těžnicové) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **33** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_2 a metoda **31** (krajní tečné vektory Lagrangeovy) pro hustotu Δt_3 . Nejhoršími metodami jsou **33** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_1 a Δt_3 a metoda **31** (krajní tečné vektory Lagrangeovy) pro hustotu Δt_2 .

Tab. 6.7: Metody **31** až **34**:

Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)	D_k^1	ε_k^1 (%)
31	$4.18 \cdot 10^{-2}$	0.549	$3.80 \cdot 10^{-2}$	0.487	$2.50 \cdot 10^{-3}$	0.031
32	$3.50 \cdot 10^{-2}$	0.458	$2.81 \cdot 10^{-2}$	0.359	$2.78 \cdot 10^{-3}$	0.035
33	$1.17 \cdot 10^{-1}$	1.532	$1.67 \cdot 10^{-2}$	0.213	$9.42 \cdot 10^{-2}$	0.118
34	$8.05 \cdot 10^{-2}$	1.055	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0.390	$5.80 \cdot 10^{-3}$	0.073

Obr. 6.14: Metody **31** až **34**:

Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^1(t)$

V tab. 6.8 jsou uvedeny absolutní a chyby a přesnosti všech interpolačních metod **1** až **34** při interpolaci definičních bodů ležících na křivce $\mathbf{K}^1(t)$ pro všechny uvažované hustoty definičních bodů. Metody jsou uspořádány podle dosažené přesnosti interpolace od nejpřesnějších až po ty nejméně přesné. Pro lepší orientaci jsou jednotlivá pásma přesnosti interpolace barevně odlišena.

Pro hustotu definičních bodů Δt_1 je nejpřesnější metoda **24** (uzlová interpolace, vektor parametrizace uniformní, krajní tečné vektory těžnicové), pro hustotu Δt_2 a Δt_3 metoda **1** (B-spline, prostá interpolace, uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní).

Nejméně přesná je pro hustotu Δt_1 metoda **29** (uzlová interpolace, vektor parametrizace tětiový, krajní tečné vektory nulové), pro hustotu Δt_2 metoda **10** (NURBS, prostá interpolace, uzlový vektor průměrový, vektor parametrizace tětiový) a pro hustotu Δt_3 metoda **4** (NURBS, prostá interpolace, uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace tětiový).

Tab. 6.8: Úspěšnost interpolačních metod
při interpolaci definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$

Hustota definičních bodů								
$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$			$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$			$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$		
Metoda	D_k^1	ε_k^1 (%)	Metoda	D_k^1	ε_k^1 (%)	Metoda	D_k^1	ε_k^1 (%)
24	$2.21 \cdot 10^{-2}$	0.290	1	$3.50 \cdot 10^{-3}$	0.045	1	$2.83 \cdot 10^{-4}$	0.004
19	$2.43 \cdot 10^{-2}$	0.319	24	$6.31 \cdot 10^{-3}$	0.081	7	$5.56 \cdot 10^{-4}$	0.007
9	$2.43 \cdot 10^{-2}$	0.319	7	$8.09 \cdot 10^{-3}$	0.103	13	$6.66 \cdot 10^{-4}$	0.008
15	$2.76 \cdot 10^{-2}$	0.363	19	$8.57 \cdot 10^{-3}$	0.110	8	$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.016
5	$2.93 \cdot 10^{-2}$	0.384	20	$9.99 \cdot 10^{-3}$	0.128	23	$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.016
20	$2.98 \cdot 10^{-2}$	0.391	23	$1.04 \cdot 10^{-2}$	0.132	14	$1.49 \cdot 10^{-3}$	0.019
12	$3.17 \cdot 10^{-2}$	0.415	13	$1.15 \cdot 10^{-2}$	0.147	20	$2.40 \cdot 10^{-3}$	0.030
16	$3.19 \cdot 10^{-2}$	0.418	21	$1.16 \cdot 10^{-2}$	0.148	31	$2.50 \cdot 10^{-3}$	0.031
32	$3.50 \cdot 10^{-2}$	0.458	22	$1.31 \cdot 10^{-2}$	0.168	19	$2.75 \cdot 10^{-3}$	0.035
21	$3.62 \cdot 10^{-2}$	0.475	33	$1.67 \cdot 10^{-2}$	0.213	32	$2.78 \cdot 10^{-3}$	0.035
23	$3.79 \cdot 10^{-2}$	0.497	26	$2.03 \cdot 10^{-2}$	0.260	24	$2.89 \cdot 10^{-3}$	0.036
2	$4.11 \cdot 10^{-2}$	0.539	14	$2.07 \cdot 10^{-2}$	0.265	17	$3.09 \cdot 10^{-3}$	0.039
18	$4.13 \cdot 10^{-2}$	0.542	8	$2.25 \cdot 10^{-2}$	0.288	18	$3.20 \cdot 10^{-3}$	0.040
31	$4.18 \cdot 10^{-2}$	0.549	32	$2.81 \cdot 10^{-2}$	0.359	11	$3.88 \cdot 10^{-3}$	0.049
22	$4.46 \cdot 10^{-2}$	0.585	34	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0.390	21	$4.13 \cdot 10^{-3}$	0.052
11	$4.86 \cdot 10^{-2}$	0.637	29	$3.28 \cdot 10^{-2}$	0.419	12	$4.19 \cdot 10^{-3}$	0.053
10	$4.91 \cdot 10^{-2}$	0.644	25	$3.76 \cdot 10^{-2}$	0.482	22	$4.55 \cdot 10^{-3}$	0.057
28	$5.18 \cdot 10^{-2}$	0.679	31	$3.80 \cdot 10^{-2}$	0.487	34	$5.80 \cdot 10^{-3}$	0.073
3	$5.19 \cdot 10^{-2}$	0.681	28	$5.07 \cdot 10^{-2}$	0.649	26	$6.05 \cdot 10^{-3}$	0.076
27	$5.80 \cdot 10^{-2}$	0.761	30	$5.28 \cdot 10^{-2}$	0.676	30	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095
17	$5.80 \cdot 10^{-2}$	0.761	17	$5.31 \cdot 10^{-2}$	0.679	28	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095
8	$5.88 \cdot 10^{-2}$	0.771	11	$5.33 \cdot 10^{-2}$	0.683	27	$7.52 \cdot 10^{-3}$	0.095
26	$6.49 \cdot 10^{-2}$	0.852	18	$5.92 \cdot 10^{-2}$	0.758	33	$9.42 \cdot 10^{-3}$	0.118
6	$7.55 \cdot 10^{-2}$	0.990	12	$6.33 \cdot 10^{-2}$	0.810	25	$9.61 \cdot 10^{-3}$	0.121
14	$7.61 \cdot 10^{-2}$	0.998	27	$6.48 \cdot 10^{-2}$	0.829	29	$1.08 \cdot 10^{-2}$	0.136
1	$7.87 \cdot 10^{-2}$	1.033	3	$7.38 \cdot 10^{-2}$	0.944	15	$1.28 \cdot 10^{-2}$	0.161
34	$8.05 \cdot 10^{-2}$	1.055	5	$7.41 \cdot 10^{-2}$	0.948	16	$1.35 \cdot 10^{-2}$	0.169
7	$9.07 \cdot 10^{-2}$	1.190	2	$8.77 \cdot 10^{-2}$	1.122	9	$1.44 \cdot 10^{-2}$	0.181
13	$9.51 \cdot 10^{-2}$	1.247	6	$9.86 \cdot 10^{-2}$	1.262	10	$1.53 \cdot 10^{-2}$	0.193
30	$9.55 \cdot 10^{-2}$	1.252	15	$1.11 \cdot 10^{-1}$	1.418	2	$1.68 \cdot 10^{-2}$	0.211
25	$1.04 \cdot 10^{-1}$	1.362	9	$1.14 \cdot 10^{-1}$	1.462	5	$4.89 \cdot 10^{-2}$	0.614
33	$1.17 \cdot 10^{-1}$	1.532	16	$1.16 \cdot 10^{-1}$	1.482	6	$6.87 \cdot 10^{-2}$	0.864
4	$1.25 \cdot 10^{-1}$	1.640	4	$1.17 \cdot 10^{-1}$	1.494	3	$2.86 \cdot 10^{-1}$	3.592
29	$1.29 \cdot 10^{-1}$	1.685	10	$1.21 \cdot 10^{-1}$	1.549	4	$3.16 \cdot 10^{-1}$	3.964

$\varepsilon_k^1 < 0.2 \%$

$0.2 \% \leq \varepsilon_k^1 < 0.4 \%$

$0.4 \% \leq \varepsilon_k^1 < 0.6 \%$

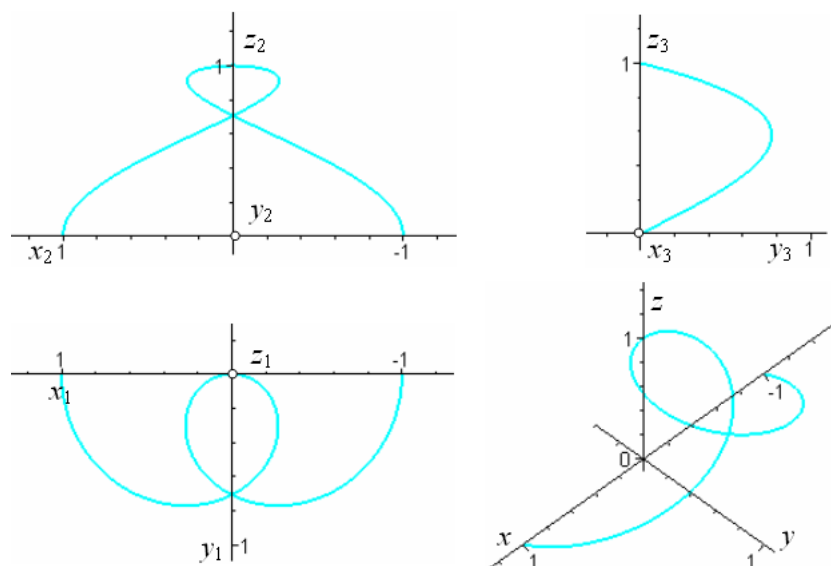
$0.6 \% \leq \varepsilon_k^1 < 0.8 \%$

$0.8 \% \leq \varepsilon_k^1 \leq 1.0 \%$

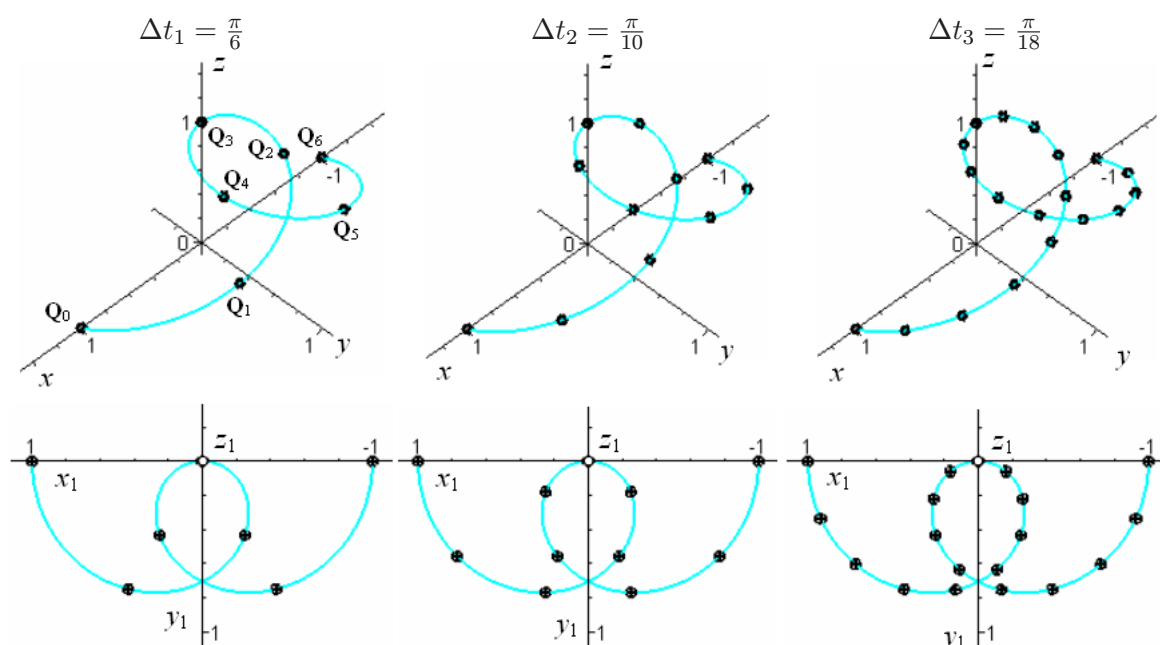
$\varepsilon_k^1 > 1.0 \%$

6.2.2 Modelová data na křivce s jedním singulárním bodem

Křivka $\mathbf{K}^2(t)$ daná vektorovou rovnicí (6.15) obsahuje uzlový bod a má již poněkud složitější tvar, který je patrný z obr. 6.15. Rozmístění definičních bodů pro hustoty Δt_1 , Δt_2 a Δt_3 je zřejmé z obr. 6.16. Orientace definičních bodů na křivce $\mathbf{K}^2(t)$ je shodná pro všechny tři hustoty, na obrázku je vyznačena pouze pro hustotu Δt_1 .



Obr. 6.15: Průběh křivky $\mathbf{K}^2(t)$



Obr. 6.16: Rozmístění definičních bodů na křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Prosté interpolační metody

Prosté interpolační křivky konstruované metodami **1** až **6**, tj. metody s uniformním uzlovým vektorem jsou nakresleny na obr. 6.17. Opět se potvrzuje, že prostá interpolace s uniformním uzlovým vektorem a tětiovým vektorem parametrizace je velmi nespolehlivá metoda. Pro všechny hustoty definičních bodů je tvar křivek mezi zadanými definičními body naprosto nepřijatelný. Pro nejvyšší hustotu dostáváme singulární řešení, kdy interpolační křivka – kromě své střední části – osciluje mezi definičními body.¹⁾

Interpolační křivky s vektorem parametrizace konstruovaným dostředivou metodou sice nevykazují tak velké překmity jako křivky s tětiovým vektorem parametrizace, nicméně jejich tvary jsou prakticky nepoužitelné. Na obr. 6.17 je nakreslen průběh odchylek podél teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$ pouze u těch interpolačních křivek, u kterých je relativní chyba interpolace menší než 10 %, a stejné pravidlo je uplatněno i v tab. 6.9, kde jsou uvedeny číselné hodnoty této skupiny křivek.

Z grafických i číselných výsledků je tedy zřejmé, že pro definiční body ležící na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$ lze z prostých interpolačních metod s uniformním uzlovým vektorem použít pouze metody, jejichž vektor parametrizace je taktéž uniformní. Metoda **2** (NURBS) se lépe hodí pro hustotu Δt_1 , metoda **1** (B-spline) vykazuje nejlepší výsledky pro hustotu Δt_2 a pro hustotu Δt_3 dosahuje metoda **1** dokonce vynikajících výsledků. Tětiová i dostředivá metoda stanovení vektoru parametrizace generují křivky nepřijatelného tvaru.

Tab. 6.9: Metody **1** až **6**:

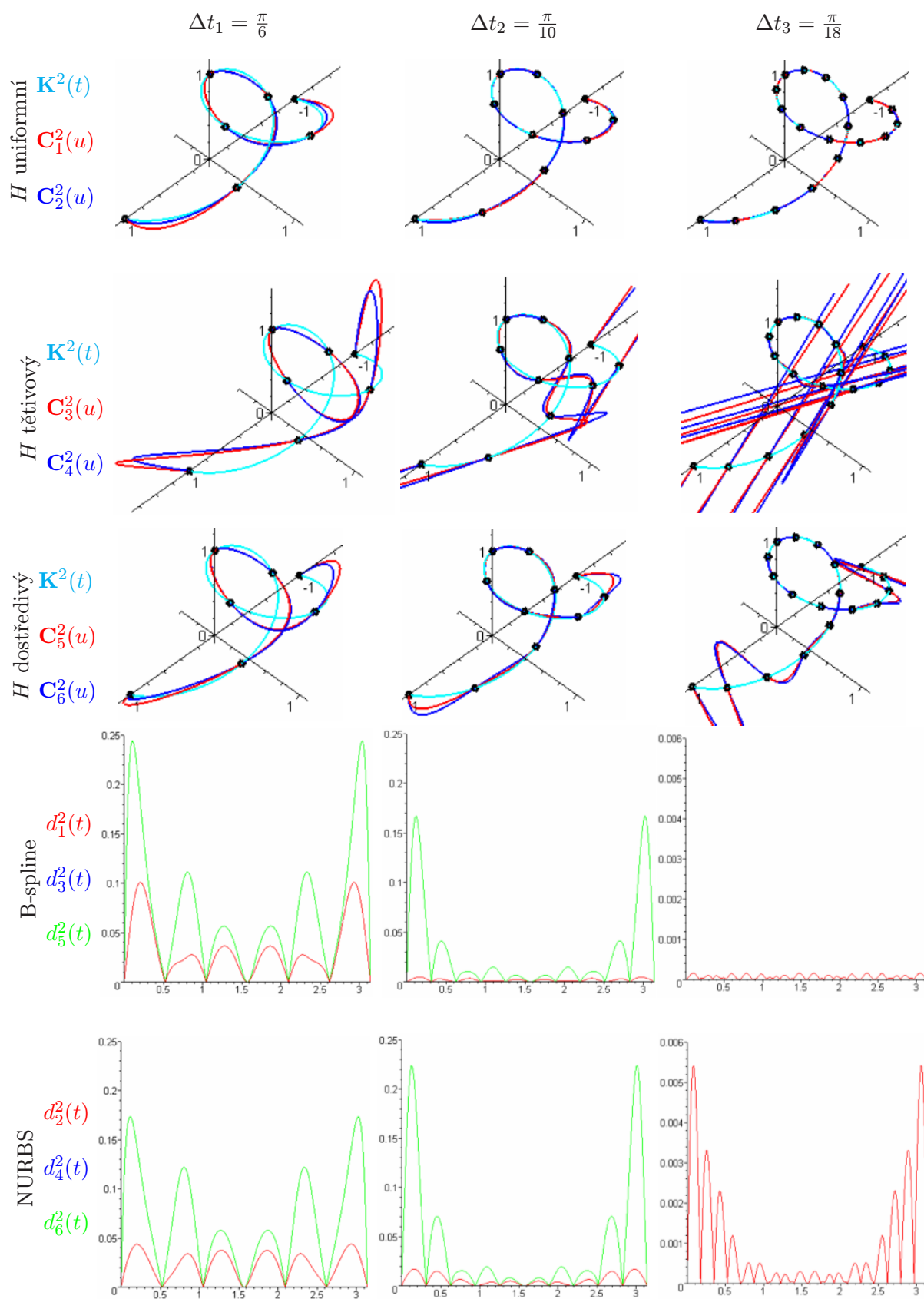
Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
1	$1.01 \cdot 10^{-1}$	2.085	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.093	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.007
2	$4.38 \cdot 10^{-2}$	0.905	$1.71 \cdot 10^{-2}$	0.335	$5.42 \cdot 10^{-3}$	0.229
3	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	–	–	–
5	$2.44 \cdot 10^{-1}$	5.049	$1.67 \cdot 10^{-2}$	3.272	–	–
6	$1.73 \cdot 10^{-1}$	3.585	$2.24 \cdot 10^{-2}$	4.374	–	–

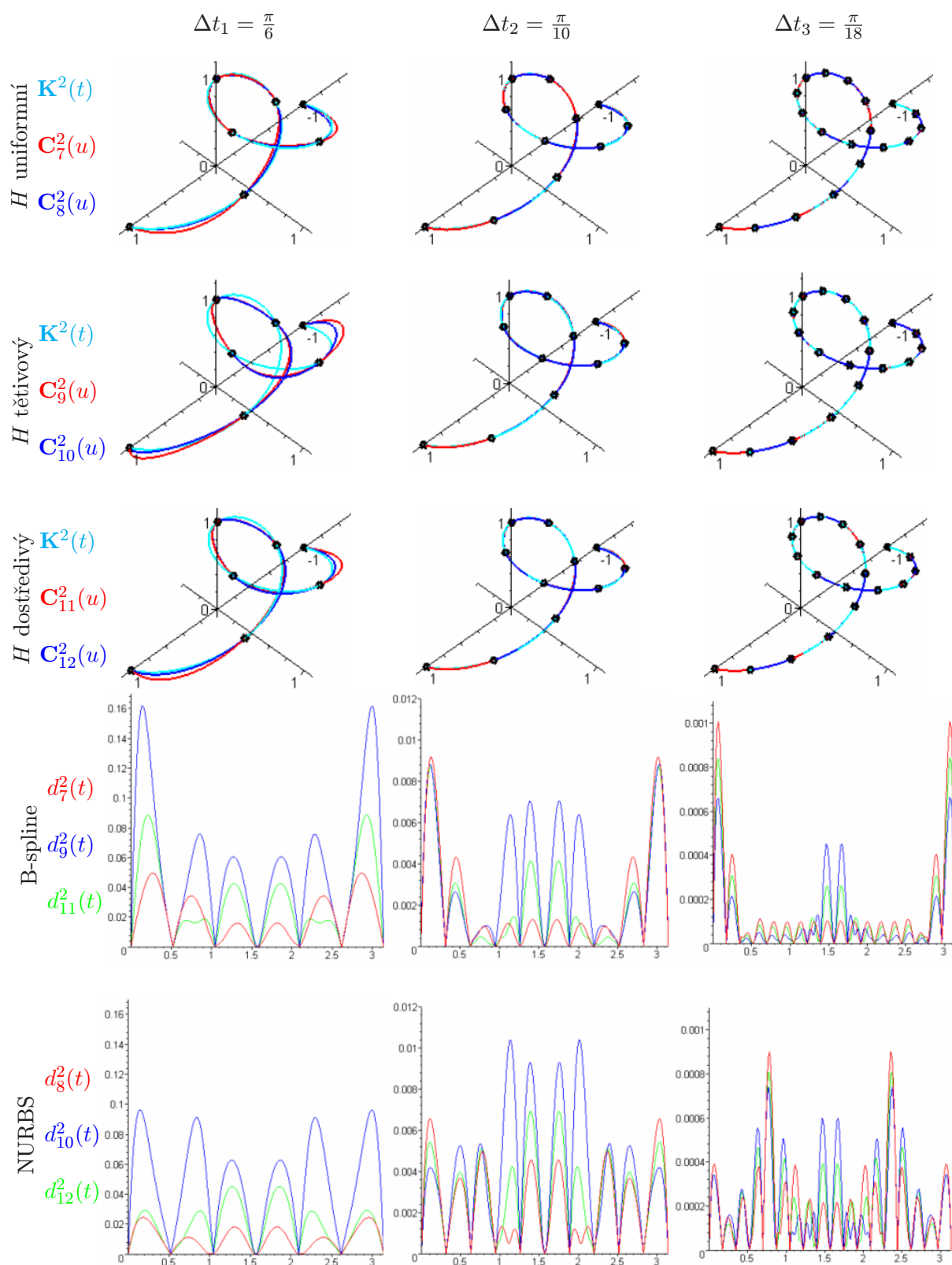
Interpolační křivky konstruované metodami s průměrovým uzlovým vektorem, tj. metodami **7** až **12**, jsou (až na výjimku tětiového vektoru parametrizace u definičních bodů s hustotou Δt_1) velmi dobře tvarovány. Tato skutečnost je patrná z průběhů interpolačních křivek zobrazených na obr. 6.18.

Z číselných výsledků uvedených v tab. 6.10 je zřejmé, že nejpřesnější je metoda **8** (NURBS, vektor parametrizace uniformní) pro hustotu Δt_1 a Δt_2 , metoda **9** (B-spline, vektor parametrizace tětiový) potom pro hustotu Δt_3 . Metoda **9** je zároveň nejméně přesnou metodou pro hustotu Δt_1 . Pro hustotu Δt_2 dosahuje nejhorších výsledků metoda **10** (NURBS, vektor parametrizace tětiový) a pro hustotu Δt_3 je to metoda **7** (B-spline, vektor parametrizace uniformní).

¹⁾ Překmity interpolačních křivek, které zasahují do nezobrazované části prostoru, jsou v obrázcích oříznuty.



Obr. 6.17: Metody 1 až 6:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $K^2(t)$



Obr. 6.18: Metody 7 až 12:

Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $K^2(t)$

Tab. 6.10: Metody **7** až **12**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

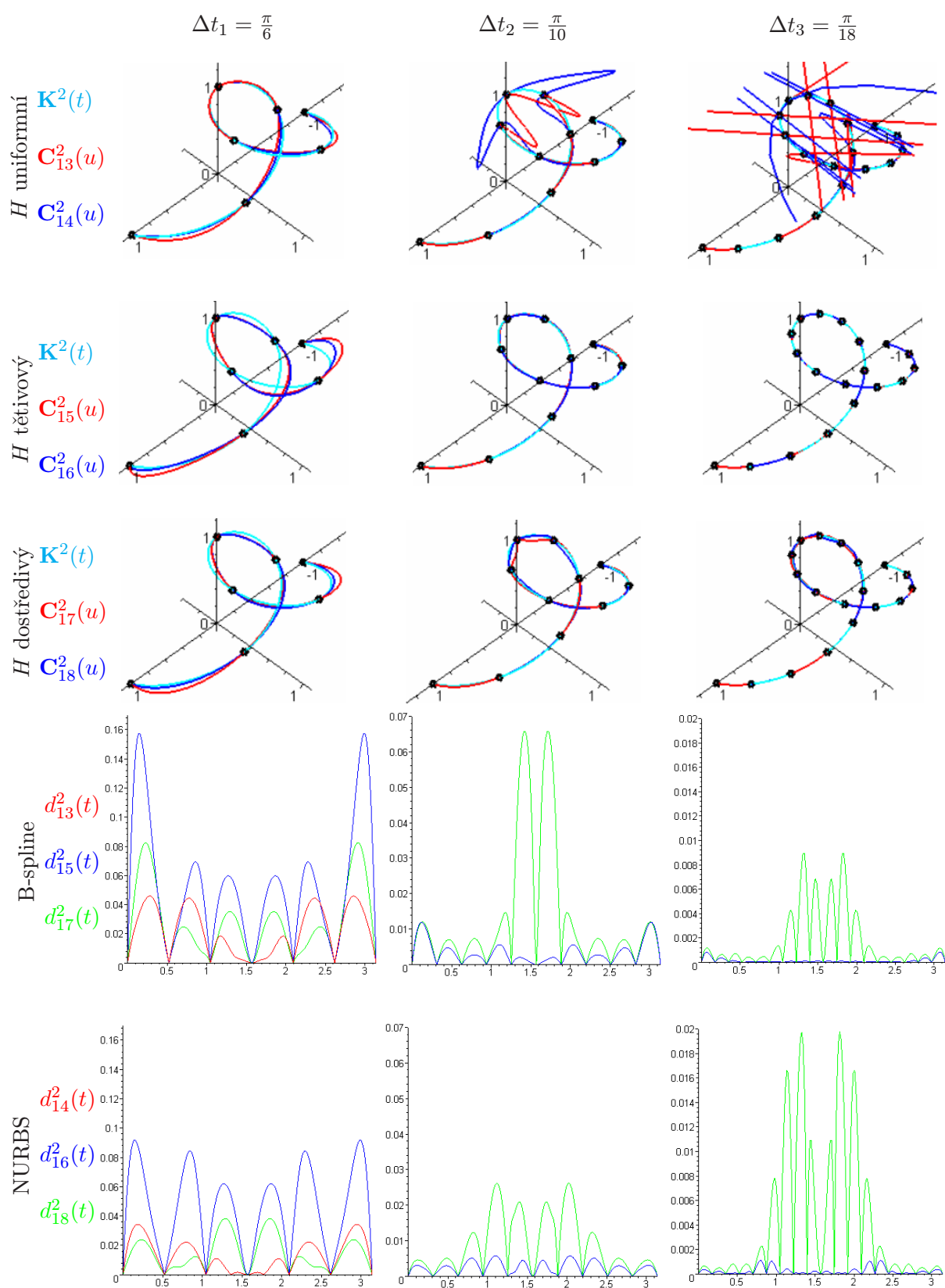
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
7	$4.97 \cdot 10^{-2}$	1.027	$9.18 \cdot 10^{-3}$	0.180	$1.01 \cdot 10^{-3}$	0.043
8	$2.45 \cdot 10^{-2}$	0.507	$6.57 \cdot 10^{-3}$	0.129	$9.01 \cdot 10^{-4}$	0.038
9	$1.62 \cdot 10^{-1}$	3.344	$8.82 \cdot 10^{-3}$	0.173	$6.61 \cdot 10^{-4}$	0.028
10	$9.63 \cdot 10^{-2}$	1.989	$1.04 \cdot 10^{-2}$	0.204	$7.41 \cdot 10^{-4}$	0.031
11	$8.87 \cdot 10^{-2}$	1.833	$8.71 \cdot 10^{-3}$	0.170	$8.42 \cdot 10^{-4}$	0.036
12	$4.52 \cdot 10^{-2}$	0.933	$6.92 \cdot 10^{-3}$	0.135	$8.08 \cdot 10^{-4}$	0.034

Interpolační křivky konstruované metodami ze skupiny **13** až **18** s těžišťovým uzlovým vektorem jsou zobrazeny na obr. 6.19. Tentokrát se nežádoucí oscilace objevují na křivkách s uniformním vektorem parametrizace při vyšších hustotách definičních bodů. K oscilacím dochází v okolí $t = \frac{\pi}{2}$, kde uniformní vektor parametrizace nevhodně interpretuje rozložení definičních bodů. Naopak, metody s tětiovým a dostředivým vektorem parametrizace dosahují vynikajících výsledků. Grafy odchylek na obr. 6.19 a číselné hodnoty v tab. 6.11 opět obsahují pouze výsledky těch metod, jejichž relativní chyba interpolace je menší než 10 %. Nejlepší v této kategorii je pro hustotu definičních bodů Δt_1 překvapivě metoda **14** (NURBS, vektor parametrizace uniformní), která je pro vyšší hustoty nepoužitelná. Pro hustotu Δt_2 dosahuje nejpresnějších hodnot metoda **16** (NURBS, vektor parametrizace tětiový) a pro hustotu Δt_3 metoda **15** (B-spline, vektor parametrizace tětiový).

Tab. 6.11: Metody **13** až **18**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
13	$4.60 \cdot 10^{-2}$	0.949	–	–	–	–
14	$3.44 \cdot 10^{-2}$	0.710	–	–	–	–
15	$1.57 \cdot 10^{-1}$	3.244	$1.20 \cdot 10^{-2}$	0.235	$8.30 \cdot 10^{-4}$	0.035
16	$9.17 \cdot 10^{-2}$	1.895	$5.78 \cdot 10^{-3}$	0.113	$1.10 \cdot 10^{-3}$	0.047
17	$8.25 \cdot 10^{-2}$	1.705	$6.67 \cdot 10^{-2}$	1.305	$8.96 \cdot 10^{-4}$	0.038
18	$3.83 \cdot 10^{-2}$	0.791	$2.62 \cdot 10^{-2}$	0.513	$1.98 \cdot 10^{-2}$	0.837

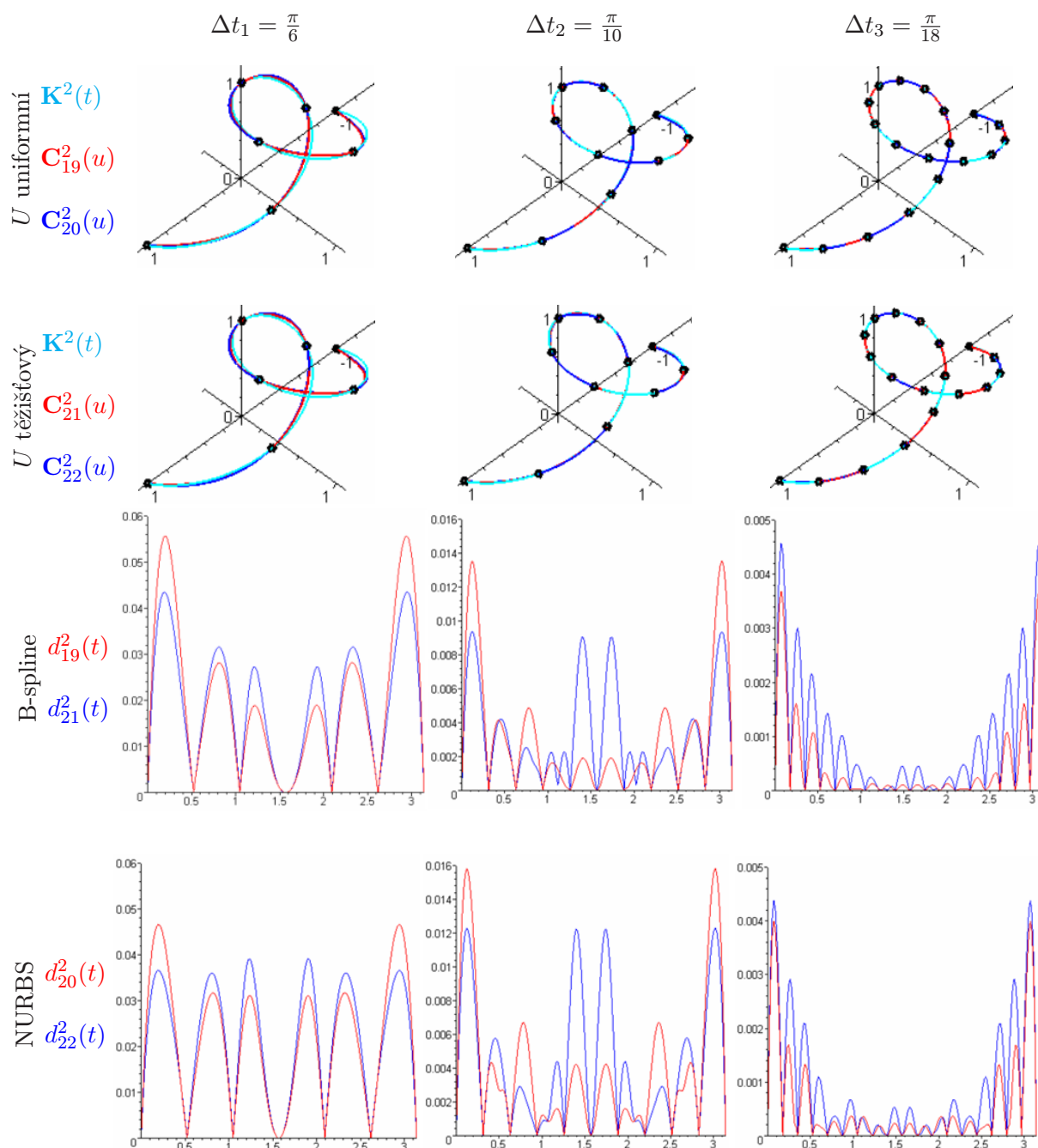
Tak jako při interpolaci definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$, poskytují i zde prosté interpolační metody s vektorem parametrizace stanoveným univerzální metodou velmi dobré a spolehlivé výsledky. Jedná se o metody **19** až **22**, jejichž interpolační křivky a průběhy odchylek jsou zobrazeny na obr. 6.20, číselné výsledky jsou uvedeny v tab. 6.12.



Obr. 6.19: Metody 13 až 18:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$

Nejvyšší přesnosti dosahuje metoda **22** (NURBS, uzlový vektor těžišťový) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **21** (B-spline, uzlový vektor těžišťový) pro Δt_2 a metoda **19** (B-spline, uzlový vektor uniformní) pro Δt_3 .

Metoda **19** (B-spline, uzlový vektor uniformní) je zároveň nejhorší pro Δt_1 , metoda **20** (NURBS, uzlový vektor uniformní) pro hustotu Δt_2 a metoda **21** (B-spline, uzlový vektor těžišťový) pro Δt_3 .



Obr. 6.20: Metody **19** až **22**:

Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$

Tab. 6.12: Metody **19** až **22**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
19	$5.56 \cdot 10^{-2}$	1.148	$1.35 \cdot 10^{-2}$	0.265	$3.69 \cdot 10^{-3}$	0.156
20	$4.66 \cdot 10^{-2}$	0.962	$1.58 \cdot 10^{-2}$	0.310	$3.99 \cdot 10^{-3}$	0.169
21	$4.35 \cdot 10^{-2}$	0.899	$9.38 \cdot 10^{-3}$	0.183	$4.57 \cdot 10^{-3}$	0.193
22	$3.91 \cdot 10^{-2}$	0.808	$1.23 \cdot 10^{-2}$	0.241	$4.38 \cdot 10^{-3}$	0.185

Uzlové interpolační metody

Také všechny uzlové interpolační metody **23** až **34** představují spolehlivý nástroj, neboť tvary křivek jsou na první pohled přijatelné a číselné hodnoty výsledků velmi vyrovnané ve všech třech skupinách rozdělených podle konstrukce vektoru parametrizace.

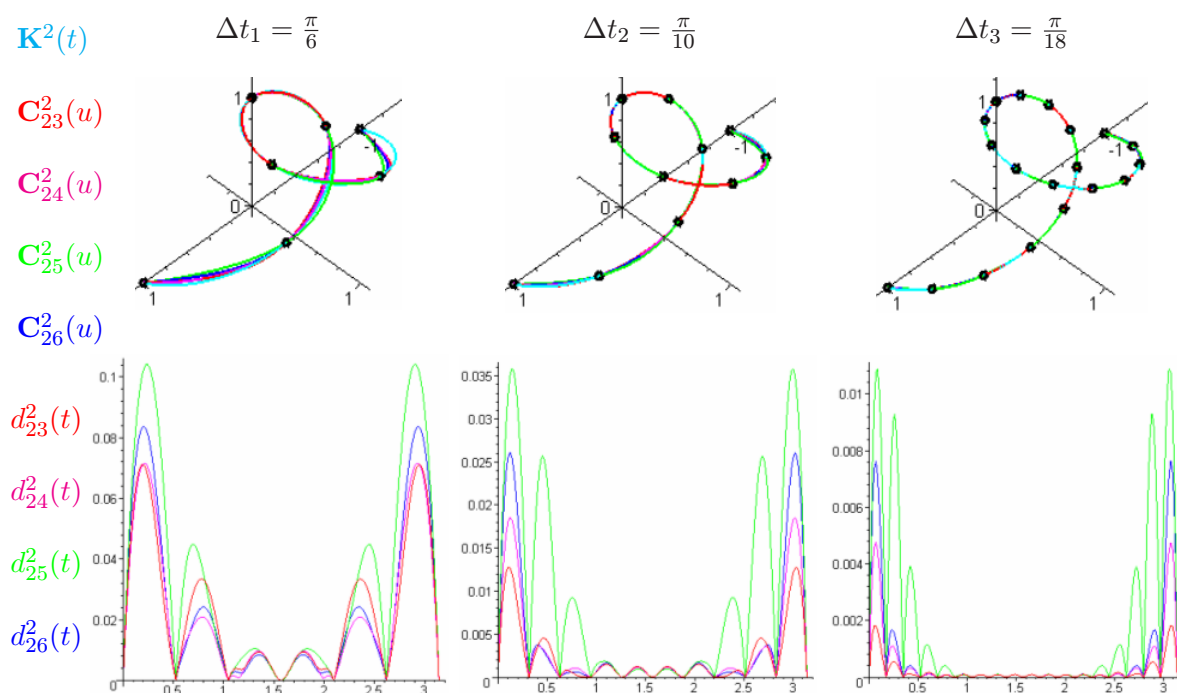
Na obr. 6.21 jsou nakresleny průběhy interpolačních křivek a jejich odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$ získané interpolačními metodami **23** až **26** s uniformním vektorem parametrizace. Jejich číselné výsledky jsou shrnuty v tab. 6.13. Obr. 6.22 a tab. 6.14 přináší grafické a číselné výsledky metod **27** až **30** s tětíivovým vektorem parametrizace a na obr. 6.23 a v tab. 6.15 se můžeme seznámit s výsledky metod **31** až **34** s dostředivým vektorem parametrizace.

Tab. 6.13: Metody **23** až **26**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

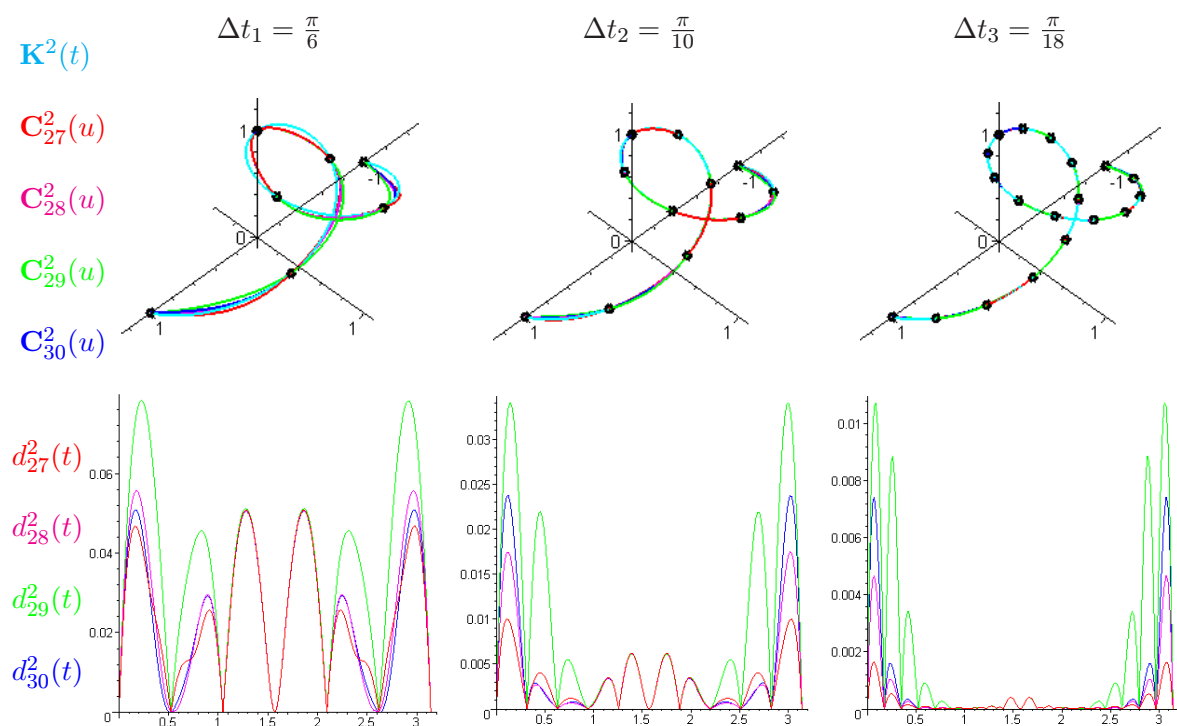
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
23	$7.12 \cdot 10^{-2}$	1.470	$1.28 \cdot 10^{-2}$	0.250	$1.82 \cdot 10^{-3}$	0.077
24	$7.17 \cdot 10^{-2}$	1.481	$1.85 \cdot 10^{-2}$	0.363	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.202
25	$1.04 \cdot 10^{-1}$	2.152	$3.58 \cdot 10^{-2}$	0.701	$1.09 \cdot 10^{-2}$	0.461
26	$8.37 \cdot 10^{-2}$	1.729	$2.61 \cdot 10^{-2}$	0.510	$7.63 \cdot 10^{-3}$	0.323

Nejpřesnější metodou pro všechny tři způsoby konstrukce vektoru parametrizace a pro všechny tři uvažované hustoty definičních bodů je metoda s krajními tečnými vektory určenými na základě Lagrangeovy interpolace. Je to tedy metoda **23** (vektor parametrizace uniformní), metoda **27** (vektor parametrizace tětíivový) a metoda **31** (vektor parametrizace dostředivý). Doposud jsme se s takto jednoznačně vyrovnanými výsledky metody v porovnání s ostatními interpolačními metodami nesetkali.

Nejméně přesnou metodou, a to opět pro všechny způsoby konstrukce vektoru parametrizace i pro všechny hustoty definičních bodů, je metoda s krajními tečnými vektory nulovými. Pro vektor parametrizace uniformní se jedná o metodu **25**, pro tětíivový o metodu **29** a pro dostředivý vektor parametrizace je to metoda **33**.



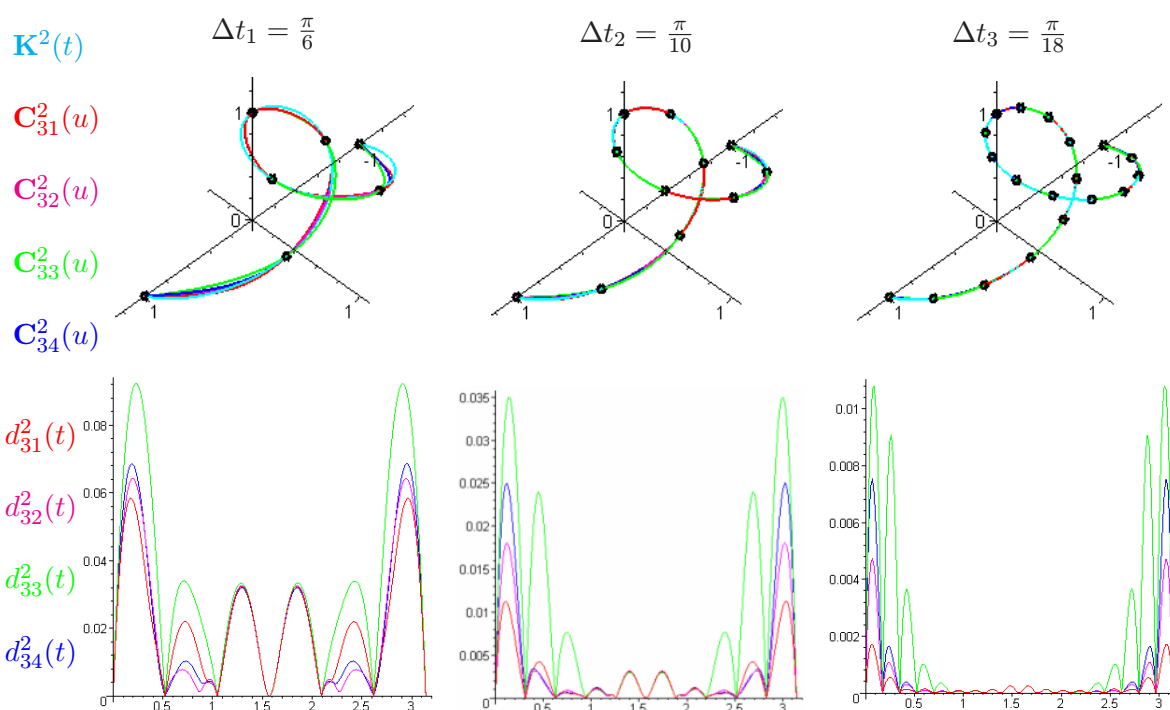
Obr. 6.21: Metody **23** až **26**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$



Obr. 6.22: Metody **27** až **30**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$

Tab. 6.14: Metody **27** až **30**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
27	$5.07 \cdot 10^{-2}$	1.049	$9.99 \cdot 10^{-3}$	0.195	$1.64 \cdot 10^{-3}$	0.069
28	$5.57 \cdot 10^{-2}$	1.151	$1.75 \cdot 10^{-2}$	0.342	$4.68 \cdot 10^{-3}$	0.198
29	$7.84 \cdot 10^{-2}$	1.619	$3.41 \cdot 10^{-2}$	0.667	$1.07 \cdot 10^{-2}$	0.454
30	$5.09 \cdot 10^{-2}$	1.051	$2.37 \cdot 10^{-2}$	0.465	$7.43 \cdot 10^{-3}$	0.314

Obr. 6.23: Metody **31** až **34**:Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^2(t)$

Tab. 6.16 přináší informace o úspěšnosti všech interpolačních metod **1** až **34** při interpolaci definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$. Nejpřesnější metodou pro interpolaci definičních bodů s hustotou Δt_1 je metoda **8** (NURBS, prostá interpolace, uzlový vektor průměrový, vektor parametrizace uniformní) a pro hustoty definičních bodů Δt_2 a Δt_3 metoda **1** (B-spline, prostá interpolace, uzlový vektor uniformní, vektor parametrizace uniformní). Je zajímavé, že tato metoda byla nejpřesnější pro stejné hustoty i při interpolaci definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$, viz tab. 6.8.

Tab. 6.15: Metody **31** až **34**:
Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)	D_k^2	ε_k^2 (%)
31	$5.84 \cdot 10^{-2}$	1.207	$1.12 \cdot 10^{-2}$	0.219	$1.71 \cdot 10^{-3}$	0.072
32	$6.42 \cdot 10^{-2}$	1.327	$1.80 \cdot 10^{-2}$	0.353	$4.72 \cdot 10^{-3}$	0.200
33	$9.23 \cdot 10^{-2}$	1.906	$3.50 \cdot 10^{-2}$	0.684	$1.08 \cdot 10^{-2}$	0.458
34	$6.86 \cdot 10^{-2}$	1.418	$2.49 \cdot 10^{-2}$	0.487	$7.53 \cdot 10^{-3}$	0.318

Jako zcela nepoužitelné se ukázaly metody prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem a těživým vektorem parametrizace **3** (B-spline) a **4** (NURBS). Za nespolehlivé můžeme považovat i metody prosté interpolace s těžišťovým uzlovým vektorem a uniformním vektorem parametrizace **13** (B-spline) a **14** (NURBS). Rizikové můžeme označit i metody prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem a dostředivým vektorem parametrizace **5** (B-spline) a **6** (NURBS).

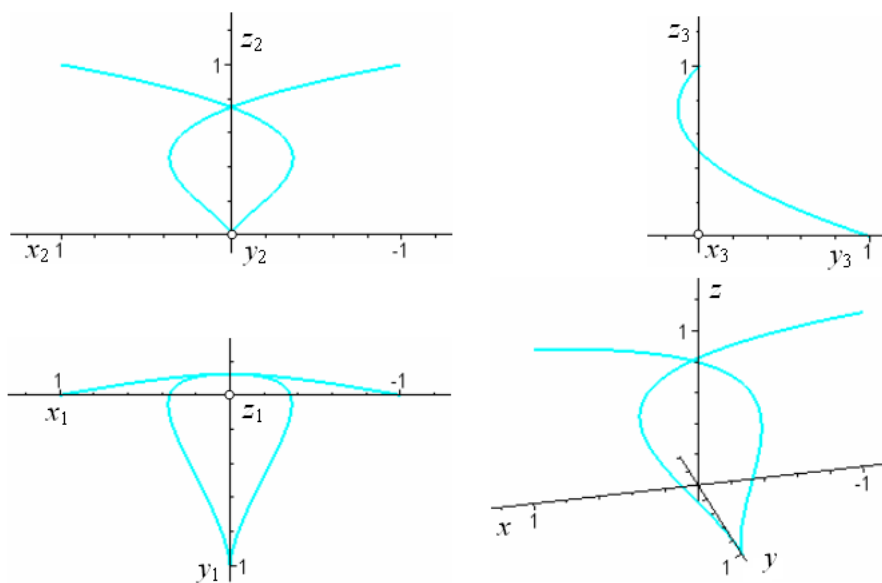
Tab. 6.16: Úspěšnost interpolačních metod
při interpolaci definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$

Hustota definičních bodů								
$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$			$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$			$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$		
Metoda	D_k^2	ε_k^2 (%)	Metoda	D_k^2	ε_k^2 (%)	Metoda	D_k^2	ε_k^2 (%)
8	$2.45 \cdot 10^{-2}$	0.507	1	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.093	1	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.007
14	$3.44 \cdot 10^{-2}$	0.710	16	$5.78 \cdot 10^{-3}$	0.113	9	$6.61 \cdot 10^{-4}$	0.028
18	$3.83 \cdot 10^{-2}$	0.791	8	$6.57 \cdot 10^{-3}$	0.129	10	$7.41 \cdot 10^{-4}$	0.031
22	$3.91 \cdot 10^{-2}$	0.808	12	$6.92 \cdot 10^{-3}$	0.135	12	$8.08 \cdot 10^{-4}$	0.034
21	$4.35 \cdot 10^{-2}$	0.899	11	$8.71 \cdot 10^{-3}$	0.170	15	$8.30 \cdot 10^{-4}$	0.035
21	$4.35 \cdot 10^{-2}$	0.899	9	$8.82 \cdot 10^{-3}$	0.173	11	$8.42 \cdot 10^{-4}$	0.035
12	$4.52 \cdot 10^{-2}$	0.933	7	$9.18 \cdot 10^{-3}$	0.180	17	$8.96 \cdot 10^{-4}$	0.038
13	$4.60 \cdot 10^{-2}$	0.949	21	$9.38 \cdot 10^{-3}$	0.183	8	$9.01 \cdot 10^{-4}$	0.038
20	$4.66 \cdot 10^{-2}$	0.962	27	$9.99 \cdot 10^{-3}$	0.195	7	$1.01 \cdot 10^{-3}$	0.043
7	$4.97 \cdot 10^{-2}$	1.027	10	$1.04 \cdot 10^{-2}$	0.204	16	$1.10 \cdot 10^{-3}$	0.047
27	$5.07 \cdot 10^{-2}$	1.049	31	$1.12 \cdot 10^{-2}$	0.219	27	$1.64 \cdot 10^{-3}$	0.069
30	$5.09 \cdot 10^{-2}$	1.051	15	$1.20 \cdot 10^{-2}$	0.235	31	$1.71 \cdot 10^{-3}$	0.072
19	$5.56 \cdot 10^{-2}$	1.148	22	$1.23 \cdot 10^{-2}$	0.241	23	$1.82 \cdot 10^{-3}$	0.077
28	$5.57 \cdot 10^{-2}$	1.151	23	$1.28 \cdot 10^{-2}$	0.250	19	$3.69 \cdot 10^{-3}$	0.156
31	$5.84 \cdot 10^{-2}$	1.207	19	$1.35 \cdot 10^{-2}$	0.265	20	$3.99 \cdot 10^{-3}$	0.169
32	$6.42 \cdot 10^{-2}$	1.327	20	$1.58 \cdot 10^{-2}$	0.310	22	$4.38 \cdot 10^{-3}$	0.185
34	$6.86 \cdot 10^{-2}$	1.418	2	$1.71 \cdot 10^{-2}$	0.335	21	$4.57 \cdot 10^{-3}$	0.193
23	$7.12 \cdot 10^{-2}$	1.470	28	$1.75 \cdot 10^{-2}$	0.342	28	$4.68 \cdot 10^{-3}$	0.198
24	$7.17 \cdot 10^{-2}$	1.481	32	$1.80 \cdot 10^{-2}$	0.353	32	$4.72 \cdot 10^{-3}$	0.200
29	$7.84 \cdot 10^{-2}$	1.619	24	$1.85 \cdot 10^{-2}$	0.363	24	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.202
17	$8.25 \cdot 10^{-2}$	1.705	30	$2.37 \cdot 10^{-2}$	0.465	2	$5.42 \cdot 10^{-3}$	0.229
26	$8.37 \cdot 10^{-2}$	1.729	34	$2.49 \cdot 10^{-2}$	0.487	30	$7.43 \cdot 10^{-3}$	0.314
11	$8.87 \cdot 10^{-2}$	1.833	26	$2.61 \cdot 10^{-2}$	0.510	34	$7.53 \cdot 10^{-3}$	0.318
16	$9.17 \cdot 10^{-2}$	1.895	18	$2.62 \cdot 10^{-2}$	0.513	26	$7.63 \cdot 10^{-3}$	0.323
33	$9.23 \cdot 10^{-2}$	1.906	29	$3.41 \cdot 10^{-2}$	0.667	29	$1.07 \cdot 10^{-2}$	0.454
10	$9.63 \cdot 10^{-2}$	1.989	33	$3.50 \cdot 10^{-2}$	0.684	33	$1.08 \cdot 10^{-2}$	0.458
1	$1.01 \cdot 10^{-1}$	2.085	25	$3.58 \cdot 10^{-2}$	0.701	25	$1.09 \cdot 10^{-2}$	0.461
25	$1.04 \cdot 10^{-1}$	2.152	17	$6.67 \cdot 10^{-2}$	1.305	18	$1.98 \cdot 10^{-2}$	0.837
15	$1.57 \cdot 10^{-1}$	3.344	5	$1.67 \cdot 10^{-1}$	3.272	5	–	–
9	$1.62 \cdot 10^{-1}$	3.344	6	$2.24 \cdot 10^{-1}$	4.374	6	–	–
6	$1.73 \cdot 10^{-1}$	3.585	13	–	–	13	–	–
5	$2.44 \cdot 10^{-1}$	5.049	14	–	–	14	–	–
4	–	–	3	–	–	3	–	–
3	–	–	4	–	–	4	–	–

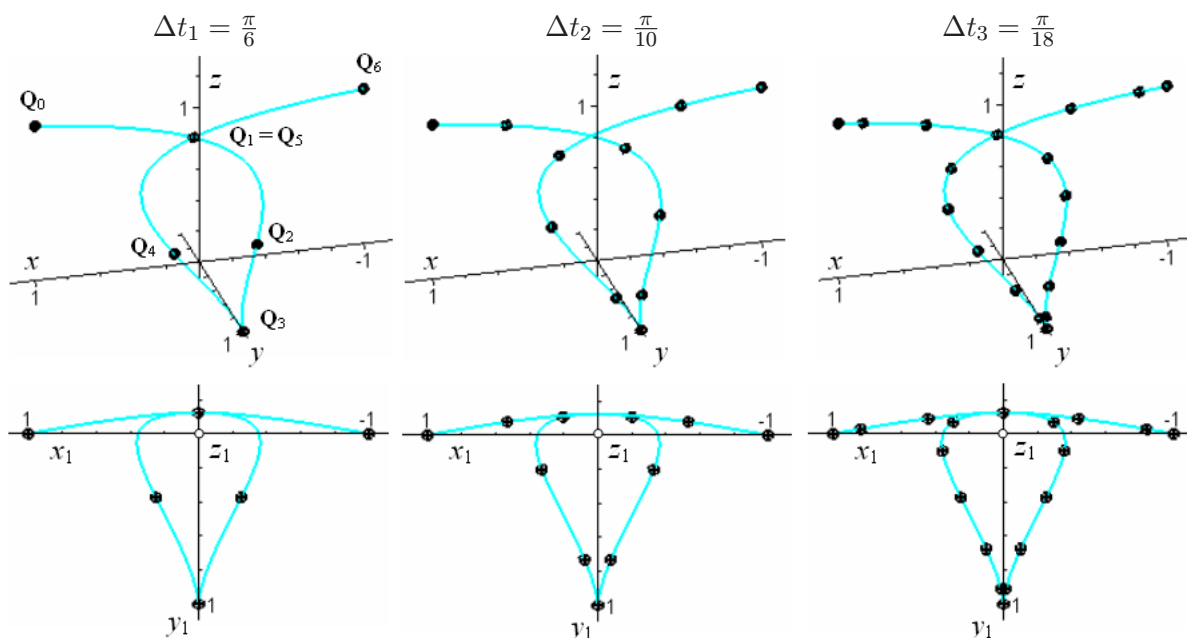
$\varepsilon_k^2 < 0.2 \%$	$0.2 \% \leq \varepsilon_k^2 < 0.4 \%$	$0.4 \% \leq \varepsilon_k^2 < 0.6 \%$
$0.6 \% \leq \varepsilon_k^2 < 0.8 \%$	$0.8 \% \leq \varepsilon_k^2 \leq 1.0 \%$	$\varepsilon_k^2 > 1.0 \%$
–	$\varepsilon_k^2 \gg 1.0 \%$	

6.2.3 Modelová data na křivce s více singulárními body

Průběh křivky $\mathbf{K}^3(t)$ dle (6.16), který je zobrazen na obr. 6.24, je již velmi složitý. Křivka obsahuje uzlový bod a bod vratu. Zcela zásadní roli zde hraje volba vhodné polohy definičních bodů, které by měly s dostatečnou hustotou vystihnout tvar křivky. Nelze očekávat úspěšnou interpolaci, pokud nejsou korektně stanovena vstupní data. Při volbě polohy definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$ je zřejmé, že zejména v bodě vratu *musí* ležet definiční bod a rovněž okolí bodu vratu by mělo být polohou definičních bodů dostatečně určeno.



Obr. 6.24: Průběh křivky $\mathbf{K}^3(t)$



Obr. 6.25: Rozmístění definičních bodů na křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Zvolíme-li hustoty Δt_1 , Δt_2 a Δt_3 dle (6.17), dostaneme rozmístění definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$, které je znázorněno na obr. 6.25. Definiční polygon pro nejmenší hust-

totu Δt_1 můžeme pokládat za nedostatečně určená vstupní data a nebudeme tedy očekávat, že by příslušné interpolační křivky vykazovaly dobré výsledky. Definiční polygon generovaný s hustotou Δt_2 můžeme považovat za poměrně dobře určená vstupní data a definiční polygon odpovídající hustotě Δt_3 za velmi dobře určená vstupní data, kde definiční body nevynechávají žádnou tvarovou podrobnost teoretické křivky a i v okolí bodu vratu jsou vhodně rozmístěny.

Prosté interpolační metody

Metody **1** až **6** prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem opět generují interpolační křivky vhodného tvaru pouze v kombinaci s uniformním vektorem parametrizace. Křivky konstruované s tětiovým a dostředivým vektorem parametrizace vykazují prudké oscilace při vyšších hustotách definičních bodů, jak můžeme pozorovat na obr. 6.26. Zde jsou uvedeny průběhy interpolačních křivek ze skupiny metod **1** až **6**, a pokud je relativní chyba interpolace menší než 10 %, tak i průběh odchylek příslušné interpolační křivky od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$. Číselné hodnoty jsou uvedeny v tab. 6.17. Nepočítáme-li interpolaci definičních bodů s hustotou Δt_1 , která nevystihuje dostatečně tvar teoretické křivky, lze z této skupiny prostých interpolačních metod s uniformním uzlovým vektorem akceptovat pouze výsledky metody **1** (B-spline, uniformní vektor parametrizace).

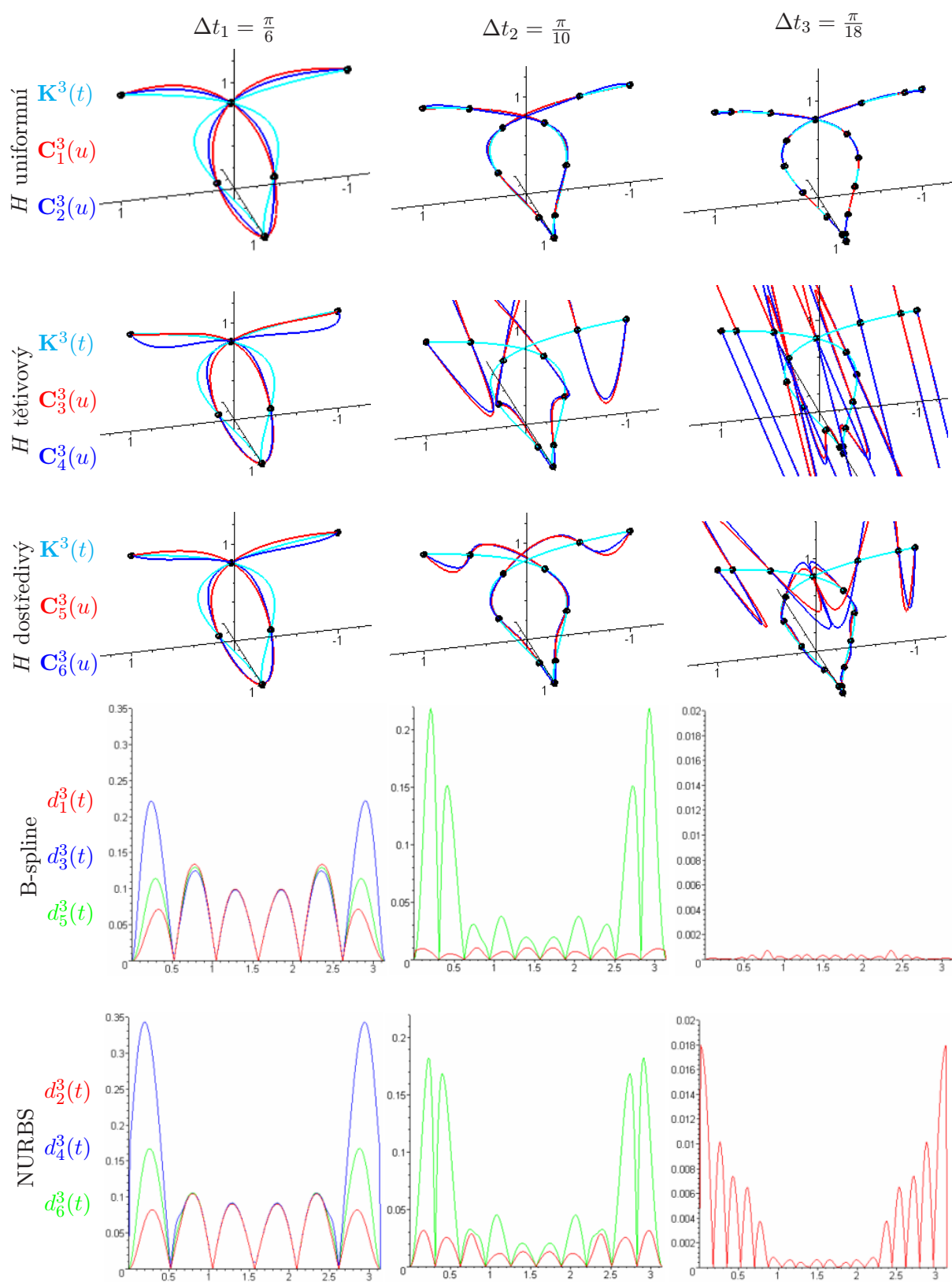
Tab. 6.17: Metody **1** až **6**:

Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

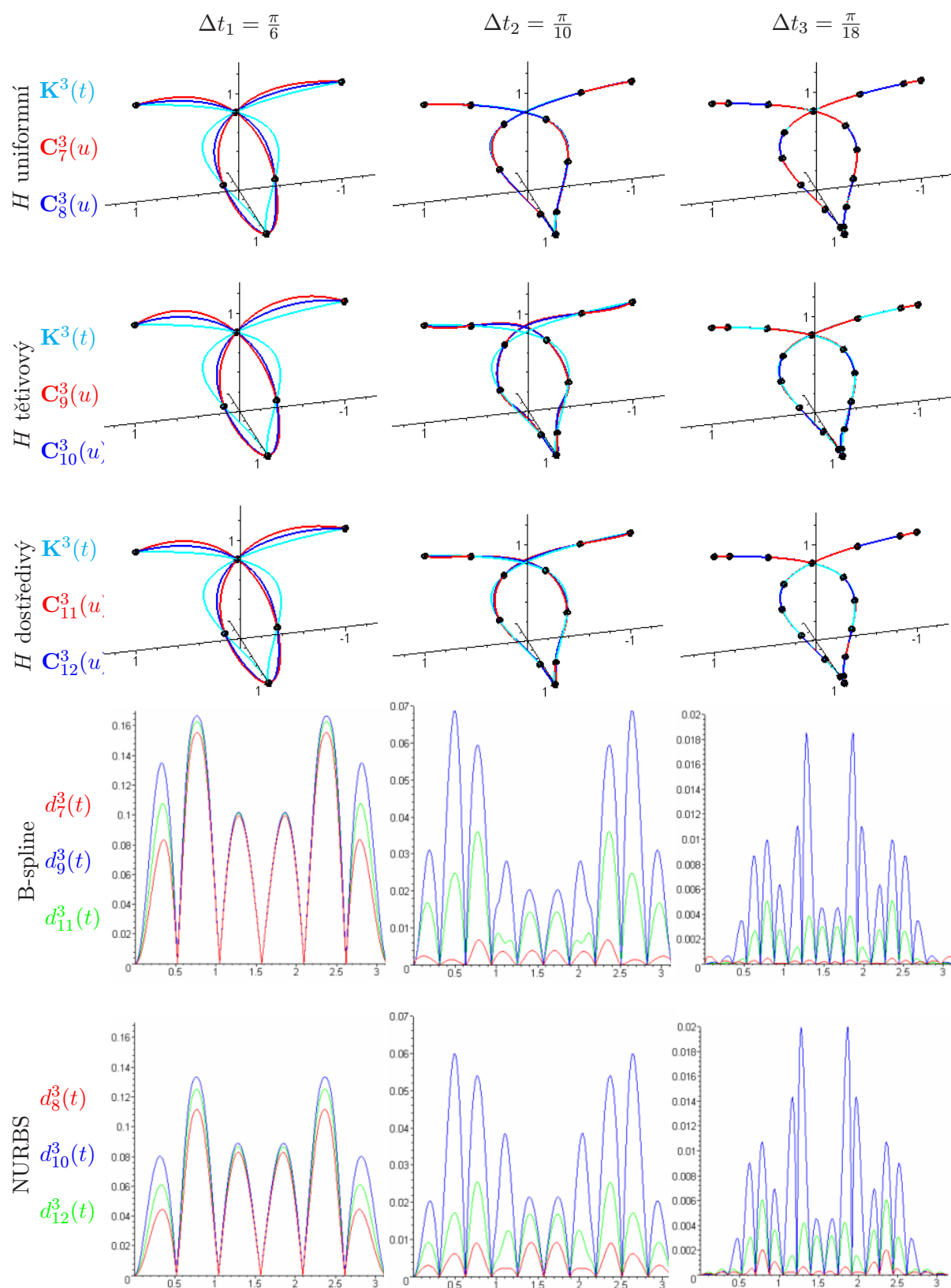
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
1	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.670	$1.05 \cdot 10^{-2}$	0.198	$7.29 \cdot 10^{-4}$	0.014
2	$1.05 \cdot 10^{-1}$	2.090	$3.17 \cdot 10^{-2}$	0.598	$1.80 \cdot 10^{-2}$	0.334
3	$2.22 \cdot 10^{-1}$	4.421	–	–	–	–
4	$3.42 \cdot 10^{-1}$	6.832	–	–	–	–
5	$1.30 \cdot 10^{-1}$	2.588	$2.19 \cdot 10^{-1}$	4.133	–	–
6	$1.68 \cdot 10^{-1}$	3.342	$1.83 \cdot 10^{-1}$	3.448	–	–

Naproti tomu metody skupiny **7** až **12** s průměrovým uzlovým vektorem vedou na velmi dobré tvary interpolačních křivek, i když se jedná o interpolaci definičních bodů ležících na tak složité křivce, jako je křivka $\mathbf{K}^3(t)$. Průběhy interpolačních křivek konstruované metodami této skupiny a jejich odchylek jsou zobrazeny na obr. 6.27, číselné výsledky jsou shrnuty v tab.6.18.

Nejpřesnějších hodnot dosahuje pro hustotu definičních bodů Δt_1 metoda **8** (NURBS, vektor parametrizace uniformní) a metoda **7** (B-spline, vektor parametrizace uniformní) pro hustotu Δt_2 a Δt_3 . Nejhorších výsledků dosahuje pro hustotu Δt_1 metoda **9** (B-spline, vektor parametrizace tětiový) a **11** (B-spline, vektor parametrizace dostředivý), pro hustotu Δt_2 metoda **9** (B-spline, vektor parametrizace tětiový) a pro hustotu Δt_3 metoda **10** (NURBS, vektor parametrizace tětiový).



Obr. 6.26: Metody 1 až 6:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$



Obr. 6.27: Metody 7 až 12:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $K^3(t)$

Tab. 6.18: Metody **7** až **12**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
7	$1.55 \cdot 10^{-1}$	3.098	$6.80 \cdot 10^{-3}$	0.128	$6.10 \cdot 10^{-4}$	0.011
8	$1.12 \cdot 10^{-1}$	2.226	$9.26 \cdot 10^{-3}$	0.175	$2.05 \cdot 10^{-3}$	0.038
9	$1.67 \cdot 10^{-1}$	3.322	$6.86 \cdot 10^{-2}$	1.296	$1.85 \cdot 10^{-2}$	0.344
10	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.664	$5.98 \cdot 10^{-2}$	1.130	$2.01 \cdot 10^{-2}$	0.374
11	$1.67 \cdot 10^{-1}$	3.322	$3.61 \cdot 10^{-2}$	0.682	$5.07 \cdot 10^{-3}$	0.094
12	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.664	$2.55 \cdot 10^{-2}$	0.482	$6.08 \cdot 10^{-3}$	0.113

Metody **13** až **18** jsou prosté interpolační metody s těžišťovým uzlovým vektorem. Průběhy jejich interpolačních křivek a odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$ jsou nakresleny na obr. 6.28, číselné výsledky jsou shrnuty v tab. 6.19. Uniformní vektor parametrizace se dostává do kolize s těžišťovým uzlovým vektorem při vyšších hustotách definičních bodů v okolí bodu vratu, kde kvůli této skutečnosti mají interpolační křivky velmi neočekávaný tvar.

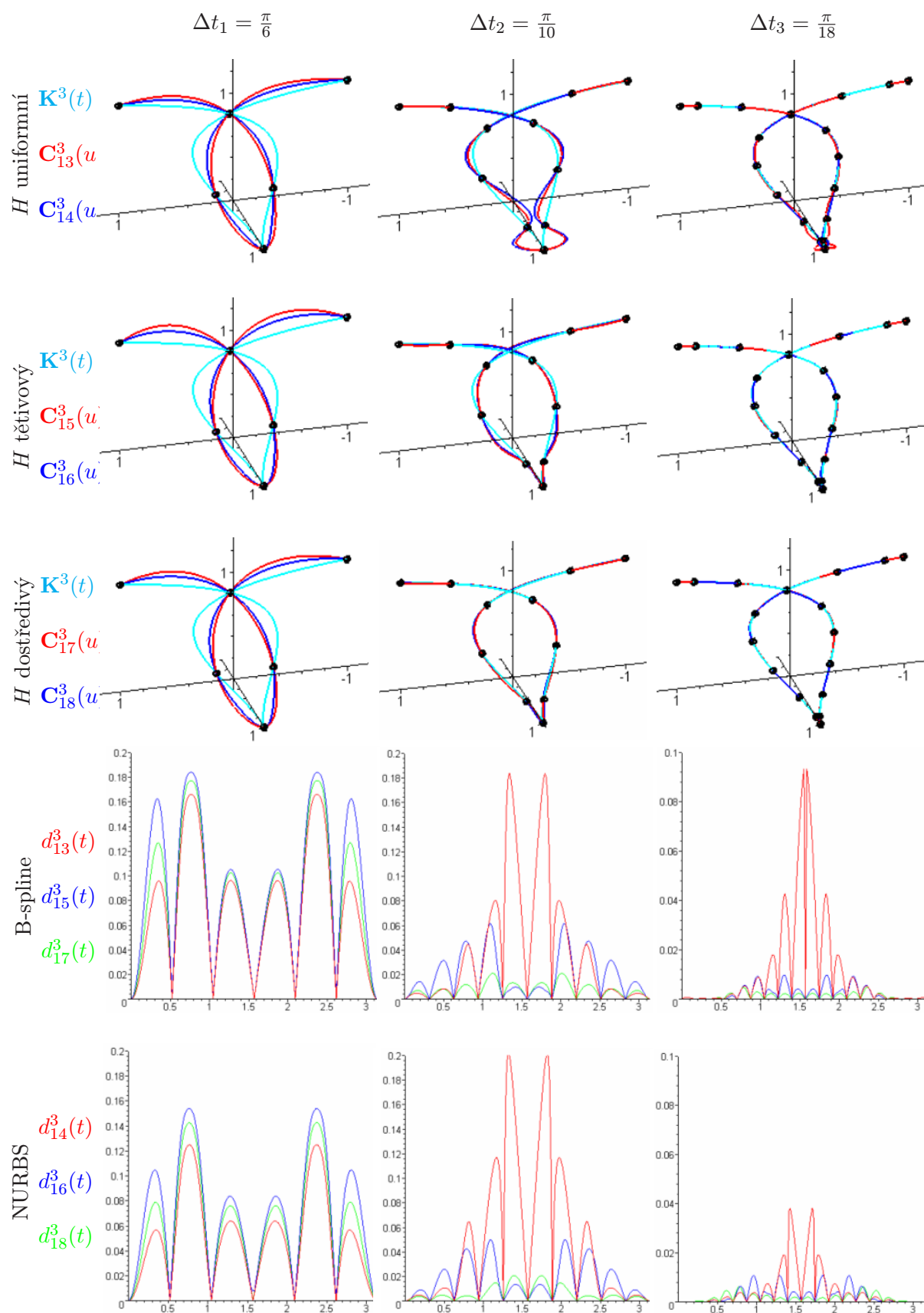
Tab. 6.19: Metody **13** až **18**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
13	$1.66 \cdot 10^{-2}$	3.315	$1.84 \cdot 10^{-1}$	3.470	$9.33 \cdot 10^{-2}$	1.733
14	$1.25 \cdot 10^{-2}$	2.493	$2.02 \cdot 10^{-1}$	3.813	$3.81 \cdot 10^{-2}$	0.709
15	$1.84 \cdot 10^{-1}$	3.669	$6.17 \cdot 10^{-2}$	1.166	$9.86 \cdot 10^{-3}$	0.183
16	$1.54 \cdot 10^{-2}$	3.071	$5.01 \cdot 10^{-2}$	0.946	$1.09 \cdot 10^{-2}$	0.203
17	$1.77 \cdot 10^{-2}$	3.537	$2.11 \cdot 10^{-2}$	0.399	$4.85 \cdot 10^{-3}$	0.090
18	$1.43 \cdot 10^{-2}$	2.845	$2.08 \cdot 10^{-2}$	0.392	$6.29 \cdot 10^{-3}$	0.117

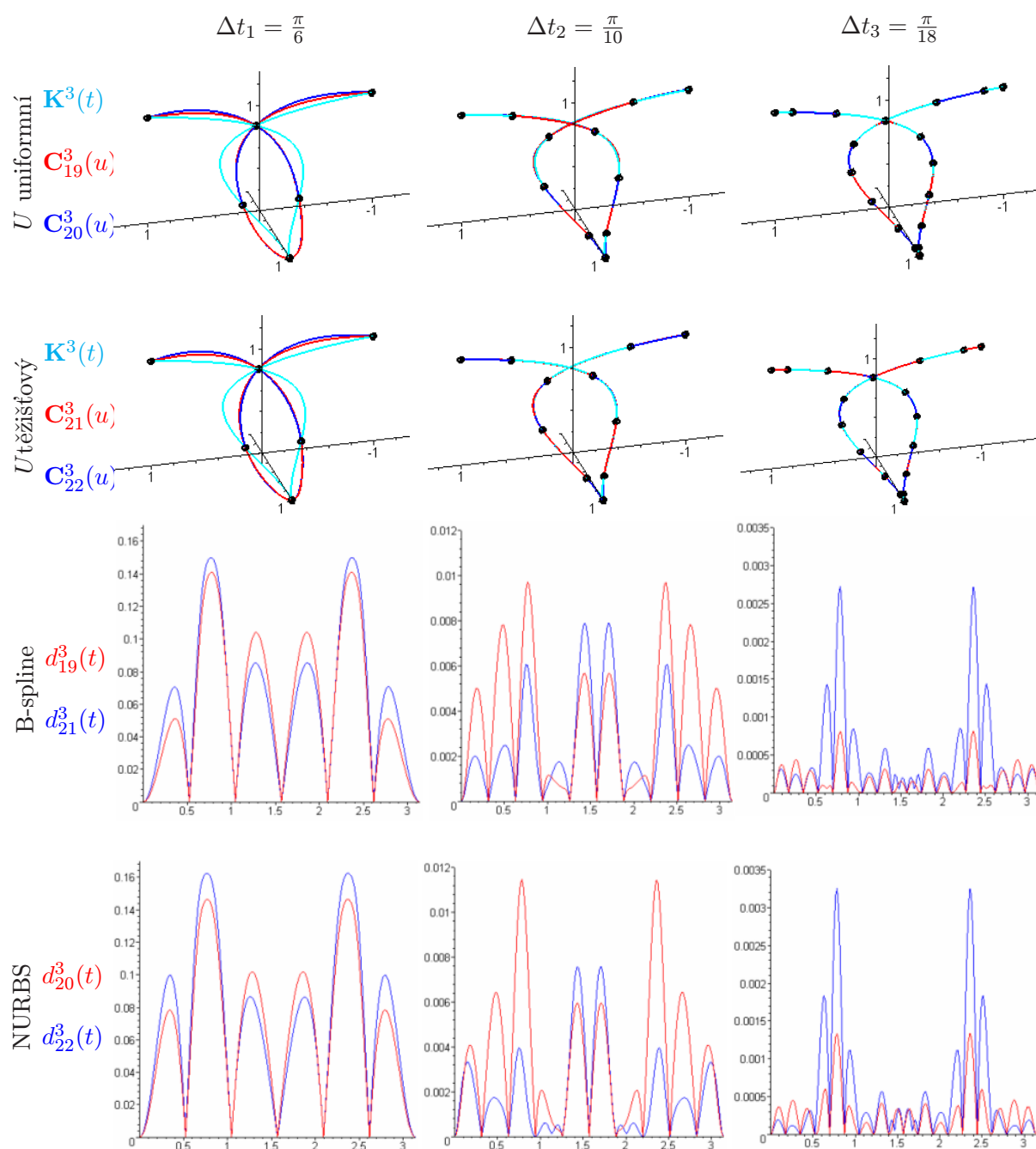
Nejlépejších výsledků dosahuje metoda **14** (NURBS, vektor parametrizace uniformní) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **18** (NURBS, vektor parametrizace dostředivý) pro hustotu Δt_2 a metoda **17** (vektor parametrizace dostředivý, B-spline) pro hustotu Δt_3 .

Nejméně přesnou je z této kategorie metoda **15** (vektor parametrizace těživý, B-spline) pro hustotu Δt_1 , metoda **14** (vektor parametrizace uniformní, NURBS) pro hustotu Δt_2 a metoda **13** (B-spline, vektor parametrizace uniformní) pro hustotu Δt_3 .

Prosté interpolační metody **19** až **22** s vektorem parametrizace konstruovaným univerzální metodou opět vykazují velmi spolehlivé výsledky a očekávané průběhy interpolačních křivek. Grafy interpolačních křivek a průběhy jejich odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$ jsou nakresleny na obr. 6.29, číselné výsledky jsou shrnuty v tab. 6.20.



Obr. 6.28: Metody 13 až 18:
 Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$



Obr. 6.29: Metody **19** až **22**:
Prosté interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $K^3(t)$

Pro hustotu Δt_1 je nepřesnější metoda **19** (B-spline, uzlový vektor uniformní), pro hustotu Δt_2 metoda **22** (NURBS, uzlový vektor těžišťový) a pro hustotu Δt_3 metoda **19** (B-spline, uzlový vektor uniformní).

Nejhorších výsledků dosahuje metoda **22** (NURBS, uzlový vektor těžišťový) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **20** (NURBS, uzlový vektor uniformní) pro hustotu Δt_2 a pro hustotu Δt_3 metoda **22** (NURBS, uzlový vektor těžišťový).

Tab. 6.20: Metody **19** až **22**:Absolutní a relativní chyba prosté interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
19	$1.41 \cdot 10^{-1}$	2.809	$9.71 \cdot 10^{-3}$	0.183	$8.16 \cdot 10^{-4}$	0.015
20	$1.46 \cdot 10^{-1}$	2.921	$1.15 \cdot 10^{-2}$	0.216	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.025
21	$1.50 \cdot 10^{-1}$	2.991	$7.91 \cdot 10^{-3}$	0.149	$2.72 \cdot 10^{-3}$	0.050
22	$1.62 \cdot 10^{-1}$	3.241	$7.59 \cdot 10^{-3}$	0.143	$3.25 \cdot 10^{-3}$	0.060

Uzlové interpolační metody

Všechny uzlové interpolační metody generují interpolační křivky velmi dobrého tvaru, přičemž nej přesnější výsledků dosahují metody **23** až **26** s uniformním uzlovým vektorem. Průběhy interpolačních křivek konstruovaných těmito metodami a jejich odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$ jsou nakresleny na obr. 6.30, číselné výsledky jsou uvedeny v tab. 6.21.

Nejpřesnější metodou z této kategorie je metoda **25** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **26** (krajní vektory druhých derivací nulové) pro hustotu Δt_2 a metoda **25** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_3 .

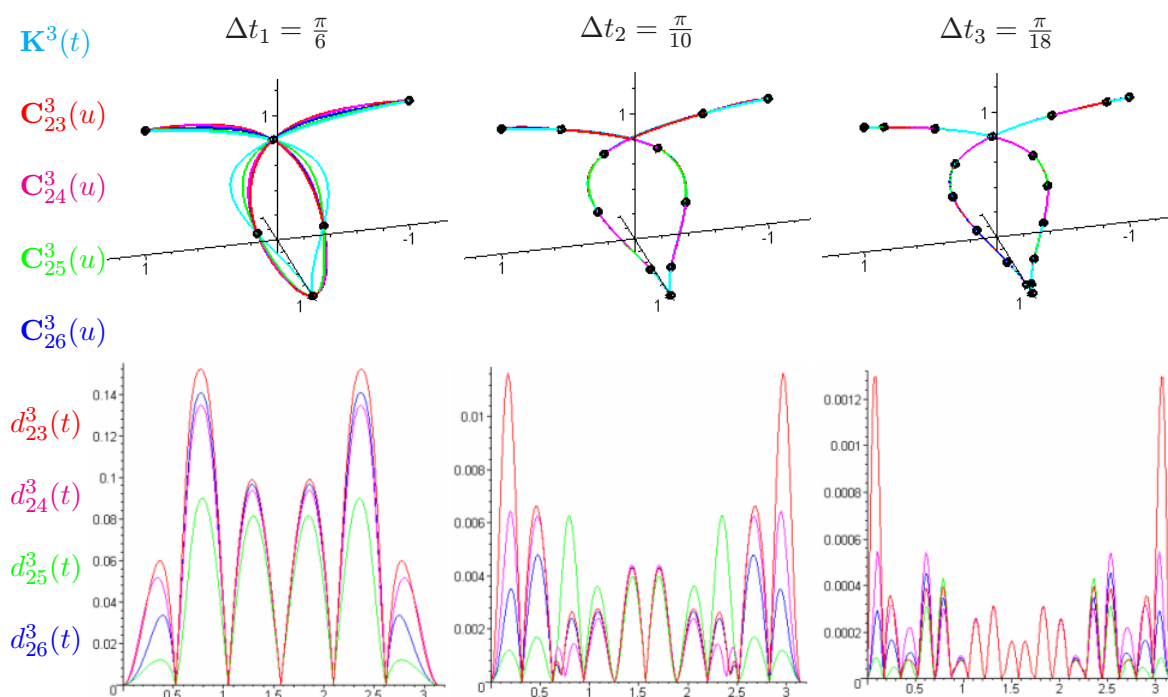
Nejméně přesná je metoda **23** s krajními tečnými vektory konstruované pomocí Lagrangeovy interpolace pro všechny tři uvažované hustoty definičních bodů.

Tab. 6.21: Metody **23** až **26**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

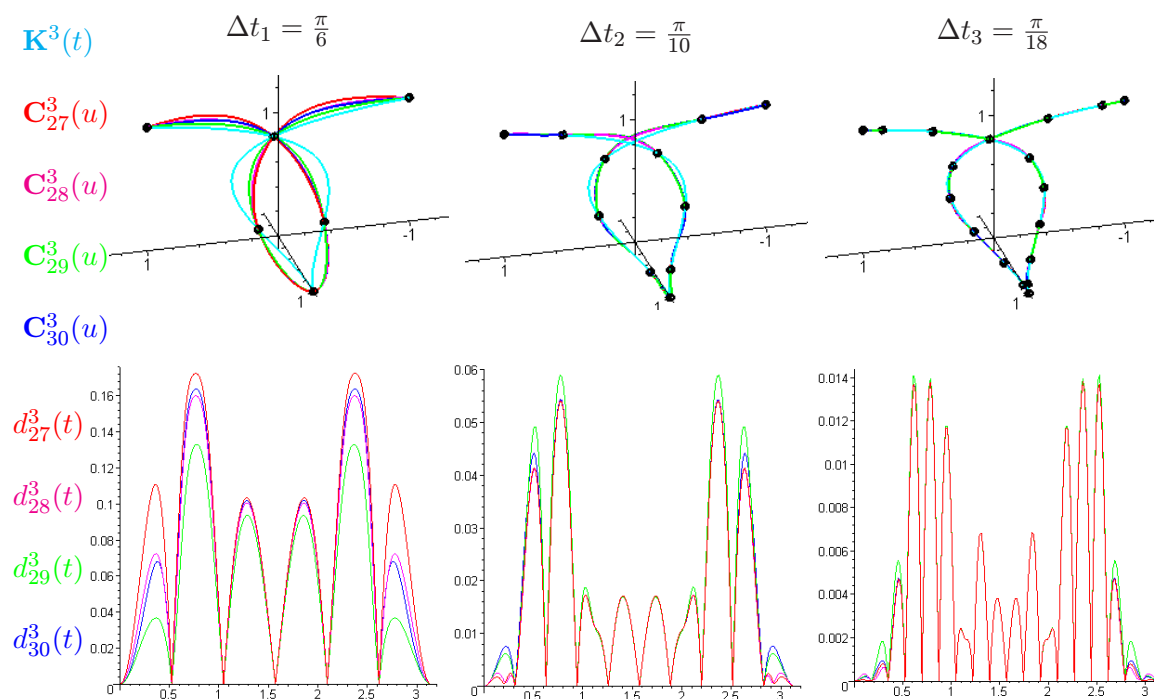
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
23	$1.52 \cdot 10^{-1}$	3.033	$1.16 \cdot 10^{-2}$	0.220	$1.30 \cdot 10^{-3}$	0.024
24	$1.35 \cdot 10^{-1}$	2.686	$6.43 \cdot 10^{-3}$	0.121	$5.46 \cdot 10^{-4}$	0.010
25	$8.99 \cdot 10^{-2}$	1.794	$6.25 \cdot 10^{-3}$	0.118	$4.31 \cdot 10^{-4}$	0.008
26	$1.41 \cdot 10^{-1}$	2.807	$4.79 \cdot 10^{-3}$	0.090	$4.55 \cdot 10^{-4}$	0.008

I když uzlové metody s těživým a s dostředivým vektorem parametrizace nedosahují tak dobrých výsledků jako uzlové metody s vektorem parametrizace uniformním, představují velmi spolehlivý nástroj pro konstrukci interpolační křivky. Grafy křivek a jejich odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$ pro metody **27** až **30** (těživý vektor parametrizace) jsou zobrazeny na obr. 6.31, číselné výsledky jsou uvedeny v tab. 6.22.

Nejpřesnější z této skupiny je metoda **29** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu definičních bodů Δt_1 , metoda **27** (krajní tečné vektory Lagrangeovy) a metoda **28** (krajní tečné vektory těžnicové) pro hustotu Δt_2 a metody **27** (krajní tečné vektory Lagrangeovy), **28** (krajní tečné vektory těžnicové) a **30** (krajní vektory druhých derivací nulové) pro hustotu Δt_2 .



Obr. 6.30: Metody **23** až **26**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$



Obr. 6.31: Metody **27** až **30**:
Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$

Tab. 6.22: Metody **27** až **30**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

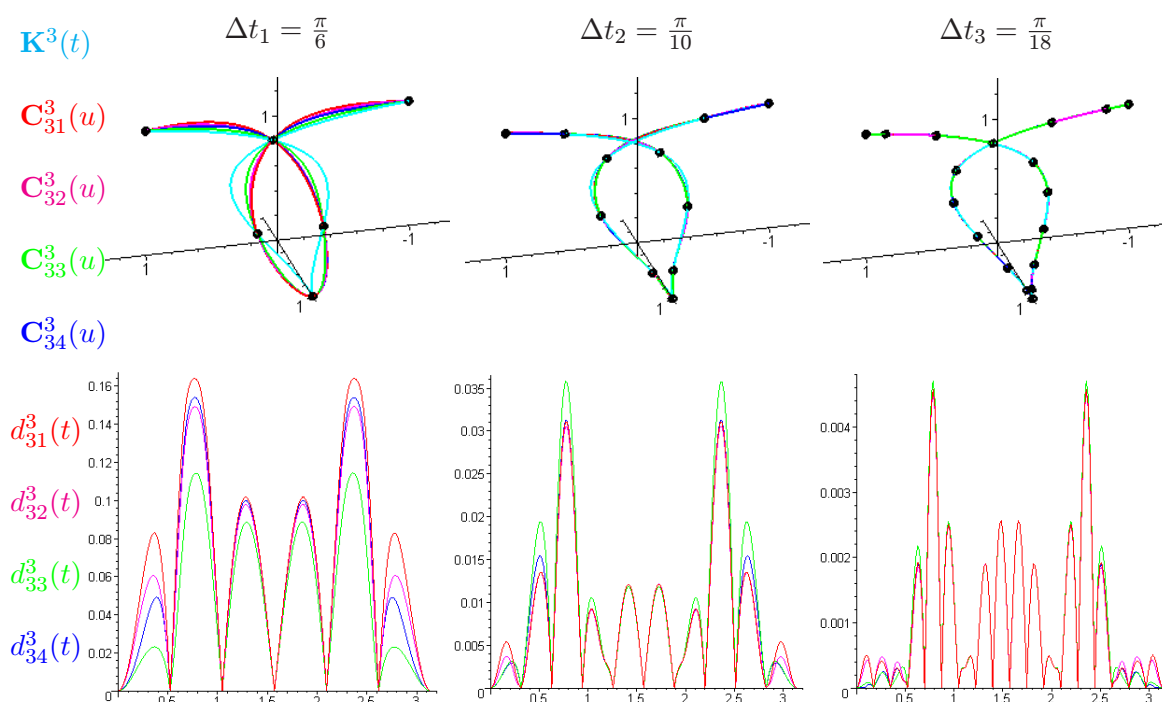
Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
27	$1.73 \cdot 10^{-1}$	3.442	$5.40 \cdot 10^{-2}$	1.020	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256
28	$1.60 \cdot 10^{-1}$	3.194	$5.40 \cdot 10^{-2}$	1.020	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256
29	$1.33 \cdot 10^{-1}$	2.655	$5.89 \cdot 10^{-2}$	1.113	$1.41 \cdot 10^{-2}$	0.262
30	$1.64 \cdot 10^{-1}$	3.268	$5.43 \cdot 10^{-2}$	1.026	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256

Nejméně přesných hodnot dosahuje metoda **27** (krajní tečné vektory Lagrangeovy) pro hustotu Δt_1 , metoda **29** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_2 i pro hustotu Δt_3 .

Poslední skupina uzlových interpolačních křivek s dostředivým vektorem parametrizace konstruovaných metodami **31** až **34** má zobrazené grafy křivek a jejich odchylek na obr. 6.32, číselné výsledky jsou shrnuty v tab. 6.23.

Nejpřesnější je metoda **33** (krajní tečné vektory nulové) pro hustotu Δt_1 a metoda **32** (krajní tečné vektory těžnicové) pro hustotu Δt_2 a Δt_3 .

Nejméně přesná je metoda **31** (krajní tečné vektory Lagrangeovy) pro hustotu Δt_1 a metoda **33** (krajní tečné vektory nulové) pro hustoty Δt_2 i Δt_3 .

Obr. 6.32: Metody **31** až **34**:Uzlové interpolační křivky a průběh odchylek od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$

Tab. 6.23: Metody **31** až **34**:Absolutní a relativní chyba uzlové interpolace definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Metoda	Hustota definičních bodů					
	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$		$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$		$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$	
	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)	D_k^3	ε_k^3 (%)
31	$1.64 \cdot 10^{-1}$	3.272	$3.10 \cdot 10^{-2}$	0.586	$4.58 \cdot 10^{-3}$	0.085
32	$1.49 \cdot 10^{-1}$	2.977	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0.577	$4.54 \cdot 10^{-3}$	0.084
33	$1.14 \cdot 10^{-1}$	2.282	$3.58 \cdot 10^{-2}$	0.676	$4.71 \cdot 10^{-3}$	0.088
34	$1.54 \cdot 10^{-1}$	3.073	$3.12 \cdot 10^{-2}$	0.589	$4.56 \cdot 10^{-3}$	0.085

Úspěšnost všech interpolačních metod **1** až **34** při interpolaci definičních bodů ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$ můžeme posoudit z výsledků uvedených v tab.6.24.

Pro hustotu definičních bodů Δt_1 dosáhla sice nejlepších výsledků metoda **25** (uzlová interpolace, vektor parametrizace uniformní, krajní tečné vektory nulové), ale relativní chyba interpolace je značná. Jak již bylo řečeno, jsou takto velké odchylky interpolační křivky od teoretické křivky $\mathbf{K}^3(t)$ způsobeny nedostatečně určenými vstupními daty pro hustotu definičních bodů Δt_1 , kdy poloha definičních bodů nevystihuje veškeré důležité tvarové podrobnosti teoretické křivky.

Pro hustotu Δt_2 byla nejpřesnější metoda **26** (uzlová interpolace, vektor parametrizace uniformní, krajní vektory druhých derivací nulové) a pro hustotu Δt_3 opět metoda **25** (uzlová interpolace, vektor parametrizace uniformní, krajní tečné vektory nulové). Z hodnot uvedených v tabulce je zřejmé, že uzlové interpolační metody dosahovaly lepších výsledků než ostatní metody v případě dostatečně určených vstupních dat.

Zcela nevhodné jsou metody prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem pro vektor parametrizace konstruovaný tětívovou metodou. Jedná se o metody **3** (B-spline) a **4** (NURBS). Nespolehlivé jsou metody prosté interpolace s uniformním uzlovým vektorem a s uzlovým vektorem konstruovaným dostředivou metodou. Jsou to metody **5** (B-spline) a **6** (NURBS).

Tab. 6.24: Úspěšnost interpolačních metod
při interpolaci definičních bodů na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$

Hustota definičních bodů								
$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$			$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$			$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$		
Metoda	D_k^3	ε_k^3 (%)	Metoda	D_k^3	ε_k^3 (%)	Metoda	D_k^3	ε_k^3 (%)
25	$8.89 \cdot 10^{-2}$	1.794	26	$4.79 \cdot 10^{-3}$	0.090	25	$4.31 \cdot 10^{-4}$	0.008
2	$1.05 \cdot 10^{-1}$	2.090	25	$6.25 \cdot 10^{-3}$	0.118	26	$4.55 \cdot 10^{-4}$	0.008
8	$1.12 \cdot 10^{-1}$	2.226	24	$6.43 \cdot 10^{-3}$	0.121	24	$5.46 \cdot 10^{-4}$	0.010
33	$1.14 \cdot 10^{-1}$	2.282	7	$6.80 \cdot 10^{-3}$	0.128	7	$6.10 \cdot 10^{-4}$	0.011
14	$1.25 \cdot 10^{-1}$	2.493	22	$7.59 \cdot 10^{-3}$	0.143	1	$7.29 \cdot 10^{-4}$	0.014
5	$1.30 \cdot 10^{-1}$	2.588	21	$7.91 \cdot 10^{-3}$	0.149	19	$8.16 \cdot 10^{-4}$	0.015
29	$1.33 \cdot 10^{-1}$	2.655	8	$9.26 \cdot 10^{-3}$	0.175	23	$1.30 \cdot 10^{-3}$	0.024
10	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.664	19	$9.71 \cdot 10^{-3}$	0.183	20	$1.34 \cdot 10^{-3}$	0.025
12	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.644	1	$1.05 \cdot 10^{-2}$	0.198	8	$2.05 \cdot 10^{-3}$	0.038
1	$1.34 \cdot 10^{-1}$	2.670	20	$1.15 \cdot 10^{-2}$	0.216	21	$2.72 \cdot 10^{-3}$	0.050
24	$1.35 \cdot 10^{-1}$	2.686	23	$1.16 \cdot 10^{-2}$	0.220	22	$3.25 \cdot 10^{-3}$	0.060
26	$1.41 \cdot 10^{-1}$	2.807	18	$2.08 \cdot 10^{-2}$	0.392	32	$4.54 \cdot 10^{-3}$	0.084
19	$1.41 \cdot 10^{-1}$	2.809	17	$2.11 \cdot 10^{-2}$	0.399	34	$4.56 \cdot 10^{-3}$	0.085
18	$1.43 \cdot 10^{-1}$	2.845	12	$2.55 \cdot 10^{-2}$	0.482	31	$4.58 \cdot 10^{-3}$	0.085
20	$1.46 \cdot 10^{-1}$	2.921	32	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0.577	33	$4.71 \cdot 10^{-3}$	0.088
32	$1.49 \cdot 10^{-1}$	2.977	31	$3.10 \cdot 10^{-2}$	0.586	17	$4.85 \cdot 10^{-3}$	0.090
21	$1.50 \cdot 10^{-1}$	2.991	34	$3.12 \cdot 10^{-2}$	0.589	11	$5.07 \cdot 10^{-3}$	0.094
23	$1.52 \cdot 10^{-1}$	3.033	2	$3.17 \cdot 10^{-2}$	0.589	12	$6.08 \cdot 10^{-3}$	0.113
16	$1.54 \cdot 10^{-1}$	3.071	33	$3.58 \cdot 10^{-2}$	0.598	18	$6.29 \cdot 10^{-3}$	0.117
34	$1.54 \cdot 10^{-1}$	3.073	11	$3.61 \cdot 10^{-2}$	0.676	15	$9.86 \cdot 10^{-3}$	0.183
7	$1.55 \cdot 10^{-1}$	3.098	16	$5.01 \cdot 10^{-2}$	0.682	16	$1.09 \cdot 10^{-2}$	0.203
28	$1.60 \cdot 10^{-1}$	3.194	27	$5.40 \cdot 10^{-2}$	0.946	28	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256
22	$1.62 \cdot 10^{-1}$	3.241	28	$5.40 \cdot 10^{-2}$	1.020	27	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256
30	$1.64 \cdot 10^{-1}$	3.268	30	$5.43 \cdot 10^{-2}$	1.020	30	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.256
31	$1.64 \cdot 10^{-1}$	3.272	29	$5.89 \cdot 10^{-2}$	1.026	29	$1.41 \cdot 10^{-2}$	0.262
13	$1.66 \cdot 10^{-1}$	3.315	10	$5.98 \cdot 10^{-2}$	1.113	2	$1.80 \cdot 10^{-2}$	0.334
9	$1.67 \cdot 10^{-1}$	3.322	15	$6.17 \cdot 10^{-2}$	1.130	9	$1.85 \cdot 10^{-2}$	0.344
11	$1.67 \cdot 10^{-1}$	3.322	9	$6.86 \cdot 10^{-2}$	1.166	10	$2.01 \cdot 10^{-2}$	0.374
6	$1.68 \cdot 10^{-1}$	3.342	6	$1.83 \cdot 10^{-1}$	1.296	14	$3.81 \cdot 10^{-2}$	0.709
27	$1.73 \cdot 10^{-1}$	3.442	13	$1.84 \cdot 10^{-1}$	3.448	13	$9.33 \cdot 10^{-2}$	1.733
17	$1.77 \cdot 10^{-1}$	3.537	14	$2.02 \cdot 10^{-1}$	3.470	3	–	–
15	$1.84 \cdot 10^{-1}$	3.669	5	$2.19 \cdot 10^{-1}$	4.133	4	–	–
3	$2.22 \cdot 10^{-1}$	4.421	3	–	–	5	–	–
4	$3.42 \cdot 10^{-1}$	6.832	4	–	–	6	–	–

$\varepsilon_k^3 < 0.2 \%$

$0.2 \% \leq \varepsilon_k^3 < 0.4 \%$

$0.4 \% \leq \varepsilon_k^3 < 0.6 \%$

$0.6 \% \leq \varepsilon_k^3 < 0.8 \%$

$0.8 \% \leq \varepsilon_k^3 \leq 1.0 \%$

$\varepsilon_k^3 > 1.0 \%$

– $\varepsilon_k^2 \gg 1.0 \%$

6.3 Posouzení interpolačních metod

Celková úspěšnost interpolačních metod je shrnuta v tab. 6.25, která uvádí relativní chyby ε_k^1 , resp. ε_k^2 , resp. ε_k^3 jednotlivých interpolačních metod dosažené při interpolaci definičních bodů všech uvažovaných hustot ležících na teoretické křivce $\mathbf{K}^1(t)$ bez singulárních bodů, resp. na teoretické křivce $\mathbf{K}^2(t)$ s uzlovým bodem, resp. na teoretické křivce $\mathbf{K}^3(t)$ s uzlovým bodem a s bodem vratu. V posledním sloupci tabulky je uvedena chyba interpolační metody E_k , podle které jsou výsledky v tabulce uspořádány. Šedým podbarvením číselného kódu jsou opět vyznačeny metody, jejichž alespoň jeden tvarovací nástroj je konstruován metodou navrženou v rámci této práce.

Podle dosažené hodnoty chyby interpolační metody E_k rozdělíme posuzované metody do následujících skupin (v tab. 6.25 jsou od sebe odděleny dvojitou čarou): *velmi přesné metody*, *středně přesné metody* a *nepřesné metody*.

Velmi přesné metody – chyba těchto interpolačních metod je menší než 6 % ($E_k \leq 6\%$).

Velmi přesné metody lze jednoznačně doporučit ke konstrukci matematických modelů obecných tvarových křivek. Interpolační křivky konstruované těmito metodami se vyznačují výbornou tvarovou shodou s uvažovanými teoretickými křivkami. Vzhledem k posuzování úspěšnosti metod podle chyby interpolační metody lze očekávat, že tyto metody povedou ke spolehlivým výsledkům i v případě velmi obecně tvarovaných definičních polygonů, jestliže poloha definičních bodů bude v dostatečné míře vystihovat všechny důležité tvarové detaily křivky.

Výrazně nejlepších výsledků dosáhla prostá interpolační metoda **8** – NURBS s průměrovým uzlovým vektorem, uniformním vektorem parametrizace. Vliv vah stanovených těžišťovou metodou na zvýšení přesnosti interpolační křivky je nesporný, jak zjistíme, porovnáme-li výsledky metody **8** s výsledky metody **7**. Metoda **7** se od metody **8** liší pouze tím, že generuje B-spline křivky, které můžeme pokládat za NURBS křivky se stejnými vahami všech řídicích bodů. Metoda **7** se také umístila ve skupině velmi přesných křivek, avšak chyba této interpolační metody dosahuje výrazně vyšší hodnoty než metoda **8**, tudíž je celkově méně spolehlivá.

Vynikající a vzájemně srovnatelné výsledky mají všechny metody prosté interpolace s vektorem parametrizace konstruovaným univerzální metodou, tj. metody **19** až **22**. Výborně se také umístila uzlová interpolační metoda s uniformním vektorem parametrizace a s těžnicovými krajními tečnými vektory.

Velmi dobrých výsledků dosáhla metoda **12** (NURBS, prostá interpolace s průměrovým uzlovým vektorem, dostředivým vektorem parametrizace), metoda **23** (uzlová interpolace s uniformním uzlovým vektorem a s Lagrangeovými krajními tečnými vektory) a metoda **18** (NURBS, prostá interpolace s těžišťovým uzlovým vektorem, dostředivým vektorem parametrizace).

Středně přesné metody – chyba interpolační metody se pohybuje v rozmezí od 6 do 8 % ($6\% < E_k \leq 8\%$). Středně přesné metody jsou charakterizovány kolísavými výsledky, jejich úspěšnost je velmi závislá na tvaru definičního polygonu a rozmístění definičních bodů. Spolehlivé výsledky lze získat pouze v případě vhodně rozmístěných definičních bodů.

Patří sem metody **1** a **2** (prostá interpolace s uniformním uzlovým vektorem i vektorem parametrizace), metoda **11** (B-spline, prostá interpolace s průměrovým uzlovým vektorem, dostředivým vektorem parametrizace), metoda **17** (B-spline, prostá interpolace s těžišťovým uzlovým vektorem, dostředivým vektorem parametrizace), dvě uzlové interpolační

metody s uniformním vektorem parametrizace – metoda **25** s nulovými krajními tečnými vektory a metoda **26** s nulovými krajními vektory druhých derivací, dvě uzlové interpolační metody s tětiovým vektorem parametrizace – metoda **27** s Lagrangeovými krajními tečnými vektory a **28** s těžnicovými krajními tečnými vektory a všechny metody **31** až **34**, tj. uzlové interpolační metody s dostředivým vektorem parametrizace.

Nepřesné metody – chyba těchto interpolačních metod je vyšší než 8 % ($8\% < E_k$), popř. nebyla vůbec vyhodnocena kvůli nestabilitě řešení. Nepřesné metody se ukázaly jako nespolehlivé a pro konstrukci přesných matematických modelů obecných tvarových křivek zadaných posloupností bodů zcela nevhodné.

Mezi velmi nespolehlivé metody patří obě prosté interpolační metody s průměrovým uzlovým vektorem a tětiovým vektorem parametrizace – **9** a **10**, prosté interpolační metody s těžišťovým uzlovým vektorem a tětiovým vektorem parametrizace – **15** a **16** a uzlové interpolační metody s tětiovým vektorem parametrizace – **29** (krajní tečné vektory nulové) a **30** (krajní vektory druhých derivací nulové). Vidíme, že tětiový vektor parametrizace je velmi rizikový faktor při konstrukci interpolačních křivek.

Obzvláště nelze doporučit metody **3** a **4** – prosté interpolační metody s uniformním uzlovým vektorem a tětiovým vektorem parametrizace, které jsou nestabilní. Interpolační křivky konstruované těmito metodami nejsou vhodně tvarovány mezi definičními body a při zvyšující se hustotě definičních bodů se rozkmitají. Ze stejného důvodu nelze doporučit ani metody **5** a **6** – prosté interpolační metody s uniformním uzlovým vektorem a dostředivým vektorem parametrizace.

Nevhodný tvar mezi definičními body jsme zaznamenali i při interpolaci některých definičních polygonů metodami **13** a **14** – prosté interpolační metody s těžišťovým uzlovým vektorem a uniformním vektorem parametrizace. K zákmitům na interpolační křivce docházelo v místech s větší koncentrací definičních bodů, kterou uniformní vektor parametrizace ignoruje.

Tab. 6.25: Celková úspěšnost interpolačních metod

Metoda	$\Delta t_1 = \frac{\pi}{6}$			$\Delta t_2 = \frac{\pi}{10}$			$\Delta t_3 = \frac{\pi}{18}$			E_k (%)
	ε_k^1 (%)	ε_k^2 (%)	ε_k^3 (%)	ε_k^1 (%)	ε_k^2 (%)	ε_k^3 (%)	ε_k^1 (%)	ε_k^2 (%)	ε_k^3 (%)	
8	0.771	0.507	2.226	0.288	0.129	0.175	0.016	0.038	0.038	4.187
19	0.319	1.148	2.809	0.110	0.265	0.183	0.035	0.156	0.015	5.039
21	0.475	0.899	2.991	0.148	0.183	0.149	0.052	0.193	0.050	5.141
20	0.391	0.962	2.921	0.128	0.310	0.216	0.030	0.169	0.025	5.153
24	0.290	1.481	2.686	0.081	0.363	0.121	0.036	0.202	0.010	5.270
22	0.585	0.808	3.241	0.168	0.241	0.143	0.057	0.185	0.060	5.489
12	0.415	0.933	2.664	0.810	0.135	0.482	0.053	0.034	0.113	5.640
23	0.497	1.470	3.033	0.132	0.250	0.220	0.016	0.077	0.024	5.720
7	1.190	1.027	3.098	0.103	0.180	0.128	0.007	0.043	0.011	5.787
1	1.033	2.085	2.670	0.045	0.093	0.198	0.004	0.007	0.014	6.148
2	0.539	0.905	2.090	1.122	0.335	0.598	0.211	0.229	0.334	6.362
32	0.458	1.327	2.977	0.359	0.353	0.577	0.035	0.200	0.084	6.371
31	0.549	1.207	3.272	0.487	0.219	0.586	0.031	0.072	0.085	6.508
26	0.852	1.729	2.807	0.260	0.510	0.090	0.076	0.323	0.008	6.656
18	0.542	0.791	2.845	0.758	0.513	0.392	0.040	0.837	0.117	6.836
25	1.362	2.152	1.794	0.482	0.701	0.118	0.121	0.461	0.008	7.198
34	1.055	1.418	3.073	0.390	0.487	0.589	0.073	0.318	0.085	7.489
11	0.637	1.833	3.322	0.683	0.170	0.682	0.049	0.036	0.094	7.506
28	0.679	1.151	3.194	0.649	0.342	1.020	0.095	0.198	0.256	7.584
27	0.761	1.049	3.442	0.829	0.195	1.020	0.095	0.069	0.256	7.716
33	1.532	1.906	2.282	0.213	0.684	0.676	0.118	0.458	0.088	7.958
16	0.418	1.895	3.071	1.482	0.113	0.946	0.169	0.047	0.203	8.344
30	1.252	1.051	3.268	0.676	0.465	1.026	0.095	0.314	0.256	8.404
17	0.761	1.705	3.537	0.679	1.305	0.399	0.039	0.038	0.090	8.553
10	0.644	1.989	2.664	1.549	0.204	1.130	0.193	0.031	0.374	8.778
29	1.685	1.619	2.655	0.419	0.667	1.113	0.136	0.454	0.262	9.010
9	0.319	3.344	3.322	1.462	0.173	1.296	0.181	0.028	0.344	10.469
15	0.363	3.244	3.669	1.418	0.235	1.166	0.161	0.035	0.183	10.473
14	0.998	0.710	2.493	0.265	–	3.813	0.019	–	0.709	9.007
13	1.247	0.949	3.315	0.147	–	3.470	0.008	–	1.733	10.870
5	0.384	5.049	2.588	0.948	3.272	4.133	0.614	–	–	16.988
6	0.990	3.585	3.342	1.262	4.374	3.448	0.864	–	–	17.864
3	0.681	11.847	4.421	0.944	–	18.475	3.592	–	–	39.961
4	1.640	10.640	6.832	1.494	–	23.862	3.964	–	–	48.432

Literatura

- [1] Aszódi, B. - Czuczor, S. - Szirmay-Kalos L.: NURBS Fairing by Knot Vector Optimization. In: Journal of WSCG, Vol. 12, No. 1-3., ISSN 1213-6972.
- [2] Drs, L.: Matematické metody v počítačové grafice. Ediční středisko ČVUT, Praha, 1990. Postgraduální skriptum. ISBN 80-01-00353-1.
- [3] Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Academic Press, INC. San Diego. 1996. ISBN 0-12-249054-1.492 s.
- [4] Fisher, J. - Lowther, J. - Shene, Ch. K.: If You Know B-Splines Well, You Also Know NURBS!
In: ITiCSE'04. Leeds, UK. 2004.
- [5] Fisher, J. - Lowther, J. - Shene, Ch. K.: Curve and Surface Interpolation and Approximation: Knowledge Unit and software Tool.
In: SIGCSE'04. Virginia. 2004.
- [6] Fišerová, V.: Vliv způsobu zpracování digitalizovaných dat tvarově složitých součástí na odchylku tvaru výrobku. Disertační práce. ZČU v Plzni, Strojní fakulta. 2006. 148 s.
- [7] Hollister, S. M.: The Dirty Little Secrets of NURBS. Electronic article.
<http://www.pilot3d.com/NurbSecrets.htm>
- [8] Ježek, F.: Geometrické modelování. Pomocný učební text verze 8.1, ZČU Plzeň, 2006.
- [9] Juhász, I. - Hoffmann, M.: The Effect of Knot Modifications of the Shape of B-Spline Curves. In: Journal for Geometry and Graphics, Vol. 5(2001), No.2., ISSN 1433-8157.
- [10] Kočandrlová, M.: Křivkový integrál. Studijní text pro obor G+K. ČVUT v Praze, Stavební fakulta. 2004. 24 s.
<http://mat.fsv.cvut.cz/ma3g/soubory/KI.PDF>
- [11] Kundrátová, K.: NURBS reprezentace křivek v MAPLE. In: Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice, JČMF, Praha 2005. ISBN 80-7015-013-0, s. 130-134.
- [12] Kundrátová, K. - Linkeová, I.: Aproximační NURBS křivky. Maple worksheet, portál Puma, 2007. <http://puma.feld.cvut.cz/cs/maple/16>
- [13] Kundrátová, K. - Linkeová, I.: Interpoláční NURBS křivky. Maple worksheet, portál Puma, 2007. <http://puma.feld.cvut.cz/cs/maple/17>
- [14] Linkeová, I.: Interpoláční NURBS křivky. In: Sborník 26. konference o geometrii a počítačové grafice, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice 2006. ISBN 80-7040-902-9, s. 145-150.

-
- [15] Linkeová, I.: Speciální případy NURBS reprezentace. In: Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice, JČMF, Praha 2005. ISBN 80-7015-013-0, s. 149-154.
- [16] Lowther, J. - Shene, Ch. K.: Teaching B-splines Is Not Difficult! In: SIGCSE'03, Nevada, 2005.
- [17] Piegl, L. - Tiller, W.: The NURBS Book. Springer. Londýn. 1995.
- [18] Piegl, L. - Tiller, W.: Parametrization for Surface Fitting in Reverse Engineering. In: Computer-Aided Design 33 (2001), p. 593-603
- [19] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha, 1981.
- [20] Shene, Ch. K.: Introduction to Computing with Geometry Notes, Michigan Technological University. Electronic book.
www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES
- [21] Velichová, D.: Konštrukčná geometria. Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, 1996. ISBN 80-227-0904-2.

Příloha A

Konstrukce aproximační NURBS křivky

V této příloze uvedeme detailní postup konstrukce ukotvené aproximační B-spline a NURBS křivky 3. stupně zadané posloupností řídicích bodů $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_1 = (1, 3)$, $\mathbf{P}_2 = (2, 2)$, $\mathbf{P}_3 = (5, 4)$, $\mathbf{P}_4 = (6, 2)$ a $\mathbf{P}_5 = (5, -1)$. Obě křivky budou definované na intervalu $u \in [0, 1]$ těžišťového uzlového vektoru. Váhy řídicích bodů NURBS křivky určíme těžišťovou metodou.

Poznámka: Výpočty byly prováděny s přesností na 16 platných číslic, všechny zde uvedené vypočtené číselné údaje jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

A.1 Těžišťový uzlový vektor aproximační křivky

B-spline i NURBS křivka jsou definovány na stejném těžišťovém uzlovém vektoru, jehož uzly je třeba určit nejdříve. Pro $n = 5$ je počet uzlových roztečí dle (2.5) $m = 5 + 3 + 1 = 9$. Těžiště \mathbf{T}_i , $i = 0, 1, 2, 3$, dílčích řídicích polygonů určíme dle (3.5)

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0 &= \mathbf{P}_0 = (0, 0), \\ \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{5} \sum_{j=0}^4 \mathbf{P}_j = \frac{1}{5} (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4) = \\ &= \frac{1}{5} [(0, 0) + (1, 3) + (2, 2) + (5, 4) + (6, 2)] = (2.80, 2.20), \\ \mathbf{T}_2 &= \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \mathbf{P}_j = \frac{1}{5} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5) = \\ &= \frac{1}{5} [(1, 3) + (2, 2) + (5, 4) + (6, 2) + (5, -1)] = (3.80, 2.00), \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{P}_5 = (5, -1).\end{aligned}$$

Dále vypočteme vzdálenosti l_i , $i = 1, 2, 3$, dvou po sobě následujících těžišť \mathbf{T}_{i-1} , a \mathbf{T}_i , $i = 0, 1, 2, 3$, dílčích řídicích polygonů dle (3.6):

$$\begin{aligned}l_1 &= |\mathbf{T}_0 \mathbf{T}_1| = \sqrt{(2.80 - 0)^2 + (2.20 - 0)^2} \doteq 3.56, \\ l_2 &= |\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2| = \sqrt{(3.80 - 2.80)^2 + (2.00 - 2.20)^2} \doteq 1.02, \\ l_3 &= |\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3| = \sqrt{(5 - 3.80)^2 + (-1 - 2.00)^2} \doteq 3.23,\end{aligned}$$

a součet L všech těchto vzdáleností

$$L = l_1 + l_2 + l_3 = 3.56 + 1.02 + 3.23 = 7.81.$$

Uzly uzlového vektoru stanovíme podle (3.8). Čtyři počáteční krajní uzly uzlového vektoru ukotvené křivky jsou rovny nule:

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Vnitřní uzly uzlového vektoru jsou:

$$u_4 = \frac{l_1}{L} = \frac{3.56}{7.81} \doteq 0.46,$$

$$u_5 = \frac{l_1 + l_2}{L} = \frac{3.56 + 1.02}{7.81} \doteq 0.59.$$

Čtyři koncové krajní uzly jsou rovny jedné:

$$u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 1.$$

Těžiškový uzlový vektor má tedy následující tvar:

$$U = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) = (0, 0, 0, 0, 0.46, 0.59, 1, 1, 1, 1). \quad (\text{A.1})$$

A.2 Aproximační B-spline křivka

Jakmile známe uzlový vektor, můžeme přistoupit k vyjádření B-spline bázových funkcí podle rekurentního vztahu (2.1).

A.2.1 B-spline bázové funkce aproximační B-spline křivky

B-spline bázové funkce nultého stupně

Každá B-spline bázová funkce nultého stupně $N_{i,0}(u)$ je jednotková pouze na uzlové rozteči $[u_i, u_{i+1})$, $i = 0, \dots, 8$, jejíž délka je nenulová. Na ostatních uzlových roztečích je B-spline bázová funkce nultého stupně nulová:

$$N_{0,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{1,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{2,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{3,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0, 0.46), \\ 0, & u \in [0.46, 1], \end{cases}$$

$$N_{4,0}(u) = \begin{cases} 0 & u \in [0, 0.46), \\ 1 & u \in [0.46, 0.59), \\ 0 & u \in [0.59, 1), \end{cases}$$

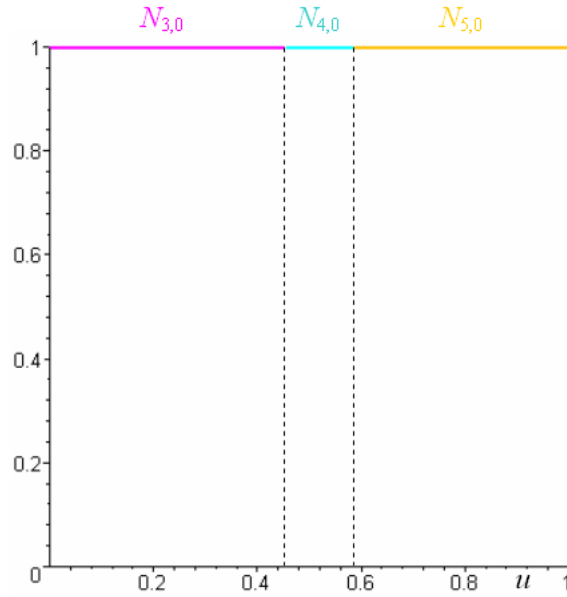
$$N_{5,0}(u) = \begin{cases} 0 & u \in [0, 0.59), \\ 1 & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$N_{6,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{7,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{8,0}(u) = 0, \quad u \in [0, 1].$$

Průběh nenulových B-spline bázových funkcí nultého stupně je zobrazen na obr. A.1.



Obr. A.1: B-spline bázové funkce multého stupně

B-spline bázové funkce 1. stupně

Dosadíme-li $p = 1$ do (2.1), obdržíme vztah pro určení B-spline bázových funkcí 1. stupně:

$$N_{i,1}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} N_{i,0}(u) + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_{i+1}} N_{i+1,0}(u).$$

Jednotlivé B-spline bázové funkce 1. stupně jsou následující:

$$N_{0,1}(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} N_{0,0}(u) + \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u) = \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0 - u}{0 - 0} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0 - u}{0 - 0} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} N_{2,1}(u) &= \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot 1 \doteq -2.19u + 1.00, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot 0 = 0, & u \in [0.46, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{3,1}(u) &= \frac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 1 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0.46} \cdot 0 \doteq 2.19u, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0.46} \cdot 1 \doteq -7.66u + 4.49, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0.46} \cdot 0 = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

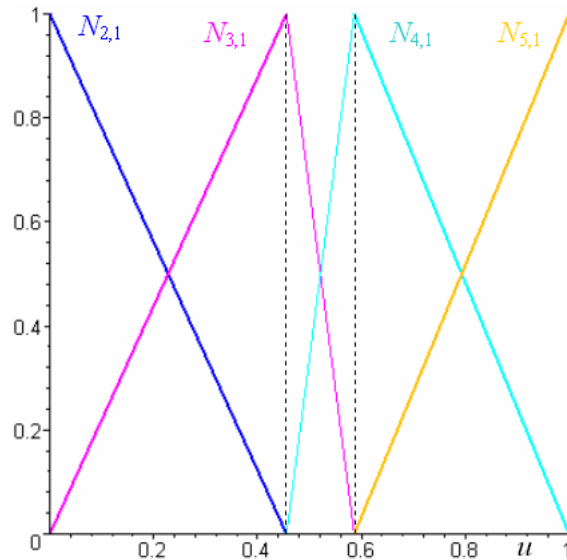
$$\begin{aligned}
N_{4,1}(u) &= \frac{u - u_4}{u_5 - u_4} N_{4,0}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0.46}{0.59 - 0.46} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0.46}{0.59 - 0.46} \cdot 1 + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 \doteq 7.66u - 3.49, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0.46}{0.59 - 0.46} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 1 \doteq -2.42u + 2.42, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{5,1}(u) &= \frac{u - u_5}{u_6 - u_5} N_{5,0}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_6} N_{6,0}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.59), \\ \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot 1 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 \doteq 2.42u - 1.42, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$N_{6,1}(u) = \frac{u - u_6}{u_7 - u_6} N_{6,0}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_7} N_{7,0}(u) = \frac{u - 1}{1 - 1} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$N_{7,1}(u) = \frac{u - u_7}{u_8 - u_7} N_{7,0}(u) + \frac{u_9 - u}{u_9 - u_8} N_{8,0}(u) = \frac{u - 1}{1 - 1} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1].$$

Průběh nenulových B-spline bázových funkcí 1. stupně je patrný z obr. A.2.



Obr. A.2: B-spline bázové funkce 1. stupně

B-spline bázové funkce 2. stupně

Dosadíme-li $p = 2$ do (2.1), obdržíme vztah pro určení B-spline bázových funkcí 2. stupně:

$$N_{i,2}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+2} - u_i} N_{i,1}(u) + \frac{u_{i+3} - u}{u_{i+3} - u_{i+1}} N_{i+1,1}(u).$$

Jednotlivé B-spline bázové funkce 2. stupně mají následující tvar:

$$N_{0,2}(u) = \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} N_{0,1}(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) = \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0 - u}{0 - 0} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} N_{1,2}(u) &= \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot (-2.19u + 1.00) \doteq 4.81u^2 - 4.39u + 1.00, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot 0 = 0, & u \in [0.46, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2,2}(u) &= \frac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot (-2.19u + 1.00) + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot 2.19u \doteq -8.55u^2 + 4.39u, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot (-7.66u + 4.49) \doteq \\ \doteq 13.06u^2 - 15.32u + 4.49, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot 0 = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

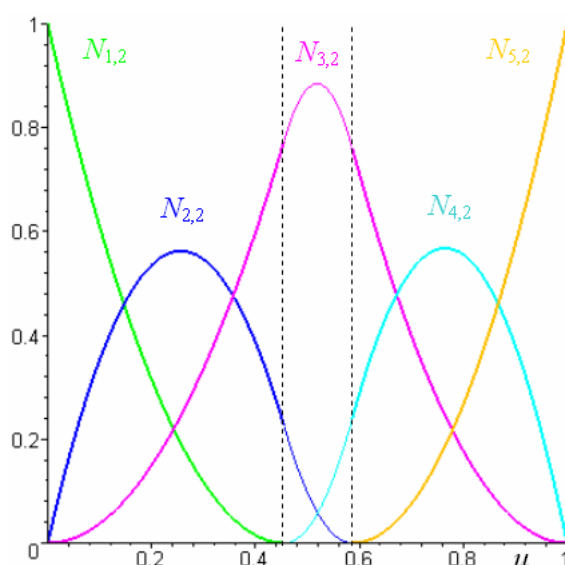
$$\begin{aligned} N_{3,2}(u) &= \frac{u - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot 2.19u + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot 0 \doteq 3.74u^2, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot (-7.66u + 4.49) + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot (7.66u - 3.49) \doteq \\ \doteq -27.14u^2 + 28.15u - 6.42, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot (-2.42u + 2.42) \doteq 4.44u^2 - 8.89u + 4.44, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{4,2}(u) &= \frac{u - u_4}{u_6 - u_4} N_{4,1}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) = \\ &= \begin{cases} \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot (7.66u - 3.49) + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 \doteq \\ \doteq 14.08u^2 - 12.83u + 2.92, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot (-2.42u + 2.42) + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot (2.42u - 1.42) \doteq \\ \doteq -10.29u^2 + 15.74u - 5.45, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{5,2}(u) &= \frac{u - u_5}{u_7 - u_5} N_{5,1}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_6} N_{6,1}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.59), \\ \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot (2.42u - 1.42) + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 \doteq 5.85u^2 - 6.86u + 2.01 & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$N_{6,2}(u) = \frac{u - u_6}{u_8 - u_6} N_{6,1}(u) + \frac{u_9 - u}{u_9 - u_7} N_{7,1}(u) = \frac{u - 1}{1 - 1} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, \quad u \in [0, 1].$$

Průběh nenulových B-spline bázových funkcí 2. stupně je patrný z obr. A.3.



Obr. A.3: B-spline bázové funkce 2. stupně

B-spline bázové funkce 3. stupně

Dosadíme-li $p = 3$ do (2.1), obdržíme vztah pro určení B-spline bázových funkcí 3. stupně:

$$N_{i,3}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+3} - u_i} N_{i,2}(u) + \frac{u_{i+4} - u}{u_{i+4} - u_{i+1}} N_{i+1,2}(u).$$

B-spline bázové funkce 3. stupně mají následující vyjádření:

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(u) &= \frac{u - u_0}{u_3 - u_0} N_{0,2}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_1} N_{1,2}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot (4.81u^2 - 4.39u + 1.00) \doteq \\ \doteq -10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0 - 0} \cdot 0 + \frac{0.46 - u}{0.46 - 0} \cdot 0 = 0, & u \in [0.46, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{1,3}(u) &= \frac{u - u_1}{u_4 - u_1} N_{1,2}(u) + \frac{u_5 - u}{u_5 - u_2} N_{2,2}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot (4.81u^2 - 4.39u + 1.00) + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot (-8.55u^2 + 4.39u) \doteq \\ \doteq 25.15u^3 - 25.66u^2 + 6.58u, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot (13.06u^2 - 15.32u + 4.49) \doteq \\ \doteq -22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{0.46 - 0} \cdot 0 + \frac{0.59 - u}{0.59 - 0} \cdot 0 = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

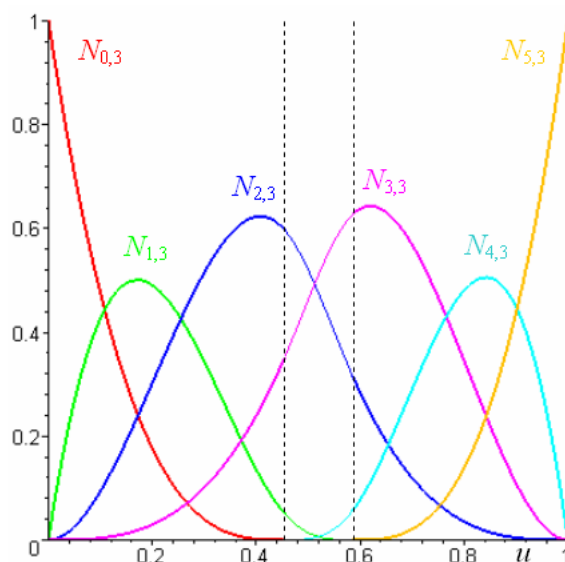
$$\begin{aligned}
N_{2,3}(u) &= \frac{u - u_2}{u_5 - u_2} N_{2,2}(u) + \frac{u_6 - u}{u_6 - u_3} N_{3,2}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot (-8.55u^2 + 4.39u) + \frac{1 - u}{1 - 0} \cdot 3.74u^2 \doteq -18.33u^3 + 11.22u^2, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot (13.06u^2 - 15.32u + 4.49) + \frac{1 - u}{1 - 0} \cdot (-27.14u^2 + 28.15u - 6.42) \doteq \\ \doteq 49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{0.59 - 0} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0} \cdot (4.44u^2 - 8.89u + 4.44) \doteq \\ \doteq -4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{3,3}(u) &= \frac{u - u_3}{u_6 - u_3} N_{3,2}(u) + \frac{u_7 - u}{u_7 - u_4} N_{4,2}(u) = \\
&= \begin{cases} \frac{u - 0}{1 - 0} \cdot 3.74u^2 + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot 0 \doteq 3.74u^3, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0}{1 - 0} \cdot (-27.14u^2 + 28.15u - 6.42) + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot (14.08u^2 - 12.83u + 2.92) \doteq \\ \doteq -53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0}{1 - 0} \cdot (4.44u^2 - 8.89u + 4.44) + \frac{1 - u}{1 - 0.46} \cdot (-10.29u^2 + 15.74u - 5.45) \doteq \\ \doteq 23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{4,3}(u) &= \frac{u - u_4}{u_7 - u_4} N_{4,2}(u) + \frac{u_8 - u}{u_8 - u_5} N_{5,2}(u) = \\
 &= \begin{cases} \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot (14.08u^2 - 12.83u + 2.92) + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot 0 \doteq \\ \doteq 25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{u - 0.46}{1 - 0.46} \cdot (-10.29u^2 + 15.74u - 5.45) + \frac{1 - u}{1 - 0.59} \cdot (5.85u^2 - 6.86u + 2.01) \doteq \\ \doteq -33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{5,3}(u) &= \frac{u - u_5}{u_8 - u_5} N_{5,2}(u) + \frac{u_9 - u}{u_9 - u_6} N_{6,2}(u) = \\
 &= \begin{cases} \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot 0 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 = 0, & u \in [0, 0.59), \\ \frac{u - 0.59}{1 - 0.59} \cdot 5.85u^2 - 6.86u + 2.01 + \frac{1 - u}{1 - 1} \cdot 0 \doteq \\ \doteq 14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Průběh B-spline bazových funkcí 3. stupně je patrný z obr. A.4.



Obr. A.4: B-spline bazové funkce 3. stupně

A.2.2 Analytická reprezentace aproximační B-spline křivky

Dle (2.2) je vektorová rovnice B-spline křivky 3. stupně

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u) &= \sum_{i=0}^5 N_{i,3}(u)\mathbf{P}_i = \\ &= N_{0,3}(u)\mathbf{P}_0 + N_{1,3}(u)\mathbf{P}_1 + N_{2,3}(u)\mathbf{P}_2 + N_{3,3}(u)\mathbf{P}_3 + N_{4,3}(u)\mathbf{P}_4 + N_{5,3}(u)\mathbf{P}_5.\end{aligned}$$

Na jednotlivých aktivních uzlových roztečích je rovnice aproximační B-spline křivky následující:

- $u \in [0, 0.46)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u) &= (-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot (0, 0) + \\ &\quad + (25.14u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot (1, 3) + (-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot (2, 2) + \\ &\quad + 3.74u^3 \cdot (5, 4) + 0 \cdot (6, 2) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &= (7.19u^3 - 3.21u^2 + 6.58u, 53.74u^3 - 54.54u^2 + 19.74u),\end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + (-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot (1, 3) + \\ &\quad + (49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot (2, 2) + \\ &\quad + (-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot (5, 4) + \\ &\quad + (25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot (6, 2) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &= (-33.27u^3 + 52.13u^2 - 18.64u + 3.83, -128.30u^3 + 194.40u^2 - 93.73u + 17.24),\end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

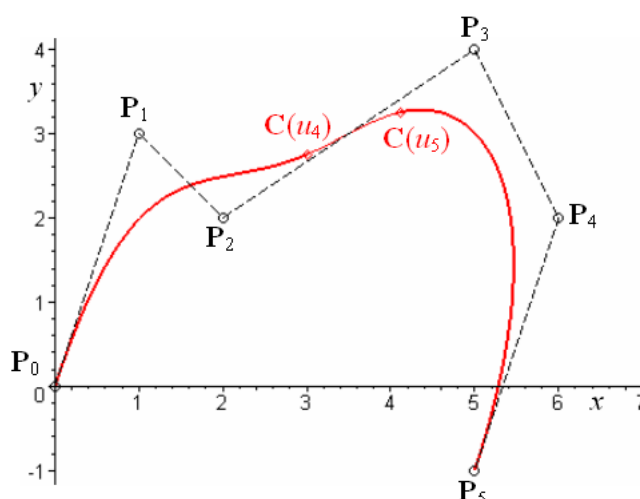
$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (1, 3) + (-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot (2, 2) + \\ &\quad + (23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot (5, 4) + \\ &\quad + (-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot (6, 2) + \\ &\quad + (14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot (5, -1) = \\ &= (-19.71u^3 + 28.26u^2 - 4.65u + 1.10, 4.30u^3 - 38.86u^2 + 43.05u - 9.49).\end{aligned}$$

Pro přehlednost uvedeme i parametrické rovnice aproximační B-spline křivky:

$$x(u) = \begin{cases} 7.19u^3 - 3.21u^2 + 6.58u, & u \in [0, 0.46), \\ -33.27u^3 + 52.13u^2 - 18.64u + 3.83, & u \in [0.46, 0.59), \\ -19.71u^3 + 28.26u^2 - 4.65u + 1.10, & u \in [0.59, 1]. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$y(u) = \begin{cases} 53.74u^3 - 54.54u^2 + 19.74u, & u \in [0, 0.46), \\ -128.30u^3 + 194.40u^2 - 93.73u + 17.24, & u \in [0.46, 0.59), \\ 4.30u^3 - 38.86u^2 + 43.05u - 9.49, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Graf B-spline křivky je nakreslen na obr. A.5. Segmenty křivky odpovídající aktivním uzlovým roztečím jsou odlišeny tloušťkou čáry, body křivky $\mathbf{C}(u_4)$ a $\mathbf{C}(u_5)$, ve kterých dochází k napojení segmentů, jsou vyznačeny symbolem \diamond .



Obr. A.5: B-spline křivka 3. stupně

A.3 Aproximační NURBS křivka

Bázové funkce NURBS křivky jsou racionální, proto je třeba nejprve určit váhy řídicích bodů – v našem případě těžišťovou metodou.

A.3.1 Těžišťové váhy řídicích bodů aproximační NURBS křivky

Dílčí řídicí polygony pro výpočet těžišťových vah řídicích bodů jsou tvořeny vždy čtyřmi řídicími body. Jejich těžiště určíme dle (3.1):

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_j = \frac{1}{4} (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) = \frac{1}{4} [(0, 0) + (1, 3) + (2, 2) + (5, 4)] = (2.00, 2.25),$$

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \mathbf{P}_j = \frac{1}{4} (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4) = \frac{1}{4} [(1, 3) + (2, 2) + (5, 4) + (6, 2)] = (3.50, 2.75),$$

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=2}^5 \mathbf{P}_j = \frac{1}{4} (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_5) = \frac{1}{4} [(2, 2) + (5, 4) + (6, 2) + (5, -1)] = (4.50, 1.75).$$

Těžišťové váhy jsou dány (3.2):

$$w_0 = |\mathbf{P}_0 \mathbf{T}_0| = \sqrt{(2.00 - 0)^2 + (2.25 - 0)^2} \doteq 3.01,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 |\mathbf{P}_1 \mathbf{T}_j| = \frac{1}{2} (|\mathbf{P}_1 \mathbf{T}_0| + |\mathbf{P}_1 \mathbf{T}_1|) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(2.00 - 1)^2 + (2.25 - 3)^2} + \sqrt{(3.50 - 1)^2 + (2.75 - 3)^2} \right] \doteq 1.88, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 |\mathbf{P}_2 \mathbf{T}_j| = \frac{1}{3} (|\mathbf{P}_2 \mathbf{T}_0| + |\mathbf{P}_2 \mathbf{T}_1| + |\mathbf{P}_2 \mathbf{T}_2|) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\sqrt{(2.00 - 2)^2 + (2.25 - 2)^2} + \sqrt{(3.50 - 2)^2 + (2.75 - 2)^2} + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{(4.50 - 2)^2 + (1.75 - 2)^2} \right] \doteq 1.48, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 &= \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 |\mathbf{P}_3 \mathbf{T}_j| = \frac{1}{3} (|\mathbf{P}_3 \mathbf{T}_0| + |\mathbf{P}_3 \mathbf{T}_1| + |\mathbf{P}_3 \mathbf{T}_2|) = \\
&= \frac{1}{3} \left[\sqrt{(2.00 - 5)^2 + (2.25 - 4)^2} + \sqrt{(3.50 - 5)^2 + (2.75 - 4)^2} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{(4.50 - 5)^2 + (1.75 - 4)^2} \right] \doteq 2.58, \\
w_4 &= \frac{1}{2} \sum_1^2 |\mathbf{P}_4 \mathbf{T}_j| = \frac{1}{2} (|\mathbf{P}_4 \mathbf{T}_1| + |\mathbf{P}_4 \mathbf{T}_2|) = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(3.50 - 6)^2 + (2.75 - 2)^2} + \sqrt{(4.50 - 6)^2 + (1.75 - 2)^2} \right] \doteq 2.07, \\
w_5 &= |\mathbf{P}_5 \mathbf{T}_2| = \sqrt{(4.50 - 5)^2 + (1.75 + 1)^2} \doteq 2.80.
\end{aligned}$$

Váhy řídicích bodů aproximační NURBS křivky tedy jsou následující:

$$W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (3.01, 1.88, 1.48, 2.58, 2.07, 2.80). \quad (\text{A.3})$$

A.3.2 Racionální bázové funkce aproximační NURBS křivky

Dosadíme-li do (2.3) $p = 3$, obdržíme vztah pro určení racionálních bázových funkcí 3. stupně:

$$R_{i,3}(u) = \frac{N_{i,3}(u)w_i}{\sum_{j=0}^5 N_{j,3}(u)w_j} = \frac{N_{i,3}(u)w_i}{N}. \quad (\text{A.4})$$

Pro jednodušší zápis označíme jmenovatele rovnice (A.4)

$$N = N_{0,3}(u)w_0 + N_{1,3}(u)w_1 + N_{2,3}(u)w_2 + N_{3,3}(u)w_3 + N_{4,3}(u)w_4 + N_{5,3}(u)w_5$$

a vyjádříme jeho tvar na jednotlivých aktivních uzlových roztečích:

- $u \in [0, 0.46)$:

$$\begin{aligned}
N &= (-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot 3.01 + (25.15u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot 1.88 + \\
&\quad + (-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot 1.48 + 3.74u^3 \cdot 2.58 + 0 \cdot 2.07 + 0 \cdot 2.80 \doteq \\
&\doteq -1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01,
\end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$:

$$\begin{aligned}
N &= 0 \cdot 3.01 + (-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot 1.88 + \\
&\quad + (49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot 1.48 + \\
&\quad + (-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot 2.58 + \\
&\quad + (25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot 2.07 + 0 \cdot 2.80 \doteq \\
&\doteq -51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74,
\end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

$$\begin{aligned}
N &= 0 \cdot 3.01 + 0 \cdot 1.88 + (-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot 1.48 + \\
&\quad + (23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot 2.58 + \\
&\quad + (-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot 2.07 + \\
&\quad + (14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot 2.80 \doteq \\
&\doteq 24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74.
\end{aligned}$$

Nyní vyjádříme racionální bázové funkce 3. stupně dle (A.4):

$$R_{0,3}(u) = \frac{N_{0,3}(u)w_0}{N} = \begin{cases} \frac{(-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot 3.01}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \doteq \\ \doteq \frac{-31.78u^3 + 43.46u^2 - 19.81u + 3.01}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{0 \cdot 3.01}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} = 0, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{0 \cdot 3.01}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$R_{1,3}(u) = \frac{N_{1,3}(u)w_1}{N} = \begin{cases} \frac{(25.15u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot 1.88}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \doteq \\ \doteq \frac{47.30u^3 - 48.28u^2 + 12.38u}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot 1.88}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{-41.91u^3 + 73.73u^2 - 43.23u + 8.45}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{0 \cdot 1.88}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

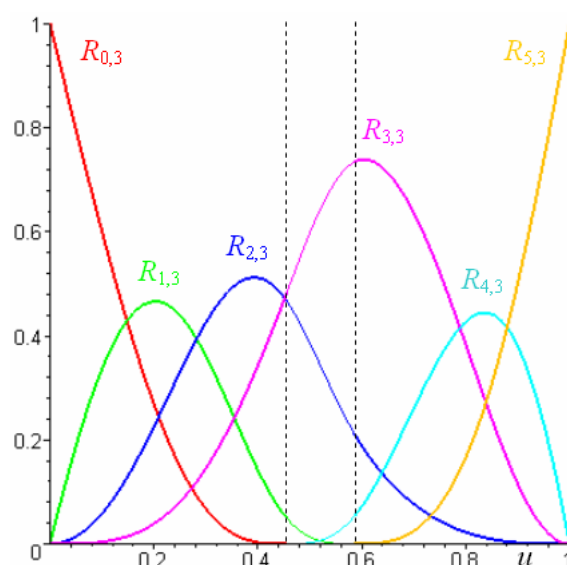
$$R_{2,3}(u) = \frac{N_{2,3}(u)w_2}{N} = \begin{cases} \frac{(-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot 1.48}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \doteq \\ \doteq \frac{-27.12u^3 + 16.61u^2}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot 1.48}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{73.13u^3 - 120.49u^2 + 62.49u - 9.50}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot 1.48}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{-6.57u^3 + 19.72u^2 - 19.72u + 6.57}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$R_{3,3}(u) = \frac{N_{3,3}(u)w_3}{N} = \begin{cases} \frac{3.74u^3 \cdot 2.58}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \doteq \\ \doteq \frac{9.64u^3}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot 2.58}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{-136.60u^3 + 199.98u^2 - 91.16u + 13.85}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot 2.58}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{60.17u^3 - 146.16u^2 + 111.81u - 25.82}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$R_{4,3}(u) = \frac{N_{4,3}(u)w_4}{N} = \begin{cases} \frac{0 \cdot 2.07}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot 2.07}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{53.43u^3 - 73.06u^2 + 33.31u - 5.06}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot 2.07}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{-68.24u^3 + 140.96u^2 - 92.20u + 19.47}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$R_{5,3}(u) = \frac{N_{5,3}(u)w_5}{N} = \begin{cases} \frac{0 \cdot 2.80}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{0 \cdot 2.80}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} = 0, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot 2.80}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} \doteq \\ \doteq \frac{39.50u^3 - 69.49u^2 + 40.75u - 7.96}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Průběh racionálních bázových funkcí 3. stupně je nakreslen na obr. A.6.



Obr. A.6: Racionální bázové funkce 3. stupně

A.3.3 Analytická reprezentace aproximační NURBS křivky

Dle (2.4) je vektorová rovnice NURBS křivky 3. stupně

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^5 R_{i,3}(u)\mathbf{P}_i = R_{0,3}(u)\mathbf{P}_0 + R_{1,3}(u)\mathbf{P}_1 + R_{2,3}(u)\mathbf{P}_2 + R_{3,3}(u)\mathbf{P}_3 + R_{4,3}(u)\mathbf{P}_4 + R_{5,3}(u)\mathbf{P}_5.$$

Na jednotlivých aktivních uzlových roztečích má následující tvar:

- $u \in [0, 0.46)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \cdot \\ &\cdot [(-31.78u^3 + 43.46u^2 - 19.81u + 3.01) \cdot (0, 0) + \\ &+ (47.30u^3 - 48.28u^2 + 12.38u) \cdot (3, 1) + \\ &+ (-27.12u^3 + 16.61u^2) \cdot (2, 2) + 9.64u^3 \cdot (5, 4) + 0 \cdot (6, 2) + 0 \cdot (5, -1)] = \\ &= \left(\frac{41.26u^3 - 15.06u^2 + 12.38u}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, \frac{126.23u^3 - 111.61u^2 + 37.14u}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01} \right), \end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} [0 \cdot (0, 0) + \\ &+ (-41.91u^3 + 73.73u^2 - 43.23u + 8.45) \cdot (3, 1) + \\ &+ (73.13u^3 - 120.49u^2 + 62.49u - 9.50) \cdot (2, 2) + \\ &+ (-136.60u^3 + 199.98u^2 - 91.16u + 13.85) \cdot (5, 4) + \\ &+ (53.43u^3 - 73.06u^2 + 33.31u - 5.06) \cdot (6, 2) + 0 \cdot (5, -1)] = \\ &= \left(\frac{-258.06u^3 + 394.26u^2 - 174.20u + 28.35}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-418.99u^3 + 633.99u^2 - 302.73u + 51.64}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74} \right), \end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} [0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (3, 1) + \\ &+ (-6.57u^3 + 19.72u^2 - 19.72u + 6.57) \cdot (2, 2) + \\ &+ (60.17u^3 - 146.16u^2 + 111.81u - 25.82) \cdot (5, 4) + \\ &+ (-68.24u^3 + 140.96u^2 - 92.20u + 19.47) \cdot (6, 2) + \\ &+ (39.50u^3 - 69.49u^2 + 40.75u - 7.96) \cdot (5, -1)] = \\ &= \left(\frac{75.77u^3 - 192.99u^2 + 170.15u - 38.96}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, \right. \\ &\quad \left. \frac{51.55u^3 - 193.77u^2 + 182.65u - 43.23}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74} \right). \end{aligned}$$

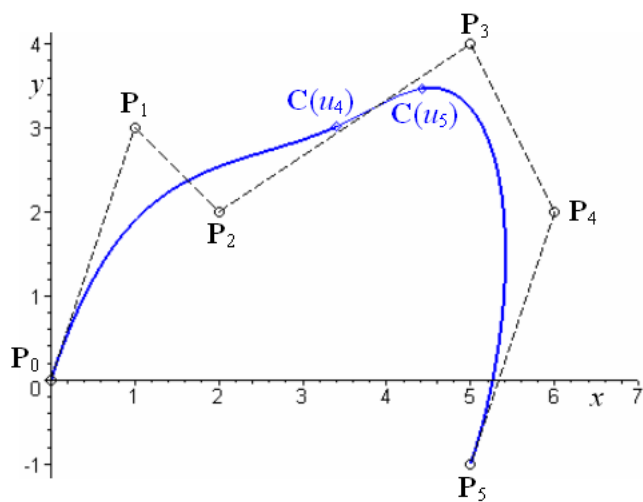
Parametrické rovnice aproximační NURBS křivky jsou následující:

$$x(u) = \begin{cases} \frac{41.26u^3 - 15.06u^2 + 12.38u}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{-258.06u^3 + 394.26u^2 - 174.20u + 28.35}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{75.77u^3 - 192.99u^2 + 170.15u - 38.96}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

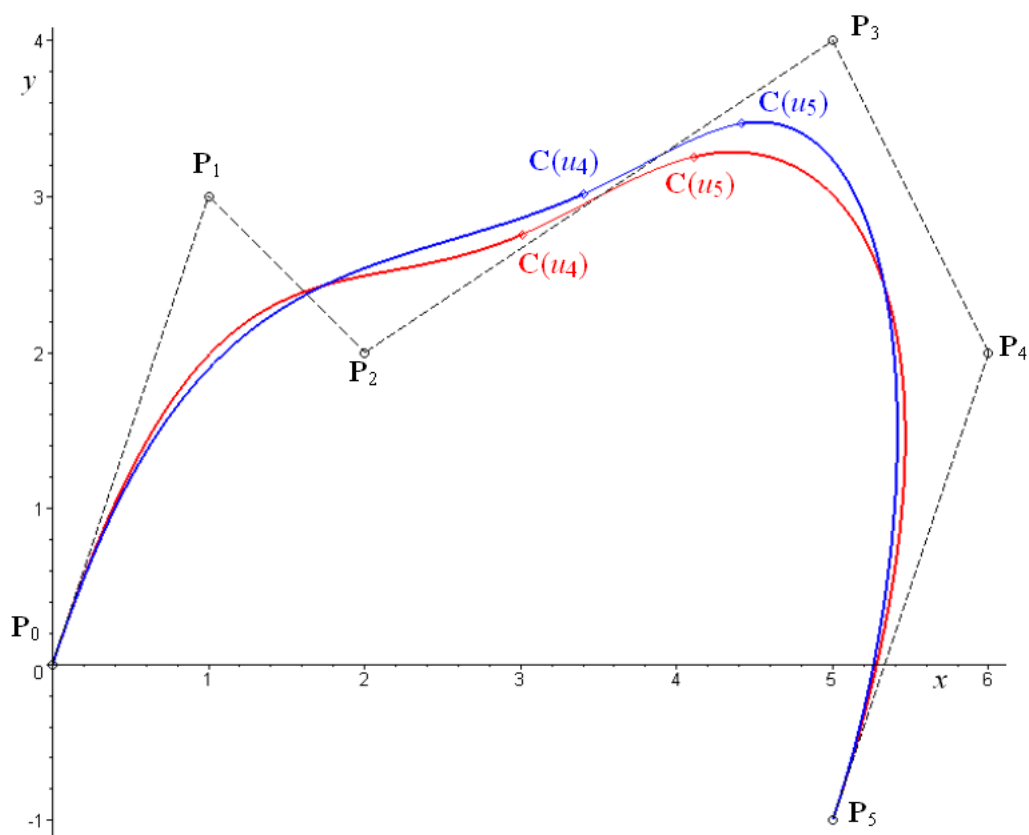
$$y(u) = \begin{cases} \frac{126.23u^3 - 111.61u^2 + 37.14u}{-1.96u^3 + 11.80u^2 - 7.43u + 3.01}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{-418.99u^3 + 633.99u^2 - 302.73u + 51.64}{-51.95u^3 + 80.15u^2 - 38.59u + 7.74}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{51.55u^3 - 193.77u^2 + 182.65u - 43.23}{24.86u^3 - 54.96u^2 + 40.63u - 7.74}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Graf aproximační NURBS křivky 3. stupně je zobrazen na obr. A.7. Jednotlivé segmenty křivky odpovídající aktivním uzlovým roztečím jsou odlišeny tloušťkou čáry, body křivky $\mathbf{C}(u_4)$ a $\mathbf{C}(u_5)$, ve kterých dochází k napojení segmentů, jsou vyznačeny symbolem \diamond .

Porovnat tvary aproximačních křivek můžeme na obr. A.8, kde je červenou barvou nakreslena aproximační B-spline křivka s parametrickými rovnicemi (A.2) a modrou barvou je nakreslena aproximační NURBS křivka s parametrickými rovnicemi (A.5). Obrázek je nakreslen ve větším měřítku, aby byly rozdíly mezi křivkami dobře patrné.



Obr. A.7: Aproximační NURBS křivka 3. stupně



Obr. A.8: Aproximační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka 3. stupně

Příloha B

Konstrukce interpolační NURBS křivky

V této příloze uvedeme detailní postup konstrukce prosté interpolační B-spline a NURBS křivky 3. stupně a uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně zadané posloupností definičních bodů $\mathbf{Q}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{Q}_1 = (1, 3)$, $\mathbf{Q}_2 = (2, 2)$, $\mathbf{Q}_3 = (5, 4)$, $\mathbf{Q}_4 = (6, 2)$ a $\mathbf{Q}_5 = (5, -1)$ (stejná jako posloupnost řídicích bodů v příloze A). Tvarovací nástroje zvolíme následovně:

Prostá interpolační B-spline a NURBS křivka. Váhy řídicích bodů NURBS křivky určíme těžišťovou metodou. Vektor parametrizace na intervalu $u \in [0, 1]$ budeme uvažovat v obou případech dostředivý, uzlový vektor na stejném intervalu těžišťový.

Uzlová interpolační B-spline křivka. Vektor parametrizace na intervalu $u \in [0, 1]$ budeme uvažovat opět dostředivý, tečné vektory v krajních bodech definičního polygonu určíme metodou osově souměrných těžnic.

Poznámka: Výpočty byly prováděny s přesností na 16 platných číslic, všechny zde uvedené vypočtené číselné údaje jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

B.1 Vektor parametrizace interpolační NURBS křivky

Hodnoty h_i , $i = 0, \dots, 5$, dostředivého vektoru parametrizace, který bude stejný pro prostou i uzlovou interpolační křivku, stanovíme dle (5.29). Označme

$$l_i = \sqrt{|\mathbf{Q}_{i-1}\mathbf{Q}_i|}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

odmocninu z délky i -tého ramene $\mathbf{Q}_{i-1}\mathbf{Q}_i$ definičního polygonu a vypočteme l_i , $i = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} \doteq 1.78, \\ l_2 &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2} \doteq 1.19, \\ l_3 &= \sqrt{(5-2)^2 + (4-2)^2} \doteq 1.90, \\ l_4 &= \sqrt{(6-5)^2 + (2-4)^2} \doteq 1.50, \\ l_5 &= \sqrt{(5-6)^2 + (-1-2)^2} \doteq 1.78. \end{aligned}$$

Označme dále

$$L = \sum_{i=1}^5 l_i$$

součet všech odmocnin z délek ramen definičního polygonu a vypočteme jej

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = 1.78 + 1.19 + 1.90 + 1.50 + 1.78 = 8.14.$$

Nyní můžeme určit hodnoty parametru h_i , $i = 0, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0, \\ h_1 &= \frac{l_1}{L} = \frac{1.78}{8.14} \doteq 0.22, \\ h_2 &= \frac{l_1 + l_2}{L} = \frac{1.78 + 1.19}{8.14} \doteq 0.36, \\ h_3 &= \frac{l_1 + l_2 + l_3}{L} = \frac{1.78 + 1.19 + 1.90}{8.14} \doteq 0.60, \\ h_4 &= \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{L} = \frac{1.78 + 1.19 + 1.90 + 1.50}{8.14} \doteq 0.78, \\ h_5 &= 1. \end{aligned}$$

Dostředivý vektor parametrizace H interpolační NURBS křivky má tvar:

$$H = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (0, 0.22, 0.36, 0.60, 0.78, 1). \quad (\text{B.1})$$

B.2 Prostá interpolační B-spline křivka

Vzhledem k tomu, že je definiční polygon $(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^5$ stejný jako řídicí polygon $(\mathbf{P}_i)_{i=0}^5$ v příloze A, bude těžištvý uzlový vektor prosté interpolační křivky shodný s těžištvým uzlovým vektorem aproximační křivky dle (A.1) a B-spline báze funkce prosté interpolační křivky budou shodné s B-spline báze funkcemi aproximační křivky, jejichž vyjádření je uvedeno v sekci A.2.1.

B.2.1 Řídicí body prosté interpolační B-spline křivky

Prvky matice soustavy rovnic pro výpočet souřadnic řídicích bodů prosté interpolační B-spline křivky

$$\begin{pmatrix} N_{0,3}(h_0) & N_{1,3}(h_0) & N_{2,3}(h_0) & N_{3,3}(h_0) & N_{4,3}(h_0) & N_{5,3}(h_0) \\ N_{0,3}(h_1) & N_{1,3}(h_1) & N_{2,3}(h_1) & N_{3,3}(h_1) & N_{4,3}(h_1) & N_{5,3}(h_1) \\ N_{0,3}(h_2) & N_{1,3}(h_2) & N_{2,3}(h_2) & N_{3,3}(h_2) & N_{4,3}(h_2) & N_{5,3}(h_2) \\ N_{0,3}(h_3) & N_{1,3}(h_3) & N_{2,3}(h_3) & N_{3,3}(h_3) & N_{4,3}(h_3) & N_{5,3}(h_3) \\ N_{0,3}(h_4) & N_{1,3}(h_4) & N_{2,3}(h_4) & N_{3,3}(h_4) & N_{4,3}(h_4) & N_{5,3}(h_4) \\ N_{0,3}(h_5) & N_{1,3}(h_5) & N_{2,3}(h_5) & N_{3,3}(h_5) & N_{4,3}(h_5) & N_{5,3}(h_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \end{pmatrix}$$

tvoří funkční hodnoty B-spline báze funkcí 3. stupně $N_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, 5$, pro jednotlivé hodnoty h_i , $i = 0, \dots, 5$, z vektoru parametrizace:

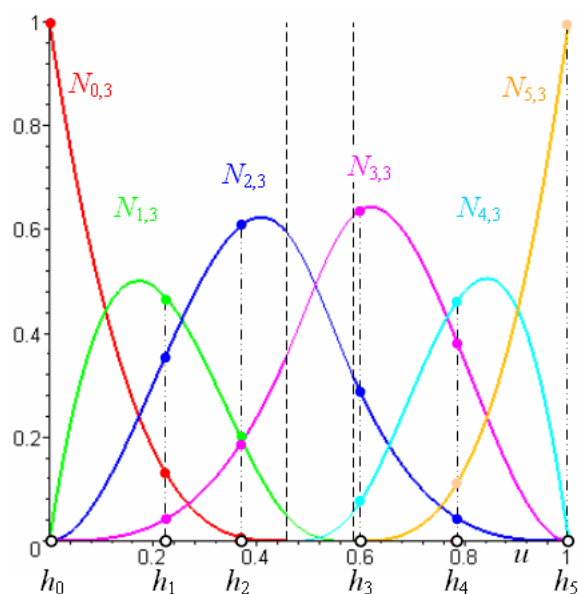
$$\begin{aligned} N_{0,3}(h_0) &= -10.56 \cdot 0 + 14.44 \cdot 0 - 6.58 \cdot 0 + 1.00 = 1.00, \\ N_{1,3}(h_0) &= 25.15 \cdot 0 - 25.66 \cdot 0 + 6.58 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{2,3}(h_0) &= -18.33 \cdot 0 + 11.22 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{3,3}(h_0) &= 3.74 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{4,3}(h_0) &= 0, \\ N_{5,3}(h_0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(h_1) &= -10.56 \cdot 0.22^3 + 14.44 \cdot 0.22^2 - 6.58 \cdot 0.22 + 1.00 \doteq 0.14, \\
N_{1,3}(h_1) &= 25.15 \cdot 0.22^3 - 25.66 \cdot 0.22^2 + 6.58 \cdot 0.22 \doteq 0.48, \\
N_{2,3}(h_1) &= -18.33 \cdot 0.22^3 + 11.22 \cdot 0.22^2 \doteq 0.34, \\
N_{3,3}(h_1) &= 3.74 \cdot 0.22^3 \doteq 0.04, \\
N_{4,3}(h_1) &= 0, \\
N_{5,3}(h_1) &= 0, \\
N_{0,3}(h_2) &= -10.56 \cdot 0.36^3 + 14.44 \cdot 0.36^2 - 6.58 \cdot 0.36 + 1.00 \doteq 0.01, \\
N_{1,3}(h_2) &= 25.15 \cdot 0.36^3 - 25.66 \cdot 0.36^2 + 6.58 \cdot 0.36 \doteq 0.21, \\
N_{2,3}(h_2) &= -18.33 \cdot 0.36^3 + 11.22 \cdot 0.36^2 \doteq 0.60, \\
N_{3,3}(h_2) &= 3.74 \cdot 0.36^3 \doteq 0.18, \\
N_{4,3}(h_2) &= 0, \\
N_{5,3}(h_2) &= 0, \\
N_{0,3}(h_3) &= 0, \\
N_{1,3}(h_3) &= 0, \\
N_{2,3}(h_3) &= -4.44 \cdot 0.60^3 + 13.33 \cdot 0.60^2 - 13.33 \cdot 0.60 + 4.44 \doteq 0.29, \\
N_{3,3}(h_3) &= 23.35 \cdot 0.60^3 - 56.72 \cdot 0.60^2 + 43.39 \cdot 0.60 - 10.02 \doteq 0.64, \\
N_{4,3}(h_3) &= -33.04 \cdot 0.60^3 + 68.25 \cdot 0.60^2 - 44.64 \cdot 0.60 + 9.43 \doteq 0.07, \\
N_{5,3}(h_3) &= 14.13 \cdot 0.60^3 - 24.86 \cdot 0.60^2 + 14.58 \cdot 0.60 - 2.85 \doteq 0.00, \\
N_{0,3}(h_4) &= 0, \\
N_{1,3}(h_4) &= 0, \\
N_{2,3}(h_4) &= -4.44 \cdot 0.78^3 + 13.33 \cdot 0.78^2 - 13.33 \cdot 0.78 + 4.44 \doteq 0.05, \\
N_{3,3}(h_4) &= 23.35 \cdot 0.78^3 - 56.72 \cdot 0.78^2 + 43.39 \cdot 0.78 - 10.02 \doteq 0.39, \\
N_{4,3}(h_4) &= -33.04 \cdot 0.78^3 + 68.25 \cdot 0.78^2 - 44.64 \cdot 0.78 + 9.43 \doteq 0.46, \\
N_{5,3}(h_4) &= 14.13 \cdot 0.78^3 - 24.86 \cdot 0.78^2 + 14.58 \cdot 0.78 - 2.85 \doteq 0.10, \\
N_{0,3}(h_5) &= 0, \\
N_{1,3}(h_5) &= 0, \\
N_{2,3}(h_5) &= -4.44 \cdot 1 + 13.33 \cdot 1 - 13.33 \cdot 1 + 4.44 = 0.00, \\
N_{3,3}(h_5) &= 23.35 \cdot 1 - 56.72 \cdot 1 + 43.39 \cdot 1 - 10.02 = 0.00, \\
N_{4,3}(h_5) &= -33.04 \cdot 1 + 68.25 \cdot 1 - 44.64 \cdot 1 + 9.42 = 0.00, \\
N_{5,3}(h_5) &= 14.13 \cdot 1 - 24.86 \cdot 1 + 14.58 \cdot 1 - 2.85 = 1.00.
\end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty jsou označeny symbolem \bullet v barvě příslušné funkce na obr. B.1, kde jsou zobrazeny grafy B-spline bazových funkcí 3. stupně pro prostou interpolační B-spline křivku.

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.14 & 0.48 & 0.34 & 0.04 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.21 & 0.60 & 0.18 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.29 & 0.64 & 0.07 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.05 & 0.39 & 0.46 & 0.10 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (1, 3) \\ (2, 2) \\ (5, 4) \\ (6, 2) \\ (5, -1) \end{pmatrix}$$



Obr. B.1: B-spline bázové funkce 3. stupně prosté interpolační B-spline křivky

jsou následující řídicí body prosté interpolační B-spline křivky:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_0 &= (0.00, 0.00), \\
 \mathbf{P}_1 &\doteq (0.81, 6.44), \\
 \mathbf{P}_2 &\doteq (1.04, -0.95), \\
 \mathbf{P}_3 &\doteq (6.66, 6.85), \\
 \mathbf{P}_4 &\doteq (6.16, -1.19), \\
 \mathbf{P}_5 &= (5.00, -1.00).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2.2 Analytická reprezentace prosté interpolační B-spline křivky

Vektorová rovnice prosté interpolační B-spline křivky 3. stupně

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^5 N_{i,3}(u) \mathbf{P}_i = N_{0,3}(u) \mathbf{P}_0 + N_{1,3}(u) \mathbf{P}_1 + N_{2,3}(u) \mathbf{P}_2 + N_{3,3}(u) \mathbf{P}_3 + N_{4,3}(u) \mathbf{P}_4 + N_{5,3}(u) \mathbf{P}_5$$

je na jednotlivých aktivních uzlových roztečích následující:

- $u \in [0, 0.46)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(u) &= (-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot (0.00, 0.00) + \\
 &\quad (25.14u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot (0.81, 6.44) + \\
 &\quad + (-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot (1.04, -0.95) + 3.74u^3 \cdot (6.66, 6.85) + \\
 &\quad + 0 \cdot (6.16, -1.19) + 0 \cdot (5.00, -1.00) = \\
 &= (26.22u^3 - 9.07u^2 + 5.31u, 205.10u^3 - 176.02u^2 + 42.40u),
 \end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0.00, 0.00) + (-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot (0.81, 6.44) + \\ &\quad + (49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot (1.04, -0.95) + \\ &\quad + (-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot (6.66, 6.85) + \\ &\quad + (25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot (6.16, -1.19) + 0 \cdot (5.00, -1.00) = \\ &= (-160.57u^3 + 246.37u^2 - 111.13u + 17.69, \\ &\quad -584.44u^3 + 903.68u^2 - 449.77u + 74.78), \end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0.00, 0.00) + 0 \cdot (0.81, 6.44) + (-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot (1.04, -0.95) + \\ &\quad + (23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot (6.66, 6.85) + \\ &\quad + (-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot (6.16, -1.19) + \\ &\quad + (14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot (5.00, -1.00) = \\ &= (18.02u^3 - 67.79u^2 + 73.09u - 18.31, 189.22u^3 - 457.30u^2 + 348.28u - 81.21). \end{aligned}$$

Parametrické rovnice prosté interpolační B-spline křivky jsou následující:

$$x(u) \doteq \begin{cases} 26.22u^3 - 9.07u^2 + 5.31u, & u \in [0, 0.46), \\ -160.57u^3 + 246.37u^2 - 111.13u + 17.69, & u \in [0.46, 0.59), \\ 18.02u^3 - 67.79u^2 + 73.09u - 18.31, & u \in [0.59, 1]. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$y(u) \doteq \begin{cases} 205.10u^3 - 176.02u^2 + 42.40u, & u \in [0, 0.46), \\ -584.44u^3 + 903.68u^2 - 449.77u + 74.78, & u \in [0.46, 0.59), \\ 189.22u^3 - 457.30u^2 + 348.28u - 81.21, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Graf prosté interpolační B-spline křivky s parametrickými rovnicemi (B.3), jakož i tvar jejího řídicího polygonu (B.2) je patrný z obr. B.2. Jednotlivé segmenty křivky jsou odlišeny tloušťkou čáry, body $\mathbf{C}(u_4)$ a $\mathbf{C}(u_5)$, ve kterých dochází k napojení segmentů, jsou vyznačeny symbolem \diamond .

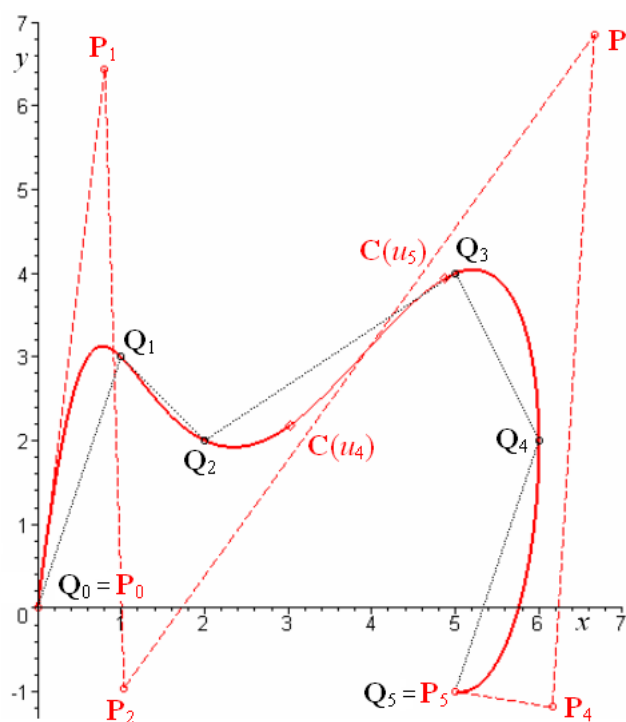
B.3 Prostá interpolační NURBS křivka

Racionální bázové funkce prosté interpolační křivky jsou odlišné od racionálních bázových funkcí aproximační křivky, neboť díky jinému principu konstrukce vah jsou váhy řídicích bodů prosté interpolační NURBS křivky odlišné od vah řídicích bodů aproximační NURBS křivky.

B.3.1 Těžiškové váhy řídicích bodů prosté interpolační NURBS křivky

Nejprve určíme těžiště definičního polygonu dle (5.20)

$$\mathbf{T} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 \mathbf{Q}_i = \frac{1}{6} [(0, 0) + (1, 3) + (2, 2) + (5, 4) + (6, 2) + (5, -1)] \doteq (3.17, 1.67).$$



Obr. B.2: Prostá interpolační B-spline křivka

Těžištové váhy dle (5.21) jsou potom:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_0 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 0)^2 + (1.67 - 0)^2} \doteq 1.89, \\
 w_1 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_1 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 1)^2 + (1.67 - 3)^2} \doteq 1.60, \\
 w_2 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_2 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 2)^2 + (1.67 - 2)^2} \doteq 1.10, \\
 w_3 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_3 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 5)^2 + (1.67 - 4)^2} \doteq 1.72, \\
 w_4 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_4 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 6)^2 + (1.67 - 2)^2} \doteq 1.69, \\
 w_5 &= \sqrt{|\mathbf{Q}_5 \mathbf{T}|} = \sqrt[4]{(3.17 - 5)^2 + (1.67 + 1)^2} \doteq 1.80,
 \end{aligned}$$

tedy

$$W = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (1.89, 1.60, 1.10, 1.72, 1.69, 1.80). \quad (\text{B.4})$$

B.3.2 Racionální bázové funkce prosté interpolační NURBS křivky

Dosadíme-li do (2.3) $p = 3$, obdržíme vztah pro určení racionálních bázových funkcí 3. stupně (A.4). Jmenovatel N rovnice (A.4) má na jednotlivých aktivních uzlových roztečích tvar:

- $u \in [0, 0.46)$

$$\begin{aligned}
 N &= (-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot 1.89 + (25.15u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot 1.60 + \\
 &\quad + (-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot 1.10 + 3.74u^3 \cdot 1.72 + 0 \cdot 1.69 + 0 \cdot 1.80 \doteq \\
 &\doteq 6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89,
 \end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \cdot 1.89 + (-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot 1.60 + \\
 &\quad + (49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot 1.10 + \\
 &\quad + (-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot 1.72 + \\
 &\quad + (25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot 1.69 + 0 \cdot 1.80 \doteq \\
 &\doteq -28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22,
 \end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

$$\begin{aligned}
 N &= 0 \cdot 1.89 + 0 \cdot 1.60 + (-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot 1.10 + \\
 &\quad + (23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot 1.72 + \\
 &\quad + (-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot 1.69 + \\
 &\quad + (14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot 1.80 \doteq \\
 &\doteq 4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57.
 \end{aligned}$$

Nyní můžeme přistoupit k vyjádření racionálních bázových funkcí prosté interpolační NURBS křivky.

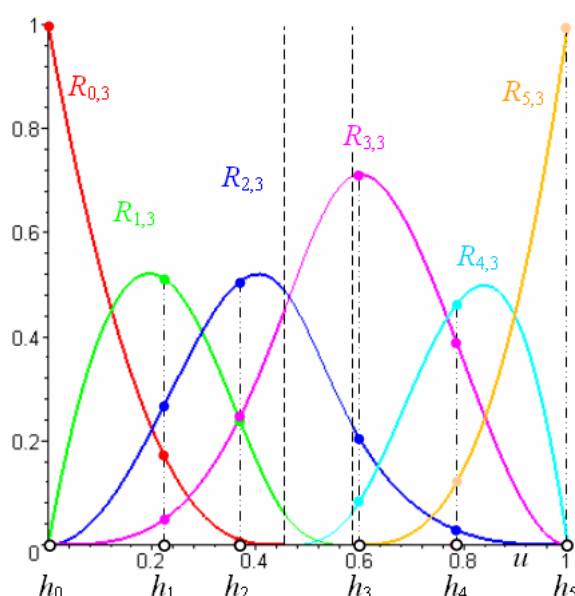
$$R_{0,3}(u) = \frac{N_{0,3}(u)w_0}{N} = \begin{cases} \frac{(-10.56u^3 + 14.44u^2 - 6.58u + 1.00) \cdot 1.89}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} \doteq \\ \doteq \frac{-19.97u^3 + 27.31u^2 - 12.45u + 1.89}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{0 \cdot 1.89}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} = 0, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{0 \cdot 1.89}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$R_{1,3}(u) = \frac{N_{1,3}(u)w_1}{N} = \begin{cases} \frac{(25.15u^3 - 25.66u^2 + 6.58u) \cdot 1.60}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} \doteq \\ \doteq \frac{40.11u^3 - 40.93u^2 + 10.50u}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(-22.28u^3 + 39.19u^2 - 22.98u + 4.49) \cdot 1.60}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} \doteq \\ \doteq \frac{-35.53u^3 + 62.51u^2 - 36.65u + 7.16}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{0 \cdot 1.60}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} = 0, & u \in [0.59, 1], \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
R_{2,3}(u) = \frac{N_{2,3}(u)w_2}{N} &= \begin{cases} \frac{(-18.33u^3 + 11.22u^2) \cdot 1.10}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} \doteq \\ \doteq \frac{-20.19u^3 + 12.36u^2}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(49.42u^3 - 81.42u^2 + 42.23u - 6.42) \cdot 1.10}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} \doteq \\ \doteq \frac{54.43u^3 - 89.69u^2 + 46.52u - 7.07}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(-4.44u^3 + 13.33u^2 - 13.33u + 4.44) \cdot 1.10}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} \doteq \\ \doteq \frac{-4.89u^3 + 14.68u^2 - 14.68u + 4.89}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \\
R_{3,3}(u) = \frac{N_{3,3}(u)w_3}{N} &= \begin{cases} \frac{3.74u^3 \cdot 1.72}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} \doteq \\ \doteq \frac{6.44u^3}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(-53.01u^3 + 77.61u^2 - 35.38u + 5.38) \cdot 1.72}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} \doteq \\ \doteq \frac{91.31u^3 - 133.69u^2 + 60.94u - 9.26}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(23.35u^3 - 56.72u^2 + 43.39u - 10.02) \cdot 1.72}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} \doteq \\ \doteq \frac{40.22u^3 - 97.71u^2 + 74.74u - 17.26}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1], \end{cases} \\
R_{4,3}(u) = \frac{N_{4,3}(u)w_4}{N} &= \begin{cases} \frac{0 \cdot 2.01}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{(25.87u^3 - 35.38u^2 + 16.13u - 2.45) \cdot 2.01}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} \doteq \\ \doteq \frac{43.69u^3 - 59.75u^2 + 27.27u - 4.14}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(-33.04u^3 + 68.25u^2 - 44.64u + 9.43) \cdot 2.01}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} \doteq \\ \doteq \frac{-55.80u^3 + 115.28u^2 - 75.40u + 15.92}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

$$R_{5,3}(u) = \frac{N_{5,3}(u)w_5}{N} = \begin{cases} \frac{0 \cdot 1.80}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} = 0, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{0 \cdot 1.80}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} = 0, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{(14.13u^3 - 24.86u^2 + 14.58u - 2.85) \cdot 1.80}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} \doteq \\ \doteq \frac{25.42u^3 - 44.72u^2 + 26.22u - 5.13}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Průběh racionálních bázových funkcí je patrný z obr. B.3.



Obr. B.3: Racionální bázové funkce 3. stupně prosté interpolační NURBS křivky

B.3.3 Řídící body prosté interpolační NURBS křivky

Sestavíme soustavu (4.7) rovnic pro výpočet řídicích bodů prosté interpolační NURBS křivky. Prvky matice soustavy jsou funkční hodnoty racionálních bázových funkcí určených v sekci B.3.2 v jednotlivých hodnotách h_i , $i = 0, \dots, 5$, z vektoru parametrizace.

$$\begin{pmatrix} R_{0,3}(h_0) & R_{1,3}(h_0) & R_{2,3}(h_0) & R_{3,3}(h_0) & R_{4,3}(h_0) & R_{5,3}(h_0) \\ R_{0,3}(h_1) & R_{1,3}(h_1) & R_{2,3}(h_1) & R_{3,3}(h_1) & R_{4,3}(h_1) & R_{5,3}(h_1) \\ R_{0,3}(h_2) & R_{1,3}(h_2) & R_{2,3}(h_2) & R_{3,3}(h_2) & R_{4,3}(h_2) & R_{5,3}(h_2) \\ R_{0,3}(h_3) & R_{1,3}(h_3) & R_{2,3}(h_3) & R_{3,3}(h_3) & R_{4,3}(h_3) & R_{5,3}(h_3) \\ R_{0,3}(h_4) & R_{1,3}(h_4) & R_{2,3}(h_4) & R_{3,3}(h_4) & R_{4,3}(h_4) & R_{5,3}(h_4) \\ R_{0,3}(h_5) & R_{1,3}(h_5) & R_{2,3}(h_5) & R_{3,3}(h_5) & R_{4,3}(h_5) & R_{5,3}(h_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme potřebné funkční hodnoty racionálních bázových funkcí $R_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, 5$ pro hodnoty parametru h_i , $i = 0, \dots, 5$, dostředivého vektoru parametrizace (na obr. B.3 jsou

znázorněny symbolem \bullet v barvě příslušné funkce).

$$R_{0,3}(h_0) = \frac{-19.97 \cdot 0 + 27.31 \cdot 0 - 12.45 \cdot 0 + 1.89}{6.39 \cdot 0 - 1.26 \cdot 0 - 1.95 \cdot 0 + 1.89} = 1.00,$$

$$R_{1,3}(h_0) = \frac{40.11 \cdot 0 - 40.93 \cdot 0 + 10.50 \cdot 0}{6.39 \cdot 0 - 1.26 \cdot 0 - 1.95 \cdot 0 + 1.89} = 0.00,$$

$$R_{2,3}(h_0) = \frac{-20.19 \cdot 0 + 12.36 \cdot 0}{6.39 \cdot 0 - 1.26 \cdot 0 - 1.95 \cdot 0 + 1.89} = 0.00,$$

$$R_{3,3}(h_0) = \frac{6.44 \cdot 0}{6.39 \cdot 0 - 1.26 \cdot 0 - 1.95 \cdot 0 + 1.89} = 0.00,$$

$$R_{4,3}(h_0) = 0,$$

$$R_{5,3}(h_0) = 0,$$

$$R_{0,3}(h_1) = \frac{-19.97 \cdot 0.22^3 + 27.31 \cdot 0.22^2 - 12.45 \cdot 0.22 + 1.89}{6.39 \cdot 0.22^3 - 1.26 \cdot 0.22^2 - 1.95 \cdot 0.22 + 1.89} \doteq 0.18,$$

$$R_{1,3}(h_1) = \frac{40.11 \cdot 0.22^3 - 40.93 \cdot 0.22^2 + 10.50 \cdot 0.22}{6.39 \cdot 0.22^3 - 1.26 \cdot 0.22^2 - 1.95 \cdot 0.22 + 1.89} \doteq 0.51,$$

$$R_{2,3}(h_1) = \frac{-20.19 \cdot 0.22^3 + 12.36 \cdot 0.22^2}{6.39 \cdot 0.22^3 - 1.26 \cdot 0.22^2 - 1.95 \cdot 0.22 + 1.89} \doteq 0.26,$$

$$R_{3,3}(h_1) = \frac{6.44 \cdot 0.22^3}{6.39 \cdot 0.22^3 - 1.26 \cdot 0.22^2 - 1.95 \cdot 0.22 + 1.89} \doteq 0.05,$$

$$R_{4,3}(h_1) = 0$$

$$R_{5,3}(h_1) = 0$$

$$R_{0,3}(h_2) = \frac{-19.97 \cdot 0.36^3 + 27.31 \cdot 0.36^2 - 12.45 \cdot 0.36 + 1.89}{6.39 \cdot 0.36^3 - 1.26 \cdot 0.36^2 - 1.95 \cdot 0.36 + 1.89} \doteq 0.01,$$

$$R_{1,3}(h_2) = \frac{40.11 \cdot 0.36^3 - 40.93 \cdot 0.36^2 + 10.50 \cdot 0.36}{6.39 \cdot 0.36^3 - 1.26 \cdot 0.36^2 - 1.95 \cdot 0.36 + 1.89} \doteq 0.25,$$

$$R_{2,3}(h_2) = \frac{-20.19 \cdot 0.36^3 + 12.36 \cdot 0.36^2}{6.39 \cdot 0.36^3 - 1.26 \cdot 0.36^2 - 1.95 \cdot 0.36 + 1.89} \doteq 0.50,$$

$$R_{3,3}(h_2) = \frac{6.44 \cdot 0.36^3}{6.39 \cdot 0.36^3 - 1.26 \cdot 0.36^2 - 1.95 \cdot 0.36 + 1.89} \doteq 0.24,$$

$$R_{4,3}(h_2) = 0,$$

$$R_{5,3}(h_2) = 0,$$

$$R_{0,3}(h_3) = 0,$$

$$R_{1,3}(h_3) = 0,$$

$$R_{2,3}(h_3) = \frac{-4.89 \cdot 0.60^3 + 14.68 \cdot 0.60^2 - 14.68 \cdot 0.60 + 4.89}{4.95 \cdot 0.60^3 - 12.47 \cdot 0.60^2 + 10.89 \cdot 0.60 - 1.57} \doteq 0.21,$$

$$R_{3,3}(h_3) = \frac{40.22 \cdot 0.60^3 - 97.71 \cdot 0.60^2 + 74.74 \cdot 0.60 - 17.26}{4.95 \cdot 0.60^3 - 12.47 \cdot 0.60^2 + 10.89 \cdot 0.60 - 1.57} \doteq 0.71,$$

$$R_{4,3}(h_3) = \frac{-55.80 \cdot 0.60^3 + 115.28 \cdot 0.60^2 - 75.40 \cdot 0.60 + 15.92}{4.95 \cdot 0.60^3 - 12.47 \cdot 0.60^2 + 10.89 \cdot 0.60 - 1.57} \doteq 0.08,$$

$$R_{5,3}(h_3) = \frac{25.42 \cdot 0.60^3 - 44.72 \cdot 0.60^2 + 26.22 \cdot 0.60 - 5.13}{4.95 \cdot 0.60^3 - 12.47 \cdot 0.60^2 + 10.89 \cdot 0.60 - 1.57} \doteq 0,$$

$$\begin{aligned}
R_{0,3}(h_4) &= 0, \\
R_{1,3}(h_4) &= 0, \\
R_{2,3}(h_4) &= \frac{-4.89 \cdot 0.78^3 + 14.68 \cdot 0.78^2 - 14.68 \cdot 0.78 + 4.89}{4.95 \cdot 0.78^3 - 12.47 \cdot 0.78^2 + 10.89 \cdot 0.78 - 1.57} \doteq 0.03, \\
R_{3,3}(h_4) &= \frac{40.22 \cdot 0.78^3 - 97.71 \cdot 0.78^2 + 74.74 \cdot 0.78 - 17.26}{4.95 \cdot 0.78^3 - 12.47 \cdot 0.78^2 + 10.89 \cdot 0.78 - 1.57} \doteq 0.40, \\
R_{4,3}(h_4) &= \frac{-55.80 \cdot 0.78^3 + 115.28 \cdot 0.78^2 - 75.40 \cdot 0.78 + 15.92}{4.95 \cdot 0.78^3 - 12.47 \cdot 0.78^2 + 10.89 \cdot 0.78 - 1.57} \doteq 0.46, \\
R_{5,3}(h_4) &= \frac{25.42 \cdot 0.78^3 - 44.72 \cdot 0.78^2 + 26.22 \cdot 0.78 - 5.13}{4.95 \cdot 0.78^3 - 12.47 \cdot 0.78^2 + 10.89 \cdot 0.78 - 1.57} \doteq 0.11, \\
R_{0,3}(h_5) &= 0, \\
R_{1,3}(h_5) &= 0, \\
R_{2,3}(h_5) &= \frac{-4.89 \cdot 1 + 14.68 \cdot 1 - 14.68 \cdot 1 + 4.89}{4.95 \cdot 1 - 12.47 \cdot 1 + 10.89 \cdot 1 - 1.57} = 0.00, \\
R_{3,3}(h_5) &= \frac{40.22 \cdot 1 - 97.71 \cdot 1 + 74.74 \cdot 1 - 17.26}{4.95 \cdot 1 - 12.47 \cdot 1 + 10.89 \cdot 1 - 1.57} = 0.00, \\
R_{4,3}(h_5) &= \frac{-55.80 \cdot 1 + 115.28 \cdot 1 - 75.40 \cdot 1 + 15.92}{4.95 \cdot 1 - 12.47 \cdot 1 + 10.89 \cdot 1 - 1.57} = 0.00, \\
R_{5,3}(h_5) &= \frac{25.42 \cdot 1 - 44.72 \cdot 1 + 26.22 \cdot 1 - 5.13}{4.95 \cdot 1 - 12.47 \cdot 1 + 10.89 \cdot 1 - 1.57} = 1.00.
\end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.18 & 0.51 & 0.26 & 0.05 & 0.00 & 0.00 \\ 0.01 & 0.25 & 0.50 & 0.24 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.21 & 0.71 & 0.08 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.03 & 0.40 & 0.46 & 0.11 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (1, 3) \\ (2, 2) \\ (5, 4) \\ (6, 2) \\ (5, -1) \end{pmatrix}$$

jsou následující řídicí body prosté interpolační NURBS křivky:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0 &= (0.00, 0.00), \\
\mathbf{P}_1 &= (1.13, 6.34), \\
\mathbf{P}_2 &= (0.54, -2.14), \\
\mathbf{P}_3 &= (6.12, 6.33), \\
\mathbf{P}_4 &= (6.50, -0.79), \\
\mathbf{P}_5 &= (5.00, -1.00).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

B.3.4 Analytická reprezentace prosté interpolační NURBS křivky

Vektorová rovnice prosté interpolační NURBS křivky

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^5 R_{i,3}(u)\mathbf{P}_i = R_{0,3}(u)\mathbf{P}_0 + R_{1,3}(u)\mathbf{P}_1 + R_{2,3}(u)\mathbf{P}_2 + R_{3,3}(u)\mathbf{P}_3 + R_{4,3}(u)\mathbf{P}_4 + R_{5,3}(u)\mathbf{P}_5$$

má na jednotlivých aktivních uzlových roztečích těžišťového uzlového vektoru (A.1) následující vyjádření:

- $u \in [0, 0.46)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} [(-19.97u^3 + 27.31u^2 - 12.45u + 1.89) \cdot (0, 0) + \\ &\quad + (40.12u^3 - 40.93u^2 + 10.50u) \cdot (1.13, 6.34) + \\ &\quad + (-20.19u^3 + 12.36u^2) \cdot (0.54, -2.14) + \\ &\quad + 6.44u^3 \cdot (6.12, 6.33) + 0 \cdot (6.50, -0.79) + 0 \cdot (5, -1)] \doteq \\ &\doteq \left(\frac{73.67u^3 - 39.40u^2 + 11.83u}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, \frac{338.13u^3 - 285.82u^2 + 66.51u}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89} \right), \end{aligned}$$

- $u \in [0.46, 0.59)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} [0 \cdot (0, 0) + \\ &\quad + (-35.53u^3 + 62.51u^2 + 7.16 - 36.65u) \cdot (1.13, 6.34) + \\ &\quad + (54.43u^3 - 89.69u^2 + 46.52u - 7.07) \cdot (0.54, -2.14) + \\ &\quad + (91.31u^3 - 133.69u^2 + 60.94u - 9.26) \cdot (6.12, 6.33) + \\ &\quad + (43.69u^3 - 59.75u^2 - 4.12 + 27.24u) \cdot (6.50, -0.79) + 0 \cdot (5, -1)] \doteq \\ &\doteq \left(\frac{-285.48u^3 + 451.75u^2 - 212.05u + 34.02}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-953.97u^3 + 1481.14u^2 - 738.93u + 122.38}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22} \right), \end{aligned}$$

- $u \in [0.59, 1]$:

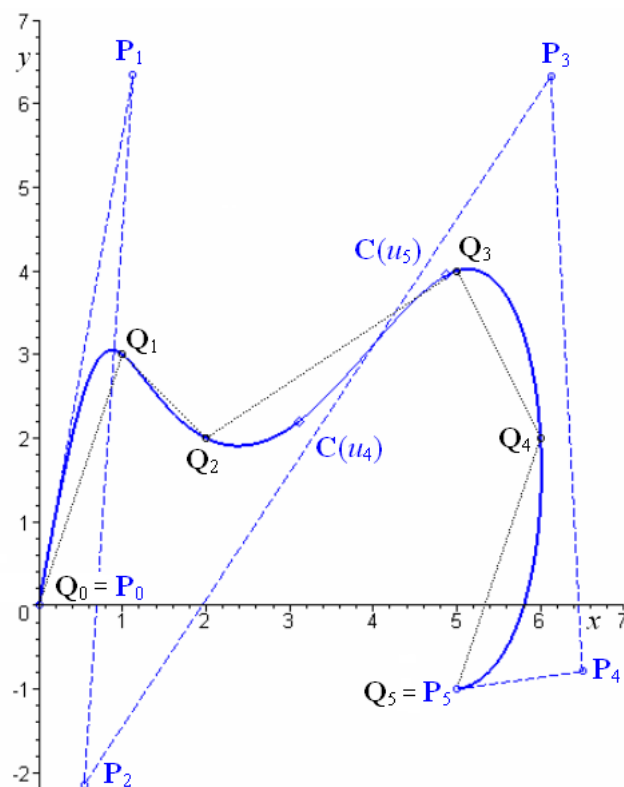
$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \frac{1}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} [0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (1.13, 6.34) + \\ &\quad + (-4.89u^3 + 14.68u^2 - 14.68u + 4.89) \cdot (0.54, -2.14) + \\ &\quad + (40.22u^3 - 97.71u^2 + 74.74u - 17.26) \cdot (6.12, 6.33) + \\ &\quad + (-55.80u^3 + 115.28u^2 - 75.40u + 15.92) \cdot (6.50, -0.79) + \\ &\quad + (25.42u^3 - 44.72u^2 + 26.22u - 5.13) \cdot (5, -1)] \doteq \\ &\doteq \left(\frac{7.99u^3 - 64.51u^2 + 90.67u}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, \frac{283.65u^3 - 696.01u^2 + 537.72u - 127.15}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57} \right). \end{aligned}$$

Parametrické rovnice prosté interpolační NURBS křivky mají tvar:

$$x(u) \doteq \begin{cases} \frac{73.67u^3 - 39.40u^2 + 11.83u}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{-285.48u^3 + 451.75u^2 - 212.05u + 34.02}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{7.99u^3 - 64.51u^2 + 90.67u}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

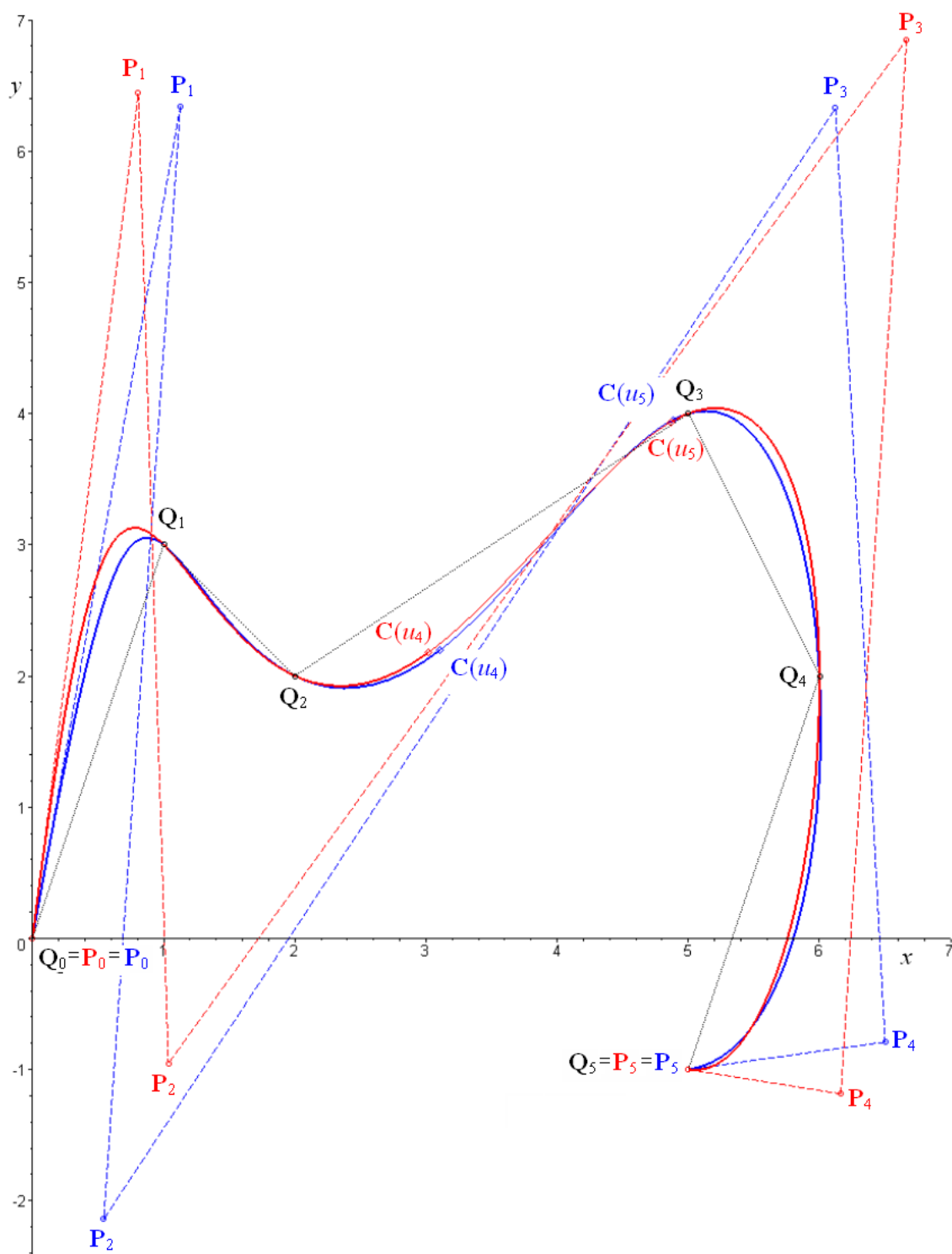
$$y(u) \doteq \begin{cases} \frac{338.13u^3 - 285.82u^2 + 66.51u}{6.39u^3 - 1.26u^2 - 1.95u + 1.89}, & u \in [0, 0.46), \\ \frac{-953.97u^3 + 1481.14u^2 - 738.93u + 122.38}{-28.72u^3 + 46.76u^2 - 23.84u + 5.22}, & u \in [0.46, 0.59), \\ \frac{283.65u^3 - 696.01u^2 + 537.72u - 127.15}{4.95u^3 - 12.47u^2 + 10.89u - 1.57}, & u \in [0.59, 1]. \end{cases}$$

Graf prosté interpolační NURBS křivky 3. stupně s parametrickými rovnicemi (B.6) společně se jejím řídicím polygonem (B.5) je zobrazen na obr. B.4. Segmenty křivky jsou odlišeny tloušťkou čáry, body, ve kterých dochází k napojení segmentů, jsou vyznačeny symbolem \diamond .



Obr. B.4: Prostá interpolační NURBS křivka

Prostou interpolační B-spline křivku s parametrickými rovnicemi (B.3), resp NURBS křivku s parametrickými rovnicemi (B.6) můžeme porovnat na obr. B.5, kde jsou nakresleny včetně svých řídicích polygonů (B.2), resp. (B.5). B-spline křivka a její řídicí polygon je nakreslena červenou barvou, NURBS křivka a její řídicí polygon je nakreslena modrou barvou.



Obr. B.5: Prostá interpolační B-spline (červená) a NURBS (modrá) křivka

B.4 Uzlová interpolační B-spline křivka

Pro zadaný počet ramen definičního polygonu $\tilde{n} = 5$ a stupeň křivky $p = 3$ je počet ramen řídicího polygonu $n = \tilde{n} + p - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$. Dostředivý vektor parametrizace uzlové interpolační křivky je shodný s vektorem parametrizace prosté interpolační křivky (B.1). Protože je vektor parametrizace uzlové interpolační křivky vybranou částí uzlového vektoru, je tvar uzlového vektoru nyní následující:

$$U = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}) = (0, 0, 0, 0, 0.22, 0.36, 0.60, 0.78, 1, 1, 1, 1).$$

B.4.1 B-spline bázové funkce uzlové interpolační B-spline křivky

Výpočet B-spline bázových funkcí již nebudeme uvádět tak detailně jako v příloze A. Uvedeme pouze vyjádření jednotlivých B-spline bázových funkcí a jejich grafy (obr. B.6 až obr. B.9).

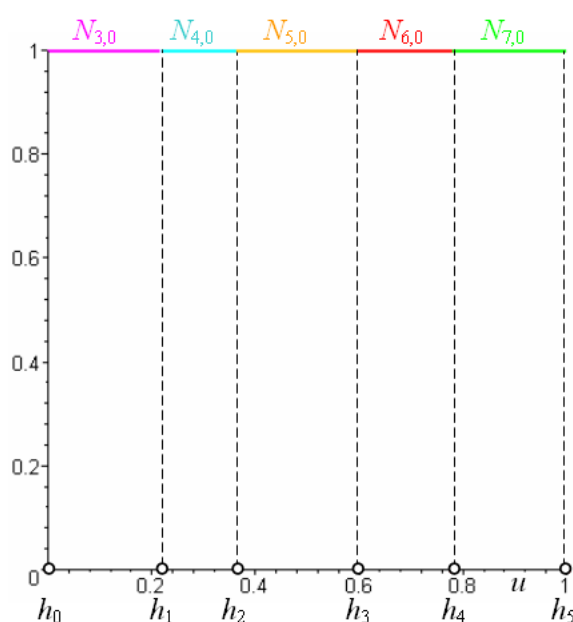
B-spline bázové funkce multého stupně mají následující tvar:

$$\begin{aligned} N_{0,0}(u), N_{1,0}(u), N_{2,0}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1], \\ N_{3,0}(u) &= \begin{cases} 1, & u \in [0, 0.22), \\ 0, & u \in [0.22, 1], \end{cases} \\ N_{4,0}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.22), \\ 1, & u \in [0.22, 0.36), \\ 0, & u \in [0.36, 1], \end{cases} \\ N_{5,0}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.36), \\ 1, & u \in [0.36, 0.60), \\ 0, & u \in [0.60, 1], \end{cases} \\ N_{6,0}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.60), \\ 1, & u \in [0.60, 0.78), \\ 0, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\ N_{7,0}(u) &= \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.78), \\ 1, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\ N_{8,0}(u), N_{9,0}(u), N_{10,0}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

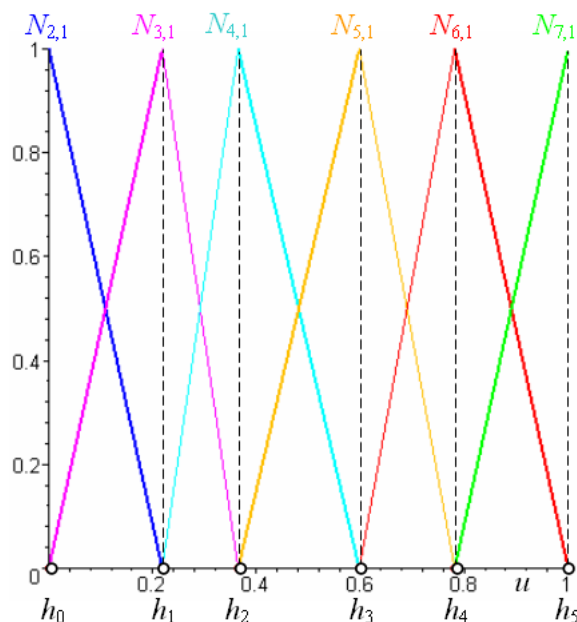
B-spline bázové funkce 1. stupně mají následující tvar:

$$\begin{aligned} N_{0,1}(u), N_{1,1}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1], \\ N_{2,1}(u) &\doteq \begin{cases} -4.58u + 1, & u \in [0, 0.22), \\ 0, & u \in [0.22, 1], \end{cases} \\ N_{3,1}(u) &\doteq \begin{cases} 4.58u, & u \in [0, 0.22), \\ -6.84u + 2.50, & u \in [0.22, 0.36), \\ 0, & u \in [0.36, 1], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{4,1}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.22), \\ 6.84u - 1.50, & u \in [0.22, 0.36), \\ -4.29u + 2.56, & u \in [0.36, 0.60), \\ 0, & u \in [0.60, 1], \end{cases} \\
 N_{5,1}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.36), \\ 4.29u - 1.56, & u \in [0.36, 0.60), \\ -5.44u + 4.25, & u \in [0.60, 0.78), \\ 0, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
 N_{6,1}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.60), \\ 5.44u - 3.25, & u \in [0.60, 0.78), \\ -4.58u + 4.58, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
 N_{7,1}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.78), \\ 4.58u - 3.58, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
 N_{8,1}(u), N_{9,1}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1].
 \end{aligned}$$



Obr. B.6: B-spline bázové funkce nultého stupně



Obr. B.7: B-spline bázové funkce 1. stupně

B-spline bázové funkce 2. stupně mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
 N_{0,2}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1] \\
 N_{1,2}(u) &\doteq \begin{cases} 20.95u^2 - 9.15u + 1, & u \in [0, 0.22), \\ 0, & u \in [0.22, 1], \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{2,2}(u) &\doteq \begin{cases} -33.51u^2 + 9.15u, & u \in [0, 0.22), \\ 18.78u^2 - 13.69u + 2.50, & u \in [0.22, 0.36), \\ 0, & u \in [0.36, 1], \end{cases} \\
N_{3,2}(u) &\doteq \begin{cases} 12.56u^2, & u \in [0, 0.22), \\ -36.82u^2 + 21.57u - 2.36, & u \in [0.22, 0.36), \\ 11.30u^2 - 13.51u + 4.04, & u \in [0.36, 0.60), \\ 0, & u \in [0.60, 1], \end{cases} \\
N_{4,2}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.22), \\ 18.04u^2 - 7.88u + 0.86, & u \in [0.22, 0.36), \\ -21.58u^2 + 21.01u - 4.40, & u \in [0.36, 0.60), \\ 13.05u^2 - 20.41u + 7.97, & u \in [0.60, 0.78), \\ 0, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
N_{5,2}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.36), \\ 10.28u^2 - 7.50u + 1.37, & u \in [0.36, 0.60), \\ -26.59u^2 + 36.59u - 11.81, & u \in [0.60, 0.78), \\ 11.38u^2 - 22.76u + 11.38, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
N_{6,2}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.60), \\ 13.54u^2 - 16.18u + 4.84, & u \in [0.60, 0.78), \\ -32.33u^2 + 55.51u - 23.18, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
N_{7,2}(u) &\doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.78), \\ 20.95u^2 - 32.75u + 12.80, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \\
N_{8,2}(u) &= 0, \quad u \in [0, 1].
\end{aligned}$$

B-spline bázové funkce 3. stupně mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(u) &\doteq \begin{cases} -95.91u^3 + 62.86u^2 - 13.73u + 1, & u \in [0, 0.22), \\ 0, & u \in [0.22, 1], \end{cases} \\
N_{1,3}(u) &\doteq \begin{cases} 187.83u^3 - 100.53u^2 + 13.73u, & u \in [0, 0.22), \\ -51.50u^3 + 56.33u^2 - 20.53u + 2.50, & u \in [0.22, 0.36), \\ 0, & u \in [0.36, 1], \end{cases} \\
N_{2,3}(u) &\doteq \begin{cases} -112.92u^3 + 37.67u^2, & u \in [0, 0.22), \\ 113.09u^3 - 110.46u^2 + 32.36u - 2.36, & u \in [0.22, 0.36), \\ -18.90u^3 + 33.90u^2 - 20.27u + 4.04, & u \in [0.36, 0.60), \\ 0, & u \in [0.60, 1], \end{cases}
\end{aligned}$$

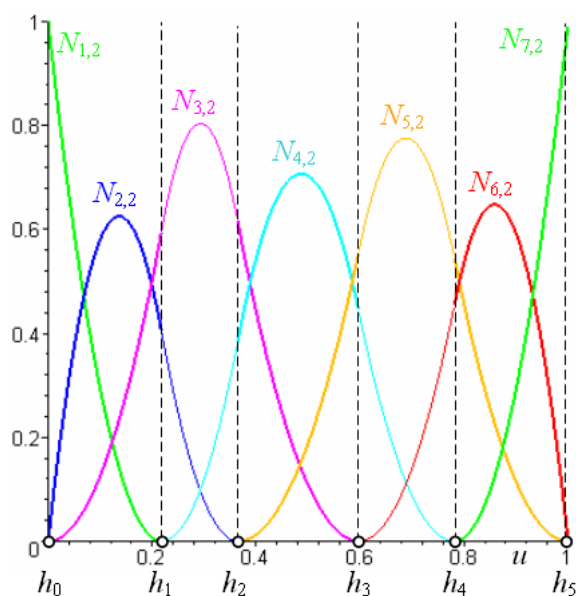
$$N_{3,3}(u) \doteq \begin{cases} 21.00u^3, & u \in [0, 0.22), \\ -93.63u^3 + 75.13u^2 - 16.41u + 1.20, & u \in [0.22, 0.36), \\ 57.23u^3 - 89.86u^2 + 43.71u - 6.11, & u \in [0.36, 0.60), \\ -23.18u^3 + 54.36u^2 - 42.48u + 11.07, & u \in [0.60, 0.78), \\ 0, & u \in [0.78, 1], \end{cases}$$

$$N_{4,3}(u) \doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.22), \\ 32.04u^3 - 21.00u^2 + 4.59u - 0.33, & u \in [0.22, 0.36), \\ -54.51u^3 + 73.66u^2 - 29.92u + 3.86, & u \in [0.36, 0.60), \\ 65.03u^3 - 140.73u^2 + 98.25u - 21.68, & u \in [0.60, 0.78), \\ -17.91u^3 + 53.74u^2 - 53.74u + 17.91, & u \in [0.78, 1], \end{cases}$$

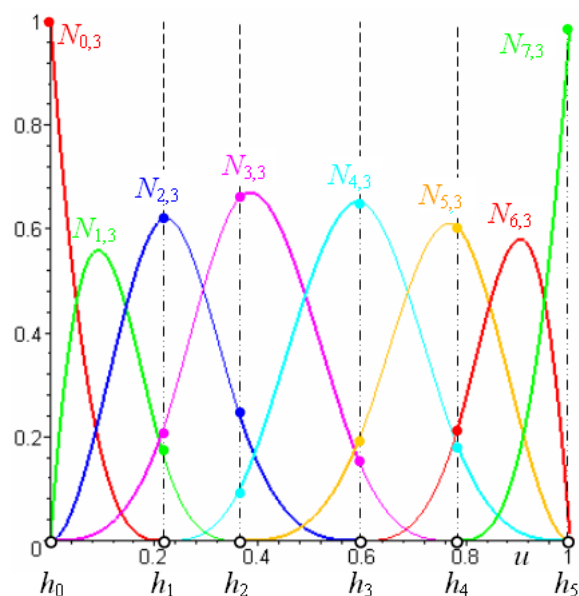
$$N_{5,3}(u) \doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.36), \\ 16.18u^3 - 17.69u^2 + 6.45u - 0.78, & u \in [0.36, 0.60), \\ -75.50u^3 + 146.73u^2 - 91.85u + 18.81, & u \in [0.60, 0.78), \\ 98.31u^3 - 260.79u^2 + 226.65u - 64.17, & u \in [0.78, 1], \end{cases}$$

$$N_{6,3}(u) \doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.60), \\ 33.66u^3 - 60.36u^2 + 36.09u - 7.19, & u \in [0.60, 0.78), \\ -176.31u^3 + 431.93u^2 - 348.66u + 93.04, & u \in [0.78, 1], \end{cases}$$

$$N_{7,3}(u) \doteq \begin{cases} 0, & u \in [0, 0.78), \\ 95.91u^3 - 224.87u^2 + 175.75u - 45.78, & u \in [0.78, 1]. \end{cases}$$



Obr. B.8: B-spline bázové funkce 2. stupně



Obr. B.9: B-spline bázové funkce 3. stupně

B.4.2 Řídící body uzlové interpolační B-spline křivky

Řídící body uzlové interpolační křivky jsou řešením soustavy (4.24):

$$\begin{pmatrix} N_{0,3}(h_0) & N_{1,3}(h_0) & N_{2,3}(h_0) & N_{3,3}(h_0) & N_{4,3}(h_0) & N_{5,3}(h_0) & N_{6,3}(h_0) & N_{7,3}(h_0) \\ N_{0,3}(h_1) & N_{1,3}(h_1) & N_{2,3}(h_1) & N_{3,3}(h_1) & N_{4,3}(h_1) & N_{5,3}(h_1) & N_{6,3}(h_1) & N_{7,3}(h_1) \\ N_{0,3}(h_2) & N_{1,3}(h_2) & N_{2,3}(h_2) & N_{3,3}(h_2) & N_{4,3}(h_2) & N_{5,3}(h_2) & N_{6,3}(h_2) & N_{7,3}(h_2) \\ N_{0,3}(h_3) & N_{1,3}(h_3) & N_{2,3}(h_3) & N_{3,3}(h_3) & N_{4,3}(h_3) & N_{5,3}(h_3) & N_{6,3}(h_3) & N_{7,3}(h_3) \\ N_{0,3}(h_4) & N_{1,3}(h_4) & N_{2,3}(h_4) & N_{3,3}(h_4) & N_{4,3}(h_4) & N_{5,3}(h_4) & N_{6,3}(h_4) & N_{7,3}(h_4) \\ N_{0,3}(h_5) & N_{1,3}(h_5) & N_{2,3}(h_5) & N_{3,3}(h_5) & N_{4,3}(h_5) & N_{5,3}(h_5) & N_{6,3}(h_5) & N_{7,3}(h_5) \\ N'_{0,3}(h_0) & N'_{1,3}(h_0) & N'_{2,3}(h_0) & N'_{3,3}(h_0) & N'_{4,3}(h_0) & N'_{5,3}(h_0) & N'_{6,3}(h_0) & N'_{7,3}(h_0) \\ N'_{0,3}(h_5) & N'_{1,3}(h_5) & N'_{2,3}(h_5) & N'_{3,3}(h_5) & N'_{4,3}(h_5) & N'_{5,3}(h_5) & N'_{6,3}(h_5) & N'_{7,3}(h_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\mathbf{Q}_0 \ \mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \mathbf{Q}_3 \ \mathbf{Q}_4 \ \mathbf{Q}_5 \ \mathbf{Q}'_0 \ \mathbf{Q}'_5 \right)^T.$$

Prvky prvních pěti řádků matice soustavy tvoří funkční hodnoty B-spline bázových funkcí $N_{i,3}(u)$, $i = 0, \dots, 7$, v jednotlivých hodnotách parametru h_i , $i = 0, \dots, 5$, z vektoru parametrizace:

$$\begin{aligned} N_{0,3}(h_0) &= -95.91 \cdot 0 + 62.86 \cdot 0 - 13.73 \cdot 0 + 1 = 1.00, \\ N_{1,3}(h_0) &= 187.83 \cdot 0 - 100.53 \cdot 0 + 13.73 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{2,3}(h_0) &= -112.92 \cdot 0 + 37.67 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{3,3}(h_0) &= 21.00 \cdot 0 = 0.00, \\ N_{4,3}(h_0), \dots, N_{7,3}(h_0) &= 0, \\ N_{0,3}(h_1) &= 0, \\ N_{1,3}(h_1) &= -51.50 \cdot 0.22^3 + 56.33 \cdot 0.22^2 - 20.53 \cdot 0.22 + 2.50 \doteq 0.16, \\ N_{2,3}(h_1) &= 113.09 \cdot 0.22^3 - 110.46 \cdot 0.22^2 + 32.36 \cdot 0.22 - 2.36 \doteq 0.62, \\ N_{3,3}(h_1) &= -93.63 \cdot 0.22^3 + 75.13 \cdot 0.22^2 - 16.41 \cdot 0.22 + 1.20 \doteq 0.21, \\ N_{4,3}(h_1) &= 32.04 \cdot 0.22^3 - 21.00 \cdot 0.22^2 + 4.59 \cdot 0.22 - 0.33 \doteq 0.00, \\ N_{5,3}(h_1), \dots, N_{7,3}(h_1) &= 0, \\ N_{0,3}(h_2), N_{1,3}(h_2) &= 0, \\ N_{2,3}(h_2) &= -18.90 \cdot 0.36^3 + 33.90 \cdot 0.36^2 - 20.27 \cdot 0.36 + 4.04 \doteq 0.24, \\ N_{3,3}(h_2) &= 57.23 \cdot 0.36^3 - 89.86 \cdot 0.36^2 + 43.71 \cdot 0.36 - 6.11 \doteq 0.66, \\ N_{4,3}(h_2) &= -54.51 \cdot 0.36^3 + 73.66 \cdot 0.36^2 - 29.92 \cdot 0.36 + 3.86 \doteq 0.10, \\ N_{5,3}(h_2) &= 16.18 \cdot 0.36^3 - 17.69 \cdot 0.36^2 + 6.45 \cdot 0.36 - 0.78 \doteq 0.00, \\ N_{6,3}(h_2), N_{7,3}(h_2) &= 0, \\ N_{0,3}(h_3), \dots, N_{2,3}(h_3) &= 0, \\ N_{3,3}(h_3) &= -23.18 \cdot 0.60^3 + 54.36 \cdot 0.60^2 - 42.48 \cdot 0.60 + 11.07 \doteq 0.14, \\ N_{4,3}(h_3) &= 65.03 \cdot 0.60^3 - 140.73 \cdot 0.60^2 + 98.25 \cdot 0.60 - 21.68 \doteq 0.65, \\ N_{5,3}(h_3) &= -75.50 \cdot 0.60^3 + 146.73 \cdot 0.60^2 - 91.85 \cdot 0.60 + 18.81 \doteq 0.21, \\ N_{6,3}(h_3) &= 33.66 \cdot 0.60^3 - 60.36 \cdot 0.60^2 + 36.09 \cdot 0.60 - 7.19 \doteq 0.00, \\ N_{7,3}(h_3) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{0,3}(h_4), \dots, N_{3,3}(h_4) &= 0, \\
N_{4,3}(h_4) &= -17.91 \cdot 0.78^3 + 53.74 \cdot 0.78^2 - 53.74 \cdot 0.78 + 17.91 \doteq 0.19, \\
N_{5,3}(h_4) &= 98.31 \cdot 0.78^3 - 260.79 \cdot 0.78^2 + 226.65 \cdot 0.78 - 64.17 \doteq 0.60, \\
N_{6,3}(h_4) &= -176.31 \cdot 0.78^3 + 431.93 \cdot 0.78^2 - 348.66 \cdot 0.78 + 93.04 \doteq 0.21, \\
N_{7,3}(h_4) &= 95.91 \cdot 0.78^3 - 224.87 \cdot 0.78^2 + 175.75 \cdot 0.78 - 45.78 \doteq 0.00, \\
N_{0,3}(h_5), \dots, N_{3,3}(h_5) &= 0, \\
N_{4,3}(h_5) &= -17.91 \cdot 1 + 53.74 \cdot 1 - 53.74 \cdot 1 + 17.91 = 0.00, \\
N_{5,3}(h_5) &= 98.31 \cdot 1 - 260.79 \cdot 1 + 226.65 \cdot 1 - 64.17 = 0.00, \\
N_{6,3}(h_5) &= -176.31 \cdot 1 + 431.93 \cdot 1 - 348.66 \cdot 1 + 93.04 = 0.00, \\
N_{7,3}(h_5) &= 95.91 \cdot 1 - 224.87 \cdot 1 + 175.75 \cdot 1 - 45.78 = 1.00.
\end{aligned}$$

Prvky předposledního, resp. posledního řádku matice soustavy jsou podle (4.60):

$$\begin{aligned}
N'_{0,3}(h_0) &= -\frac{3}{u_4} = -\frac{3}{0.22} \doteq -13.73, \\
N'_{1,3}(h_0) &= \frac{3}{u_4} = \frac{3}{0.22} \doteq 13.73, \\
N'_{2,3}(h_0), \dots, N'_{7,3}(h_0) &= 0,
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
N'_{0,3}(h_5), \dots, N'_{5,3}(h_5) &= 0 \\
N'_{6,3}(h_5) &= -\frac{3}{1 - u_{m-4}} = -\frac{3}{1 - 0.78} \doteq -13.73, \\
N'_{7,3}(h_5) &= \frac{3}{1 - u_{m-4}} = \frac{3}{1 - 0.78} \doteq 13.73.
\end{aligned}$$

Těžnicové krajní tečné vektory

Tečný vektor \mathbf{Q}'_0 v počátečním bodě definičního polygonu vypočteme dle (5.12):

$$\mathbf{Q}'_0 = \frac{1}{u_4} \left[\mathbf{Q}_0 - \mathbf{A} + 2 \frac{(\mathbf{A} - \mathbf{Q}_0) \cdot (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)}{|\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1|^2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \right] \frac{|\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1|}{|\mathbf{Q}_0 \mathbf{A}|},$$

kde

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \frac{1}{2}[(1, 3) + (2, 2)] = (1.5, 2.5).$$

Potom je tečný vektor v počátečním bodě definičního polygonu

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}'_0 &= \frac{1}{0.22} \left\{ (0, 0) - (1.5, 2.5) + 2 \frac{(1.5 - 0) \cdot (1 - 0) + (2.5 - 0) \cdot (3 - 0)}{(1 - 0)^2 + (3 - 0)^2} [(1, 3) - (0, 0)] \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 0)^2}}{\sqrt{(1.5 - 0)^2 + (2.5 - 0)^2}} \doteq (1.49, 14.40).
\end{aligned}$$

Tečný vektor \mathbf{Q}'_5 v koncovém bodě definičního polygonu vypočteme dle (5.17):

$$\mathbf{Q}'_5 = \frac{1}{1 - u_{11-4}} \left[-\mathbf{Q}_5 + \mathbf{B} + 2 \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{Q}_5) \cdot (\mathbf{Q}_5 - \mathbf{Q}_4)}{|\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_5|^2} (\mathbf{Q}_5 - \mathbf{Q}_4) \right] \frac{|\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_5|}{|\mathbf{B} \mathbf{Q}_5|},$$

kde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4) = \frac{1}{2}[(5, 4) + (6, 2)] = (5.5, 3).$$

Potom je tečný vektor v koncovém bodě definičního polygonu

$$\mathbf{Q}'_5 = \frac{1}{1 - 0.78} \left\{ -(5, -1) + (5.5, 3) + 2 \frac{(5.5 - 5) \cdot (5 - 6) + (3 + 1) \cdot (-1 - 2)}{(5 - 6)^2 + (-1 - 2)^2} [(5, -1) - (6, 2)] \right\} \cdot \frac{\sqrt{(5 - 6)^2 + (-1 - 2)^2}}{\sqrt{(5 - 5.5)^2 + (-1 + 3)^2}} \doteq (-7.18, -12.57).$$

Nyní můžeme vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.62 & 0.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.24 & 0.66 & 0.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.14 & 0.65 & 0.21 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.19 & 0.60 & 0.21 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ -13.73 & 13.73 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -13.73 & 13.73 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{P}_6 \\ \mathbf{P}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (1, 3) \\ (2, 2) \\ (5, 4) \\ (6, 2) \\ (5, -1) \\ (1.49, 14.40) \\ (-7.18, -12.57) \end{pmatrix},$$

abychom získali následující řídicí body uzlové interpolační křivky:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (0.00, 0.00), \\ \mathbf{P}_1 &\doteq (0.11, 1.05), \\ \mathbf{P}_2 &\doteq (0.91, 4.35), \\ \mathbf{P}_3 &\doteq (1.90, 0.62), \\ \mathbf{P}_4 &\doteq (5.24, 5.49), \\ \mathbf{P}_5 &\doteq (6.40, 1.64), \\ \mathbf{P}_6 &\doteq (5.52, -0.08), \\ \mathbf{P}_7 &= (5.00, -1.00). \end{aligned} \tag{B.7}$$

B.4.3 Analytická reprezentace uzlové interpolační křivky

Vektorová rovnice uzlové interpolační B-spline křivky 3. stupně

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= \sum_{i=0}^7 N_{i,3}(u) \mathbf{P}_i = \\ &= N_{0,3}(u) \mathbf{P}_0 + N_{1,3}(u) \mathbf{P}_1 + N_{2,3}(u) \mathbf{P}_2 + N_{3,3}(u) \mathbf{P}_3 + \\ &\quad + N_{4,3}(u) \mathbf{P}_4 + N_{5,3}(u) \mathbf{P}_5 + N_{6,3}(u) \mathbf{P}_6 + N_{7,3}(u) \mathbf{P}_7 \end{aligned}$$

má na jednotlivých aktivních uzlových roztečích dostředivého uzlového vektoru (B.4) následující tvar:

- $u \in [0, 0.22)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= (-95.91u^3 + 62.86u^2 - 13.73u + 1) \cdot (0, 0) + \\ &\quad + (187.83u^3 - 100.53u^2 + 13.73u) \cdot (0.11, 1.05) + \\ &\quad + (-112.92u^3 + 37.67u^2) \cdot (0.91, 4.35) + 21.00u^3 \cdot (1.90, 0.62) + \\ &\quad + 0 \cdot (5.24, 5.49) + 0 \cdot (6.40, 1.64) + 0 \cdot (5.52, -0.08) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &\doteq (-42.53u^3 + 23.43u^2 + 1.49u, -280.75u^3 + 58.29u^2 + 14.40u), \end{aligned}$$

- $u \in [0.22, 0.36)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + (-51.50u^3 + 56.33u^2 - 20.53u + 2.50) \cdot (0.11, 1.05) + \\ &\quad + (113.09u^3 - 110.46u^2 + 32.36u - 2.36) \cdot (0.91, 4.35) + \\ &\quad + (-93.63u^3 + 75.13u^2 - 16.41u + 1.20) \cdot (1.90, 0.62) + \\ &\quad + (32.04u^3 - 21.00u^2 + 4.59u - 0.33) \cdot (5.24, 5.49) + \\ &\quad + 0 \cdot (6.40, 1.64) + 0 \cdot (5.52, -0.08) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &\doteq (87.10u^3 - 61.53u^2 + 20.05u - 1.35, 555.40u^3 - 489.72u^2 + 134.12u - 8.72), \end{aligned}$$

- $u \in [0.36, 0.60)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (0.11, 1.05) + (-18.90u^3 + 33.90u^2 - 20.27u + 4.04) \cdot (0.91, 4.35) + \\ &\quad + (57.23u^3 - 89.86u^2 + 43.71u - 6.11) \cdot (1.90, 0.62) + \\ &\quad + (-54.51u^3 + 73.66u^2 - 29.92u + 3.86) \cdot (5.24, 5.49) + \\ &\quad + (16.18u^3 - 17.69u^2 + 6.45u - 0.78) \cdot (6.40, 1.64) + \\ &\quad + 0 \cdot (5.52, -0.08) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &\doteq (-90.41u^3 + 132.60u^2 - 50.72u + 7.25, -319.43u^3 + 467.06u^2 - 214.69u + 33.67), \end{aligned}$$

- $u \in [0.60, 0.78)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (0.11, 1.05) + 0 \cdot (0.91, 4.35) + \\ &\quad + (-23.18u^3 + 54.36u^2 - 42.48u + 11.07) \cdot (1.90, 0.62) + \\ &\quad + (65.03u^3 - 140.73u^2 + 98.25u - 21.68) \cdot (5.24, 5.49) + \\ &\quad + (-75.50u^3 + 146.73u^2 - 91.85u + 18.81) \cdot (6.40, 1.64) + \\ &\quad + (33.66u^3 - 60.36u^2 + 36.09u - 7.19) \cdot (5.52, -0.08) + 0 \cdot (5, -1) = \\ &\doteq (-0.50u^3 - 28.65u^2 + 45.68u - 11.96, 215.95u^3 - 493.14u^2 + 359.35u - 80.72), \end{aligned}$$

- $u \in [0.78, 1]$:

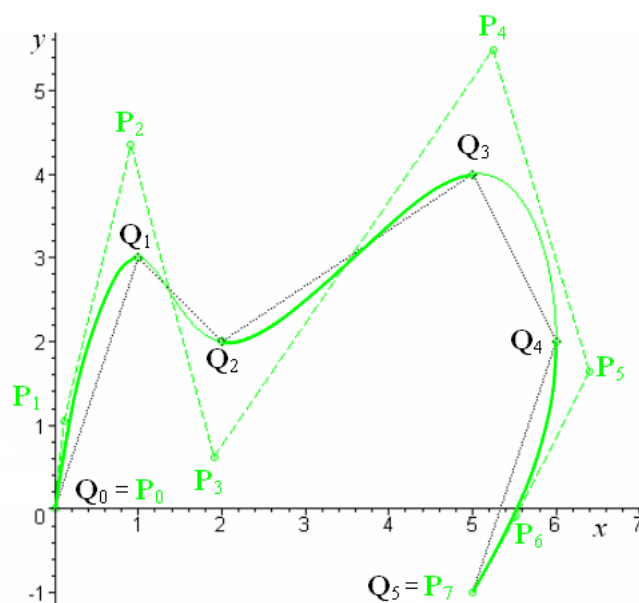
$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= 0 \cdot (0, 0) + 0 \cdot (0.11, 1.05) + 0 \cdot (0.91, 4.35) + 0 \cdot (1.90, 0.62) + \\ &\quad + (-17.91u^3 + 53.74u^2 - 53.74u + 17.91) \cdot (5.24, 5.49) + \\ &\quad + (98.31u^3 - 260.79u^2 + 226.65u - 64.17) \cdot (6.40, 1.64) + \\ &\quad + (-176.31u^3 + 431.93u^2 - 348.66u + 93.04) \cdot (5.52, -0.08) + \\ &\quad + (95.91u^3 - 224.87u^2 + 175.75u - 45.78) \cdot (5, -1) = \\ &\doteq (40.97u^3 - 125.87u^2 + 121.66u - 31.76, -17.96u^3 + 55.29u^2 - 69.26u + 30.94). \end{aligned}$$

Parametrické rovnice uzlové interpolační B-spline křivky jsou:

$$x(u) \doteq \begin{cases} -42.53u^3 + 23.43u^2 + 1.49u, & u \in [0, 0.22), \\ 87.10u^3 - 61.53u^2 + 20.05u - 1.35, & u \in [0.22, 0.36), \\ -90.41u^3 + 132.60u^2 - 50.72u + 7.25, & u \in [0.36, 0.60), \\ -0.50u^3 - 28.65u^2 + 45.68u - 11.96, & u \in [0.60, 0.78), \\ 40.97u^3 - 125.87u^2 + 121.66u - 31.76, & u \in [0.78, 1], \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

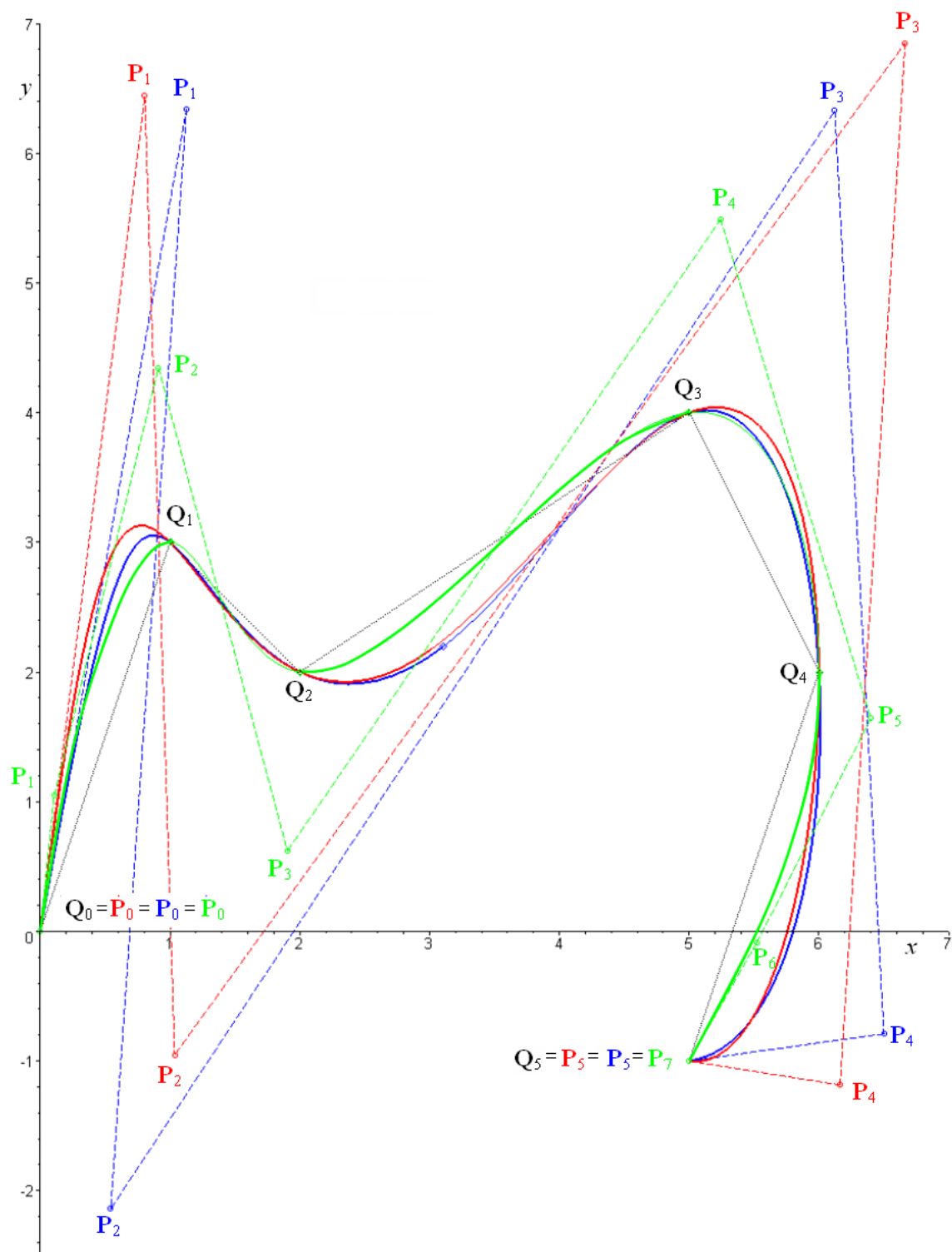
$$y(u) \doteq \begin{cases} -280.75u^3 + 58.29u^2 + 14.40u, & u \in [0, 0.22), \\ 555.40u^3 - 489.72u^2 + 134.12u - 8.72, & u \in [0.22, 0.36), \\ -319.43u^3 + 467.06u^2 - 214.69u + 33.67, & u \in [0.36, 0.60), \\ 215.95u^3 - 493.14u^2 + 359.35u - 80.72, & u \in [0.60, 0.78), \\ -17.96u^3 + 55.29u^2 - 69.26u + 30.94, & u \in [0.78, 1]. \end{cases}$$

Tvar uzlové interpolační B-spline křivky s parametrickými rovnicemi (B.8) včetně jejího řídicího polygonu (B.7) je znázorněn na obr. B.10.



Obr. B.10: Uzlová interpolační B-spline křivka

Všechny interpolační křivky vypočtené v této příloze můžeme porovnat na obr. B.11, kde je červenou barvou nakreslena prostá interpolační B-spline křivka s parametrickými rovnicemi (B.3) a její řídicí polygon (B.2), modrou barvou je nakreslena prostá interpolační NURBS křivka s parametrickými rovnicemi (B.6) a její řídicí polygon (B.5) a konečně zelenou barvou je nakreslena uzlová interpolační B-spline křivka s parametrickými rovnicemi (B.8) a její řídicí polygon (B.7). Větší měřítko obrázku umožní lépe porovnat tvar křivek a jejich řídicích polygonů.



Obr. B.11: Prostá interpolační B-spline křivka (červená),
prostá interpolační NURBS křivka (modrá),
uzlová interpolační B-spline křivka (zelená)

Rejstřík