
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

**ZÁKLADY POČÍTAČOVÉHO MODELOVÁNÍ
KŘIVEK A PLOCH**



Ivana Linkeová

Praha 2022

Obsah

Úvod	7
1 Základní vlastnosti křivek a ploch	9
1.1 Definice a vlastnosti křivek	9
1.2 Napojování křivek	18
1.2.1 Nástroje analýzy a kontroly návrhu křivek v Rhinu	19
1.3 Definice a vlastnosti ploch	23
1.4 Plátování	30
1.4.1 Nástroje analýzy a kontroly návrhu ploch v Rhinu	31
2 Modelování křivek	35
2.1 Fergusonova kubika	35
2.1.1 Vlastnosti Fergusonovy kubiky	36
2.1.2 Odvození Hermitových polynomů	38
2.1.3 Napojení Fergusonových kubik	38
2.1.4 Fergusonova kubika v Rhinu	40
2.2 Bézierova křivka	40
2.2.1 Vlastnosti Bézierovy křivky	44
Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou	44
2.2.2 Odvození Bernsteinových polynomů	47
2.2.3 De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na Bézierově křivce	48
2.2.4 Napojení Bézierových křivek	49
2.2.5 Bézierova křivka v Rhinu	56
2.3 Coonsova kubika	58
2.3.1 Vlastnosti Coonsovy kubiky	60
Vztah mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou	60
2.3.2 Odvození Coonsových polynomů	62
2.3.3 Jednodušší konstrukce krajních bodů Coonsovy kubiky	62
2.3.4 Coonsova kubika v Rhinu	63
2.4 Coonsův kubický B-spline	63
2.4.1 Vlastnosti Coonsova kubického B-spline	65
2.4.2 Coonsův kubický B-spline v Rhinu	69
2.5 Uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně	70
2.5.1 Vlastnosti ukotvené křivky	71
2.5.2 Konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky	73
2.5.3 Napojení ukotvených křivek	76
2.5.4 Ukotvená křivka v Rhinu	78

3 Modelování ploch	83
3.1 Vektorová rovnice plochy	83
3.2 Přímková přechodová plocha	85
3.2.1 Vlastnosti přímkové přechodové plochy	89
3.2.2 Plátování – pláty z přímkové přechodové plochy	89
3.2.3 Přímková přechodová plocha v Rhinu	90
3.3 Plocha hyperbolického paraboloidu	91
3.3.1 Vlastnosti plochy hyperbolického paraboloidu	93
3.3.2 Plátování – pláty z plochy hyperbolického paraboloidu	94
3.3.3 Plocha hyperbolického paraboloidu v Rhinu	94
3.4 Coonsova bilineární plocha	94
3.4.1 Vlastnosti Coonsovy bilineární plochy	97
3.4.2 Odvození vektorové rovnice Coonsovy bilineární plochy	97
3.4.3 Plátování – pláty z Coonsovy bilineární plochy	98
3.4.4 Coonsova bilineární plocha v Rhinu	99
3.5 Bézierova plocha	103
3.5.1 Bézierova plocha určená sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou	106
3.5.2 Vlastnosti Bézierovy plochy	111
Vztah Bézierovy bikubické plochy a Coonsovy bilineární plochy	113
3.5.3 Odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy	117
Postupná lineární interpolace mezi čtyřmi body	117
Bézierova křivka s proměnnými řídicími body	118
3.5.4 De Casteljaou algoritmus konstrukce bodu na Bézierově ploše	118
De Casteljaou algoritmus pro plochy	119
De Casteljaou algoritmus pro křivky	120
3.5.5 Plátování – pláty z Bézierovy plochy	121
3.5.6 Bézierova plocha v Rhinu	125
3.6 Uniformní ukotvená bikubická B-spline plocha	134
3.6.1 Vlastnosti ukotvené plochy	134
3.6.2 Plátování – pláty z ukotvené plochy	134
3.6.3 Ukotvená plocha v Rhinu	137
A Rhino – seznam použitých příkazů	143
Literatura	145

Úvod

Počítačové modelování křivek a ploch obecného tvaru představuje dynamicky se rozvíjející část počítačové grafiky s širokou oblastí praktických aplikací – od numericky řízené výroby přes počítačem podporované simulace a vizualizace vědeckých pokusů a procesů až po filmové animace a počítačové hry. V současné době tvoří teoretický základ většiny moderních CAD/CAM systémů NURBS (NeUniformní Racionální B-Spline) reprezentace. Na jednu stranu je pochopení teoretického principu NURBS reprezentace naprosto nezbytným předpokladem pro efektivní práci v CAD/CAM systémech. Na druhou stranu však minimální hodinová dotace předmětu Počítačová grafika (1+1) a potřeba poměrně složitěho matematického aparátu (křivky a plochy parametrizované po částech neuniformními racionálními funkcemi) neumožňuje studovat NURBS reprezentaci přímo.

Abychom přesto pronikli do zákonitostí, kterými se řídí modelování objektu složitěho obecného tvaru v NURBS reprezentaci, věnujeme se zde nejprve těm nejjednodušším základním matematickým modelům křivek (Fergusonova kubika, Bézierova křivka a Coonsova kubika) a ploch (přímková přechodová plocha, plocha hyperbolického paraboloidu, Coonsova bilineární plocha a Bézierova plocha), které jsou sice speciálními případy NURBS reprezentace, ale které lze matematicky popsat jedinou rovnicí.

Zvláštní pozornost je potom věnována otázce spojitosti při napojování těchto základních modelů křivek a ploch a vytváření segmentovaných křivek (Coonsov kubický B-spline, uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně) a ploch (uniformní ukotvená B-spline bikubická plocha). Otázku spojitosti je třeba řešit vždy, jakmile modelujeme objekty složitějších tvarů. Takové objekty nelze popsat jedinou rovnicí, ale je možné je složit z jednotlivých vhodně napojených základních modelů křivek a ploch.

Teoretickou část jednotlivých témat doplňují podrobně řešené příklady, kde jsou názorně demonstrovány všechny důležité vlastnosti matematických modelů křivek a ploch a jejich vzájemné souvislosti. K procvičení získaných znalostí slouží řada početních i konstrukčních cvičení.

Nedílnou součástí práce s tímto učebním textem je praktické modelování křivek a ploch v rámci samostudia s využitím programu Rhinoceros – NURBS modelling for Windows (Rhino). Rhino je založeno právě na NURBS reprezentaci a disponuje řadou příkazů jak pro kreslení výše zmíněných základních modelů křivek a ploch, tak i pro kreslení segmentovaných křivek a ploch a vytváření objektů složitěho obecného tvaru. V Rhinu nalezneme také široké spektrum nástrojů, kterými lze analyzovat vlastnosti křivek a ploch. V závěru každé části je proto uveden seznam podrobných postupů vytváření popisovaných matematických modelů křivek a ploch, konstrukce souvisejících geometrických útvarů a demonstrace jejich vlastností v takovém pořadí, ve kterém jsou uvedeny ve výkladu.

Praha, prosinec 2022

Ivana Linkeová

Kapitola 1

Základní vlastnosti křivek a ploch

V této kapitole uvedeme potřebné pojmy, definice a základní vlastnosti křivek a ploch, se kterými budeme pracovat v celém tomto učebním textu.

1.1 Definice a vlastnosti křivek

Z fyzikálního hlediska je *křivka* dráha pohybujícího se bodu v rovině či prostoru v závislosti na čase. Z geometrického hlediska je křivka jednoparametrická množina *bodů* v prostoru dimenze n , které jsou funkčními hodnotami *bodové funkce jedné proměnné*. Namísto bodů křivky se často uvažují jejich *polohové vektory*, které jsou funkčními hodnotami *vektorové funkce jedné proměnné*.

■ **Definice 1.1 – Bodová, resp. vektorová funkce jedné proměnné.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval reálných čísel. Potom se zobrazení F , resp. \mathbf{F} intervalu I do euklidovského prostoru \mathbb{R}^n , $n > 1$, resp. do jeho vektorového zaměření V^n , $n > 1$, nazývá *bodová funkce jedné proměnné*

$$F(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)], \quad (1.1)$$

resp. *vektorová funkce jedné proměnné*

$$\mathbf{F}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.2)$$

Interval I nazýváme *oborem parametrizace* bodové, resp. vektorové funkce, argument t nazýváme *parametrem*. Každému $t \in I$ je bodovou, resp. vektorovou funkcí přiřazen *bod*, resp. *vektor*. Reálné funkce

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in I, \quad (1.3)$$

se nazývají *souřadnicové funkce* bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné. \square

Souřadnicové funkce bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné jsou reálnými funkcemi jedné proměnné. Bodová, resp. vektorová funkce jedné proměnné je zobecněním reálné funkce jedné proměnné. Snadno lze dokázat následující tvrzení a z nich vyplývající vlastnosti bodové, resp. vektorové funkce jedné proměnné:

- Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, má v bodě $\alpha \in I$ za limitu bod $F_\alpha = [x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)]$, resp. vektor $\mathbf{F}_\alpha = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$, právě když pro limity jejich souřadnicových funkcí platí:

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} x_1(t) = x_1(\alpha), \lim_{t \rightarrow \alpha} x_2(t) = x_2(\alpha), \dots, \lim_{t \rightarrow \alpha} x_n(t) = x_n(\alpha). \quad (1.4)$$

Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, je spojitá v bodě $\alpha \in I$, právě když jsou její souřadnicové funkce v bodě α spojité, tzn., že pro $\alpha \in I$ existují limity (1.4), které jsou rovny funkčním hodnotám souřadnicových funkcí v bodě α .

- Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, je spojitá na intervalu I , právě když jsou její souřadnicové funkce na intervalu I spojité.
- Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, má v bodě $\alpha \in I$ derivaci k -tého řádu (je k -krát diferencovatelná), právě když existují derivace k -tého řádu $x_1^{(k)}(\alpha)$, $x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha)$ jejích souřadnicových funkcí. Derivace $F^{(k)}(\alpha)$ bodové funkce F , resp. derivace $\mathbf{F}^{(k)}(\alpha)$ vektorové funkce \mathbf{F} v bodě $\alpha \in I$ je potom vektor

$$F^{(k)}(\alpha) = \left(x_1^{(k)}(\alpha), x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha) \right), \quad (1.5)$$

resp. vektor

$$\mathbf{F}^{(k)}(\alpha) = \left(x_1^{(k)}(\alpha), x_2^{(k)}(\alpha), \dots, x_n^{(k)}(\alpha) \right). \quad (1.6)$$

- Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, má spojitost k -tého řádu v bodě $\alpha \in I$, právě když jsou derivace jejích souřadnicových funkcí až do k -tého řádu v bodě $\alpha \in I$ spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá v bodě $\alpha \in I$.
- Bodová funkce $F(t)$, $t \in I$, resp. vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in I$, má spojitost k -tého řádu na intervalu I , právě když jsou derivace jejích souřadnicových funkcí až do k -tého řádu na intervalu I spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá na intervalu I .

■ **Definice 1.2 – Křivka.** *Křivka* je každá souvislá podmnožina k prostoru R^n , která je spojitým obrazem intervalu I . V případě, že $n = 2$, resp. $n = 3$ označujeme křivku jako *rovinnou*, resp. *prostorovou*¹.

Je-li analytickou reprezentací rovinné, resp. prostorové křivky bodová funkce (1.1), která je definovaná, spojitá a alespoň jedenkrát diferencovatelná na intervalu I , říkáme, že je rovinná, resp. prostorová křivka k dána *bodovou rovnicí*

$$P(t) = [x(t), y(t)], \quad t \in I, \quad \text{resp.} \quad P(t) = [x(t), y(t), z(t)], \quad t \in I. \quad (1.7)$$

Je-li analytickou reprezentací rovinné, resp. prostorové křivky vektorová funkce (1.2), která je definovaná, C^1 spojitá a alespoň jedenkrát diferencovatelná na intervalu I , říkáme, že je rovinná, resp. prostorová křivka dána *vektorovou rovnicí*

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I. \quad (1.8)$$

Rozepíšeme-li souřadnicové funkce křivky dané bodovou rovnicí (1.7) nebo vektorovou rovnicí (1.8), obdržíme *parametrické rovnice* rovinné, resp. prostorové křivky:

$$\begin{aligned} x &= x(t), & \text{resp.} & & x &= x(t), \\ y &= y(t), \quad t \in I, & & & y &= y(t), \\ & & & & z &= z(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Je-li křivka definována parametrickými rovnicemi (1.9), říkáme, že je *křivka definovaná parametricky*. O rovnicích (1.9) hovoříme jako o *parametrickém vyjádření křivky*.

Je-li interval $I = [a, b]$ uzavřený, hovoříme o *regulárním elementu křivky*. □

¹Z důvodů praktické aplikace nebudeme křivky v prostorech dimenze vyšší než 3 uvažovat.

Poznámka: V souladu s terminologií počítačové grafiky a z důvodů stručnosti budeme nadále termínem *křivka* rozumět regulární element křivky.

V dalších definicích v této části budeme uvažovat pouze prostorovou křivku. Modifikace příslušných vztahů pro rovinnou křivku je zřejmá.

■ **Definice 1.3 – Bod křivky.** Bodem křivky označujeme funkční hodnotu bodové funkce (1.1) pro $\alpha \in [a, b]$

$$P(\alpha) = [x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)], \quad (1.10)$$

resp. koncový bod polohového vektoru, který je funkční hodnotou vektorové funkce (1.2) pro $\alpha \in [a, b]$

$$\mathbf{P}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)). \quad (1.11)$$

Hodnota parametru $t = \alpha$, která označuje polohu bodu na křivce, se nazývá *parametrická (křivočará) souřadnice* bodu křivky.

Bodovou, resp. vektorovou funkcí je definovaná orientace křivky. Počáteční bod křivky má křivočarou souřadnici a , koncový bod křivky má křivočarou souřadnici b . Počáteční a koncový bod křivky označujeme jako *krajní* body křivky. \square

■ **Příklad 1.1 – Bodová, vektorová a parametrické rovnice elipsy.** Pojmy uvedené v definicích 1.1 až 1.3 objasníme na příkladu rovinné křivky – elipsy k zadané souřadnicovými funkcemi

$$\begin{aligned} x &= x(t) = 4 \cos t, \\ y &= y(t) = 3 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bodová funkce $F(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, která zobrazuje interval $[0, 2\pi]$ do dvourozměrného prostoru má tvar

$$F(t) = [4 \cos t, 3 \sin t], \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.13)$$

Elipsa k , která je dána bodovou rovnicí

$$P(t) = [4 \cos t, 3 \sin t], \quad t \in [0, 2\pi],$$

je zobrazena na obr. 1.1 a). Pro hodnoty parametru $t = 0$, resp. $t = 2\pi$ jsou v obrázku vyznačeny funkční hodnoty bodové funkce $F(0)$, resp. $F(2\pi)$, které odpovídají krajním bodům elipsy $P(0) = [4 \cos(0), 3 \sin(0)] = [4, 0]$, resp. $P(2\pi) = [4 \cos(2\pi), 3 \sin(2\pi)] = [4, 0]$. Krajní body elipsy k splývají.

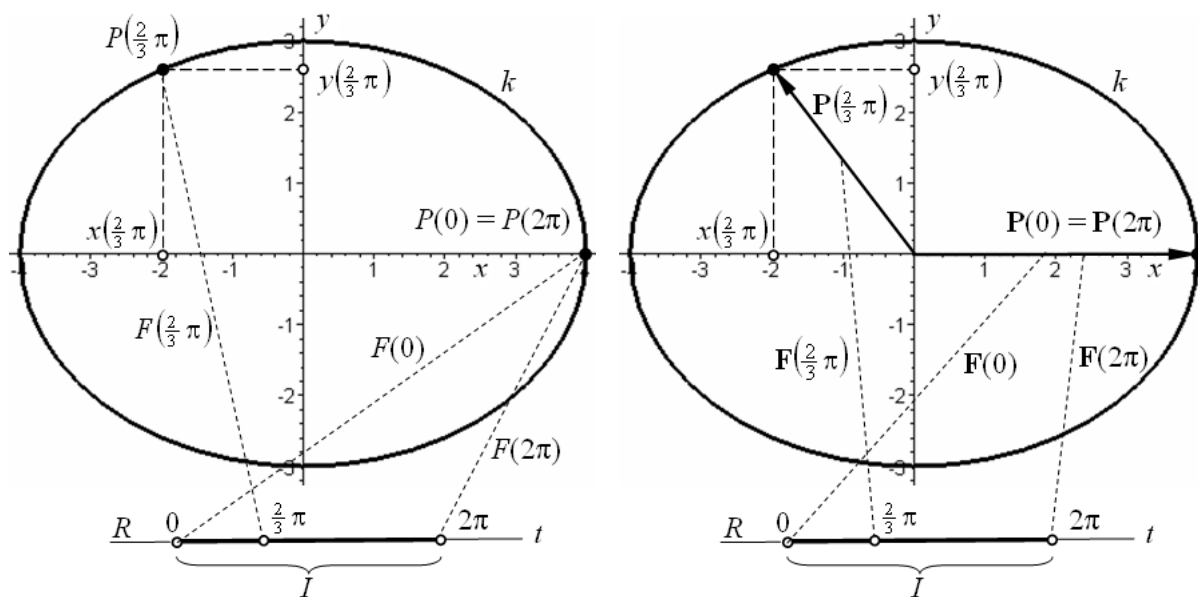
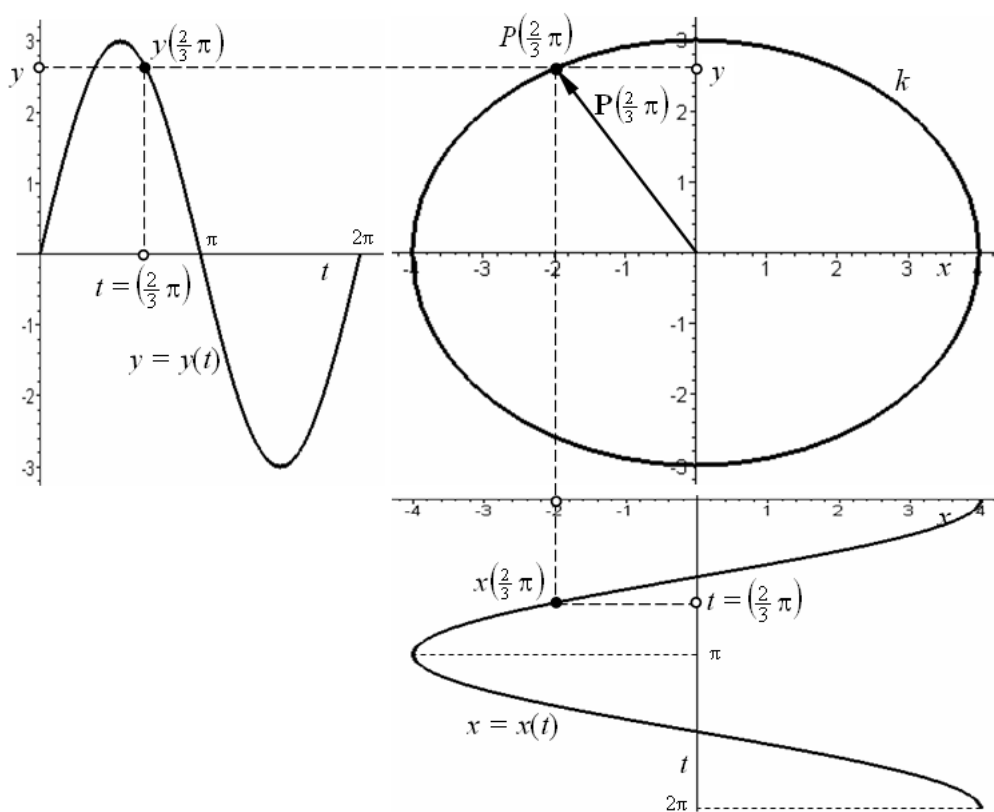
V obr. 1.1 a) je dále pro hodnotu parametru $t = \frac{2}{3}\pi$ vyznačena funkční hodnota bodové funkce $F(\frac{2}{3}\pi)$, která odpovídá bodu elipsy $P(\frac{2}{3}\pi) = [4 \cos(\frac{2}{3}\pi), 3 \sin(\frac{2}{3}\pi)] = [-2, \frac{3}{2}\sqrt{3}]$. Vektorová funkce $\mathbf{F}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, která zobrazuje interval $[0, 2\pi]$ do vektorového zaměření dvourozměrného prostoru, má tvar

$$\mathbf{F}(t) = (4 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.14)$$

Elipsa k , která je dána vektorovou rovnicí

$$\mathbf{P}(t) = (4 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

je zobrazena na obr. 1.1 b). Pro hodnoty parametru $t = 0$, resp. $t = 2\pi$ jsou zde vyznačeny funkční hodnoty vektorové funkce $\mathbf{F}(0)$, resp. $\mathbf{F}(2\pi)$, které jsou polohovými vektory $\mathbf{P}(0) = (4 \cos(0), 3 \sin(0)) = (4, 0)$, resp. $\mathbf{P}(2\pi) = (4 \cos(2\pi), 3 \sin(2\pi)) = (4, 0)$ krajních bodů elipsy k . Polohové vektory krajních bodů elipsy k splývají.

a) Elipsa k daná bodovou rovnicí (1.13)b) Elipsa k daná vektorovou rovnicí (1.14)c) Elipsa k daná parametrickými rovnicemi (1.15)Obrázek 1.1: Bodová, vektorová a parametrické rovnice elipsy k

V obr. 1.1 b) je dále pro hodnotu parametru $t = \frac{2}{3}\pi$ vyznačena funkční hodnota vektorové funkce $\mathbf{F}(\frac{2}{3}\pi)$, která odpovídá polohovému vektoru $\mathbf{P}(\frac{2}{3}\pi) = (4 \cos(\frac{2}{3}\pi), 3 \sin(\frac{2}{3}\pi)) = (-2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ bodu $P(\frac{2}{3}\pi) = [-2, \frac{3}{2}\sqrt{3}]$ elipsy k .

Parametrické rovnice elipsy k dostaneme rozepsáním souřadnicových funkcí bodové funkce (1.13) nebo vektorové funkce (1.14):

$$\begin{aligned}x(t) &= 4 \cos t, \\y(t) &= 3 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}\tag{1.15}$$

Na obr. 1.1 c) je zobrazen graf elipsy k dané parametrickými rovnicemi (1.15) včetně vhodně orientovaných grafů souřadnicových funkcí (1.12). Dosadíme-li do souřadnicových funkcí konkrétní zvolenou hodnotu parametru t , dostaneme souřadnice bodu elipsy k , resp. složky jeho polohového vektoru. Na obr. 1.1 c) je znázorněn bod $P(\frac{2}{3}\pi) = [-2, \frac{3}{2}\sqrt{3}]$, resp. jeho polohový vektor $\mathbf{P}(\frac{2}{3}\pi) = (-2, \frac{3}{2}\sqrt{3})$. \square

Je zřejmé, že bodová, vektorová a parametrické rovnice křivky jsou vzájemně ekvivalentní. V počítačové grafice je zvykem pracovat s vektorovou rovnicí křivky. V souladu s tím budeme nadále křivku označovat $\mathbf{P}(t)$. *Bodem křivky* pro $t = \alpha$, $\alpha \in [a, b]$, budeme nadále rozumět koncový bod polohového vektoru $\mathbf{P}(\alpha)$ a budeme jej označovat stejně jako polohový vektor, tedy $\mathbf{P}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$.

■ **Definice 1.4 – Regulární a singulární bod křivky.** Bod křivky $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, nazýváme *regulárním*, jestliže vektor $\mathbf{P}'(\alpha) = (x'(\alpha), y'(\alpha), z'(\alpha))$ je nenulový a odpovídá-li mu jen jedna hodnota parametru $t = \alpha$ z (a, b) . Každý jiný bod nazýváme *singulárním bodem křivky*. Splývající počáteční a koncový bod křivky není považován za singulární. \square

■ **Definice 1.5 – Inflexní bod křivky.** Bod křivky $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, nazýváme *inflexním*, jestliže vektory $\mathbf{P}'(\alpha) = (x'(\alpha), y'(\alpha), z'(\alpha))$ a $\mathbf{P}''(\alpha) = (x''(\alpha), y''(\alpha), z''(\alpha))$ jsou lineárně závislé. \square

V inflexním bodě přechází křivka z jedné strany tečny (viz definice 1.6) na druhou, jak je patrné z obr. 1.2 a).

■ **Definice 1.6 – Tečný vektor, vektor binormály a vektor hlavní normály v bodě křivky.** Derivace vektorové funkce

$$\mathbf{P}'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in [a, b]\tag{1.16}$$

je vektorová funkce, která vyjadřuje pro $\alpha \in [a, b]$ *tečný vektor křivky* $\mathbf{P}(t)$ v jejím bodě $\mathbf{P}(\alpha)$:

$$\mathbf{P}'(\alpha) = (x'(\alpha), y'(\alpha), z'(\alpha)).\tag{1.17}$$

Orientace tečného vektoru je shodná s orientací křivky. Jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}(\alpha)$ v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$ křivky $\mathbf{P}(t)$ je dán

$$\mathbf{t}(\alpha) = \frac{\mathbf{P}'(\alpha)}{|\mathbf{P}'(\alpha)|}.\tag{1.18}$$

Přímka určená bodem $\mathbf{P}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{t}(\alpha)$ se nazývá *tečna* t_α křivky $\mathbf{P}(t)$ v jejím bodě $\mathbf{P}(\alpha)$.

Vektorový součin první a druhé derivace vektorové funkce křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$ v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, se nazývá *vektor binormály*. Jednotkový vektor binormály $\mathbf{b}(\alpha)$ je dán

$$\mathbf{b}(\alpha) = \frac{\mathbf{P}'(\alpha) \times \mathbf{P}''(\alpha)}{|\mathbf{P}'(\alpha) \times \mathbf{P}''(\alpha)|}. \quad (1.19)$$

Přímka určená bodem $\mathbf{P}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{b}(\alpha)$ se nazývá *binormála* b_α křivky $\mathbf{P}(t)$ v neinflexním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$.

Vektorový součin vektoru binormály a tečného vektoru křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$ v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, se nazývá *vektor hlavní normály*. Jednotkový vektor hlavní normály $\mathbf{n}(\alpha)$ je dán

$$\mathbf{n}(\alpha) = \mathbf{b}(\alpha) \times \mathbf{t}(\alpha). \quad (1.20)$$

Přímka určená bodem $\mathbf{P}(\alpha)$ a směrovým vektorem $\mathbf{n}(\alpha)$ se nazývá *hlavní normála* n_α křivky $\mathbf{P}(t)$ v jejím bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. \square

■ **Definice 1.7 – Uzlový a vícenásobný bod křivky.** Jestliže existují čísla

$$\alpha_1, \alpha_2 \in (a, b), \alpha_1 \neq \alpha_2,$$

pro která platí $\mathbf{P}(\alpha_1) = \mathbf{P}(\alpha_2)$, tj. bod křivky určený křivočarou souřadnicí α_1 je totožný s bodem křivky určeným křivočarou souřadnicí α_2 , nazývá se takový bod *uzlovým bodem křivky*. Jestliže existuje $k > 2$ takových čísel z I , nazývá se takový bod *k-násobným bodem křivky*. \square

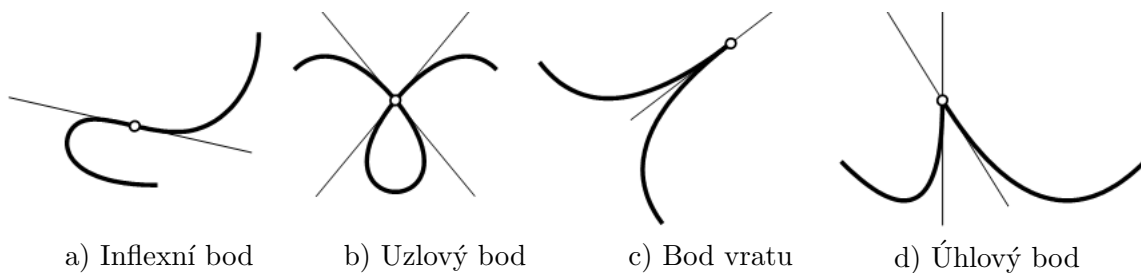
V uzlovém bodě má křivka dvě protínající se tečny, viz obr. 1.2 b).

■ **Definice 1.8 – Bod vratu.** Bod křivky, ve kterém se mění orientace tečného vektoru, se nazývá *bod vratu*. \square

V bodě vratu má křivka dvě splývající tečny, viz obr. 1.2 c).

■ **Definice 1.9 – Úhlový bod.** Bod křivky, ve kterém se mění směr tečny o úhel $\gamma < 180$, se nazývá *úhlový bod*. \square

V úhlovém bodě má křivka dvě protínající se tečny svírající úhel γ , viz obr. 1.2 d).



Obrázek 1.2: Klasifikace bodů křivky

Derivace vektorové funkce křivky a jejich funkční hodnoty jsou v počítačové grafice velmi důležité z hlediska modelování tvaru a napojování křivek. V souladu s terminologií počítačové grafiky budeme nadále termínem *k-tá derivace křivky* rozumět vektorovou funkci, která je k -tou derivací vektorové funkce křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$. První tři derivace křivky budeme označovat $\mathbf{P}'(t)$, $\mathbf{P}''(t)$, $\mathbf{P}'''(t)$. Funkční hodnotu k -té derivace křivky pro hodnotu $t = \alpha$, $\alpha \in [a, b]$, budeme nazývat *vektor k-té derivace křivky*.

- **Příklad 1.2 – Derivace elipsy.** Pro elipsu k danou vektorovou rovnicí (1.14) z příkladu 1.1 vyjádříme její první tři derivace a pro několik hodnot parametru vypočteme a zobrazíme vektory těchto derivací.

První, resp. druhá, resp. třetí derivace elipsy k má tvar

$$\mathbf{P}'(t) = (-4 \sin t, 3 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

resp.

$$\mathbf{P}''(t) = (-4 \cos t, -3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

resp.

$$\mathbf{P}'''(t) = (4 \sin t, -3 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vektory těchto derivací vektorové funkce elipsy k pro hodnoty parametru $t = \frac{i}{3}\pi$, $i = 0, 1, \dots, 6$, jsou uvedeny v následující tabulce. Složky vektorů jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{3}$	$t = \frac{2}{3}\pi$	$t = \pi$	$t = \frac{4}{3}\pi$	$t = \frac{5}{3}\pi$	$t = 2\pi$
$\mathbf{P}(t)$	(4.00, 0.00)	(2.00, 2.60)	(-2.00, 2.60)	(-4.00, 0.00)	(-2.00, -2.60)	(2.00, -2.60)	(4.00, 0.00)
$\mathbf{P}'(t)$	(0.00, 3.00)	(-3.46, 1.50)	(-3.46, -1.50)	(0.00, -3.00)	(3.46, -1.50)	(3.46, 1.50)	(0.00, 3.00)
$\mathbf{P}''(t)$	(-4.00, 0.00)	(-2.00, -2.60)	(2.00, -2.60)	(4.00, 0.00)	(2.00, 2.60)	(-2.00, 2.60)	(-4.00, 0.00)
$\mathbf{P}'''(t)$	(0.00, -3.00)	(3.46, -1.50)	(3.46, 1.50)	(0.00, 3.00)	(-3.46, 1.50)	(-3.46, -1.50)	(0.00, -3.00)

Na obr. 1.3 je zobrazena elipsa k , body $\mathbf{P}(\frac{i}{3}\pi)$ a v každém bodě trojice vektorů $\mathbf{P}'(\frac{i}{3}\pi)$,

$\mathbf{P}''(\frac{i}{3}\pi)$ a $\mathbf{P}'''(\frac{i}{3}\pi)$, $i = 0, 1, \dots, 6$. Vektory derivací jsou odlišeny typem šipky.

Pro jednotný popis vnitřních vlastností křivky v okolí regulárního bodu se používá *Frenetův průvodní trojhran* křivky.

- **Definice 1.10 – Frenetův průvodní trojhran křivky.** Normovaný pravoúhlý a pravotočivý (kladně orientovaný) trojhran tvořený v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, jednotkovým tečným vektorem $\mathbf{t}(\alpha)$, jednotkovým vektorem hlavní normály $\mathbf{n}(\alpha)$ a jednotkovým vektorem binormály $\mathbf{b}(\alpha)$ se nazývá *Frenetův průvodní trojhran křivky*. \square

- **Definice 1.11 – Normálová, rektifikační a oskulační rovina.** Rovina určená hlavní normálou a binormálou v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$ křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, se nazývá *normálová rovina* ν_α . Rovina určená binormálou a tečnou v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in I$ křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, se nazývá *rektifikační rovina* ρ_α . Rovina určená tečnou a hlavní normálou v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$ křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, se nazývá *oskulační rovina* ω_α . \square

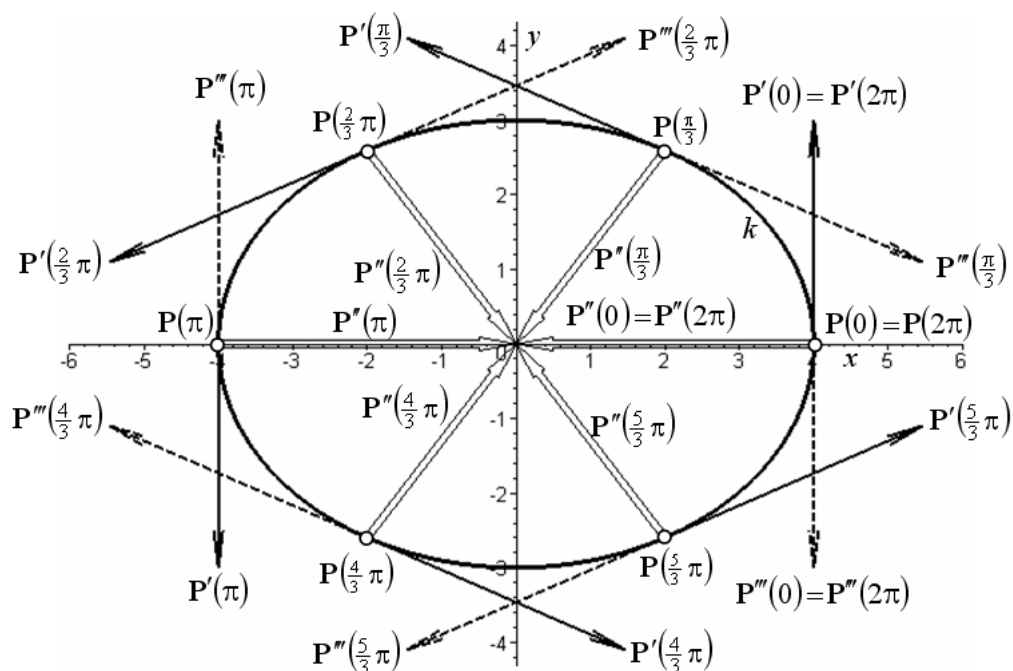
Normálová rovina je kolmá k tečně, rektifikační rovina je kolmá k hlavní normále a oskulační rovina je kolmá k binormále.

- **Příklad 1.3 – Frenetův průvodní trojhran elipsy.** Budeme opět uvažovat elipsu k z příkladu 1.1. Vektorové rovnice elipsy k a jejích prvních dvou derivací jsou:

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (4 \cos t, 3 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\mathbf{P}'(t) = (-4 \sin t, 3 \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi],$$

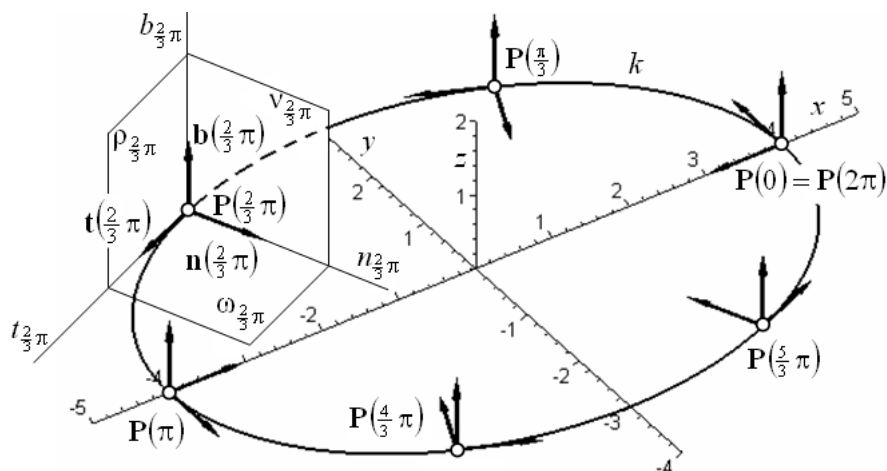
$$\mathbf{P}''(t) = (-4 \cos t, -3 \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Obrázek 1.3: Vektory prvních tří derivací elipsy k

□

Vektorové rovnice jednotkového tečného vektoru $\mathbf{t}(t)$, jednotkového vektoru hlavní normály $\mathbf{n}(t)$ a jednotkového vektoru binormály $\mathbf{b}(t)$ jsou následující:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(t) &= \left(\frac{-4 \sin t}{\sqrt{-7 \cos^2 t + 16}}, \frac{3 \cos t}{\sqrt{-7 \cos^2 t + 16}}, 0 \right), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \mathbf{b}(t) &= (0, 0, 1), \quad t \in [0, 2\pi], \\ \mathbf{n}(t) &= \left(\frac{-3 \cos t}{\sqrt{-7 \cos^2 t + 16}}, \frac{-4 \sin t}{\sqrt{-7 \cos^2 t + 16}}, 0 \right), \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Obrázek 1.4: Frenetův průvodní trojhran elipsy k

Na obr. 1.4 je znázorněna elipsa k a její Frenetův průvodní trojhran v několika bodech pro hodnoty parametru $t = \frac{i}{3}\pi$, $i = 0, 1, \dots, 6$. Z důvodu zachování čitelnosti obrázku jsou vektory trojhranu popsány pouze pro hodnotu parametru $t = \frac{2}{3}\pi$, tedy v bodě $\mathbf{P}(\frac{2}{3}\pi)$. Pro tuto hodnotu parametru je v obrázku také znázorněna tečna $t_{\frac{2}{3}\pi}$, hlavní normála $n_{\frac{2}{3}\pi}$, binormála $b_{\frac{2}{3}\pi}$, normálová rovina $\nu_{\frac{2}{3}\pi}$, rektifikační rovina $\rho_{\frac{2}{3}\pi}$ a oskulační rovina $\omega_{\frac{2}{3}\pi}$. \square

Pomocí Frenetova průvodního trojhranu křivky vyjadřujeme vnitřní vlastnosti křivky v okolí regulárního bodu $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, a to *první křivost – flexi*, která v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$ charakterizuje odchylku křivky k od tečny t_α a *druhou křivost – torzi*, která v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$ charakterizuje odchylku křivky k od oskulační roviny ω_α .

■ **Definice 1.12 – První křivost křivky.** *První křivost* ${}^1k(\alpha)$ v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, je nezáporné číslo

$${}^1k(\alpha) = \frac{|\mathbf{P}'(\alpha) \times \mathbf{P}''(\alpha)|}{|\mathbf{P}'(\alpha)|^3}, \quad (1.21)$$

kde $|\mathbf{P}'(\alpha) \times \mathbf{P}''(\alpha)|$ je velikost vektorového součinu první a druhé derivace křivky a $|\mathbf{P}'(\alpha)|$ je velikost tečného vektoru křivky v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. Číslo

$$r(\alpha) = \frac{1}{{}^1k(\alpha)} \quad (1.22)$$

nazýváme *poloměrem křivosti* v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. Bod $\mathbf{S}(\alpha) = \mathbf{P}(\alpha) + r(\alpha)\mathbf{n}(\alpha)$ ležící v oskulační rovině ω_α na polopřímce určené bodem $\mathbf{P}(\alpha)$ a vektorem $\mathbf{n}(\alpha)$ ve vzdálenosti $r(\alpha)$ od bodu $\mathbf{P}(\alpha)$ se nazývá *střed křivosti* v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. Kružnice se středem v bodě $\mathbf{S}(\alpha)$ a poloměrem $r(\alpha)$ se nazývá *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$.

Platí-li ${}^1k(t) = 0$, $t \in [a, b]$, je křivka $\mathbf{P}(t)$ přímka. \square

■ **Definice 1.13 – Druhá křivost křivky.** *Druhá křivost* ${}^2k(\alpha)$ v neinflexním bodě $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$, křivky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, je číslo vyjádřené vztahem

$${}^2k(\alpha) = \frac{[\mathbf{P}'(\alpha)\mathbf{P}''(\alpha)\mathbf{P}'''(\alpha)]}{|\mathbf{P}'(\alpha) \times \mathbf{P}''(\alpha)|}, \quad (1.23)$$

kde $[\mathbf{P}'(\alpha)\mathbf{P}''(\alpha)\mathbf{P}'''(\alpha)]$ je smíšený součin vektorů první, druhé a třetí derivace křivky v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. Jestliže ${}^2k(t) = 0$, $t \in [a, b]$, je křivka $\mathbf{P}(t)$ rovinná. \square

■ **Příklad 1.4 – První křivost elipsy.** Pro elipsu k z příkladu 1.3 je první křivost

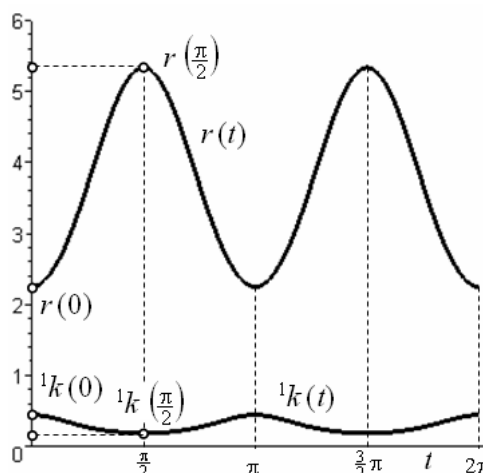
$${}^1k(t) = \frac{|(-4 \sin t, 3 \cos t, 0) \times (-4 \cos t, -3 \sin t, 0)|}{|(-4 \sin t, 3 \cos t, 0)|^3} = \frac{12}{(\sqrt{16 - 7 \cos^2 t})^3}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (1.24)$$

a poloměr křivosti

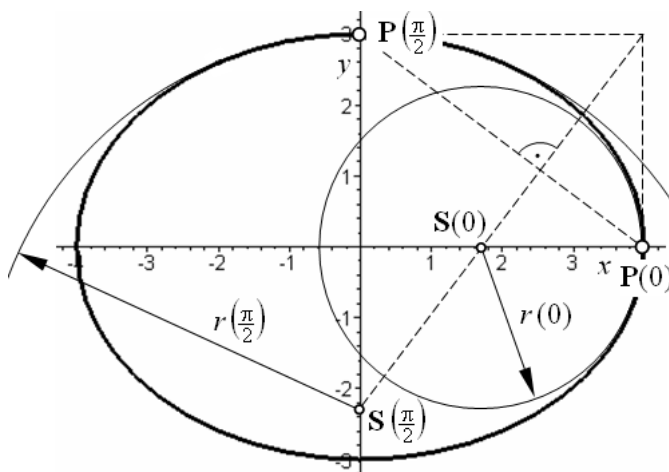
$$r(t) = \frac{(\sqrt{16 - 7 \cos^2 t})^3}{12}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.25)$$

Grafy funkcí (1.24) a (1.25) jsou zobrazeny na obr. 1.5.

Dosadíme-li $t = 0$, resp. $t = \frac{\pi}{2}$ do (1.25), obdržíme poloměr $r(0) = \frac{9}{4}$ oskulační kružnice v hlavním vrcholu $\mathbf{P}(0)$ se středem v bodě $\mathbf{S}(0) = (\frac{7}{4}, 0)$, resp. poloměr $r(\frac{\pi}{2}) = \frac{16}{3}$ oskulační kružnice ve vedlejším vrcholu $\mathbf{P}(\frac{\pi}{2})$ se středem v bodě $\mathbf{S}(\frac{\pi}{2}) = (0, -\frac{7}{3})$, viz obr. 1.6.



Obrázek 1.5: Graf první křivosti a poloměru křivosti elipsy k



Obrázek 1.6: Oskulační kružnice elipsy k □

1.2 Napojování křivek

Při matematickém modelování křivky obecného tvaru nevystačíme s jedinou křivkou danou jedinou vektorovou rovnicí. Složitější tvary křivek se modelují z několika dílčích křivek, které jsou napojeny svými krajními body. Kvalita napojení musí vyhovovat technické aplikaci, ve které je křivka použita.

Než se budeme zabývat spojitostí napojení dvou křivek, uvedeme si definici spojitosti křivky, která vyplývá ze spojitosti její vektorové funkce.

■ **Definice 1.14 – Spojitost křivky.** Křivka $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, má spojitost k -tého řádu v bodě $\alpha \in [a, b]$, právě když má její vektorová funkce v tomto bodě spojitost k -tého řádu. O takové křivce říkáme, že je C^k spojitá v bodě $\alpha \in [a, b]$.

Křivka $\mathbf{P}(t)$, $t \in [a, b]$, má spojitost k -tého řádu na $[a, b]$, právě když má její vektorová funkce na $[a, b]$ spojitost k -tého řádu. O takové křivce říkáme, že je C^k spojitá na $[a, b]$. □

■ **Definice 1.15 – Parametrická spojitost napojení dvou křivek.** Nechť je dána křivka $\mathbf{P}(t)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, jejíž souřadnicové funkce jsou C^k spojitě na $[a, b]$. Nechť je dále dána křivka $\mathbf{R}(s)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{R}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [c, d]$, jejíž souřadnicové funkce jsou C^k spojitě na $[c, d]$. Říkáme, že křivka $\mathbf{R}(s)$ je napojena svým počátečním bodem na koncový bod křivky $\mathbf{P}(t)$ s C^k spojitostí, popř. že jsou tyto křivky C^k spojitě napojeny, jestliže platí

$$\mathbf{P}^{(i)}(b) = \mathbf{R}^{(i)}(c), \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (1.26)$$

Takto definovaná spojitost napojení dvou křivek se označuje jako *parametrická spojitost k -tého řádu*. □

Parametrická spojitost C^k vyjadřuje, že v bodě napojení dvou křivek jsou totožné vektory prvních k derivací obou křivek, tj. jejich počátek (bod napojení), směr, orientace i velikost. Méně přísné požadavky na napojení klade tzv. *geometrická spojitost*.

■ **Definice 1.16 – Geometrická spojitost napojení dvou křivek.** Nechť je dána křivka $\mathbf{P}(t)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, jejíž souřadnicové funkce jsou

nejméně C^1 , resp. C^2 spojitě na $[a, b]$. Nechť je dále dána křivka $\mathbf{R}(s)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{R}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [c, d]$, jejíž souřadnicové funkce jsou nejméně C^1 , resp. C^2 spojitě na $[c, d]$. Říkáme, že křivka $\mathbf{R}(s)$ je napojena svým počátečním bodem na koncový bod křivky $\mathbf{P}(t)$ s G^1 , resp. s G^2 spojitostí, popř. že jsou tyto křivky G^1 , resp. G^2 *spojitě napojeny*, jestliže platí

$$\mathbf{P}'(b) = \lambda \cdot \mathbf{R}'(c), \quad \lambda \in R, \quad (1.27)$$

resp.

$${}^1k_{\mathbf{P}}(b) = {}^1k_{\mathbf{R}}(c), \quad (1.28)$$

kde ${}^1k_{\mathbf{P}}(b)$, resp. ${}^1k_{\mathbf{R}}(c)$ je první křivost křivky $\mathbf{P}(t)$, resp. $\mathbf{R}(s)$ v bodě napojení. Takto definovaná spojitost napojení dvou křivek se označuje jako *geometrická spojitost 1.*, resp. *2. řádu*. \square

Vzhledem k tomu, že tečný vektor $\mathbf{R}'(c)$ je λ -násobkem tečného vektoru $\mathbf{P}'(b)$, mají G^1 spojitě napojené křivky totožnou tečnu v bodě napojení. G^2 spojitě napojené křivky mají v bodě napojení totožnou první křivost, tj. totožnou oskulační kružnici. Geometrickou spojitost vyšších řádů nebudeme zavádět. Příklady na napojování křivek jsou uvedeny v kapitole 2.

1.2.1 Nástroje analýzy a kontroly návrhu křivek v Rhinu

Křivka – Rhino disponuje řadou příkazů pro kreslení křivek obecného tvaru, které jsou detailně popsány v částech 2.2.5, 2.3.4, 2.4.2 a 2.5.4. Zde si uvedeme postup provedení příkazu *Elipsa*, kterým bychom nakreslili elipsu z příkladů v této části. Příkaz: *Elipsa: střed* → Střed elipsy: z klávesnice zadat 0,0,0 → Enter → Konec první osy: z klávesnice zadat w4,0,0 → Enter → Konec druhé osy: z klávesnice zadat w0,3,0.

Bod křivky – Příkaz: *Bod* → Umístění bodu: zapnout *Uchopování objektů: Na křivce* → Vyberte křivku: kliknout na křivku (zaměrovač je omezen na pohyb po křivce) → Umístění bodu: kliknout na křivku do místa, ve kterém chceme nakreslit bod. V místě posledního kliknutí se nakreslí bod jako samostatná entita.

Poznámka: Nástroj *Uchopování uzlů* se netýká uchopení uzlových bodů křivky, ale těch bodů na segmentované křivce, ve kterých se mění analytické vyjádření křivky. Uzlový bod křivky navíc není považován za průsečík, a proto jej nelze uchopit ani pomocí nástroje *Uchopování průsečíků*.

Počáteční bod křivky – Příkaz: *Označit počátek křivky* → Vyberte křivky pro označení počátku: kliknout na křivku → Enter. V počátečním bodě křivky se nakreslí bod.

Koncový bod křivky – Příkaz: *Označit konec křivky* → Vyberte křivky pro označení konce: kliknout na křivku → Enter. V koncovém bodě křivky se nakreslí bod.

Poznámka: Označení krajních bodů křivky pomáhá určit orientaci křivky.

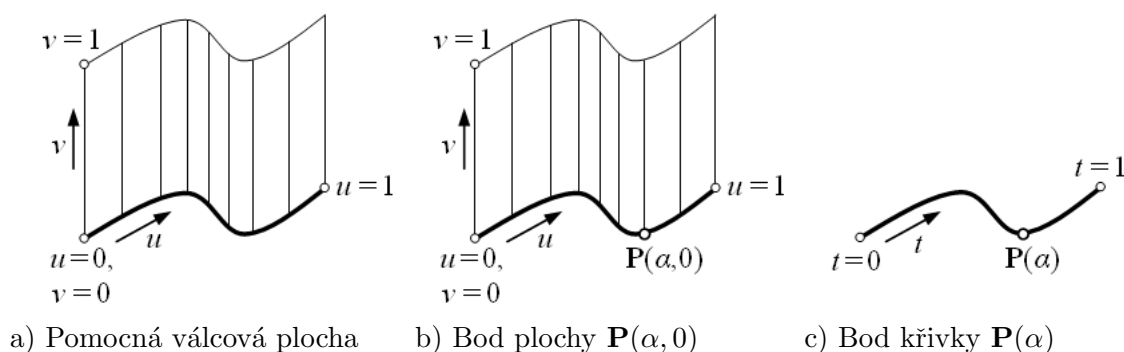
Bod křivky pro konkrétní hodnotu parametru – Bod na křivce, jehož křivočará souřadnice je předem zvolená hodnota, nelze nakreslit přímo, neboť potřebný příkaz pro křivky není v Rhinu k dispozici. My ale využijeme příkaz *Bod z uv souřadnic*, který je určen pro plochy, a zmíněný nedostatek obejdeme.

Nejprve vytvoříme pomocnou válcovou plochu, jejíž řídicí křivkou je právě ta křivka, na které chceme nakreslit bod $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$. Příkaz: *Vytáhnout přímo* → Vyberte křivky pro vytažení: kliknout na křivku → Enter → Vzdálenost vytažení: zadat výšku válcové

plochy z klávesnice nebo kliknutím. Směr parametru u je podél řídicí křivky válcové plochy, směr parametru v určují povrchy válcové plochy, viz obr. 1.7 a).

Potom nakreslíme bod o zvolené křivočaré souřadnici příkazem *Bod z uv souřadnic* → Vyberte plochu pro vyhodnocení: v příkazovém řádku zvolit *VytvořitBod=Ano*, *Normalizovaná=Ano* → kliknout na válcovou plochu → Zadejte hodnotu U mezi 0.0 až 1.0: zadat zvolenou hodnotu α → Enter → Zadejte hodnotu V mezi 0.0 až 1.0: zadat 0 → Enter, viz obr. 1.7 b). V bodě křivky $\mathbf{P}(\alpha)$ se nakreslí bod jako samostatná entita.

Pomocnou válcovou plochu nakonec vymažeme, viz obr. 1.7 c).



Obrázek 1.7: Konstrukce bodu $\mathbf{P}(\alpha)$ na křivce $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$

Kartézské souřadnice bodu křivky – Příkaz: *Vyhodnotit bod* → zapnout *Uchopování bodů* → Vyberte bod pro vyhodnocení: kliknout do bodu na křivce, jehož kartézské souřadnice chceme určit. V příkazovém řádku se zobrazí kartézské souřadnice bodu.

Tečna ke křivce – Příkaz: *Úsečka: tečna z křivky* → Počátek úsečky: v příkazovém řádku zvolit *NaOběStrany* → kliknout na křivku v budoucím bodě dotyku tečny → Enter → Konec úsečky: kliknout do koncového bodu tečny. Nakreslí se tečna jako úsečka se středem v bodě dotyku.

Hlavní normála rovinné křivky – Příkaz: *Úsečka: Kolmice z křivky* → Počátek úsečky: v příkazovém řádku zvolit *NaOběStrany* → kliknout na rovinnou křivku v bodě, ve kterém chceme konstruovat hlavní normálu → Enter → Konec úsečky: kliknout do koncového bodu hlavní normály. Nakreslí se hlavní normála jako úsečka se středem v bodě kliknutí na křivku.

Hlavní normála prostorové křivky – Hlavní normálu prostorové křivky konstruujeme nepřímo. Nejprve nakreslíme oskulační kružnici (viz dále) v bodě, ve kterém chceme konstruovat hlavní normálu. Vlastní hlavní normálu zkonstruujeme příkazem *Úsečka: z bodu v polovině* → Střed úsečky: kliknout do bodu dotyku oskulační kružnice s křivkou → Konec úsečky: zapnout *Uchopování středů* → kliknout na oskulační kružnici. Nakreslí se hlavní normála jako úsečka se středem v bodě dotyku oskulační kružnice s křivkou.

Poznámka: Aplikujeme-li příkaz *Úsečka: Kolmice z křivky* na prostorovou křivku, nakreslí se normála (kolmá k tečně a ležící v normálové rovině křivky), ale nikoliv hlavní normála (průsečnice normálové a oskulační roviny) podle definice 1.6.

Binormála prostorové křivky – Binormálu prostorové křivky konstruujeme nepřímo jako průsečnici normálové roviny (viz dále) a rektifikační roviny (viz dále) příkazem: *Průsečík*

objektů: Vyberte objekty pro výpočet průsečíku: kliknout na normálovou rovinu a na rektifikační rovinu → Enter. Nakreslí se binormála jako úsečka.

Normálová rovina křivky – Normálovou rovinu konstruujeme nepřímou. Nejprve vytvoříme její hranici příkazem: *Kružnice: kolem křivky*: Střed kružnice → kliknout na křivku v bodě, ve kterém chceme konstruovat normálovou rovinu → Poloměr: kliknout do koncového bodu poloměru. Nakreslí se kružnice, která leží v normálové rovině křivky se středem v průsečíku normálové roviny s křivkou. Poté hranici vyplníme rovinnou plochou příkazem: *Plocha z rovinných křivek* → Vyberte rovinné křivky: kliknout na kružnici → Enter. Nakreslí se normálová rovina jako kruh.

Oskulační rovina – Oskulační rovinu konstruujeme nepřímou. Nejprve vytvoříme oskulační kružnici (viz dále) v bodě, ve kterém chceme konstruovat oskulační rovinu. Oskulační kružnice tvoří hranici oskulační roviny. Tuto hranici vyplníme rovinnou plochou příkazem: *Plocha z rovinných křivek* → Vyberte rovinné křivky: kliknout na kružnici → Enter. Nakreslí se oskulační rovina jako kruh.

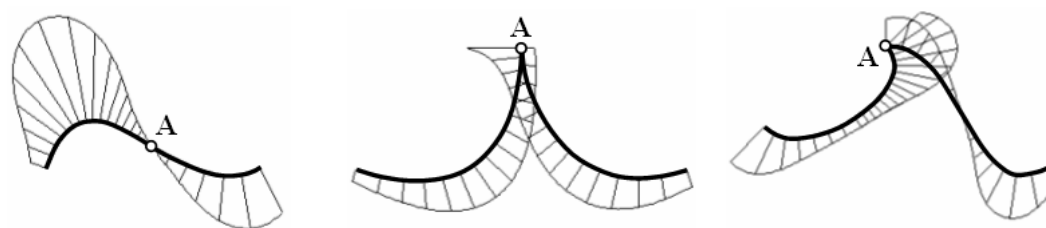
Rektifikační rovina – Rektifikační rovinu konstruujeme nepřímou. Nejprve zkonstruujeme hlavní normálu (viz výše). Poté nakreslíme kružnici příkazem: *Kružnice: kolem křivky* → Střed kružnice: zapnout *Uchopování koncových bodů* → kliknout do libovolného krajního bodu hlavní normály → Poloměr: kliknout do koncového bodu poloměru. Tuto kružnici posuneme příkazem *Přesunout* → Vyberte objekty pro přesun: kliknout na kružnici → Enter → Výchozí bod přesunutí: kliknout do středu kružnice v koncovém bodě hlavní normály → Cílový bod přesunutí: kliknout do průsečíku normály s křivkou. Kružnice nyní tvoří hranici rektifikační roviny, kterou vyplníme rovinnou plochou příkazem: *Plocha z rovinných křivek* → Vyberte rovinné křivky: kliknout na kružnici → Enter. Nakreslí se rektifikační rovina jako kruh.

Graf první křivosti křivky – Příkaz: *Graf křivosti zapnout* → Vyberte objekty pro zobrazení grafu křivosti → kliknout na křivku → Enter → v dialogovém okně *Graf křivosti* nastavit měřítko a hustotu grafu. Podél křivky se zobrazí graf její první křivosti jako spojnice koncových bodů *normálových úseček* (tj. úseček ležících na normálách ke křivce). Délka normálové úsečky je úměrná první křivosti křivky v průsečíku normálové úsečky s křivkou.

Z grafu první křivosti křivky lze poznat, zda má křivka inflexní bod, bod vratu nebo úhlový bod. V inflexním bodě přechází graf křivosti z jedné strany křivky na druhou, viz obr. 1.8 a). V bodě vratu leží normálové úsečky na téže přímce, neboť se v tomto bodě mění pouze orientace tečného vektoru, nikoliv jeho směr daný tečnou, viz obr. 1.8 b). Je-li na křivce *úhlový bod*, neleží normálové úsečky na téže přímce, neboť tečny v úhlovém bodě se protínají pod určitým úhlem, viz obr. 1.8 c).

Poloměr křivosti – Příkaz: *Poloměr* → vyberte na křivce bod pro měření poloměru: kliknout na křivku → v příkazovém řádku se vypíše velikost poloměru křivosti křivky v bodě kliknutí.

Oskulační kružnice – Příkaz: *Hlavní křivosti* → Vyberte křivku nebo plochu pro měření křivosti: kliknout na křivku → Vyberte na křivce bod pro měření křivosti: v příkazovém řádku zvolit *ZanechatZnačku=Ano* → kliknout na křivku do bodu, ve kterém chceme zkonstruovat oskulační kružnici → Enter. Nakreslí se oskulační kružnice křivky v bodě kliknutí. V příkazovém řádku se zobrazí následující informace: hodnota parametru α , kartézské souřadnice bodu $\mathbf{P}(\alpha)$, složky tečného vektoru, kartézské souřadnice středu oskulační kružnice a poloměr křivosti křivky ve vybraném bodě



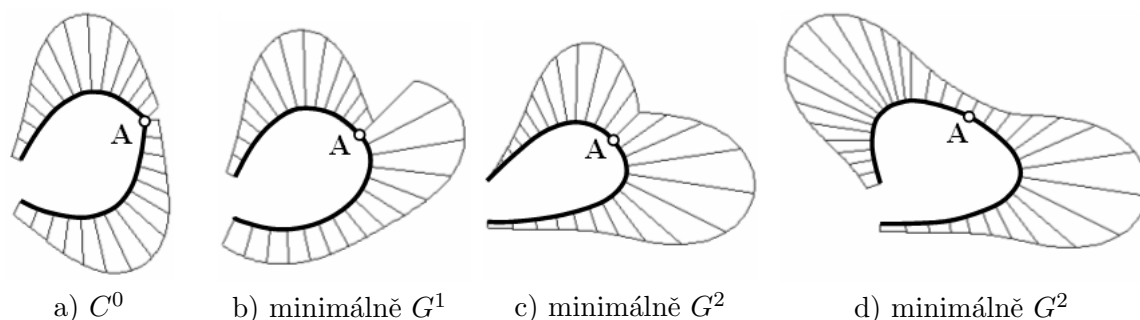
a) Křivka s inflexním bodem b) Křivka s bodem vratu c) Křivka s úhlovým bodem

Obrázek 1.8: Klasifikace bodů křivky pomocí grafu křivosti

Poznámka: U relativně velkých objektů se mohou nakreslit pouze části oskulačních kružnic. Pokud s nimi budeme pracovat dále jako s hranicí oskulační roviny, je třeba nejprve tuto hranici uzavřít příkazem *Prodloužit křivku obloukem do bodu* → Vyberte křivku pro prodloužení: kliknout na oskulační kružnici poblíž jejího konce → Konec prodloužení: zapnout *Uchopování koncových bodů* → kliknout na oskulační kružnici poblíž jejího druhého konce. Oskulační kružnice se uzavře.

Spojité napojení dvou křivek – Příkaz: *Geometrická spojitost* → Vyberte první křivku poblíž jejího konce: kliknout na první křivku → Vyberte druhou křivku poblíž jejího konce: kliknout na druhou křivku. V příkazovém řádku se vypíše, zda jsou křivky G^0 (je totožná s C^0 spojitostí), G^1 nebo G^2 spojitě. Parametrickou spojitost C^1 nebo C^2 současnými nástroji v Rhinu diagnostikovat nelze.

Je-li zobrazen graf křivosti obou křivek, lze z jeho tvaru poznat, zda jsou křivky C^0 spojitě napojené, minimálně G^1 spojitě napojené a minimálně G^2 spojitě napojené, viz obr. 1.9.



a) C^0

b) minimálně G^1

c) minimálně G^2

d) minimálně G^2

Obrázek 1.9: Diagnostika spojitosti napojení dvou křivek pomocí grafu křivosti

Při C^0 spojitosti dvou křivek leží normálové úsečky v bodě napojení na různých přímkách, viz obr. 1.9 a). Při G^1 spojitosti leží normálové úsečky na společné přímce, avšak jejich délka se mění skokem, viz obr. 1.9 b). Je-li napojení G^2 spojitě, jsou spojitě i grafy křivosti obou křivek, viz obr. 1.9 c) a d).

Poznámka: Pokud by byly křivky na obr. 1.9 b) napojeny s C^1 spojitostí, popř. křivky na obr. 1.9 c) a d) s C^2 spojitostí, graf křivosti by vypadal stejně, proto uvádíme *minimálně*.

- **Cvičení 1.1** V Rhinu nakreslete elipsu z příkladu 1.1. Na elipse nakreslete body pro $t = \frac{i}{6}$, $i = 0, 1, \dots, 5$. Zjistěte kartézské souřadnice těchto bodů a zkontrolujte je podle hodnot

uvedených v tabulce na str. 15. V každém z těchto bodů vymodelujte Frenetův průvodní trojhran elipsy podle obr. 1.4. Dále sestrojte oskulační kružnice v hlavním a vedlejším vrcholu elipsy podle příkladu 1.4 a zobrazte graf křivosti elipsy i oskulačních kružnic. Co můžeme říci o délce normálových úseček grafu křivosti elipsy a oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy?

1.3 Definice a vlastnosti ploch

Plocha je dvouparametrická množina bodů v prostoru R^3 , které jsou funkčními hodnotami *bodové funkce dvou proměnných*, místo nichž, stejně jako u křivky, budeme uvažovat koncové body jejich *polohových vektorů*, které jsou funkčními hodnotami *vektorové funkce dvou proměnných*. Z následujících definic tedy vynecháme bodovou funkci dvou proměnných.

■ **Definice 1.17 – Vektorová funkce dvou proměnných.** Nechť $I \subset R^2$ je neprázdňá souvislá oblast. Potom zobrazení \mathbf{F} oblasti I do vektorového zaměření V^3 euklidovského prostoru R^3 se nazývá *vektorová funkce dvou proměnných*

$$\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \quad (1.29)$$

Argumenty u, v nazýváme *parametry plochy*. Každé dvojici $(u, v) \in I$ je vektorovou funkcí přiřazen vektor. Reálné funkce

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in I \quad (1.30)$$

se nazývají *souřadnicové funkce* vektorové funkce dvou proměnných. □

Souřadnicové funkce vektorové funkce dvou proměnných jsou reálnými funkcemi dvou proměnných. Vzhledem k tomu, že vektorová funkce dvou proměnných je zobecněním reálné funkce dvou proměnných, lze snadno dokázat následující tvrzení a z nich vyplývající vlastnosti vektorové funkce dvou proměnných.

- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, má v bodě $(\alpha, \beta) \in I$ za limitu vektor $\mathbf{F}_{\alpha, \beta} = (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta))$, právě když pro limity jejich souřadnicových funkcí platí:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \alpha, v \rightarrow \beta} x(u, v) &= x(\alpha, \beta), \\ \lim_{u \rightarrow \alpha, v \rightarrow \beta} y(u, v) &= y(\alpha, \beta), \\ \lim_{u \rightarrow \alpha, v \rightarrow \beta} z(u, v) &= z(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (1.31)$$

- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, je spojitá v bodě $(\alpha, \beta) \in I$, právě když jsou její souřadnicové funkce v bodě (α, β) spojité, tzn., že pro $(\alpha, \beta) \in I$ existují limity (1.31), které jsou rovny funkčním hodnotám souřadnicových funkcí v bodě (α, β) .
- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, je spojitá na oblasti I , právě když jsou její souřadnicové funkce na oblasti I spojité.
- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, má v bodě $(\alpha, \beta) \in I$ parciální derivaci podle u , resp. podle v , právě když existují parciální derivace

$$x^u(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \right|_{u=\alpha, v=\beta}, \quad y^u(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \right|_{u=\alpha, v=\beta}, \quad z^u(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right|_{u=\alpha, v=\beta}, \quad (1.32)$$

resp.

$$x^v(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \right|_{u=\alpha, v=\beta}, \quad y^v(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \right|_{u=\alpha, v=\beta}, \quad z^v(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \right|_{u=\alpha, v=\beta} \quad (1.33)$$

jejích souřadnicových funkcí. Parciální derivace $\mathbf{F}^u(\alpha, \beta)$, resp. $\mathbf{F}^v(\alpha, \beta)$ vektorové funkce $\mathbf{F}(u, v)$ podle u , resp. podle v je potom vektor

$$\mathbf{F}^u(\alpha, \beta) = (x^u(\alpha, \beta), y^u(\alpha, \beta), z^u(\alpha, \beta)), \quad (1.34)$$

resp.

$$\mathbf{F}^v(\alpha, \beta) = (x^v(\alpha, \beta), y^v(\alpha, \beta), z^v(\alpha, \beta)). \quad (1.35)$$

- Obdobně jsou definovány parciální derivace vyšších řádů vektorové funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, v bodě $(\alpha, \beta) \in I$. Značí se $\mathbf{F}^{uu}(\alpha, \beta) = (x^{uu}(\alpha, \beta), y^{uu}(\alpha, \beta), z^{uu}(\alpha, \beta))$, $\mathbf{F}^{uv}(\alpha, \beta) = (x^{uv}(\alpha, \beta), y^{uv}(\alpha, \beta), z^{uv}(\alpha, \beta))$, \dots , kde pořadí horních indexů označuje pořadí příslušných parciálních derivací.
- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, má spojitost k -tého řádu v bodě $(\alpha, \beta) \in I$, právě když jsou parciální derivace jejích souřadnicových funkcí až do k -tého řádu v bodě $(\alpha, \beta) \in I$ spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá v bodě $(\alpha, \beta) \in I$.
- Vektorová funkce $\mathbf{F}(u, v)$, $(u, v) \in I$, má spojitost k -tého řádu na oblasti I , právě když jsou parciální derivace jejích souřadnicových funkcí až do k -tého řádu na I spojité. O takové funkci říkáme, že je C^k spojitá na oblasti I .

■ **Definice 1.18 – Plocha.** Plocha je každá souvislá podmnožina κ prostoru R^3 , která je spojitým obrazem souvislé oblasti $I \subset R^2$. Je-li analytickou reprezentací plochy vektorová funkce (1.29), která je definovaná, spojitá a alespoň jedenkrát diferencovatelná na oblasti I , říkáme, že je plocha dána *vektorovou rovnicí*

$$\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in I. \quad (1.36)$$

Rozepíšeme-li souřadnicové funkce plochy dané vektorovou rovnicí (1.29), obdržíme *parametrické rovnice* plochy

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), \quad (u, v) \in I. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Je-li plocha definována parametrickými rovnicemi (1.37), říkáme, že je *plocha definovaná parametricky*.

Je-li oblast I obdélníková a uzavřená, tedy $I = [a, b] \times [c, d]$, hovoříme o *plátu*. \square

V počítačové grafice se nejčastěji volí čtvercová oblast $I = [0, 1] \times [0, 1]$, kterou stručně značíme $[0, 1]^2$.

K zavedení pojmu *plát* vedl rozvoj matematického modelování ploch složitějšího obecného tvaru, které nelze popsat jedinou vektorovou rovnicí. Výsledná plocha složitějšího tvaru se vytváří *plátováním*, tj. napojováním vhodných plošných elementů – plátů. Jednotlivé pláty jsou části plochy definované nad (zpravidla) čtvercovou oblastí $I = [0, 1]^2$ a jsou popsány jedinou vektorovou rovnicí. Podmínkám spojitosti napojení plátů se věnuje část 1.4. Zde se věnujeme základním vlastnostem ploch z hlediska diferenciální geometrie, které budeme potřebovat a aplikovat v kapitole 3, proto všechny zde definované vlastnosti ploch platí i pro plát. Specifické vlastnosti plátů pouze pro plát jsou v dalším textu vždy konkrétně uvedeny.

- **Definice 1.19 – Bod plochy.** Bodem plochy označujeme koncový bod polohového vektoru, který je funkční hodnotou vektorové funkce (1.29) pro $(\alpha, \beta) \in I$

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)). \quad (1.38)$$

Hodnoty parametrů $u = \alpha, v = \beta$, které jednoznačně určují polohu bodu na ploše, se nazývají *parametrické (křivočaré) souřadnice* bodu plochy.

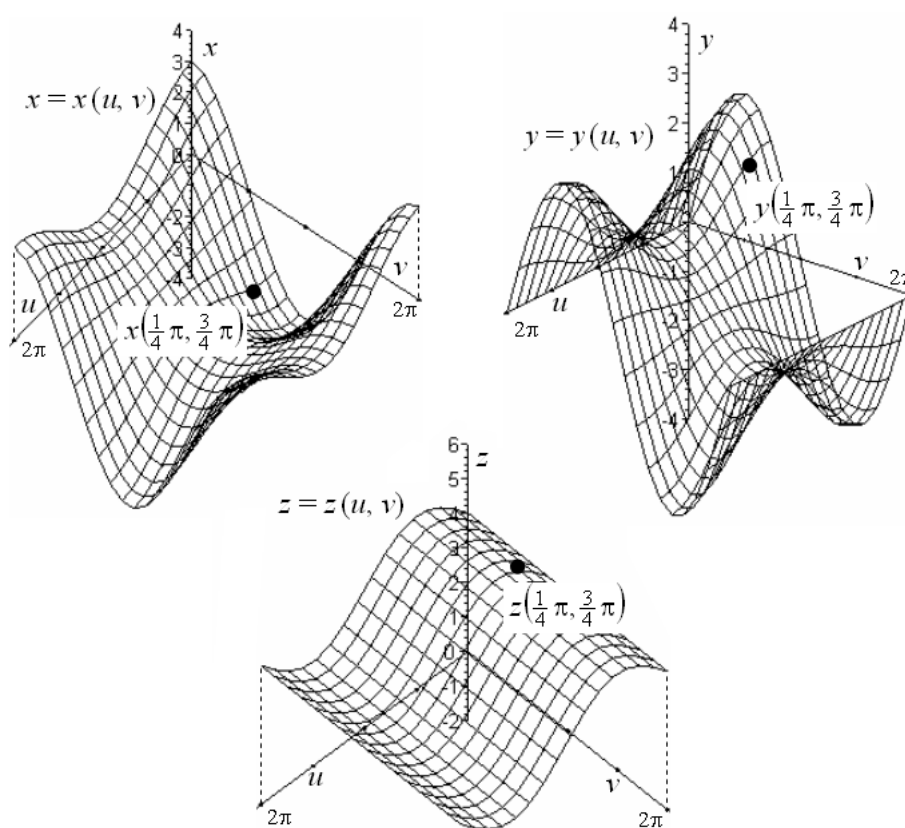
Vektorovou funkcí je definovaná orientace plátu $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Body $\mathbf{P}(0, 0)$, $\mathbf{P}(0, 1)$, $\mathbf{P}(1, 0)$ a $\mathbf{P}(1, 1)$ se nazývají *rohý plátu*. \square

- **Příklad 1.5 – Vektorová rovnice anuloidu.** Uvažujme souřadnicové funkce

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (r \cos u + R) \cos v, \\ y(u, v) &= (r \cos u + R) \sin v, \\ z(u, v) &= r \sin u + 4, \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2, \end{aligned}$$

jejichž grafy pro $R = 2$ a $r = 1$ jsou uvedeny na obr. 1.10.

Pro hodnoty parametrů $(u, v) = (\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ jsou v grafech souřadnicových funkcí zobrazeny funkční hodnoty $x(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, $y(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ a $z(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.



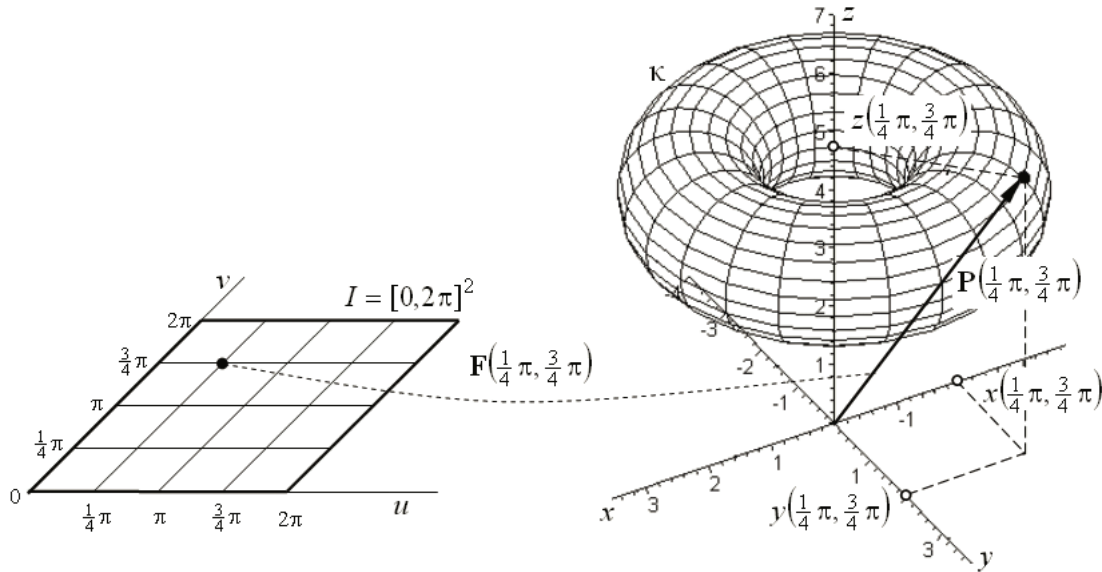
Obrázek 1.10: Souřadnicové funkce anuloidu κ

Plocha daná vektorovou rovnicí

$$\mathbf{P}(u, v) = ((r \cos u + R) \cos v, (r \cos u + R) \sin v, r \sin u + 4), \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2 \quad (1.39)$$

je anuloid κ , kde r je poloměr tvořící kružnice (ležící v rovině procházející osou z , která se otáčí kolem osy z a R je poloměr trajektorie středu tvořící kružnice. Anuloid κ je zobrazen

na obr. 1.11, kde je vyznačena hodnota vektorové funkce $\mathbf{F}(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, tedy polohový vektor $\mathbf{P}(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.



Obrázek 1.11: Anuloid κ daný vektorovou rovnicí (1.39) □

Zvolíme-li jednu proměnnou konstantní, dostaneme z vektorové funkce dvou proměnných vektorovou funkci jedné proměnné, tedy analytickou reprezentaci křivky, kterou nazýváme *parametrickou křivkou plochy*.

■ **Definice 1.20 – Parametrické křivky plochy.** Parametrickou *u-křivkou*, resp. *parametrickou v-křivkou plochy* $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in I$, nazýváme křivku

$$\mathbf{P}(u, \beta) = (x(u, \beta), y(u, \beta), z(u, \beta)), \quad (1.40)$$

resp.

$$\mathbf{P}(\alpha, v) = (x(\alpha, v), y(\alpha, v), z(\alpha, v)), \quad (1.41)$$

$(\alpha, \beta) \in I$.

Parametrické křivky $\mathbf{P}(0, v)$, $\mathbf{P}(1, v)$, $\mathbf{P}(u, 0)$ a $\mathbf{P}(u, 1)$ se nazývají *okraje plátu* $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. □

Parametrické křivky tvoří dvě soustavy křivek na ploše. Každá parametrická křivka jedné soustavy protíná všechny parametrické křivky ze soustavy druhé. Body plochy, jejichž křivočaré souřadnice jsou právě konstantní hodnoty parametrů, leží v těchto průsečících. Okraje plátu se protínají v rozích plátu.

Soustavy parametrických křivek se běžně používají k názornému zobrazení ploch, neboť poskytují velmi názornou představu o jejich tvaru. Parametrické *u-křivky* anuloidu κ na obr. 1.11 jsou tvořící kružnice, parametrické *v-křivky* jsou rovnoběžkové kružnice.

■ **Definice 1.21 Tečné vektory parametrických křivek plochy.** Parciální derivace vektorové funkce

$$\mathbf{P}^u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} = (x^u(u, v), y^u(u, v), z^u(u, v)), \quad (u, v) \in I, \quad (1.42)$$

resp.

$$\mathbf{P}^v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v} = (x^v(u, v), y^v(u, v), z^v(u, v)), \quad (u, v) \in I, \quad (1.43)$$

je vektorová funkce, která určuje pro $(\alpha, \beta) \in I$ *tečný vektor parametrické u -křivky $\mathbf{P}^u(u, v)$, resp. tečný vektor parametrické v -křivky $\mathbf{P}^v(u, v)$ v jejím bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$:*

$$\mathbf{P}^u(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=\alpha, v=\beta} = (x^u(\alpha, \beta), y^u(\alpha, \beta), z^u(\alpha, \beta)), \quad (1.44)$$

resp.

$$\mathbf{P}^v(\alpha, \beta) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v} \right|_{u=\alpha, v=\beta} = (x^v(\alpha, \beta), y^v(\alpha, \beta), z^v(\alpha, \beta)). \quad (1.45)$$

Orientace tečných vektorů parametrických křivek je shodná s orientací příslušné parametrické křivky. Bodem $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ a tečným vektorem $\mathbf{P}^u(\alpha, \beta)$, resp. $\mathbf{P}^v(\alpha, \beta)$ je určena *tečna* k parametrické u -, resp. v -křivce. \square

■ **Definice 1.22 – Příčné tečné vektory okrajů plátu.** Tečné vektory

$$\mathbf{P}^v(u, 0) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0}, \quad \mathbf{P}^v(u, 1) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial v} \right|_{v=1}, \quad u \in [0, 1], \quad (1.46)$$

se nazývají *příčné tečné vektory okrajů plátu ve směru u* . Tečné vektory

$$\mathbf{P}^u(0, v) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=0}, \quad \mathbf{P}^u(1, v) = \left. \frac{\partial \mathbf{P}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=1}, \quad v \in [0, 1], \quad (1.47)$$

se nazývají *příčné tečné vektory okrajů plátu ve směru v* . \square

■ **Definice 1.23 – Regulární a singulární bod plochy.** Bod plochy $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in I$, nazýváme *regulární*, pokud v něm tečné vektory parametrických křivek $\mathbf{P}^u(\alpha, \beta)$ a $\mathbf{P}^v(\alpha, \beta)$ nejsou rovnoběžné nebo nemají všechny složky současně nulové a odpovídá-li mu jen jedna dvojice hodnot parametrů $(u, v) = (\alpha, \beta)$. Body, ve kterých tato podmínka neplatí, nazýváme *singulární*.

■ **Definice 1.24 – Tečná rovina a normála v bodě plochy.** Rovina $\tau_{\alpha, \beta}$ určená tečnými vektory parametrických křivek $\mathbf{P}^u(\alpha, \beta)$ a $\mathbf{P}^v(\alpha, \beta)$ v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in I$, se nazývá *tečná rovina plochy v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$* . Vektor

$$\mathbf{n}(\alpha, \beta) = \mathbf{P}^u(\alpha, \beta) \times \mathbf{P}^v(\alpha, \beta) \quad (1.48)$$

v regulárním bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ se nazývá *vektor normály plochy v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$* . Příímka určená bodem $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ a vektorem normály $\mathbf{n}(\alpha, \beta)$ se nazývá *normála plochy v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$* . \square

■ **Definice 1.25 – Zkrut.** Smíšená druhá parciální derivace vektorové funkce plochy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{uv}(u, v) &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(u, v)}{\partial v \partial u} = \\ &= (x^{uv}(u, v), y^{uv}(u, v), z^{uv}(u, v)) = (x^{vu}(u, v), y^{vu}(u, v), z^{vu}(u, v)), \\ &(u, v) \in I \end{aligned} \quad (1.49)$$

je vektorová funkce, která určuje pro $(\alpha, \beta) \in I$ *vektor zkrutu plochy v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$* . \square

Vektor zkrutu plochy budeme stručně nazývat pouze *zkrut*. Zkrut vyjadřuje zakřivení plochy v okolí bodu, tj. míru odchýlení plochy od tečné roviny v tomto bodě.

■ **Příklad 1.6 – Tečné vektory, zkruty a normály anuloidu.** Vektorová rovnice tečného vektoru parametrické u -křivky, tečného vektoru parametrické v -křivky, zkrutu a vektoru normály anuloidu κ z příkladu 1.5 je

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2, \\ \mathbf{P}^v(u, v) &= (-(r \cos u + R) \sin v, (r \cos u + R) \cos v, 0), \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2, \\ \mathbf{P}^{uv}(u, v) &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0), \quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2, \\ \mathbf{n}(u, v) &= (-r \cos u(r \cos u + R) \cos v, -r \cos u(r \cos u + R) \sin v, -r \sin u(r \cos u + R)), \\ &\quad (u, v) \in [0, 2\pi]^2.\end{aligned}$$

Príslušné vektory v několika bodech anuloidu κ pro $R = 2$ a $r = 1$ jsou znázorněny na obr. 1.12, obr. 1.13 a obr. 1.14. Na obr. 1.15 jsou zobrazeny normály (vektory normál směřují dovnitř anuloidu).

Okraje plátu, tečné vektory a zkruty na okrajích plátu jsou důležité z hlediska požadované spojitosti při napojování plátů, viz část 1.4. Z hlediska studia vnitřních vlastností plochy se zkoumají *hlavní křivosti plochy* a *Gaussova a střední křivost plochy*.

Pro pochopení pojmu hlavní křivosti plochy uvažujme v každém regulárním bodě \mathbf{A} plochy tečnou rovinu $\tau_{\mathbf{A}}$ a normálu $n_{\mathbf{A}}$. Tečná rovina $\tau_{\mathbf{A}}$ obsahuje nekonečně mnoho tečen ke křivkám ležícím na ploše. Každá tečna společně s normálou tvoří rovinu normálového řezu, jejímž průnikem s plochou je křivka normálového řezu. Každá křivka normálového řezu má v bodě \mathbf{A} určitou první křivost, viz (1.21), která se nazývá normálová křivost. Směry, ve kterých nabývá normálová křivost svého minima, resp. maxima, jsou hlavní směry plochy a jim příslušné hodnoty normálové křivosti jsou hlavní křivosti plochy, které označíme $k_{1\mathbf{A}}$ a $k_{2\mathbf{A}}$. Odpovídající oskulační kružnice v bodě \mathbf{A} označíme $c_{1\mathbf{A}}$, $c_{2\mathbf{A}}$.

Pro znaménko hlavní křivosti platí následující úmluva: hlavní křivost je kladná, jestliže vektor $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{S}}$, kde \mathbf{S} je střed oskulační kružnice, je shodně orientovaný jako vektor normály $n_{\mathbf{A}}$. V opačném případě je hlavní křivost záporná.

■ **Definice 1.26 – Gaussova křivost.** *Gaussova křivost* v regulárním bodě \mathbf{A} plochy κ je dána

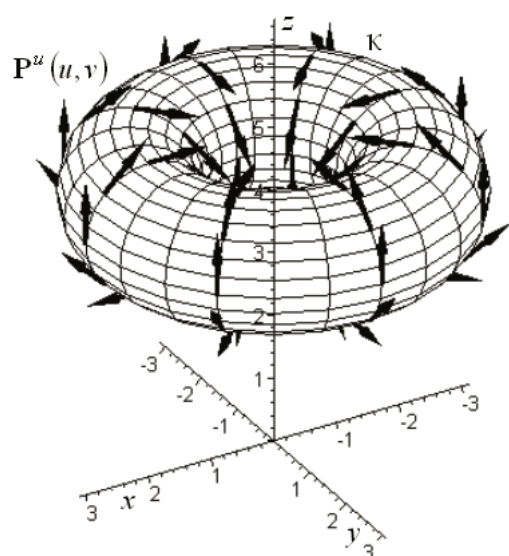
$$G = k_{1\mathbf{A}} \cdot k_{2\mathbf{A}}, \quad (1.50)$$

kde $k_{1\mathbf{A}}$, resp. $k_{2\mathbf{A}}$ je minimální, resp. maximální normálová křivost v bodě \mathbf{A} . Bod plochy \mathbf{A} se nazývá *eliptický*, resp. *parabolický*, resp. *hyperbolický*, je-li v něm Gaussova křivost kladná, resp. nulová, resp. záporná. Plochy, jejichž Gaussova křivost je nulová, jsou *rozvinutelné* do roviny. \square

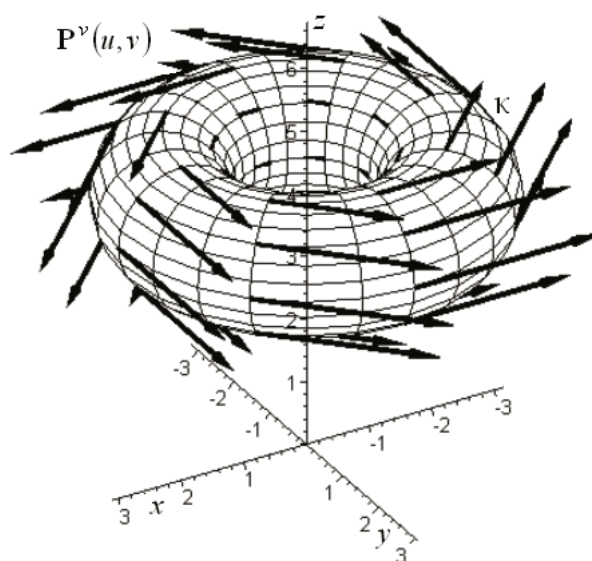
■ **Příklad 1.7 – Klasifikace bodů anuloidu.** Anuloid obsahuje všechny tři typy bodů, jak je patrné z obr. 1.16.

Podle klasifikace bodů uvedené v definici 1.26 je zřejmé, že v eliptickém bodě leží středy obou oskulačních kružnic na kladné části normály, a že tečná rovina se dotýká plochy v jediném bodě. V parabolickém bodě musí být alespoň jedna z hlavních křivostí nulová, tedy alespoň jedna oskulační kružnice přejde v přímku. V takovém případě se tečná rovina dotýká plochy podél křivky. V hyperbolickém bodě jsou znaménka hlavních křivostí různá, středy oskulačních kružnic leží na opačných částech normály a tečná rovina protíná plochu.

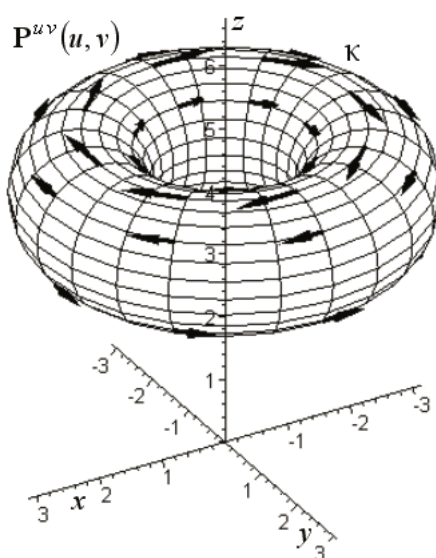
Body ležící na kráterových kružnicích anuloidu jsou parabolické (bod \mathbf{B}). Body ležící mezi kráterovými kružnicemi na části anuloidu obsahující rovník jsou eliptické (bod \mathbf{A}) a body



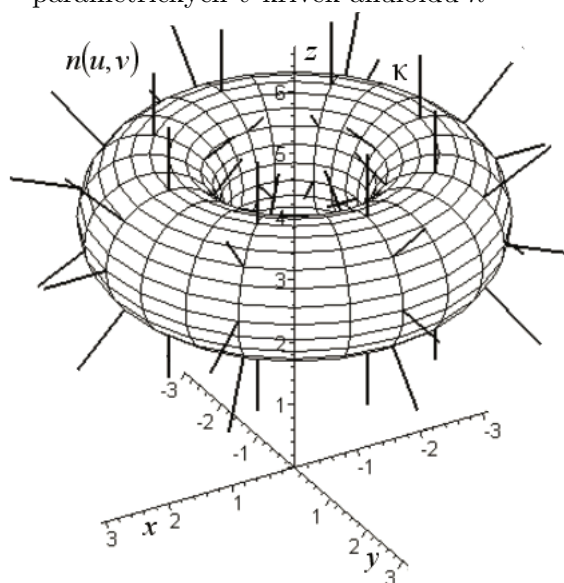
Obrázek 1.12: Tečné vektory parametrických u -křivek anuloidu κ



Obrázek 1.13: Tečné vektory parametrických v -křivek anuloidu κ



Obrázek 1.14: Zkruty anuloidu κ



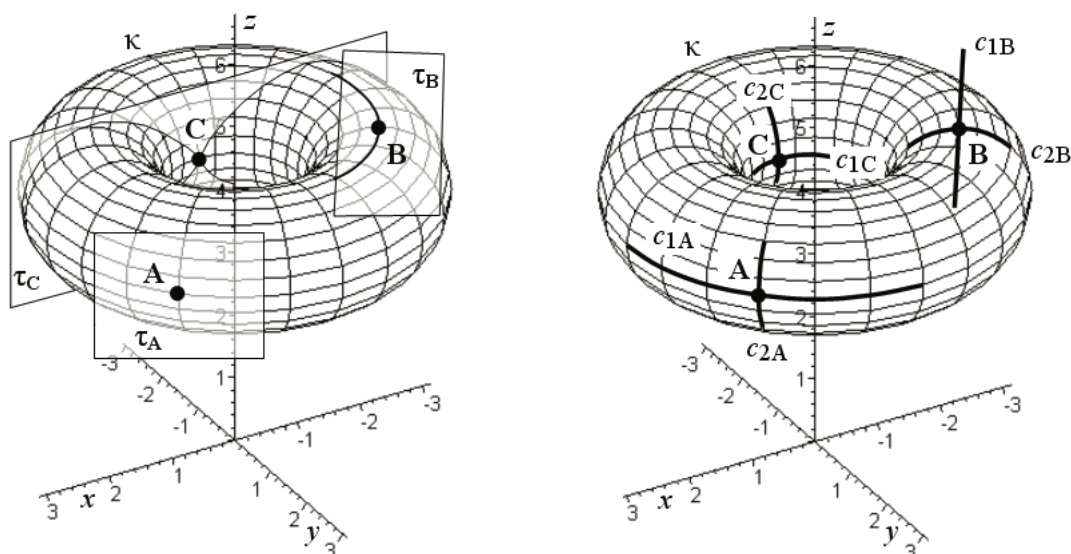
Obrázek 1.15: Normály anuloidu κ □

ležící mezi kráterovými kružnicemi na části anuloidu obsahující hrdlo jsou hyperbolické (bod C). □

■ **Definice 1.27 – Střední křivost.** *Střední křivost* v regulárním bodě \mathbf{A} plochy κ je dána

$$H = \frac{k_{1\mathbf{A}} + k_{2\mathbf{A}}}{2}. \quad (1.51)$$

Plochy s nulovou střední křivostí se nazývají *minimální*. □



Obrázek 1.16: Tečné roviny a oskulační kružnice ve vybraných bodech anuloidu κ

1.4 Plátování

Při modelování složitějších tvarů nevystačíme s jedinou plochou danou jedinou vektorovou rovnicí, ale bude nutné výslednou plochu složit z vhodně napojených plátů, tj. *plátovat*. Kvalitu napojení plátů hodnotíme podle dosaženého řádu parametrické nebo geometrické spojitosti podél společného okraje.

Nejprve uvedeme definici spojitosti plochy, která vyplývá ze spojitosti její vektorové funkce, a potom se budeme zabývat spojitostí podél společného okraje dvou napojovaných plátů.

- **Definice 1.28 – Spojitost plochy.** Plocha $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in I$, má spojitost k -tého řádu v bodě $(\alpha, \beta) \in I$, právě když má její vektorová funkce v tomto bodě spojitost k -tého řádu. O takové ploše říkáme, že je C^k spojitá v bodě (α, β) .

Jestliže má plocha $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in I$ spojitost k -tého řádu ve všech bodech z oblasti I , říkáme, že je C^k spojitá na oblasti I . \square

- **Definice 1.29 – Parametrická spojitost napojení dvou plátů.** Nechť je dán plát $\mathbf{P}(u, v)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jejíž souřadnicové funkce jsou spojitě a k krát spojitě diferencovatelné na $[0, 1]^2$. Nechť je dále dán plát $\mathbf{R}(s, t)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{R}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, $(s, t) \in [0, 1]^2$, jejíž souřadnicové funkce jsou spojitě a k krát spojitě diferencovatelné na $[0, 1]^2$.

Říkáme, že plát $\mathbf{R}(s, t)$ je napojen svým okrajem $\mathbf{R}(0, t)$ na okraj $\mathbf{P}(1, v)$ plátu $\mathbf{P}(u, v)$ s C^k parametrickou spojitostí, popř., že jsou tyto pláty C^k spojitě napojeny, jestliže jsou si rovny vektory prvních k parciálních derivací vektorových funkcí plátu $\mathbf{P}(u, v)$ a plátu $\mathbf{R}(s, t)$ podél okrajů $\mathbf{P}(1, v)$ a $\mathbf{R}(0, t)$. \square

- **Definice 1.30 – Geometrická spojitost napojení dvou plátů.** Nechť je dán plát $\mathbf{P}(u, v)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jejíž souřadnicové funkce jsou spojitě a nejméně jednou, resp. dvakrát spojitě diferencovatelné na $[0, 1]^2$. Nechť je dále dán plát $\mathbf{R}(s, t)$ vektorovou rovnicí $\mathbf{R}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$, $(s, t) \in [0, 1]^2$,

jejíž souřadnicové funkce jsou spojité a nejméně jednou, resp. dvakrát spojitě diferencovatelné na $[0, 1]^2$.

Říkáme, že plát $\mathbf{R}(s, t)$ je napojen svým okrajem $\mathbf{R}(0, t)$ na okraj $\mathbf{P}(1, v)$ plátu $\mathbf{P}(u, v)$ s G^1 , resp. G^2 geometrickou spojitostí, popř., že jsou tyto pláty G^1 , resp. G^2 spojitě napojeny, jestliže jsou totožné tečné roviny obou plátů, resp. jsou si rovny první křivosti parametrických křivek obou plátů podél okrajů $\mathbf{P}(1, v)$ a $\mathbf{R}(0, t)$. \square

Příklad na ilustraci spojitosti napojení dvou plátů zde nebudeme uvádět. Touto problematikou se budeme zabývat velmi konkrétně v kapitole 3.

1.4.1 Nástroje analýzy a kontroly návrhu ploch v Rhinu

K zobrazení nově vytvořených ploch používá Rhino *drátový model*, který je určen parametrickými křivkami na ploše. Jejich počet závisí na nastavení volby *Hustota izočar* (menu *Soubor* → *Vlastnosti* → *Obecné* → *Hustota izočar*).

Plocha – Rhino disponuje řadou příkazů pro kreslení ploch obecného tvaru, které jsou detailně popsány v částech 3.2.3, 3.3.3, 3.4.4, 3.5.6 a 3.6.3. Jako příklad kreslení analytické plochy si zde uvedeme postup provedení příkazu *Anuloid*, kterým bychom nakreslili anuloid z příkladů v této části. Příkaz *Anuloid* → kurzor přemístit do pohledu *Shora* → Střed anuloidu: z klávesnice zadat 0,0,4 → Enter → Průměr: z klávesnice zadat 4 → Enter → Druhý poloměr: z klávesnice zadat 1 → Enter.

Bod plochy – Příkaz: *Bod* → Umístění bodu: zapnout *Uchopování objektů: Na ploše* → Vyberte plochu: kliknout na plochu; zaměřovač je omezen na pohyb po ploše → Umístění bodu: kliknout na plochu do místa, ve kterém chceme nakreslit bod. V místě posledního kliknutí se nakreslí bod jako samostatná entita.

Bod plochy $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ – Příkaz: *Bod z uv souřadnic* → Vyberte plochu pro vyhodnocení: v příkazovém řádku zvolit *VytvořitBod=Ano, Normalizovaná=Ano* → kliknout na plochu → Zadejte hodnotu U mezi 0.0 až 1.0: zadat zvolenou hodnotu α → Enter → Zadejte hodnotu V mezi 0.0 až 1.0: zadat zvolenou hodnotu β → Enter. V bodě plochy $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ se nakreslí bod jako samostatná entita.

Poznámky:

1) Před použitím tohoto příkazu je třeba zjistit směr parametru u a v , např. příkazem *Vyjmout izočáru*, viz dále.

2) Volba *Normalizovaná=Ano* provede změnu původního oboru parametrizace $I = [a, b] \times [c, d]$ plochy na $I = [0, 1]^2$. Volba *Normalizovaná=Ne* ponechá původní obor parametrizace plochy $I = [a, b] \times [c, d]$.

Křivočaré souřadnice bodu plochy – Příkaz: *UV souřadnice bodu* → Vyberte plochu, ze které chcete odečíst souřadnice UV: v příkazovém řádku zvolit *VytvořitBod=Ano, Normalizovaná=Ano* → kliknout na plochu → Vyberte bod pro vyhodnocení: kliknout do bodu plochy, jehož křivočaré souřadnice chceme zjistit → v příkazovém řádku se zobrazí hodnoty parametrů u a v → Enter.

Poznámka: Před použitím tohoto příkazu je třeba zjistit směr parametru u a v , např. příkazem *Vyjmout izočáru*, viz dále.

Kartézské souřadnice bodu plochy – Příkaz: *Vyhodnotit bod* → zapnout *Uchopování bodů* → Vyberte bod pro vyhodnocení: kliknout do bodu, jehož kartézské souřadnice chceme určit. V příkazovém řádku se zobrazí kartézské souřadnice bodu.

Roh plátu – Příkaz: *Bod* → Umístění bodu: zapnout *Uchopování koncových bodů* → kliknout poblíž rohu plátu. V rohu plátu se nakreslí bod jako samostatná entita.

Parametrické křivky plochy – Příkaz: *Vyjmout izočáru* → Vyberte plochu pro vyjmutí izočáry: kliknout na plochu; zaměřovač je omezen na pohyb po ploše a zobrazuje se aktuální parametrická křivka → Vyberte izočáru, kterou chcete vyjmut: v příkazovém řádku zvolit *Směr=U*, *Směr=V* nebo *Směr=Oba* → kliknout do místa, ve kterém chceme kreslit parametrickou křivku nebo dvojici parametrických křivek. Nakreslí se parametrická *u*-křivka, parametrická *v*-křivka nebo dvojice parametrických křivek (podle volby v příkazovém řádku) jako samostatná entita, na kterou lze aplikovat veškeré příkazy platné pro křivku.

Poznámky:

- 1) Drátový model plochy lze vytvořit příkazem *Vyjmout drátový model*.
- 2) O tom, který směr bude u konkrétní plochy ve směru parametru *u* a který ve směru parametru *v*, nerozhoduje uživatel, ale parametrizace plochy použitá systémem.
- 3) Určitou informaci o způsobu parametrizace uzavřené plochy poskytuje volba *Přepnout silné hrany*. „Silná hrana“ je parametrická křivka plochy odpovídající krajním hodnotám oboru parametrizace příslušného parametru zvýrazněná tlustou čarou. V kombinaci s příkazem *UV souřadnice bodu* se zapnutou volbou *Normalizovaná=Ne* (viz výše) lze navíc zjistit obor parametrizace plochy.

Okraj plátu – Příkaz: *Duplikovat hranu*: Vyberte hrany pro duplikaci → kliknout na okraj plátu → Enter. Nakreslí se okraj plátu jako samostatná entita, na kterou lze aplikovat veškeré příkazy platné pro křivku.

Okraje plátu – Příkaz: *Duplikovat hranici*: Vyberte plochy pro duplikaci hranice → kliknout na plát → Enter. Nakreslí se všechny okraje plátu jako samostatná entita složená z jednotlivých okrajů. Samostatné okraje získáme příkazem *Rozpojit* → Vyberte objekty pro rozpojení: kliknout na složený okraj → Enter.

Normála plochy – Příkaz: *Úsečka: normály plochy* → Vyberte plochu pro vytvoření normály: kliknout na plochu → Počátek úsečky: kliknout do místa, ve kterém chceme nakreslit normálu → Konec úsečky: kliknout do koncového bodu normály. Nakreslí se normála jako úsečka s počátečním bodem na ploše.

Poznámka: Zvolíme-li v příkazovém řádku *NaOběStrany*, nakreslí se normála jako úsečka se středem na ploše.

Tečná rovina – Tečnou rovinu plochy konstruujeme nepřímou. Nejprve sestrojíme normálu (viz výše) v bodě, ve kterém chceme konstruovat tečnou rovinu. Potom vytvoříme hranici tečné roviny příkazem *Kružnice: kolem křivky*: Střed kružnice: kliknout do počátečního bodu normály → Poloměr: kliknout do koncového bodu poloměru. Nakonec hranici vyplníme rovinnou plochou příkazem: *Plocha z rovinných křivek* → Vyberte rovinné křivky: kliknout na kružnici → Enter. Nakreslí se tečná rovina jako kruh.

Křivost křivek na ploše – Příkaz: *Graf křivosti zapnout* → Vyberte objekty pro zobrazení grafu křivosti: kliknout na plochu, resp. na nakreslenou parametrickou křivku (viz výše) → Enter → v dialogovém okně *Graf křivosti* nastavit vhodné měřítko a hustotu grafu. Podél okrajů plátu, podél automaticky zobrazovaných parametrických křivek i podél nakreslených parametrických křivek se zobrazí graf první křivosti jako spojnice koncových bodů normálových úseček. Délka normálové úsečky je úměrná první křivosti křivky v průsečíku normálové úsečky s křivkou.

Poloměr křivosti křivek na ploše – Příkaz: *Poloměr* → vyberte na křivce bod pro měření poloměru: kliknout na křivku na ploše → v příkazovém řádku se vypíše velikost poloměru křivosti křivky na ploše v bodě kliknutí.

Křivka normálového řezu v obecném směru plochy – Křivku normálového řezu v obecném směru plochy konstruujeme nepřímou. Nejprve nakreslíme na ploše bod (viz výše) a v tomto bodě sestrojíme normálu na obě strany (viz výše). Potom sestrojíme hranici tečné roviny (viz výše). Tečnu sestrojíme příkazem *Úsečka: z bodu v polovině* → Střed úsečky: kliknout do bodu na ploše → Konec úsečky: zapnout úchopový režim *Na křivce* → Vyberte křivku: kliknout na hranici tečné roviny → kliknout na hranici tečné roviny v požadovaném směru tečny. Nakreslí se tečna jako úsečka se středem v bodě na ploše. Dále zkopírujeme tečnu příkazem *Kopírovat* → Vyberte objekty pro kopírování: kliknout na tečnu → Enter → Výchozí bod kopírování: kliknout do bodu na ploše → Cílový bod kopírování: kliknout do koncového bodu normály → Enter. Rovinu normálového řezu zkonstruujeme příkazem *Vytáhnout podél křivky* → Vyberte křivky pro vytažení: kliknout na zkopírovanou tečnu → Enter → Vyberte trasu: kliknout na normálu. Nakreslí se rovina normálového řezu. Nakonec vytvoříme křivku normálového řezu příkazem *Průsečík objektů* → Vyberte objekty pro výpočet průsečíku: kliknout na plochu a na rovinu normálového řezu → Enter. Nakreslí se křivka normálového řezu.

Hlavní křivosti – Příkaz: *Hlavní křivosti* → Vyberte křivku nebo plochu pro měření křivosti: kliknout na plochu → Vyberte na ploše bod pro měření křivosti → v příkazovém řádku zvolit *ZanechatZnačku=Ano* → kliknout do bodu, v němž chceme zjistit hlavní křivosti plochy. Nakreslí se oskulační kružnice křivek normálových řezů v hlavních směrech plochy. V příkazovém řádku se zobrazí následující informace: hodnoty parametrů (α, β) , kartézské souřadnice bodu $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, složky normálového vektoru, maximální hlavní křivost, minimální hlavní křivost, Gaussova křivost a střední křivost.

Jsou-li nakresleny oskulační kružnice křivek normálových řezů v hlavních směrech, lze klasifikovat bod plochy: v eliptickém bodě plochy se obě oskulační kružnice vykreslí na stejnou stranu plochy, v hyperbolickém bodě plochy se každá oskulační kružnice vykreslí na jinou stranu plochy, v parabolickém bodě plochy přejde jedna z oskulačních kružnic v přímku.

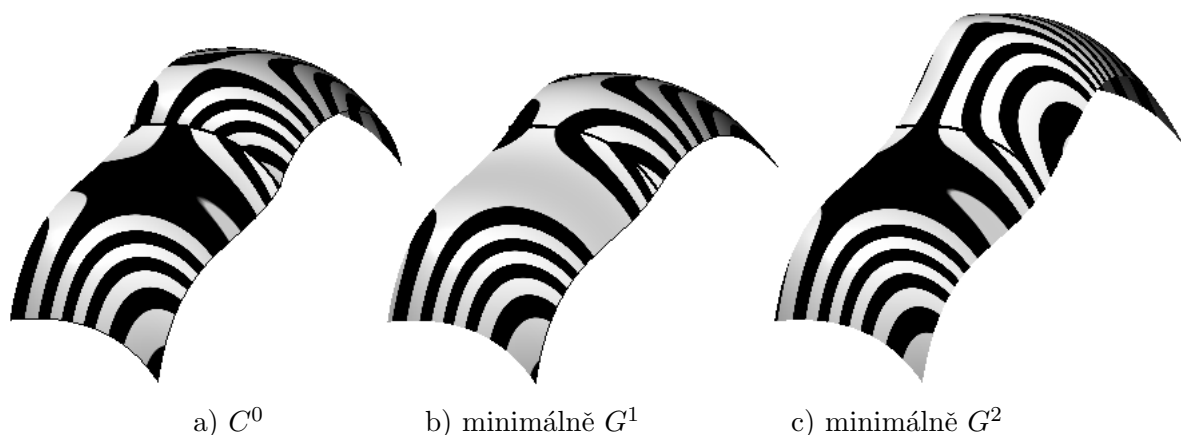
Křivky normálových řezů v hlavních směrech plochy – Křivky normálového řezu v hlavních směrech plochy sestrojíme nepřímou. Nejprve vytvoříme oskulační roviny (viz výše) těchto křivek, které jsou rovinami normálových řezů v hlavních směrech. Křivku normálového řezu v hlavních směrech plochy vytvoříme příkazem *Průsečík objektů* → Vyberte objekty pro výpočet průsečíku: kliknout na plochu a na oskulační roviny → Enter. Vykreslí se křivky normálových řezů v hlavních směrech plochy.

Gaussova křivost, hlavní křivost – Příkaz: *Analýza křivosti* → Vyberte objekty pro analýzu křivosti: kliknout na plochu → Enter. V příkazovém řádku se zobrazí meze, ve kterých se pohybuje Gaussova křivost plochy, střední křivost plochy, maximální poloměr křivosti křivky na ploše a minimální poloměr křivosti křivky na ploše. Zároveň se zobrazí dialogové okno *Křivost*, ve kterém lze zvolit *Styl,tj.* konkrétní charakteristiku křivosti, jejíž hodnoty jsou na ploše barevně odlišeny.

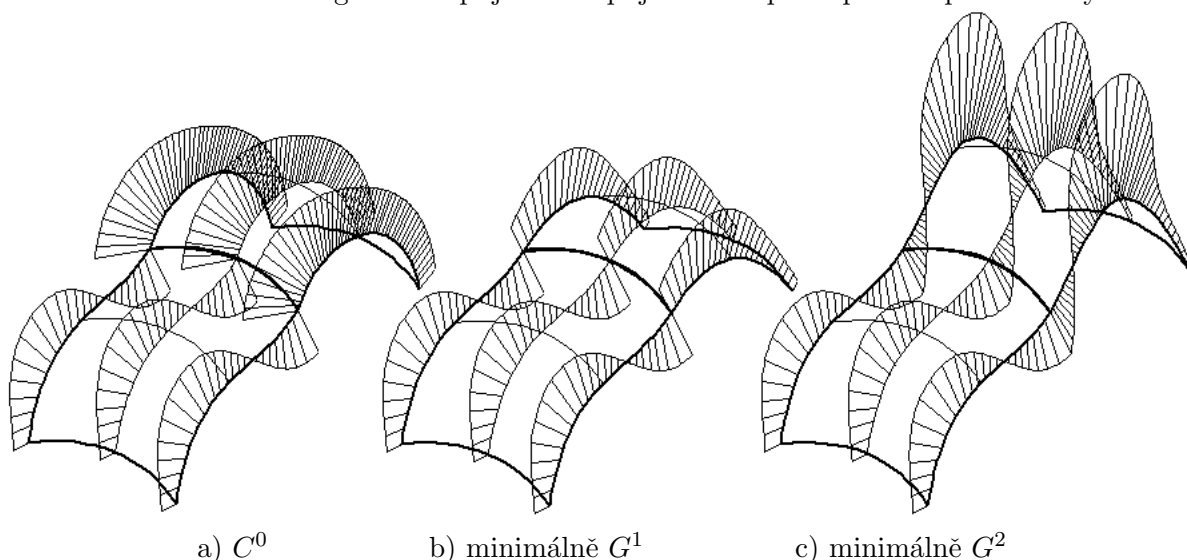
Poznámka: Abychom dostali relevantní barevné zobrazení analyzované charakteristiky, je třeba v dialogovém okně *Křivost* nastavit *Rozsah křivosti* na hodnoty uvedené jako meze v příkazovém řádku.

Spojitosť napojení dvou plátů – Příkaz: *Analýza pomocí pruhů zebry* → Vyberte objekty pro analýzu pomocí pruhů zebry: kliknout na pláty, jejichž spojitost napojení chceme analyzovat → Enter. V dialogovém okně *Volby zebry* nastavit směr, tloušťku a barvu pruhů zebry. Ve stínovaném zobrazení se na pláty namapují pruhy, jejichž návaznost podél společného okraje informuje o spojitosti napojení obou plátů. Pláty jsou napojeny s C^0 spojitostí, jestliže jejich pruhy zebry na sebe nenažují, viz obr. 1.17 a). Pláty jsou napojeny minimálně s G^1 spojitostí, jestliže jejich pruhy zebry na sebe nažují se zlomem, viz obr. 1.17 b). Pláty jsou napojeny minimálně s G^2 spojitostí, jestliže na sebe jejich pruhy zebry nažují hladce, viz obr. 1.17 c).

Spojitosť napojení plátů lze také diagnostikovat pomocí grafu křivosti (viz výše) parametrických křivek na ploše (viz výše), jak je znázorněno na obr. 1.18.



Obrázek 1.17: Diagnostika spojitosti napojení dvou plátů pomocí pruhů zebry



Obrázek 1.18: Diagnostika spojitosti napojení dvou plátů pomocí grafu křivosti parametrických křivek

- **Cvičení 1.2** V Rhinu vymodelujte anuloid podle zadání z příkladu 1.5. Velikost poloměrů R a r vhodně zvolte. Ve zvoleném eliptickém, hyperbolickém a parabolickém bodě anuloidu zkonstruujte tečnou rovinu a normálu a dvojici oskulačních kružnic parametrických křivek.

Kapitola 2

Modelování křivek

V této kapitole se budeme zabývat matematickým modelováním křivek obecného tvaru zadaných posloupností bodů v rovině nebo v prostoru. Při modelování složitějších tvarů nelze výslednou křivku vytvořit jediným segmentem, jehož analytickou reprezentací je jediná vektorová rovnice. Zájemce o výklad matematického modelu popisujícího segmentovanou křivku jako celek (B-spline, NURBS – neuniformní racionální B-spline) lze odkázat na [6]. Zde se omezíme na podrobný výklad matematických modelů popisujících *jediný segment* a na možnosti napojení tohoto segmentu na sousední segmenty křivky tak, abychom dokázali poměrně jednoduchými prostředky modelovat křivku libovolného tvaru složenou z libovolného počtu segmentů.

Při výkladu budeme obecně používat termín *křivka*. Pokud bude nutné zdůraznit, že se jedná o určitý *segment* křivky složené z více segmentů, vždy to bude jasně uvedeno.

V počítačové grafice je nejčastější analytickou reprezentací křivky vektorová rovnice, jejíž souřadnicové funkce jsou polynomy (v případě polynomů 3. stupně se nazývá výsledná křivka *kubika*). Za obor parametrizace polynomických křivek se uvažuje uzavřený interval v rozsahu od nuly do jedné, který budeme značit hranatými závorkami, tedy $[0, 1]$. Oborem parametrizace je dána orientace křivky: počátek křivky je v bodě, kde hodnota parametru je nula, konec křivky je v bodě, kde hodnota parametru je jedna.¹

Podle interpretace vstupních dat – zadané posloupnosti bodů – rozlišujeme dva základní přístupy ke konstrukci matematického modelu křivky: *interpolaci* a *aproximaci*. V obou případech dostáváme vektorovou rovnici křivky jako lineární kombinaci *bázových funkcí* (polynomů), kde součinitelé u jednotlivých bázových funkcí jsou vstupní data. Při interpolaci nazýváme zadané body *definiční body* a útvar, do kterého jsou uspořádány, *definiční polygon*. Interpolační křivka musí všemi definičními body procházet a její tvar mezi definičními body musí vyhovovat nárokům aplikace, ve které je použita. Při aproximaci nazýváme zadané body *řídící body* a útvar, do kterého jsou uspořádány, *řídící polygon*. Aproximační křivka nemusí řídicími body procházet (některými procházet může) a její tvar sleduje tvar řídicího polygonu.

Poznámka: Podobně jako u bodů křivky budeme také zadanými body (definičními i řídicími) vždy rozumět koncové body jejich polohových vektorů a jejich kartézské souřadnice (složky jejich polohových vektorů) budeme uvádět v kulatých závorkách.

2.1 Fergusonova kubika

Fergusonova kubika je křivka tvořená jediným segmentem, který interpoluje dva zadané definiční body.

¹Tato skutečnost nás nikterak neomezuje, neboť pro libovolný parametr $s \in [a, b]$ lze provést změnu parametrizace $t = \frac{s-a}{b-a}$ a normovat tak původní interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.

■ **Definice 2.1 – Fergusonova kubika.** Necht' jsou dány dva definiční body \mathbf{A} a \mathbf{B} , tečný vektor \mathbf{a} v bodě \mathbf{A} a tečný vektor \mathbf{b} v bodě \mathbf{B} . Potom je vektorová rovnice *Fergusonovy kubiky*

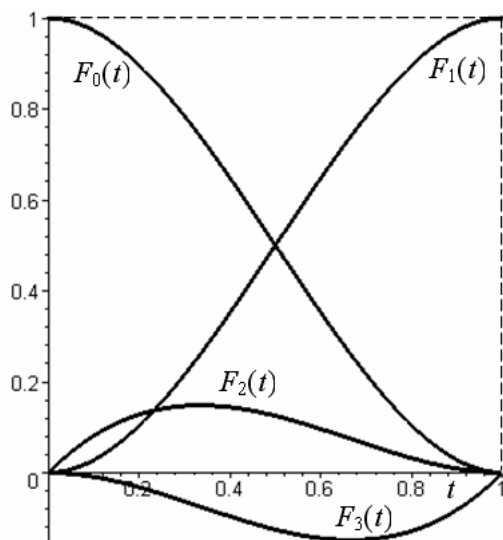
$$\mathbf{P}(t) = F_0(t)\mathbf{A} + F_1(t)\mathbf{B} + F_2(t)\mathbf{a} + F_3(t)\mathbf{b}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

kde bázové funkce

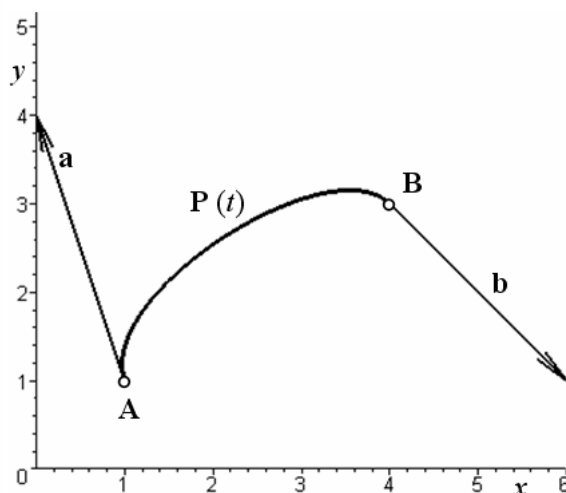
$$\begin{aligned} F_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ F_1(t) &= -2t^3 + 3t^2, \\ F_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t, \\ F_3(t) &= t^3 - t^2, \quad t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.2)$$

jsou *Hermitovy polynomy* 3. stupně.² □

Průběh Hermitových polynomů je patrný z obr. 2.1, na obr. 2.2 je nakreslen příklad rovinné Fergusonovy kubiky. V případě, že z -ová souřadnice alespoň jednoho z definičních bodů \mathbf{A} a \mathbf{B} nebude nulová, bude Fergusonova kubika prostorová křivka.



Obrázek 2.1: Hermitovy polynomy



Obrázek 2.2: Fergusonova kubika

2.1.1 Vlastnosti Fergusonovy kubiky

Přímo z definice Fergusonovy kubiky vyplývají její následující geometrické vlastnosti:

- Počáteční bod $\mathbf{P}(0)$ Fergusonovy kubiky (2.1) je zadaný bod \mathbf{A} . Koncový bod $\mathbf{P}(1)$ Fergusonovy kubiky (2.1) je zadaný bod \mathbf{B} .
- Tečný vektor $\mathbf{P}'(0)$ Fergusonovy kubiky (2.1) je zadaný tečný vektor \mathbf{a} . Tečný vektor $\mathbf{P}'(1)$ Fergusonovy kubiky (2.1) je zadaný tečný vektor \mathbf{b} .

■ **Příklad 2.1 – Fergusonova kubika.** Fergusonova kubika $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je dána svými krajními body $\mathbf{A} = (1, 0)$, $\mathbf{B} = (4, 2)$ a tečnými vektory $\mathbf{a} = (-1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -2)$ v těchto bodech.

²V některé starší literatuře jsou tyto polynomy nepřesně označovány jako *Fergusonovy*.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Pro hodnoty parametru $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ vypočtete souřadnice bodů Fergusonovy kubiky a složky tečných vektorů v těchto bodech. Zobrazte body Fergusonovy kubiky, sestrojte tečné vektory v těchto bodech a Fergusonovu kubiku načrtněte.

Řešení. x -ovou, resp. y -ovou souřadnicovou funkci $x(t)$, resp. $y(t)$ Fergusonovy kubiky dostaneme, pokud do (2.1) dosadíme Hermitovy polynomy dle (2.2) a x -ové, resp. y -ové složky zadaných definičních bodů a tečných vektorů. Parametrické vyjádření Fergusonovy kubiky je

$$\begin{aligned} x(t) &= (2t^3 - 3t^2 + 1) + 4(-2t^3 + 3t^2) - 1(t^3 - 2t^2 + t) + 2(t^3 - t^2) = -5t^3 + 9t^2 - t + 1, \\ y(t) &= 2(-2t^3 + 3t^2) + 3(t^3 - 2t^2 + t) - 2(t^3 - t^2) = -3t^3 + 2t^2 + 3t, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vektorová rovnice Fergusonovy kubiky je

$$\mathbf{P}(t) = (-5t^3 + 9t^2 - t + 1, -3t^3 + 2t^2 + 3t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

První derivace x -ové, resp. y -ové souřadnicové funkce (2.3) je x -ová, resp. y -ová souřadnicová funkce tečného vektoru Fergusonovy kubiky, jehož parametrické vyjádření je

$$\begin{aligned} x'(t) &= (-5t^3 + 9t^2 - t + 1)' = -15t^2 + 18t - 1, \\ y'(t) &= (-3t^3 + 2t^2 + 3t)' = -9t^2 + 4t + 3, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

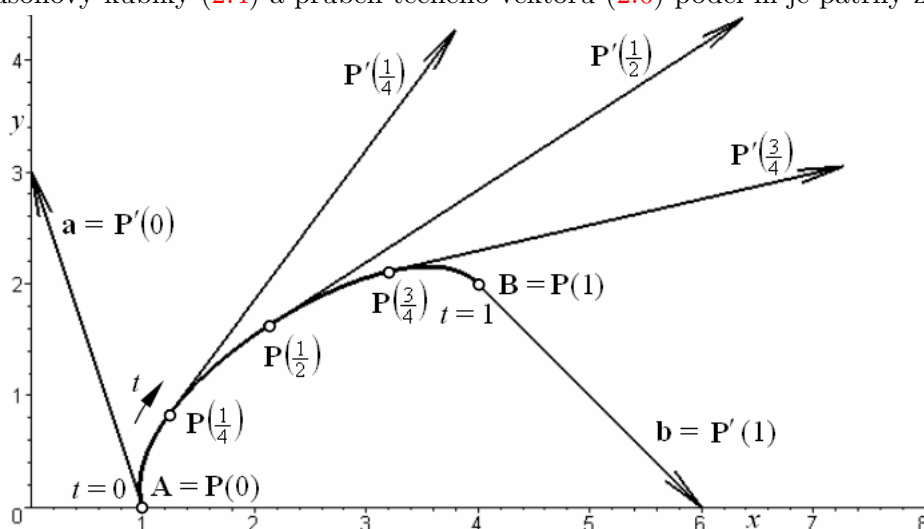
Vektorová rovnice tečného vektoru Fergusonovy kubiky je

$$\mathbf{P}'(t) = (-15t^2 + 18t - 1, -9t^2 + 4t + 3), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.6)$$

Dosadíme-li $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ do (2.4), resp. do (2.6), obdržíme body Fergusonovy kubiky, resp. tečné vektory v těchto bodech, které jsou uvedeny v tabulce.

	$t = 0$	$t = \frac{1}{4}$	$t = \frac{1}{2}$	$t = \frac{3}{4}$	$t = 1$
$\mathbf{P}(t)$	$(1, 0)$	$(\frac{79}{64}, \frac{53}{64})$	$(\frac{17}{8}, \frac{13}{8})$	$(\frac{205}{64}, \frac{135}{64})$	$(4, 2)$
$\mathbf{P}'(t)$	$(-1, 3)$	$(\frac{41}{16}, \frac{55}{16})$	$(\frac{17}{4}, \frac{11}{4})$	$(\frac{65}{16}, \frac{15}{16})$	$(2, -2)$

Tvar Fergusonovy kubiky (2.4) a průběh tečného vektoru (2.6) podél ní je patrný z obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Fergusonova kubika a tečné vektory v jejích bodech

□

2.1.2 Odvození Hermitových polynomů

Předpokládejme, že jsou zadána vstupní data Fergusonovy kubiky, tj. body \mathbf{A} , \mathbf{B} a tečné vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} v souladu s definicí 2.1. Chceme-li odvodit Hermitovy polynomy, vyjdeme nejprve z obecného tvaru vektorové rovnice křivky 3. stupně

$$\mathbf{P}(t) = mt^3 + nt^2 + pt + q, \quad t \in [0, 1] \quad (2.7)$$

a její první derivace

$$\mathbf{P}'(t) = 3mt^2 + 2nt + p, \quad t \in [0, 1], \quad (2.8)$$

kde koeficienty m , n , p , q jsou neznámé. Aby křivka (2.7) byla Fergusonovou kubikou, musí splňovat následující podmínky: $\mathbf{P}(0) = \mathbf{A}$, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{B}$, $\mathbf{P}'(0) = \mathbf{a}$ a $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{b}$. Dosadíme-li $t = 0$ a $t = 1$ do (2.7) a (2.8), dostaneme soustavu čtyř rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= q = \mathbf{A} \\ \mathbf{P}(1) &= m + n + p + q = \mathbf{B} \\ \mathbf{P}'(0) &= p = \mathbf{a} \\ \mathbf{P}'(1) &= 3m + 2n + p = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.9)$$

o čtyřech neznámých m , n , p , q . Řešení soustavy (2.9)

$$\begin{aligned} m &= 2\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{a} + \mathbf{b}, \\ n &= -3\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{a} - \mathbf{b}, \\ p &= \mathbf{a}, \\ q &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

dosadíme do (2.7) a obdržíme

$$\mathbf{P}(t) = (2\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{a} + \mathbf{b})t^3 + (-3\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 2\mathbf{a} - \mathbf{b})t^2 + \mathbf{a}t + \mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Po úpravě dostaneme rovnici Fergusonovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)\mathbf{A} + (-2t^3 + 3t^2)\mathbf{B} + (t^3 - 2t^2 + t)\mathbf{a} + (t^3 - t^2)\mathbf{b}, \quad (2.11)$$

kde polynomy u jednotlivých vstupních dat jsou hledané Hermitovy polynomy (2.2).

2.1.3 Napojení Fergusonových kubik

Mějme dānu posloupnost definičních bodů $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$ a tečné vektory $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ v těchto bodech. Každé dva sousední body $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i+1}$ můžeme považovat za krajní body i -té Fergusonovy kubiky k_i , která je dána vektorovou rovnicí

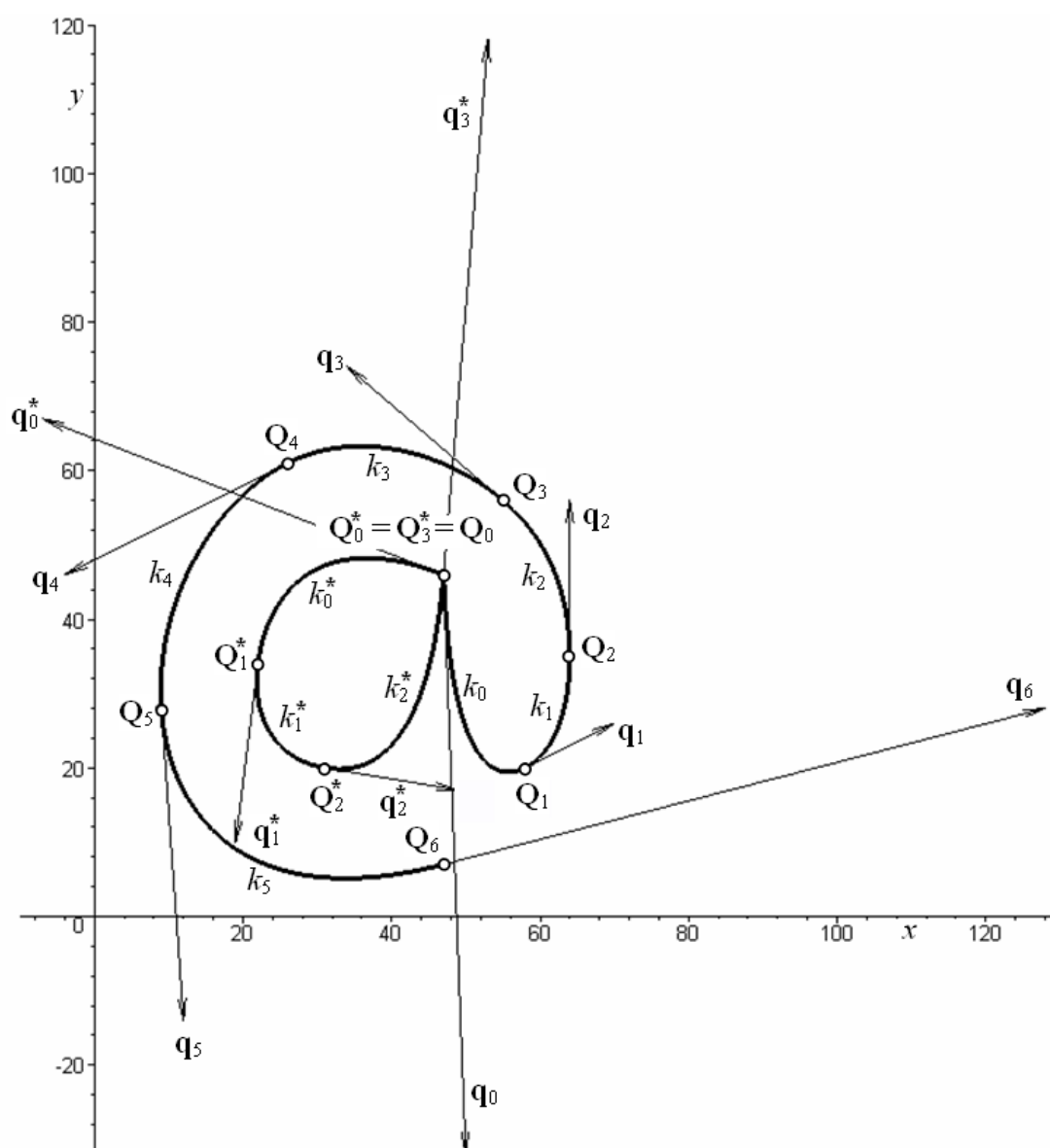
$$\mathbf{P}_i(t) = F_0(t)\mathbf{Q}_i + F_1(t)\mathbf{Q}_{i+1} + F_2(t)\mathbf{q}_i + F_3(t)\mathbf{q}_{i+1}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.12)$$

Zadanou posloupnost definičních bodů tedy můžeme interpolovat křivkou k složenou z n segmentů – Fergusonových kubik k_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$. Každé dva sousední segmenty jsou potom automaticky C^1 spojitě napojeny, neboť v bodech napojení mají totožné tečné vektory. Parametr t každé dílčí Fergusonovy kubiky je z intervalu $t \in [0, 1]$.

- **Příklad 2.2 – Modelování znaku @ z Fergusonových kubik.** Jsou dány definiční body $\mathbf{Q}_0^* = (47, 46)$, $\mathbf{Q}_1^* = (22, 34)$, $\mathbf{Q}_2^* = (31, 20)$, $\mathbf{Q}_3^* = \mathbf{Q}_0^* = (47, 46)$ a tečné vektory $\mathbf{q}_0^* = (-54, 21)$, $\mathbf{q}_1^* = (-3, -24)$, $\mathbf{q}_2^* = (18, -3)$, $\mathbf{q}_3^* = (6, 72)$ křivky k^* složené z Fergusonových kubik a definiční body $\mathbf{Q}_0 = (47, 46)$, $\mathbf{Q}_1 = (58, 20)$, $\mathbf{Q}_2 = (64, 35)$, $\mathbf{Q}_3 = (55, 56)$, $\mathbf{Q}_4 = (26, 61)$, $\mathbf{Q}_5 = (9, 28)$, $\mathbf{Q}_6 = (47, 7)$ a tečné vektory $\mathbf{q}_0 = (3, -78)$, $\mathbf{q}_1 = (12, 6)$, $\mathbf{q}_2 = (0, 21)$, $\mathbf{q}_3 = (-21, 18)$, $\mathbf{q}_4 = (-30, -15)$, $\mathbf{q}_5 = (3, -42)$, $\mathbf{q}_6 = (81, 21)$ křivky k složené z Fergusonových kubik. Křivky k^* , k modelují znak @.

Zobrazte definiční body, sestrojte tečné vektory a Fergusonovy kubiky načrtněte. Jaká je spojitost napojení jednotlivých segmentů, ze kterých jsou složeny křivky k^* , k ?

Řešení.



Obrázek 2.4: Modelování znaku @ z Fergusonových kubik

Jednotlivé Fergusonovy kubiky obou interpolačních křivek jsou C^1 spojitě napojeny kromě bodu $\mathbf{Q}_0^* = \mathbf{Q}_3^*$, ve kterém se křivka k^* uzavírá s C^0 spojitostí. \square

Poznámka: Jak uvidíme dále v příkladu 2.6, definiční body a tečné vektory pro modelování znaku @ v příkladu 2.2 byly předem zvoleny tak, aby byla zajištěna i C^2 spojitost napojení jednotlivých segmentů křivky k i k^* . Obecný postup modelování interpolačních křivek z C^2 spojitě napojených Fergusonových kubik však nebudeme uvádět.

■ **Cvičení 2.1** Fergusonova kubika $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je dána svými krajními body $\mathbf{A} = (0, 0)$, $\mathbf{B} = (2, 0)$ a tečnými vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} v těchto bodech.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Pro hodnoty parametru $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ a $t = 1$ vypočítejte souřadnice bodů Fergusonovy kubiky a složky tečných vektorů v těchto bodech. Zobraďte body Fergusonovy kubiky, sestrojte tečné vektory v těchto bodech a Fergusonovu kubiku načrtněte. Řešení proveďte pro následující varianty tečných vektorů:

- a) $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, -1)$, b) $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$,
 c) $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, d) $\mathbf{a} = (-1, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, -1)$.

■ **Cvičení 2.2** Jsou dány definiční body $\mathbf{Q}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{Q}_1 = (6, 0)$, $\mathbf{Q}_2 = (0, 0)$, $\mathbf{Q}_3 = (-6, 0)$, $\mathbf{Q}_4 = (0, 0)$ a tečné vektory $\mathbf{q}_0 = (9, 9)$, $\mathbf{q}_1 = (0, -9)$, $\mathbf{q}_2 = (-9, 9)$, $\mathbf{q}_3 = (0, -9)$, $\mathbf{q}_4 = (9, 9)$ v těchto bodech.

Zobraďte definiční body, sestrojte tečné vektory a načrtněte segmentovanou interpolační křivku k procházející všemi definičními body složenou z Fergusonových kubik. Z kolika Fergusonových kubik se interpolační křivka k skládá? Určete bez výpočtu spojitost, se kterou jsou každé dvě sousední Fergusonovy kubiky napojeny. Nalezněte vektorové rovnice jednotlivých Fergusonových kubik křivky k a ověřte předpokládanou spojitost jejich napojení.

■ **Cvičení 2.3** Nalezněte vektorové rovnice jednotlivých segmentů znaku @ z příkladu 2.2 a vyšetřete spojitost jejich napojení.

2.1.4 Fergusonova kubika v Rhinu

V Rhinu lze vytvořit Fergusonovu kubiku pouze nepřímo, a to využitím jejího vztahu s Bézierovou kubikou, viz část 2.2.5.

2.2 Bézierova křivka

Bézierova křivka n -tého stupně je tvořena jediným segmentem. Je určena $n + 1$ řídicími body uspořádanými do řídicího polygonu. Krajními body řídicího polygonu prochází (interpoluje je), všechny vnitřní body řídicího polygonu aproximuje.

■ **Definice 2.2 – Bézierova křivka.** Necht' jsou dány řídicí body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$. Potom je vektorová rovnice *Bézierovy křivky*

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i = B_{0,n}(t) \mathbf{V}_0 + B_{1,n}(t) \mathbf{V}_1 + \dots + B_{n,n}(t) \mathbf{V}_n, \quad t \in [0, 1], \quad (2.13)$$

kde bázové funkce

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.14)$$

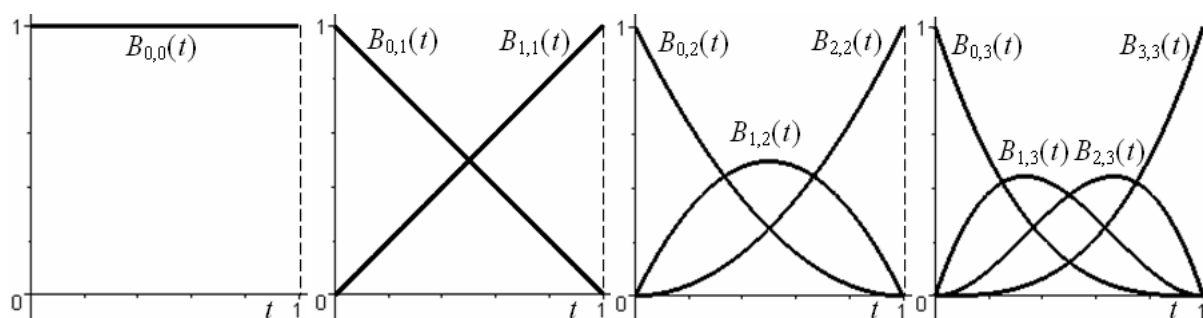
jsou *Bernsteinovy polynomy* n -tého stupně. □

První index Bernsteinova polynomu označuje pořadí shodné s pořadím řídicího bodu, se kterým je Bernsteinův polynom asociován. Druhý index označuje stupeň.

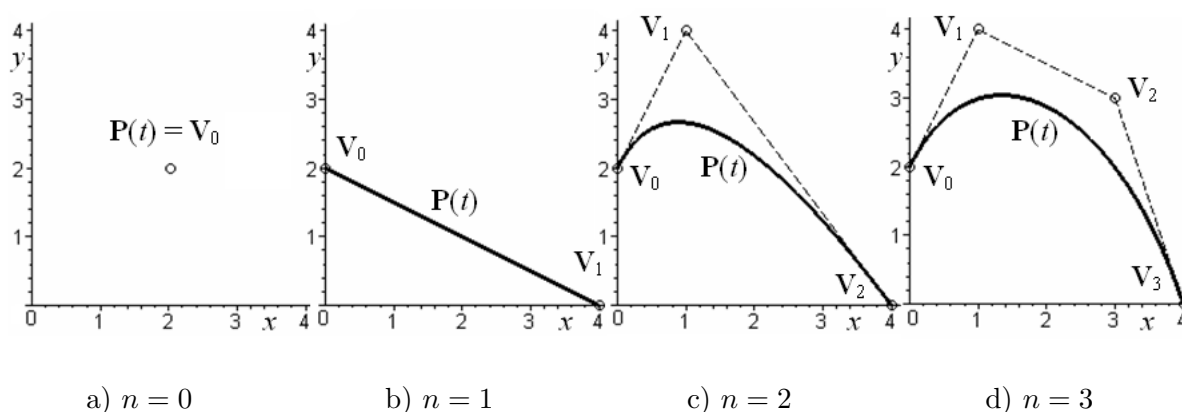
Dosadíme-li do (2.14) za $n = 0, 1, 2, 3$, obdržíme Bernsteinovy polynomy nultého až 3. stupně, které jsou uvedeny v tab. 2.1; jejich průběh je nakreslen na obr. 2.5. Povšimněme si, že součet všech Bernsteinových polynomů stejného stupně je vždy roven jedné.

Tabulka 2.1: Bernsteinovy polynomy nultého až 3. stupně

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$i = 0$	$B_{0,0}(t) = 1$	$B_{0,1}(t) = 1 - t$	$B_{0,2}(t) = (1 - t)^2$	$B_{0,3}(t) = (1 - t)^3$
$i = 1$		$B_{1,1}(t) = t$	$B_{1,2}(t) = 2t(1 - t)$	$B_{1,3}(t) = 3t(1 - t)^2$
$i = 2$			$B_{2,2}(t) = t^2$	$B_{2,3}(t) = 3t^2(1 - t)$
$i = 3$				$B_{3,3}(t) = t^3$



Obrázek 2.5: Bernsteinovy polynomy nultého až 3. stupně



a) $n = 0$

b) $n = 1$

c) $n = 2$

d) $n = 3$

Obrázek 2.6: Bézierovy křivky nultého až 3. stupně

Obsahuje-li řídicí polygon jediný bod, redukuje se Bézierova křivka na tento řídicí bod, neboť

vektorová rovnice Bézierovy křivky nultého stupně je

$$\mathbf{P}(t) = B_{0,0}(t)\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0, \quad t \in [0, 1], \quad (2.15)$$

viz obr. 2.6 a). Je-li řídicí polygon tvořen dvěma řídicími body, je vektorová rovnice Bézierovy křivky 1. stupně

$$\mathbf{P}(t) = B_{0,1}(t)\mathbf{V}_0 + B_{1,1}(t)\mathbf{V}_1 = (1-t)\mathbf{V}_0 + t\mathbf{V}_1, \quad t \in [0, 1], \quad (2.16)$$

což je rovnice úsečky, která řídicí body \mathbf{V}_0 a \mathbf{V}_1 spojuje, viz obr. 2.6 b).

V praxi se nejčastěji užívají Bézierovy křivky 2. stupně, viz obr. 2.6 c), jejichž vektorová rovnice je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= B_{0,2}(t)\mathbf{V}_0 + B_{1,2}(t)\mathbf{V}_1 + B_{2,2}(t)\mathbf{V}_2 = \\ &= (1-t)^2\mathbf{V}_0 + 2t(1-t)\mathbf{V}_1 + t^2\mathbf{V}_2, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.17)$$

nebo Bézierovy křivky 3. stupně (kubiky), viz obr. 2.6 d), s vektorovou rovnicí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= B_{0,3}(t)\mathbf{V}_0 + B_{1,3}(t)\mathbf{V}_1 + B_{2,3}(t)\mathbf{V}_2 + B_{3,3}(t)\mathbf{V}_3 = \\ &= (1-t)^3\mathbf{V}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{V}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{V}_2 + t^3\mathbf{V}_3, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bézierovy křivky vyšších stupňů se k modelování složitých tvarů určených mnoha řídicími body nepoužívají, neboť se vzrůstajícím počtem řídicích bodů neúnosně vzrůstá stupeň křivky.

■ **Příklad 2.3 – Bézierova křivka 2. stupně.** Bézierova křivka $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je dána řídicími body $\mathbf{V}_0 = (2, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (4, 1)$, $\mathbf{V}_2 = (3, 2)$.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Pro hodnoty parametru $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ vypočítejte souřadnice bodů Bézierovy křivky a složky tečných vektorů v těchto bodech. Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon, zobrazte body Bézierovy křivky, sestrojte tečné vektory v těchto bodech a Bézierovu křivku načrtněte.

Řešení. x -ovou, resp. y -ovou souřadnicovou funkci $x(t)$, resp. $y(t)$ Bézierovy křivky dostaneme, pokud do (2.17) dosadíme x -ové, resp. y -ové složky zadaných řídicích bodů. Parametrické vyjádření Bézierovy křivky 2. stupně je

$$\begin{aligned} x(t) &= 2B_{0,2}(t) + 4B_{1,2}(t) + 3B_{2,2}(t) = 2(1-t)^2 + 4 \cdot 2t(1-t) + 3t^2 = -3t^2 + 4t + 2, \\ y(t) &= B_{1,2}(t) + 2B_{2,2}(t) = 2t(1-t) + 2t^2 = 2t, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Bézierovy křivky 2. stupně je

$$\mathbf{P}(t) = (-3t^2 + 4t + 2, 2t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.19)$$

První derivace x -ové, resp. y -ové souřadnicové funkce Bézierovy křivky je x -ová, resp. y -ová složka tečného vektoru. Parametrické vyjádření tečného vektoru Bézierovy křivky (2.19) je

$$\begin{aligned} x'(t) &= (-3t^2 + 4t + 2)' = -6t + 4, \\ y'(t) &= (2t)' = 2, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

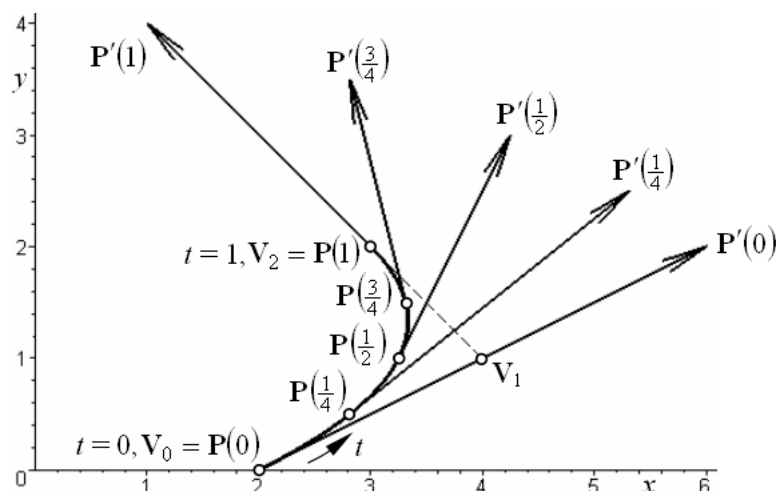
a vektorová rovnice tečného vektoru Bézierovy křivky (2.19) je

$$\mathbf{P}'(t) = (-6t + 4, 2), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.20)$$

Dosadíme-li $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ do (2.19), resp. do (2.20), obdržíme body Bézierovy křivky, resp. tečné vektory v těchto bodech, které jsou uvedeny v tabulce.

Tvar Bézierovy křivky (2.19) a průběh tečného vektoru (2.20) podél ní je patrný z obr. 2.7.

	$t = 0$	$t = \frac{1}{4}$	$t = \frac{1}{2}$	$t = \frac{3}{4}$	$t = 1$
$\mathbf{P}(t)$	$(2, 0)$	$(\frac{45}{16}, \frac{1}{2})$	$(\frac{13}{4}, 1)$	$(\frac{53}{16}, \frac{3}{2})$	$(3, 2)$
$\mathbf{P}'(t)$	$(4, 2)$	$(\frac{5}{2}, 2)$	$(1, 2)$	$(-\frac{1}{2}, 2)$	$(-2, 2)$



Obrázek 2.7: Bézierova křivka 2. stupně

□

■ **Příklad 2.4 – Bézierova kubika.** Bézierova kubika $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je dána řídicími body $\mathbf{V}_0 = (2, 3)$, $\mathbf{V}_1 = (4, 2)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_3 = (-1, 1)$.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy kubiky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Pro hodnoty parametru $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ vypočítejte souřadnice bodů Bézierovy kubiky a složky tečných vektorů v těchto bodech. Zobraďte řídicí polygon, zobraďte body Bézierovy kubiky, sestrojte tečné vektory v těchto bodech a Bézierovu kubiku načrtněte.

Řešení. Parametrické vyjádření Bézierovy kubiky a jejího tečného vektoru je (volíme již stručnější formu zápisu)

$$x(t) = 2B_{0,3}(t) + 4B_{1,3}(t) - B_{3,3}(t) = 9t^3 - 18t^2 + 6t + 2,$$

$$y(t) = 3B_{0,3}(t) + 2B_{1,3}(t) + B_{3,3}(t) = 4t^3 - 3t^2 - 3t + 3, \quad t \in [0, 1],$$

$$x'(t) = 27t^2 - 36t + 6,$$

$$y'(t) = 12t^2 - 6t - 3, \quad t \in [0, 1].$$

Vektorová rovnice Bézierovy kubiky a jejího tečného vektoru je

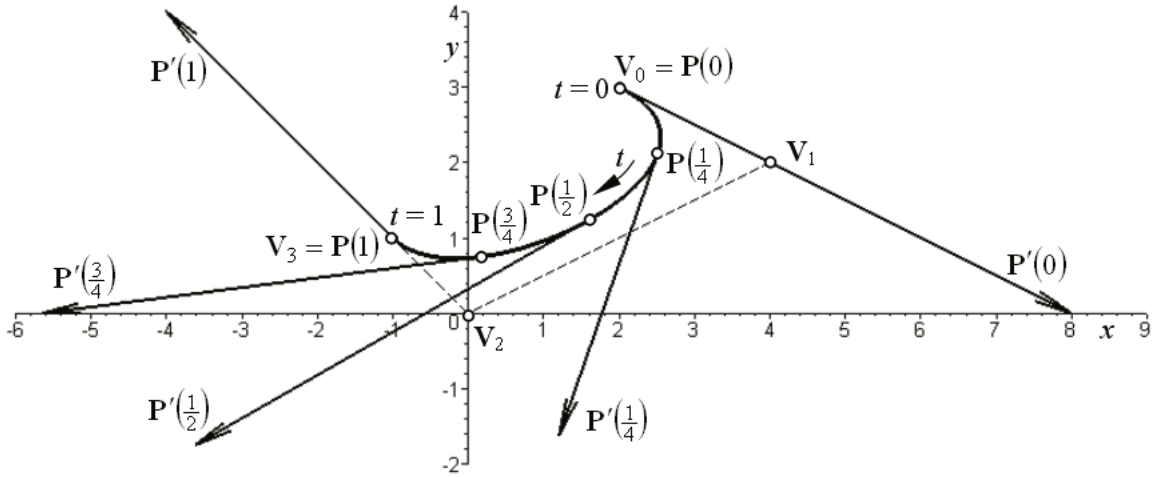
$$\mathbf{P}(t) = (9t^3 - 18t^2 + 6t + 2, 4t^3 - 3t^2 - 3t + 3), \quad t \in [0, 1], \quad (2.21)$$

$$\mathbf{P}'(t) = (27t^2 - 36t + 6, 12t^2 - 6t - 3), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.22)$$

Body Bézierovy kubiky a tečné vektory pro $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ jsou uvedeny v tabulce.

	$t = 0$	$t = \frac{1}{4}$	$t = \frac{1}{2}$	$t = \frac{3}{4}$	$t = 1$
$\mathbf{P}(t)$	$(2, 3)$	$(\frac{161}{64}, \frac{17}{8})$	$(\frac{13}{8}, \frac{5}{4})$	$(\frac{11}{64}, \frac{3}{4})$	$(-1, 1)$
$\mathbf{P}'(t)$	$(6, -3)$	$(-\frac{21}{16}, -\frac{15}{4})$	$(-\frac{21}{4}, -3)$	$(-\frac{93}{16}, -\frac{3}{4})$	$(-3, 3)$

Tvar Bézierovy kubiky (2.21) a průběh tečného vektoru (2.22) podél ní je patrný z obr. 2.8.



Obrázek 2.8: Bézierova kubika

□

2.2.1 Vlastnosti Bézierovy křivky

Bézierova křivka má zajímavé geometrické vlastnosti, které jsou patrné z příkladů 2.3 a 2.4:

- Bézierova křivka (2.13) vždy interpoluje krajní body řídicího polygonu, tedy $\mathbf{P}(0) = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{V}_n$.
- Tečný vektor $\mathbf{P}'(0)$ v počátečním bodě Bézierovy křivky (2.13) je roven n -násobku vektoru určeného počátečním ramenem řídicího polygonu: $\mathbf{P}'(0) = n\overrightarrow{\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1} = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$.
- Tečný vektor $\mathbf{P}'(1)$ v koncovém bodě Bézierovy křivky (2.13) je roven n -násobku vektoru určeného koncovým ramenem řídicího polygonu: $\mathbf{P}'(1) = n\overrightarrow{\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n} = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$.
- Leží-li všechny řídicí body Bézierovy křivky v jedné přímce, redukuje se Bézierova křivka na úsečku. Tato vlastnost se nazývá *lineární přesnost*.

Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou

S ohledem na právě formulované vlastnosti Bézierovy křivky je zřejmé, že mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou bude existovat určitý vzájemný vztah. Pro odvození tohoto vztahu předpokládejme, že je dán řídicí polygon $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$ Bézierovy kubiky. Dosadíme-li do rovnice Fergusonovy kubiky (2.1) následující vstupní data

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}_3, \quad \mathbf{a} = 3\overrightarrow{\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1} = 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{b} = 3\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3} = 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2), \quad (2.23)$$

dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= F_0(t)\mathbf{V}_0 + F_1(t)\mathbf{V}_3 + 3F_2(t)(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) + 3F_3(t)(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) = \\ &= [F_0(t) - 3F_2(t)]\mathbf{V}_0 + 3F_2(t)\mathbf{V}_1 - 3F_3(t)\mathbf{V}_2 + [F_1(t) + 3F_3(t)]\mathbf{V}_3 = \\ &= (2t^3 - 3t^2 + 1 - 3t^3 + 6t^2 - 3t)\mathbf{V}_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)\mathbf{V}_1 - \\ &\quad - (3t^3 - 3t^2)\mathbf{V}_2 + (-2t^3 + 3t^2 + 3t^3 - 3t^2)\mathbf{V}_3 = \\ &= (1-t)^3\mathbf{V}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{V}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{V}_2 + t^3\mathbf{V}_3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

což je rovnice Bézierovy kubiky zadané řídicím polygonem $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$. Fergusonova kubika je tedy speciální případ Bézierovy kubiky, u které počáteční, resp. koncový řídicí bod je počátečním,

resp. koncovým bodem Fergusonovy kubiky a trojnásobek počátečního, resp. koncového ramene řídicího polygonu je tečným vektorem v počátečním, resp. koncovém bodě Fergusonovy kubiky.

Řešíme-li rovnici (2.24) vzhledem k řídicím bodům $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$, dostaneme převodní vztah mezi řídicími body Bézierovy kubiky a vstupními daty Fergusonovy kubiky:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{A}, \mathbf{V}_1 = \mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{a}, \mathbf{V}_2 = \mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathbf{b}, \mathbf{V}_3 = \mathbf{B}. \quad (2.25)$$

■ **Příklad 2.5 – Vztah mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou.** Pro řídicí body $\mathbf{V}_0 = (-2, 1)$, $\mathbf{V}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_2 = (1, 3)$ a $\mathbf{V}_3 = (2, 2)$ určete parametrické vyjádření Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_B(t)$, $t \in [0, 1]$. Dle rov. (2.23) vypočítejte vstupní data pro Fergusonovu kubiku $\mathbf{P}_F(t) = (x_F(t), y_F(t))$ a určete její parametrické vyjádření. Výsledky porovnejte. Doprovod'te obrázkem.

Řešení. Parametrické vyjádření Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_B(t) = (x_B(t), y_B(t))$ je

$$\begin{aligned} x_B(t) &= -2B_{0,3}(t) + B_{2,3}(t) + 2B_{3,3}(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 2, \\ y_B(t) &= B_{0,3}(t) + 3B_{2,3}(t) + 2B_{3,3}(t) = -8t^3 + 12t^2 - 3t + 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

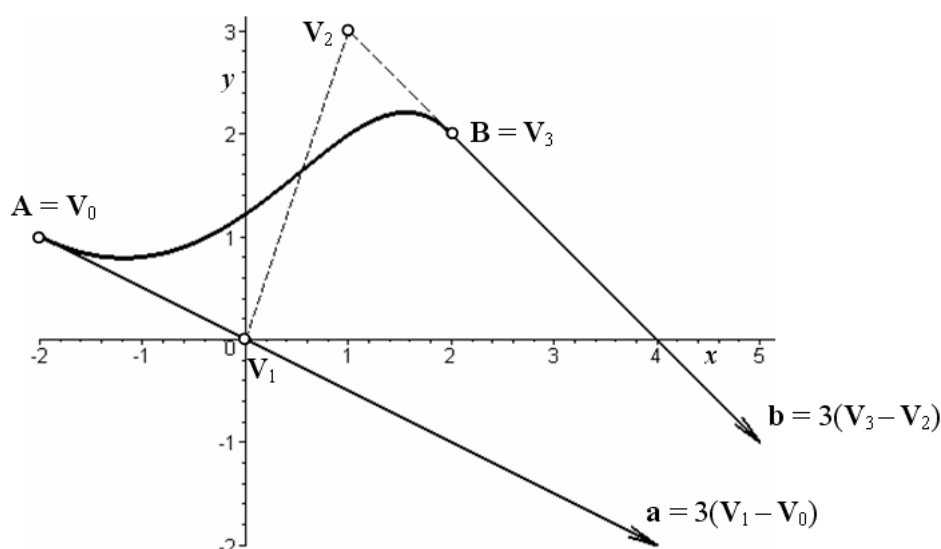
Vstupní data Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}_F(t)$ jsou podle (2.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{V}_0 = (-2, 1), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}_3 = (2, 2), \\ \mathbf{a} &= 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) = (6, -3), \\ \mathbf{b} &= 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) = (3, -3). \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}_F(t) = (x_F(t), y_F(t))$ je

$$\begin{aligned} x_F(t) &= -2F_0(t) + 2F_1(t) + 6F_2(t) + 3F_3(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 2, \\ y_F(t) &= F_0(t) + 2F_1(t) - 3F_2(t) - 3F_3(t) = -8t^3 + 12t^2 - 3t + 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Protože $x_B(t) = x_F(t)$ a $y_B(t) = y_F(t)$, jsou obě kubiky totožné. Situaci ilustruje obr. 2.9.



Obrázek 2.9: Vztah Fergusonovy a Bézierovy kubiky

□

■ **Příklad 2.6 – Modelování znaku @ z Bézierových kubik.** Předpokládejte, že jednotlivé segmenty interpolačních křivek, kterými je modelován znak @ v příkladu 2.2 jsou Bézierovy kubiky.

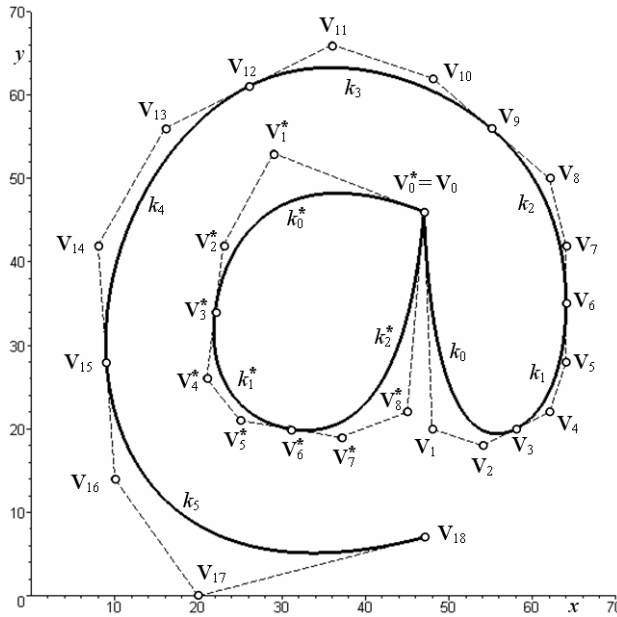
Určete jejich řídicí body, zobrazte je, sestrojte řídicí polygony a Bézierovy kubiky načrtněte.

Řešení. Křivka k^* je složena ze tří Bézierových kubik k_0^* , k_1^* a k_2^* , z nichž každá je určena čtyřmi řídicími body. Každé dvě sousední Bézierovy kubiky jsou vzájemně napojeny, proto stačí určit $3 \times 4 - 3 = 9$ různých řídicích bodů, které označíme $\mathbf{V}_0^*, \dots, \mathbf{V}_8^*$. Podle (2.25) máme:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0^* &= \mathbf{A}_0 = (47, 46), \\ \mathbf{V}_1^* &= \mathbf{A}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_0 = (47, 46) + \frac{1}{3}(-54, 21) = (29, 53), \\ \mathbf{V}_2^* &= \mathbf{A}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{a}_1 = (22, 34) - \frac{1}{3}(-3, -24) = (23, 42), \\ \mathbf{V}_3^* &= \mathbf{A}_1 = (22, 34), \\ \mathbf{V}_4^* &= \mathbf{A}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_1 = (22, 34) + \frac{1}{3}(-3, -24) = (21, 26), \\ \mathbf{V}_5^* &= \mathbf{A}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{a}_2 = (31, 20) - \frac{1}{3}(18, -3) = (25, 21), \\ \mathbf{V}_6^* &= \mathbf{A}_2 = (31, 20), \\ \mathbf{V}_7^* &= \mathbf{A}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_2 = (31, 20) + \frac{1}{3}(18, -3) = (37, 19), \\ \mathbf{V}_8^* &= \mathbf{A}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{a}_3 = (47, 46) - \frac{1}{3}(6, 72) = (45, 22).\end{aligned}$$

Jednotlivé Bézierovy kubiky křivky k^* jsou potom určeny následujícími řídicími polygony:

$$k_0^* : \mathbf{V}_0^* \mathbf{V}_1^* \mathbf{V}_2^* \mathbf{V}_3^*, \quad k_1^* : \mathbf{V}_3^* \mathbf{V}_4^* \mathbf{V}_5^* \mathbf{V}_6^*, \quad k_2^* : \mathbf{V}_6^* \mathbf{V}_7^* \mathbf{V}_8^* \mathbf{V}_0^*, \quad \text{viz obr. 2.10.}$$



Obrázek 2.10: Modelování znaku @ z Bézierových kubik

Obdobně je křivka k složena ze šesti Bézierových kubik, k jejichž definici potřebujeme určit 19 různých řídicích bodů \mathbf{V}_i , $i = 0, \dots, 18$. Podle (2.25) jsou následující: $\mathbf{V}_0 = (47, 46)$, $\mathbf{V}_1 = (48, 20)$, $\mathbf{V}_2 = (54, 18)$, $\mathbf{V}_3 = (58, 20)$, $\mathbf{V}_4 = (62, 22)$, $\mathbf{V}_5 = (64, 28)$, $\mathbf{V}_6 = (64, 35)$, $\mathbf{V}_7 = (64, 42)$, $\mathbf{V}_8 = (62, 50)$, $\mathbf{V}_9 = (55, 56)$, $\mathbf{V}_{10} = (48, 62)$, $\mathbf{V}_{11} = (36, 66)$, $\mathbf{V}_{12} = (26, 61)$, $\mathbf{V}_{13} = (16, 56)$, $\mathbf{V}_{14} = (8, 42)$, $\mathbf{V}_{15} = (9, 28)$, $\mathbf{V}_{16} = (10, 14)$, $\mathbf{V}_{17} = (20, 0)$, $\mathbf{V}_{18} = (47, 7)$.

Řídicí polygony jednotlivých Bézierových kubik k_i , $i = 0, \dots, 5$, jsou patrné z obr. 2.10. \square

2.2.2 Odvození Bernsteinových polynomů

Pokud je řídicí polygon Bézierovy křivky tvořen jediným řídicím bodem \mathbf{V}_0 , musí být Bernsteinův polynom nultého stupně $B_{0,0}(t) = 1$, protože Bézierova křivka interpoluje krajní body řídicího polygonu – v tomto případě právě zadaný řídicí bod.

Obsahuje-li řídicí polygon Bézierovy křivky dva řídicí body \mathbf{V}_0 a \mathbf{V}_1 , napíšeme vektorovou rovnici Bézierovy křivky jako rovnici úsečky dané dvěma body

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{V}_0 + t(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) = \mathbf{V}_0(1 - t) + t\mathbf{V}_1, \quad t \in [0, 1], \quad (2.26)$$

kde součinitelé u \mathbf{V}_0 a \mathbf{V}_1 jsou Bernsteinovy polynomy 1. stupně. Pro pevně zvolenou hodnotu parametru $t = \alpha \in [0, 1]$ obdržíme bod

$$\mathbf{A}_0 = (1 - \alpha)\mathbf{V}_0 + \alpha\mathbf{V}_1 \quad (2.27)$$

na úsečce $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1$, což je bod $\mathbf{P}(\alpha)$ Bézierovy křivky 1. stupně zadané řídicími body \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 pro hodnotu parametru $t = \alpha$.

Řídicí polygon se třemi řídicími body \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 a \mathbf{V}_2 můžeme v prvním kroku rozdělit na dva dílčí řídicí polygony – úsečku $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1$ a úsečku $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$. Každou úsečku můžeme považovat za Bézierovu křivku 1. stupně. Pro pevně zvolené $t = \alpha \in [0, 1]$ je bod úsečky $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1$ dán (2.27), bod úsečky $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$ vyjádříme obdobně:

$$\mathbf{A}_1 = (1 - \alpha)\mathbf{V}_1 + \alpha\mathbf{V}_2. \quad (2.28)$$

Ve druhém kroku můžeme body \mathbf{A}_0 a \mathbf{A}_1 považovat za koncové body nové úsečky. Pro vyjádření bodu \mathbf{B}_0 ležícího na úsečce $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ opět použijeme (2.27) a máme

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0(1 - \alpha) + \mathbf{A}_1\alpha. \quad (2.29)$$

Do (2.29) dosadíme (2.27) za \mathbf{A}_0 a (2.28) za \mathbf{A}_1 a po úpravě dostaneme

$$\mathbf{B}_0 = (1 - \alpha)^2\mathbf{V}_0 + 2\alpha(1 - \alpha)\mathbf{V}_1 + \alpha^2\mathbf{V}_2, \quad (2.30)$$

což je bod $\mathbf{P}(\alpha)$ na Bézierově křivce 2. stupně zadané řídicími body \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 a \mathbf{V}_2 pro hodnotu parametru $t = \alpha$. Uvažujeme-li hodnotu parametru v celém oboru parametrizace, obdržíme vektorovou rovnici Bézierovy křivky 2. stupně (2.17), neboť součinitelé u vstupních dat v (2.30) přejdou v Bernsteinovy polynomy 2. stupně, viz tab. 2.1.

Řídicí polygon se čtyřmi řídicími body \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 a \mathbf{V}_3 můžeme považovat za tři dílčí řídicí polygony – úsečky $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1$, resp. $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$, resp. $\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$, na nichž pro pevně zvolené $t = \alpha \in [0, 1]$ vyjádříme body \mathbf{A}_0 dle (2.27), resp. \mathbf{A}_1 dle (2.28), resp.

$$\mathbf{A}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{V}_2 + \alpha\mathbf{V}_3. \quad (2.31)$$

Ve druhém kroku vyjádříme body \mathbf{B}_0 , resp. \mathbf{B}_1 na úsečce $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ dle (2.29), resp. na úsečce $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{B}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{A}_1 + \alpha\mathbf{A}_2. \quad (2.32)$$

Konečně ve třetím kroku vyjádříme bod \mathbf{C}_0 na úsečce $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$:

$$\mathbf{C}_0 = (1 - \alpha)\mathbf{B}_0 + \alpha\mathbf{B}_1. \quad (2.33)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

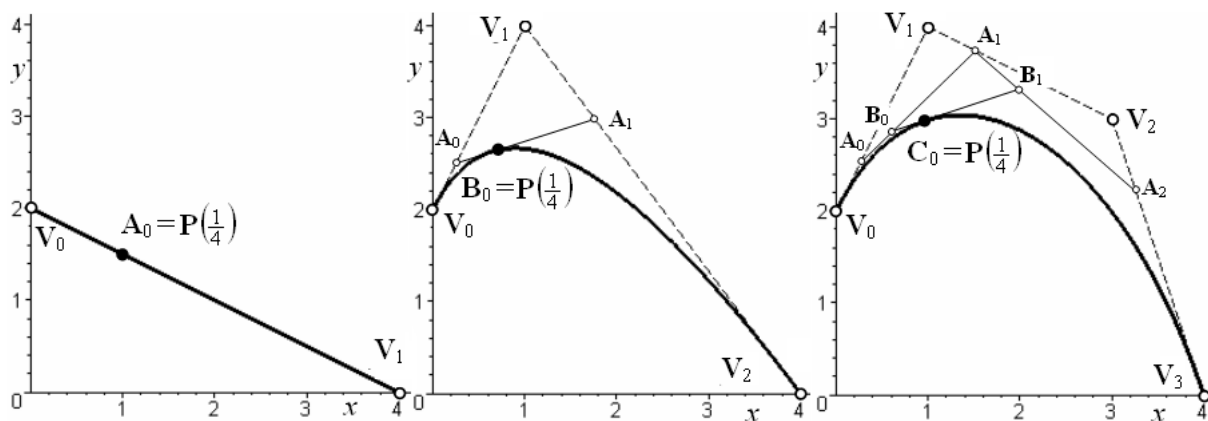
$$\mathbf{C}_0 = (1 - \alpha)^3\mathbf{V}_0 + 3\alpha(1 - \alpha)^2\mathbf{V}_1 + 3\alpha^2(1 - \alpha)\mathbf{V}_2 + \alpha^3\mathbf{V}_3, \quad (2.34)$$

což je bod $\mathbf{P}(\alpha)$ Bézierovy kubiky pro hodnotu parametru $t = \alpha$. Je zřejmé, že budeme-li uvažovat celý obor parametrizace parametru t , přejdou součinitelé u vstupních dat v (2.34) v Bernsteinovy polynomy 3. stupně, viz tab. 2.1.

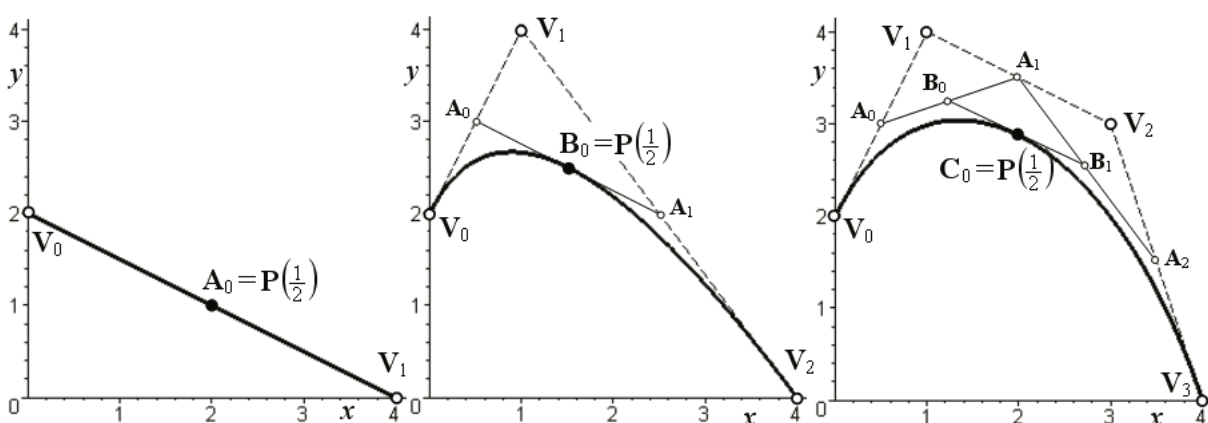
Naznačeným způsobem bychom odvodili Bernsteinovy polynomy libovolného stupně.

2.2.3 De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na Bézierově křivce

Geometrickou interpretací postupu, který jsme zvolili k odvození Bernsteinových polynomů, je *de Casteljau algoritmus* konstrukce bodu $\mathbf{P}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, na Bézierově křivce $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$. Na obr. 2.11, obr. 2.12 a obr. 2.13 je provedena konstrukce bodů na Bézierových křivkách 1. až 3. stupně pro $\alpha = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.



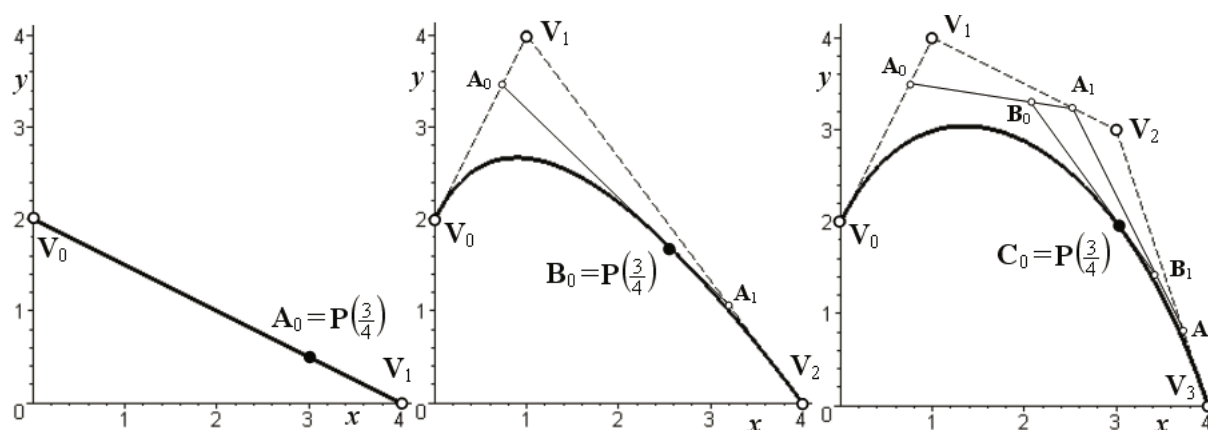
Obrázek 2.11: de Casteljau algoritmus konstrukce bodu $\mathbf{P}(\frac{1}{4})$



Obrázek 2.12: de Casteljau algoritmus konstrukce bodu $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$

De Casteljau algoritmus probíhá v následujících krocích (sledujme obr. 2.11, obr. 2.12 a obr. 2.13):

1. Zvolíme $\alpha \in [0, 1]$.
2. Všechna ramena řídicího polygonu dělíme v poměru $\alpha : (1 - \alpha)$. Tímto dělením obdržíme body \mathbf{A}_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$.
3. Body \mathbf{A}_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$, spojíme úsečkami. Vznikne nový řídicí polygon, který má o jedno rameno méně než původní řídicí polygon.

Obrázek 2.13: de Casteljau algoritmus konstrukce bodu $\mathbf{P}(\frac{3}{4})$

4. Všechna ramena nově vzniklého řídicího polygonu opět dělíme v poměru $\alpha : (1 - \alpha)$. Tímto dělením obdržíme body \mathbf{B}_i , $i = 0, 1, \dots, n - 2$.
5. Body 3) a 4) opakujeme a končíme, jakmile je poslední řídicí polygon tvořen jediným ramenem.
6. Bod, který získáme posledním dělením je bod $\mathbf{P}(\alpha)$ Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$. Poslední rameno je zároveň tečna Bézierovy křivky v bodě $\mathbf{P}(\alpha)$. Tečný vektor $\mathbf{P}'(\alpha)$ je roven n -násobku posledního ramene.

Je zřejmé, že pro konstrukci bodu na Bézierově křivce stupně n pomocí de Casteljau algoritmu je třeba provést celkem n dělení.

- **Příklad 2.7 De Casteljau algoritmus, $n=6$.** Bézierova křivka $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je určena řídicími body $\mathbf{V}_0 = (0, 2)$, $\mathbf{V}_1 = (7, 9)$, $\mathbf{V}_2 = (17, 9)$, $\mathbf{V}_3 = (20, 4)$, $\mathbf{V}_4 = (16, 0)$, $\mathbf{V}_5 = (10, 0)$, $\mathbf{V}_6 = (6, 4)$.

De Casteljau algoritmem zkonstruujte bod $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$.

Řešení. Sedmi řídicími body je určena Bézierova křivka 6. stupně. De Casteljau algoritmus má šest úrovní dělení, jak můžeme vidět na obr. 2.14, kde je provedena konstrukce bodu $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$ na Bézierově křivce $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$.

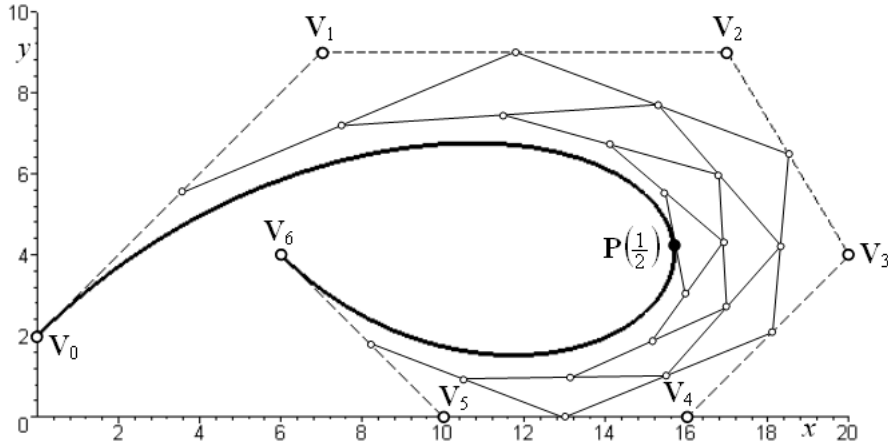
2.2.4 Napojení Bézierových křivek

Budeme uvažovat dvě Bézierovy kubiky a vyšetříme podmínky jejich napojení se spojitostí nultého řádu C^0 , se spojitostí 1. řádu C^1 a se spojitostí 2. řádu C^2 . První kubiku označíme $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, a předpokládáme, že je určená *známými* řídicími body \mathbf{V}_i , $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\mathbf{P}(t) = B_{0,3}(t)\mathbf{V}_0 + B_{1,3}(t)\mathbf{V}_1 + B_{2,3}(t)\mathbf{V}_2 + B_{3,3}(t)\mathbf{V}_3, \quad t \in [0, 1]. \quad (2.35)$$

K jejímu koncovému bodu připojíme druhou kubiku, kterou označíme $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$:

$$\mathbf{R}(s) = B_{0,3}(s)\mathbf{W}_0 + B_{1,3}(s)\mathbf{W}_1 + B_{2,3}(s)\mathbf{W}_2 + B_{3,3}(s)\mathbf{W}_3, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.36)$$



Obrázek 2.14: De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na Béziově křivce 6. stupně \square

Z požadavku C^0 , resp. C^1 , resp. C^2 spojitosti napojení stanovíme podmínky pro polohu *neznámých* řídicích bodů \mathbf{W}_i , $i = 0, 1, 2, 3$, kubiky $\mathbf{R}(s)$. Za tím účelem vyjádříme první a druhou derivaci Béziových kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= B'_{0,3}(t)\mathbf{V}_0 + B'_{1,3}(t)\mathbf{V}_1 + B'_{2,3}(t)\mathbf{V}_2 + B'_{3,3}(t)\mathbf{V}_3, \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{P}''(t) &= B''_{0,3}(t)\mathbf{V}_0 + B''_{1,3}(t)\mathbf{V}_1 + B''_{2,3}(t)\mathbf{V}_2 + B''_{3,3}(t)\mathbf{V}_3, \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{R}'(s) &= B'_{0,3}(s)\mathbf{W}_0 + B'_{1,3}(s)\mathbf{W}_1 + B'_{2,3}(s)\mathbf{W}_2 + B'_{3,3}(s)\mathbf{W}_3, \quad s \in [0, 1], \\ \mathbf{R}''(s) &= B''_{0,3}(s)\mathbf{W}_0 + B''_{1,3}(s)\mathbf{W}_1 + B''_{2,3}(s)\mathbf{W}_2 + B''_{3,3}(s)\mathbf{W}_3, \quad s \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.37)$$

kde $B_{i,3}(u)$, resp. $B'_{i,3}(u)$, resp. $B''_{i,3}(u)$, $u = t$ nebo $u = s$, $i = 0, 1, 2, 3$, jsou Bernsteinovy polynomy 3. stupně, resp. jejich první, resp. druhá derivace. V tabulce 2.2 jsou polynomy $B_{i,3}(u)$, $B'_{i,3}(u)$ a $B''_{i,3}(u)$ uvedeny včetně funkčních hodnot pro $u = 0$ a $u = 1$.

Tabulka 2.2: Bernsteinovy polynomy 3. stupně a jejich derivace

$B_{i,3}(u)$	$B_{i,3}(0)$	$B_{i,3}(1)$	$B'_{i,3}(u)$	$B'_{i,3}(0)$	$B'_{i,3}(1)$	$B''_{i,3}(u)$	$B''_{i,3}(0)$	$B''_{i,3}(1)$
$B_{0,3}(u) = (1-u)^3$	1	0	$B'_{0,3}(u) = -3u^2 + 6u - 3$	-3	0	$B''_{0,3}(u) = -6u + 6$	6	0
$B_{1,3}(u) = 3u(1-u)^2$	0	0	$B'_{1,3}(u) = 9u^2 - 12u + 3$	3	0	$B''_{1,3}(u) = 18u - 12$	-12	6
$B_{2,3}(u) = 3u^2(1-u)$	0	0	$B'_{2,3}(u) = -9u^2 + 6u$	0	-3	$B''_{2,3}(u) = -18u + 6$	6	-12
$B_{3,3}(u) = u^3$	0	1	$B'_{3,3}(u) = 3u^2$	0	3	$B''_{3,3}(u) = 6u$	0	6

Spojitost nultého řádu. Kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ budou napojeny s C^0 spojitostí, budou-li si rovny *funkční hodnoty jejich vektorových funkcí*, tj. $\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}(1)$. Dosaďme-li do (2.35) funkční hodnoty Bernsteinových polynomů pro $t = 1$ a do (2.36) funkční hodnoty Bernsteinových polynomů pro $s = 0$ z tab. 2.2, obdržíme podmínku C^0 spojitosti:

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3. \quad (2.38)$$

Řídicí bod \mathbf{W}_0 tedy musí být totožný s řídicím bodem \mathbf{V}_3 ; poloha ostatních řídicích bodů \mathbf{W}_i , $i = 1, 2, 3$, je libovolná.

Spojítost 1. řádu. Kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ budou napojeny s C^1 spojitostí, budou-li splněny podmínky C^0 spojitosti a budou-li si rovny *funkční hodnoty prvních derivací jejich vektorových funkcí*, tj. $\mathbf{R}'(0) = \mathbf{P}'(1)$. Dosadíme-li do (2.37) funkční hodnoty prvních derivací Bernsteinových polynomů pro $t = 1$ a $s = 0$ z tab. 2.2, obdržíme podmínku C^1 spojitosti:

$$-3\mathbf{W}_0 + 3\mathbf{W}_1 = -3\mathbf{V}_2 + 3\mathbf{V}_3. \quad (2.39)$$

Dosadíme za $\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3$ a podmínku upravíme tak, aby byla zřejmá její geometrická interpretace:

$$\mathbf{W}_1 - \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{V}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 + \mathbf{W}_1). \quad (2.40)$$

Vektor $\overrightarrow{\mathbf{V}_3\mathbf{W}_1}$ je shodný s vektorem $\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3}$, tzn., že řídicí bod \mathbf{V}_3 leží ve středu úsečky $\mathbf{V}_2\mathbf{W}_1$; poloha řídicích bodů \mathbf{W}_2 , \mathbf{W}_3 je libovolná. Pro výpočet použijeme vztah $\mathbf{W}_1 = 2\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2$.

Spojítost 2. řádu. Kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ budou napojeny s C^2 spojitostí, budou-li splněny podmínky C^0 a C^1 spojitosti a budou-li si rovny *funkční hodnoty druhých derivací jejich vektorových funkcí*, tj. $\mathbf{R}''(0) = \mathbf{P}''(1)$. Dosadíme-li do (2.37) funkční hodnoty druhých derivací Bernsteinových polynomů pro $t = 1$ a $s = 0$ z tab. 2.2, obdržíme podmínku C^2 spojitosti:

$$6\mathbf{W}_0 - 12\mathbf{W}_1 + 6\mathbf{W}_2 = 6\mathbf{V}_1 - 12\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3. \quad (2.41)$$

Dosadíme za $\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_3$ a za $\mathbf{W}_1 = 2\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2$ a opět podmínku upravíme do tvaru, ze kterého bude patrná jeho geometrická interpretace

$$\mathbf{W}_2 - \mathbf{V}_1 = 4(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2). \quad (2.42)$$

Vektor $\overrightarrow{\mathbf{V}_1\mathbf{W}_2}$ je roven čtyřnásobku vektoru $\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3}$, poloha řídicího bodu \mathbf{W}_3 je libovolná. Pro výpočet použijeme vztah $\mathbf{W}_2 = 4(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_1$.

Poznamenejme, že výše uvedené podmínky C^0 a C^1 spojitosti dvou Bézierových kubik vyplývají přímo z vlastností Bézierových křivek uvedených na str. 44, a platí tak pro C^0 a C^1 spojitě napojení dvou Bézierových křivek libovolného stupně.

Pro C^0 , popř. C^1 , popř. C^2 spojitost napojení obou křivek v počátečním bodě $\mathbf{P}(0)$ budou formálně platit stejná geometrická pravidla, pouze je nutné respektovat opačnou orientaci řídicích vrcholů.

■ **Příklad 2.8 – Napojení Bézierových křivek 2. stupně.** Bézierova křivka 2. stupně $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je určena řídicími body $\mathbf{V}_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{V}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_2 = (1, 1)$.

Zobrazte řídicí polygon $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$. Zkonstruuje nezbytně nutný počet řídicích polygonů dalších Bézierových křivek 2. stupně tak, abyste vytvořili uzavřenou křivku k tvořenou C^1 spojitě napojenými Bézierovými křivkami 2. stupně. Načrtněte všechny Bézierovy křivky. Výpočtem ověřte polohu neznámých řídicích bodů a C^1 spojitost křivky k ve všech bodech napojení.

Řešení.

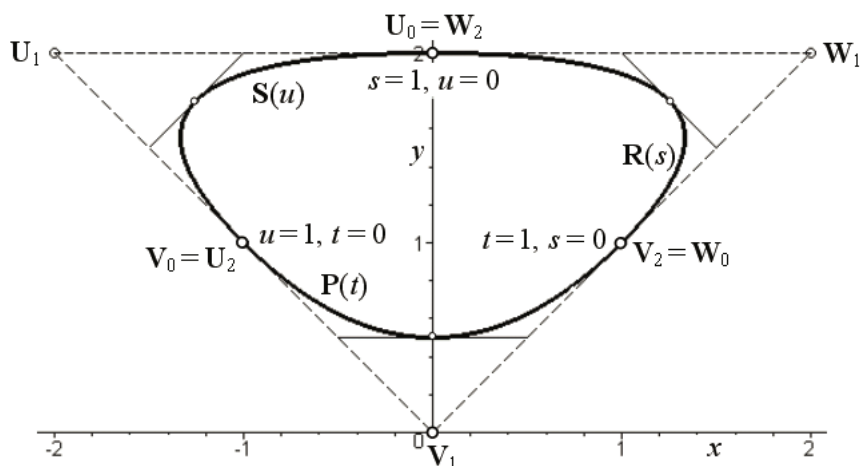
Konstrukce: Ke koncovému bodu $\mathbf{P}(1)$ Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$ připojíme křivku $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, jejíž neznámé řídicí body označíme \mathbf{W}_0 , \mathbf{W}_1 a \mathbf{W}_2 . S ohledem na orientaci segmentované křivky k bude křivka $\mathbf{R}(s)$ napojena na křivku $\mathbf{P}(t)$ svým počátečním bodem $\mathbf{R}(0)$, tedy

$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_2 = (1, 1)$. $\mathbf{W}_1 = (2, 2)$ je středově souměrný s \mathbf{V}_1 , střed souměrnosti je \mathbf{V}_2 .

K počátečnímu bodu $\mathbf{P}(0)$ Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$ připojíme křivku $\mathbf{S}(u)$, $u \in [0, 1]$, jejíž neznámé řídicí body označíme \mathbf{U}_0 , \mathbf{U}_1 a \mathbf{U}_2 , viz obr. 2.15. Aby byla zachována orientace segmentované křivky k , bude křivka $\mathbf{S}(u)$ napojena na křivku $\mathbf{P}(t)$ svým

koncovým bodem $\mathbf{S}(1)$, tedy $\mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_0 = (-1, -1)$. $\mathbf{U}_1 = (-2, 2)$ je středově souměrný s \mathbf{V}_1 , střed souměrnosti je \mathbf{V}_0 .

Sestrojíme-li nyní střed úsečky $\mathbf{W}_1\mathbf{U}_1$, dostaneme řídicí bod $\mathbf{W}_2 = \mathbf{U}_0 = (0, 2)$, čímž křivku k uzavřeme. Je zřejmé, že potřebujeme minimálně 3 Bézierovy křivky 2. stupně, abychom vytvořili uzavřenou C^1 spojitou segmentovanou křivku k .



Obrázek 2.15: C^1 spojitě napojené Bézierovy křivky 2. stupně

Ověření polohy neznámých řídicích bodů výpočtem: $\mathbf{U}_2 = (-1, 1)$ a $\mathbf{W}_0 = (1, 1)$ dostaneme okamžitě z podmínky C^0 spojitosti křivky k . Z podmínky C^1 spojitosti křivky k vyplývá

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1 &= 2\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1 = 2(-1, 1) - (0, 0) = (-2, 2), \\ \mathbf{W}_1 &= 2\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = 2(1, 1) - (0, 0) = (2, 2), \\ \mathbf{U}_0 = \mathbf{W}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \mathbf{W}_1) = \frac{1}{2}[(-2, 2) + (2, 2)] = (0, 2).\end{aligned}$$

Ověření C^1 spojitosti křivky k : Vektorové rovnice křivek a jejich tečných vektorů včetně funkčních hodnot v krajních bodech jsou následující (z důvodů stručnosti vynecháváme obor parametrizace $[0, 1]$ vektorových funkcí):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= (2t - 1, 2t^2 - 2t + 1), & \mathbf{P}(0) &= (-1, 1), & \mathbf{P}(1) &= (1, 1), \\ \mathbf{R}(s) &= (-3s^2 + 2s + 1, -s^2 + 2s + 1), & \mathbf{R}(0) &= (1, 1), & \mathbf{R}(1) &= (0, 2), \\ \mathbf{S}(u) &= (3u^2 - 4u, -u^2 + 2), & \mathbf{S}(0) &= (0, 2), & \mathbf{S}(1) &= (-1, 1), \\ \mathbf{P}'(t) &= (2, 4t - 2), & \mathbf{P}'(0) &= (2, -2), & \mathbf{P}'(1) &= (2, 2), \\ \mathbf{R}'(s) &= (-6s + 2, -2s + 2), & \mathbf{R}'(0) &= (2, 2), & \mathbf{R}'(1) &= (-4, 0), \\ \mathbf{S}'(u) &= (6u - 4, -2u), & \mathbf{S}'(0) &= (-4, 0), & \mathbf{S}'(1) &= (2, -2).\end{aligned}$$

Je zřejmé, že všechny tři segmenty křivky k jsou C^1 spojitě napojeny. □

- **Příklad 2.9 – Vyšetření spojitosti napojení dvou Bézierových kubik.** Bézierova kubika $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je určena řídicími body $\mathbf{V}_0 = (1, 2)$, $\mathbf{V}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_3 = (1, 0)$. Bézierova kubika $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$ je určena řídicími body $\mathbf{W}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{W}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{W}_2 = (2, 1)$, $\mathbf{W}_3 = (2, 2)$.

Vyšetřete spojitost napojení těchto kubik.

Řešení. Vektorové rovnice kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$, resp. jejich první, resp. druhé derivace jsou:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= (3t^2 - 3t + 1, t^3 - 3t + 2), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{R}(s) &= (s^3 - 3s^2 + 3s + 1, -s^3 + 3s^2), \quad s \in [0, 1],\end{aligned}\tag{2.43}$$

resp.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(t) &= (6t - 3, 3t^2 - 3), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{R}'(s) &= (3s^2 - 6s + 3, -3s^2 + 6s), \quad s \in [0, 1],\end{aligned}\tag{2.44}$$

resp.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}''(t) &= (6, 6t), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{R}''(s) &= (6s - 6, -6s + 6), \quad s \in [0, 1].\end{aligned}\tag{2.45}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{V}_0 \neq \mathbf{W}_3$, nejsou kubiky v těchto krajních bodech spojeny vůbec. Kubiky jsou ale napojeny minimálně s C^0 spojitostí v bodě $\mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0$, jak se můžeme přesvědčit, pokud do (2.43) dosadíme $t = 1$ a $s = 0$:

$$\mathbf{P}(1) = (1, 0), \quad \mathbf{R}(0) = (1, 0).$$

Pokud do prvních derivací (2.44) dosadíme $t = 1$ a $s = 0$, obdržíme

$$\mathbf{P}'(1) = (3, 0), \quad \mathbf{R}'(0) = (3, 0).$$

V bodě napojení jsou tedy totožné tečné vektory obou kubik. Je zřejmé, že kubiky jsou napojeny minimálně s C^1 spojitostí.

Pokud do druhých derivací (2.45) dosadíme $t = 1$ a $s = 0$, obdržíme různé vektory druhých derivací křivek v bodě napojení:

$$\mathbf{P}''(1) = (6, 6), \quad \mathbf{R}''(0) = (-6, 6).$$

Kubiky tedy nejsou napojeny s C^2 spojitostí. Případnou G^2 spojitost dle (1.28) ale rozdílné vektory druhých derivací kubik v bodě napojení nevyklučují. Proto vyjádříme první křivosti dle (1.21) obou kubik v bodě napojení:

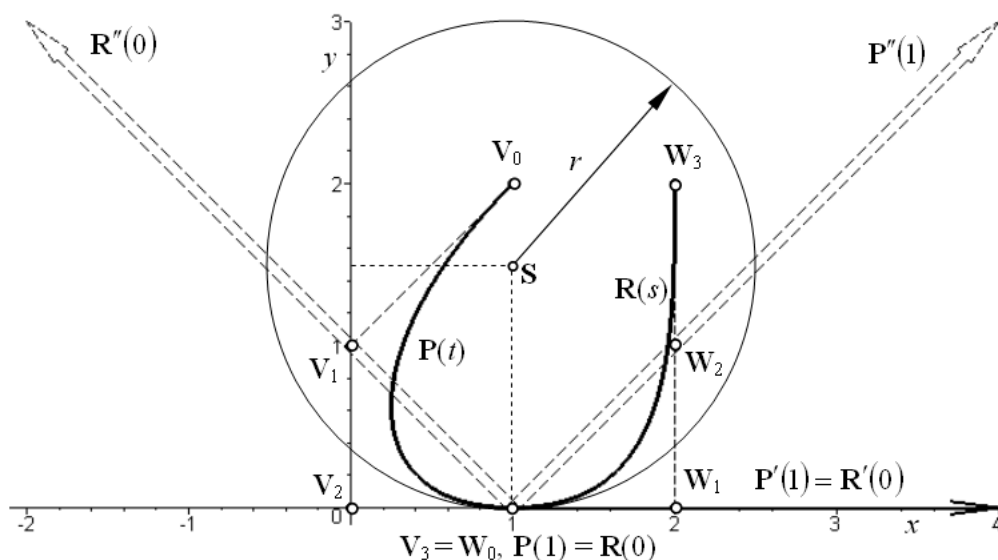
$$\begin{aligned}{}^1k_{\mathbf{P}(1)} &= \frac{|\mathbf{P}'(1) \times \mathbf{P}''(1)|}{|\mathbf{P}'(1)|^3} = \frac{|(3, 0, 0) \times (6, 6, 0)|}{|(3, 0, 0)|^3} = \frac{2}{3}, \\ {}^1k_{\mathbf{R}(0)} &= \frac{|\mathbf{R}'(0) \times \mathbf{R}''(0)|}{|\mathbf{R}'(0)|^3} = \frac{|(3, 0, 0) \times (-6, 6, 0)|}{|(3, 0, 0)|^3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Protože ${}^1k_{\mathbf{P}(1)} = {}^1k_{\mathbf{R}(0)}$, jsou kubiky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, a $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, napojeny v bodě $\mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0$ s G^2 spojitostí.

Obě kubiky mají v bodě napojení totožnou oskulační kružnici. Vypočteme poloměr křivosti v bodě napojení

$$r = \frac{1}{{}^1k_{\mathbf{P}(1)}} = \frac{1}{{}^1k_{\mathbf{R}(0)}} = \frac{3}{2}$$

a určíme souřadnice středu křivosti, který leží na normále, tedy $\mathbf{S} = (1, \frac{3}{2})$, viz obr. 2.16 (vektory druhých derivací $\mathbf{R}''(0)$ a $\mathbf{P}''(1)$ jsou v obrázku zkrácené na $1/2$ své délky).



Obrázek 2.16: Bézierovy kubiky splňující podmínky C^0 , C^1 a G^2 spojitosti v bodě napojení \square

■ **Příklad 2.10 – Napojení Bézierových kubik.** Jsou dány řídicí body $\mathbf{V}_3 = (4, 1)$, $\mathbf{V}_4 = (5, 0)$, $\mathbf{V}_5 = (7, 0)$, $\mathbf{V}_6 = (8, 2)$ Bézierovy kubiky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, a řídicí bod $\mathbf{V}_0 = (0, 4)$.

Zobrazte řídicí body \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_3 , \mathbf{V}_4 , \mathbf{V}_5 , \mathbf{V}_6 , konstrukci určete polohu řídicích bodů \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_7 , \mathbf{V}_8 tak, aby Bézierova kubika $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, s řídicím polygonem $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$ byla C^2 spojitě napojena svým koncovým bodem na počáteční bod Bézierovy kubiky $\mathbf{P}(t)$ a Bézierova kubika $\mathbf{S}(u)$, $u \in [0, 1]$, s řídicím polygonem $\mathbf{V}_6\mathbf{V}_7\mathbf{V}_8\mathbf{V}_0$ byla C^2 spojitě napojena svým počátečním bodem na koncový bod Bézierovy kubiky $\mathbf{P}(t)$. Sestrojte řídicí polygony, de Casteljau algoritmem zkonstruujte body $\mathbf{R}(\frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$, $\mathbf{S}(\frac{1}{2})$ a Bézierovy kubiky $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{S}(u)$ načrtněte.

Ověřte výpočtem polohu řídicích bodů \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_7 , \mathbf{V}_8 a požadovanou spojitost napojení.

Řešení.

Konstrukce: $\mathbf{V}_2 = (3, 2)$, resp. $\mathbf{V}_7 = (9, 4)$ je středově souměrný s \mathbf{V}_4 , resp. \mathbf{V}_5 , střed souměrnosti je \mathbf{V}_3 , resp. \mathbf{V}_6 . $\mathbf{V}_1 = (3, 4)$, resp. $\mathbf{V}_8 = (9, 8)$ leží na rovnoběžce s $\mathbf{V}_4\mathbf{V}_3$, resp. $\mathbf{V}_5\mathbf{V}_6$ procházející bodem \mathbf{V}_5 , resp. \mathbf{V}_4 ve vzdálenosti rovné čtyřnásobku $\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3$, resp. $\mathbf{V}_6 - \mathbf{V}_5$ od bodu \mathbf{V}_5 , resp. \mathbf{V}_4 , viz obr. 2.17.

Ověření polohy neznámých řídicích bodů výpočtem: Z podmínky C^1 a C^2 spojitosti napojení kubik $\mathbf{R}(s)$ a $\mathbf{P}(t)$, resp. $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{S}(u)$ vyplývá

$$\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_4 = 2(4, 1) - (5, 0) = (3, 2),$$

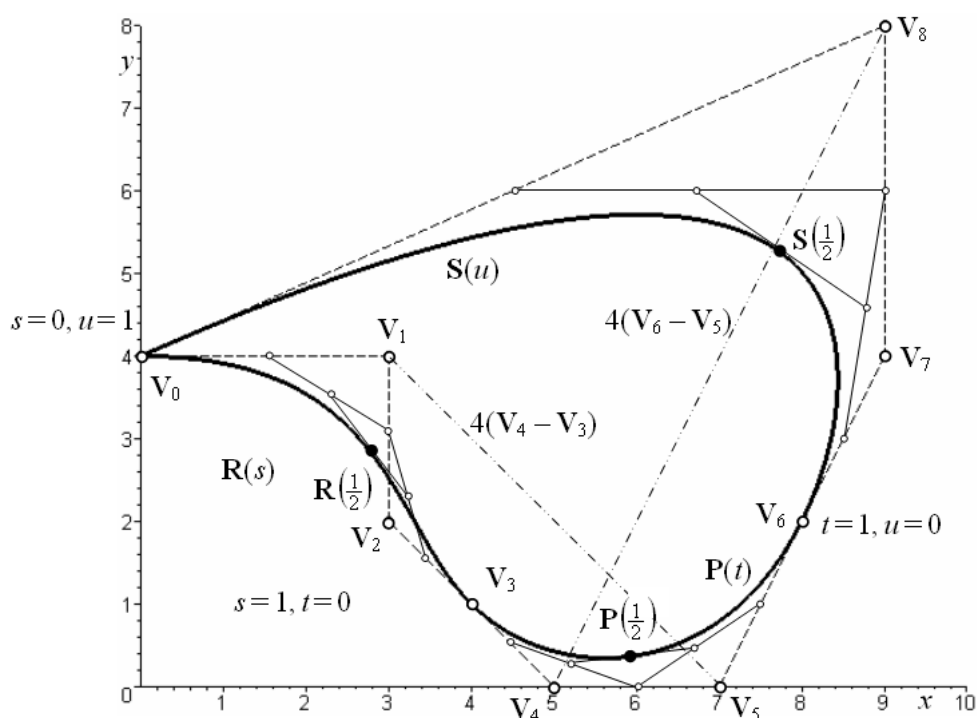
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_5 - 4(\mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3) = (7, 0) - 4[(5, 0) - (4, 1)] = (3, 4),$$

resp.

$$\mathbf{V}_7 = 2\mathbf{V}_6 - \mathbf{V}_5 = 2(8, 2) - (7, 0) = (9, 4),$$

$$\mathbf{V}_8 = \mathbf{V}_4 + 4(\mathbf{V}_6 - \mathbf{V}_5) = (5, 0) + 4[(8, 2) - (7, 0)] = (9, 8).$$

Ověření spojitosti: Vektorové rovnice kubik $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{S}(u)$, jejich tečných vektorů a druhých derivací včetně jejich funkčních hodnot v krajních bodech jsou následující (opět vynecháme obor parametrizace $[0, 1]$ vektorových funkcí):

Obrázek 2.17: C^2 spojitě napojení Bézierových kubik

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= (4s^3 - 9s^2 + 9s, 3s^3 - 6s^2 + 4), & \mathbf{R}(0) &= (0, 4), & \mathbf{R}(1) &= (4, 1), \\ \mathbf{P}(t) &= (-2t^3 + 3t^2 + 3t + 4, t^3 + 3t^2 - 3t + 1), & \mathbf{P}(0) &= (4, 1), & \mathbf{P}(1) &= (8, 2), \\ \mathbf{S}(u) &= (-8u^3 - 3u^2 + 3u + 8, -10u^3 + 6u^2 + 6u + 2), & \mathbf{S}(0) &= (8, 2), & \mathbf{S}(1) &= (0, 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(s) &= (12s^2 - 18s + 9, 9s^2 - 12s), & \mathbf{R}'(0) &= (9, 0), & \mathbf{R}'(1) &= (3, -3), \\ \mathbf{P}'(t) &= (-6t^2 + 6t + 3, 3t^2 + 6t - 3), & \mathbf{P}'(0) &= (3, -3), & \mathbf{P}'(1) &= (3, 6), \\ \mathbf{S}'(u) &= (-24u^2 - 6u + 3, -30u^2 + 12u + 6), & \mathbf{S}'(0) &= (3, 6), & \mathbf{S}'(1) &= (-27, -12), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}''(s) &= (24s - 18, 18s - 12), & \mathbf{R}''(0) &= (-18, -12), & \mathbf{R}''(1) &= (6, 6), \\ \mathbf{P}''(t) &= (-12t + 6, 6t + 6), & \mathbf{P}''(0) &= (6, 6), & \mathbf{P}''(1) &= (-6, 12), \\ \mathbf{S}''(u) &= (-48u - 6, -60u + 12), & \mathbf{S}''(0) &= (-6, 12), & \mathbf{S}''(1) &= (-54, -48). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že Bézierovy kubiky $\mathbf{R}(s)$ a $\mathbf{P}(t)$ jsou v bodě \mathbf{V}_3 napojeny s C^2 spojitostí, kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{S}(u)$ jsou v bodě \mathbf{V}_6 napojeny také s C^2 spojitostí a kubiky $\mathbf{S}(u)$ a $\mathbf{R}(s)$ jsou v bodě \mathbf{V}_0 napojeny pouze s C^0 spojitostí. \square

■ **Cvičení 2.4** Bézierova křivka 2. stupně $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$ je dána řídicím polygonem $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy křivky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Vypočítejte souřadnice krajních bodů a bodu pro $t = \frac{1}{2}$ Bézierovy křivky a složky tečných vektorů ve všech těchto bodech. Zobraďte řídicí body, sestrojte řídicí polygon a tečné vektory v krajních bodech. De Casteljau algoritmem ověřte vypočtené souřadnice bodu $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$ a složky tečného vektoru $\mathbf{P}'(\frac{1}{2})$. Bézierovu křivku načrtněte. Řešení proveďte pro následující varianty řídicích bodů:

- a) $\mathbf{V}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$, b) $\mathbf{V}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{V}_2 = (0, -1)$,
 c) $\mathbf{V}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$, d) $\mathbf{V}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (-1, -1)$, $\mathbf{V}_2 = (0, -1)$.

- **Cvičení 2.5** Jsou dány dvě Bézierovy kubiky: $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, s řídicími body $\mathbf{V}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (3, 2)$, $\mathbf{V}_2 = (1, 3)$, $\mathbf{V}_3 = (0, 2)$ a $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, s řídicími body \mathbf{V}_3 , $\mathbf{V}_4 = (-1, 3)$, $\mathbf{V}_5 = (-3, 2)$, \mathbf{V}_0 .

Určete parametrické vyjádření a vektorové rovnice obou Bézierových kubik a jejich tečných vektorů. Vypočtete souřadnice krajních bodů a bodu pro $t = \frac{1}{2}$, resp. $s = \frac{1}{2}$ a složky tečných vektorů ve všech těchto bodech. Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon a tečné vektory v krajních bodech. De Casteljau algoritmem ověřte vypočtené souřadnice bodu $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$, resp. $\mathbf{R}(\frac{1}{2})$ a složky tečného vektoru $\mathbf{P}'(\frac{1}{2})$, resp. $\mathbf{R}'(\frac{1}{2})$. Kubiky načrtněte. Jaká je spojitost napojení těchto kubik?

- **Cvičení 2.6** Předpokládejte, že jednotlivé segmenty křivky k z cvičení 2.2 jsou Bézierovy kubiky. Určete jejich řídicí body, zobrazte je, sestrojte řídicí polygony, de Casteljau algoritmem zkonstruujte body jednotlivých kubik pro hodnotu parametru $\frac{1}{2}$ a všechny kubiky načrtněte. S jakou spojitostí jsou každé dvě sousední Bézierovy kubiky napojeny?
- **Cvičení 2.7** Nalezněte vektorové rovnice jednotlivých Bézierových kubik, kterými je modelován znak @ v příkladu 2.6 a ověřte spojitost jejich napojení. Vektorové rovnice Bézierových kubik porovnejte s vektorovými rovnicemi Fergusonových kubik v příkladu 2.2.

2.2.5 Bézierova křivka v Rhinu

Bézierova křivka n -tého stupně – Příkaz: *Křivka zadávaná řídicími body* → Počátek křivky: v příkazovém řádku zadat stupeň n ; zadat počáteční řídicí bod → Další bod: celkem zadat $n + 1$ řídicích bodů → Enter. Nakreslí se Bézierova křivka n -tého stupně.

Poznámky:

- 1) V případě, že je zadáno $m < n + 1$ řídicích bodů, nakreslí se Bézierova křivka stupně $m - 1$. V případě, že je zadáno $m > n + 1$ řídicích bodů, nakreslí se uniformní ukotvená B-spline křivka n -tého stupně složená z $m - n$ segmentů, viz část 2.5
- 2) Jestliže jsou počáteční a koncový řídicí bod Bézierovy křivky totožné, je třeba před zadáním koncového řídicího bodu zvolit v příkazovém řádku *UzavřítOstře=Ano*.

Fergusonova kubika – Příkaz *Křivka zadávaná řídicími body* → Počátek křivky: v příkazovém řádku zadat stupeň 3; zadat počáteční definiční bod Fergusonovy kubiky → Další bod: zadat bod v jedné třetině tečného vektoru v počátečním bodě → Další bod: zadat bod v jedné třetině tečného vektoru, který je opačný k tečnému vektoru v koncovém bodě Fergusonovy kubiky → Další bod: zadat koncový definiční bod Fergusonovy kubiky → Enter. Nakreslí se Bézierova křivka 3. stupně, která je totožná s Fergusonovou kubikou.

Řídicí body a řídicí polygon – Řídicí body a řídicí polygon nakreslené Bézierovy křivky lze zobrazit/skrýt příkazem *Zapnout řídicí body/Vypnout řídicí body* → Vyberte objekty pro zobrazení řídicích bodů: kliknout na křivku. Řídicí body se zobrazí jako dočasně viditelné body, řídicí polygon se zobrazí tečkovanou čarou.

Řídicí polygon nakreslené Bézierovy křivky lze navíc vytvořit příkazem *Vymout síť z řídicího polygonu NURBS* → Vyberte křivky nebo plochy pro vyjmutí řídicího polygonu: kliknout na křivku → Enter. Nakreslí se řídicí polygon jako samostatná entita – lomená čára. Nakreslený řídicí polygon je po skončení příkazu vybrán, takže s ním lze okamžitě pracovat – např. pokračovat de Casteljau algoritmem, viz dále.

Modifikace tvaru Bézierovy křivky – Tvar Bézierovy křivky lze modifikovat následujícími doporučenými způsoby:

- 1) Přemístěním zobrazených řídicích bodů. Řídicí body lze i vymazat, čímž se mění tvar i stupeň Bézierovy křivky. Nelze však přidávat další řídicí body.
- 2) Přemístěním zobrazených editačních bodů. Editační body lze zobrazit/skrýt příkazem *Zobrazit editační body/Vypnout editační body* → Vyberte křivky pro zobrazení editačních bodů: kliknout na křivku → Enter. Zobrazí se body na křivce, jejichž počet a počáteční polohu generuje program. Řídicí polygon křivky se po přemístění editačních bodů změní automaticky.
- 3) Editací tečny v bodě Bézierovy křivky příkazem *Editor tečen* → Vyberte křivku nebo plochu pro úpravy: kliknout na křivku. Zobrazí se tečna křivky v bodě kliknutí. Přemístěním jejích koncových bodů lze změnit tvar Bézierovy křivky. Řídicí polygon křivky se editací tečny změní automaticky.

Pozor! Pro úpravu tvaru Bézierovy křivky nepoužíváme příkazy *Vložit uzel* a *Odstranit uzel*, které vedou na segmentaci a na neuniformní parametrizaci křivky (obor parametrizace jednotlivých segmentů je různý, nikoliv $[0, 1]$). Nepoužíváme také příkaz *Změnit váhu*, který vede na racionální parametrizaci křivky (nikoliv polynomiální). Po těchto úpravách již není původní křivka Bézierovou křivkou, ale obecně NURBS křivkou, viz [6].

De Casteljaun algoritmus – De Casteljaun algoritmus konstrukce bodu $\mathbf{P}(\alpha)$ na Bézierově křivce $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, nelze realizovat v Rhinu přímo, lze si však práci velmi usnadnit. Nejprve vyjádříme hodnotu parametru α ve tvaru zlomku $\alpha = \frac{a}{b}$. Potom vytvoříme řídicí polygon (viz výše), který rozložíme na jednotlivé úsečky příkazem *Rozpojit*. Na všech ramenech vytvoříme dělicí body příkazem *Rozdělit křivku počtem segmentů* → Počet segmentů: zadat b → Enter. Na každém rameni se nakreslí $b + 1$ bodů jako samostatné entity, které jsou rovnoměrně rozmístěny. Zapneme *Uchopování bodů* a řídicí polygony dalších úrovní dělení kreslíme příkazem *Lomená čára* → Počátek lomené čáry: kliknout do a -tého dělicího bodu na prvním rameni řídicího polygonu předcházející úrovně dělení → Další bod lomené čáry: kliknout do a -tého dělicího bodu dalšího ramene → ... → kliknout do a -tého dělicího bodu posledního ramene → Enter. Další úrovně dělení provedeme obdobně.

Napojování Bézierových kubik – Předpokládejme v souladu s podmínkami spojitosti odvozenými v části 2.2.4, že Bézierova kubika $\mathbf{P}(t)$ určená řídicím polygonem $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$ je již nakreslena, jsou zobrazeny její řídicí body a je zapnutý režim *Uchopování bodů* a *Uchopování koncových bodů*. Konstrukci řídicích bodů $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ připojované Bézierovy kubiky $\mathbf{R}(s)$ si můžeme usnadnit následovně:

C^0 spojitost: podmínku (2.38) (totožnost krajních bodů řídicích polygonů) zajistíme pouze režimem *Uchopování koncových bodů*.

C^1 spojitost: podmínku (2.40) (bod \mathbf{V}_3 je středem úsečky $\mathbf{V}_2\mathbf{W}_1$) realizujeme příkazem *Úsečka: z bodu v polovině* → Střed úsečky: kliknout do bodu \mathbf{V}_3 → Konec úsečky: kliknout do \mathbf{V}_2 . Nakreslí se úsečka se středem v bodě \mathbf{V}_3 a koncovými body v bodech \mathbf{V}_2 a \mathbf{W}_1 .

C^2 spojitost: podmínku (2.42) (vektor $\overrightarrow{\mathbf{V}_1\mathbf{W}_2}$ je roven čtyřnásobku vektoru $\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3}$) realizujeme dvojnásobným zkopírováním úsečky $\mathbf{V}_2\mathbf{W}_1$ (která představuje dvojnásobek vektoru $\overrightarrow{\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3}$), nakreslené v předchozím kroku. Příkaz: *Kopírovat* → Vyberte objekty pro kopírování: kliknout na úsečku $\mathbf{V}_2\mathbf{W}_1$ → Enter → Výchozí bod kopírování: kliknout do bodu \mathbf{V}_2 → Cílový bod kopírování: kliknout do bodu \mathbf{V}_1 → Cílový bod kopírování: kliknout do volného koncového bodu právě zkopírované úsečky → Enter. Volný koncový bod podruhé zkopírované úsečky je bod \mathbf{W}_2 .

Poznámka: Při zajištění C^0 , C^1 spojitosti Bézierových křivek 2. stupně a při zajištění C^0 , C^1 a C^2 spojitosti Bézierových křivek stupně vyššího než 3 postupujeme obdobně.

- **Cvičení 2.8** V Rhinu nakreslete Fergusonovy kubiky z příkladu 2.1 a ze cvičení 2.1. Na vymodelovaných křivkách nakreslete body pro zadané hodnoty parametru. Zjistěte kartézské souřadnice těchto bodů a porovnejte je s vypočtenými.
- **Cvičení 2.9** V Rhinu nakreslete Fergusonovy kubiky ze cvičení 2.2. Zobrazte graf křivosti všech Fergusonových kubik. S jakou spojitostí jsou tyto kubiky napojeny?
- **Cvičení 2.10** V Rhinu nakreslete Bézierovy křivky z příkladů 2.3 a 2.4. Na vymodelovaných křivkách nakreslete body pro zadané hodnoty parametru. Zjistěte kartézské souřadnice těchto bodů a porovnejte je s vypočtenými.
- **Cvičení 2.11** V Rhinu nakreslete znak @ z příkladu 2.6. Zobrazte graf křivosti všech křivek. S jakou spojitostí jsou napojeny segmenty k_i , $i = 0, \dots, 5$, a segmenty k_i^* , $i = 0, 1, 2$?
- **Cvičení 2.12** V Rhinu nakreslete Bézierovu křivku 6. stupně z příkladu 2.7 a de Casteljau algoritmem zkonstruujte bod $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$.
- **Cvičení 2.13** V Rhinu nakreslete Bézierovy křivky z příkladu 2.8 a 2.9. De Casteljau algoritmem zkonstruujte bod pro hodnotu parametru $\frac{1}{2}$ a zobrazte graf křivosti. S jakou spojitostí jsou křivky napojeny?
- **Cvičení 2.14** V Rhinu nakreslete Bézierovy křivky z příkladu 2.9. Nakreslete oskulační kružnici v bodě napojení a zjistěte kartézské souřadnice jejího středu. Dále zjistěte poloměr křivosti a první křivost v bodě napojení. Všechny zjištěné hodnoty porovnejte s vypočtenými.

2.3 Coonsova kubika

Coonsova kubika je dána čtyřmi řídicími body uspořádanými do řídicího polygonu a je tvořena jediným segmentem, který neprochází žádným ze zadaných řídicích bodů. I když se tato vlastnost může na první pohled jevit jako nepraktická, uvidíme, že pravý opak je pravdou.

- **Definice 2.3 – Coonsova kubika.** Nechť jsou dány řídicí body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. Potom je vektorová rovnice *Coonsovy kubiky*

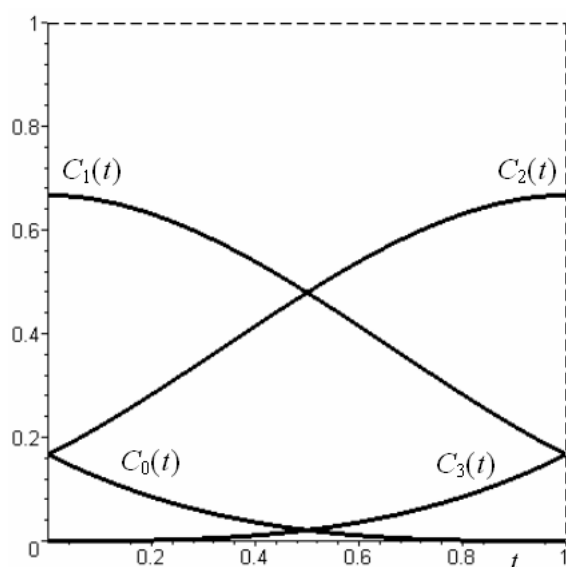
$$\mathbf{P}(t) = C_0(t)\mathbf{P}_0 + C_1(t)\mathbf{P}_1 + C_2(t)\mathbf{P}_2 + C_3(t)\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1], \quad (2.46)$$

kde bázové funkce

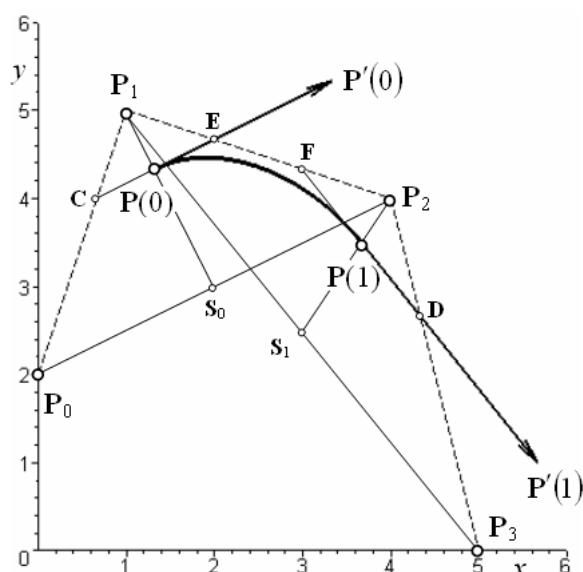
$$\begin{aligned} C_0(t) &= \frac{1}{6}(1-t)^3, \\ C_1(t) &= \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4), \\ C_2(t) &= \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \\ C_3(t) &= \frac{1}{6}t^3, \end{aligned} \quad (2.47)$$

jsou *Coonsovy polynomy*. □

Průběh Coonsových polynomů je patrný z obr. 2.18, na obr. 2.19 je nakreslen příklad Coonsovy kubiky včetně tečných vektorů v krajních bodech a označení zajímavých bodů, jejichž význam budeme komentovat dále.



Obrázek 2.18: Coonsovy polynomy



Obrázek 2.19: Coonsova kubika

- **Příklad 2.11 – Coonsova kubika.** Coonsova kubika $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, je dána řídicími body $\mathbf{P}_0 = (-6, 0)$, $\mathbf{P}_1 = (6, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (6, 6)$, $\mathbf{P}_3 = (0, 6)$.

Určete parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Coonsovy kubiky $\mathbf{P}(t)$ a jejího tečného vektoru $\mathbf{P}'(t)$. Pro hodnoty parametru $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ vypočítejte souřadnice bodů Coonsovy kubiky a složky tečných vektorů v těchto bodech. Zobraďte řídicí body, sestrojte řídicí polygon, zobraďte vypočtené body Coonsovy kubiky a sestrojte tečné vektory v nich. Coonsovu kubiku načrtněte.

Řešení.

Parametrické vyjádření Coonsovy kubiky a jejího tečného vektoru je

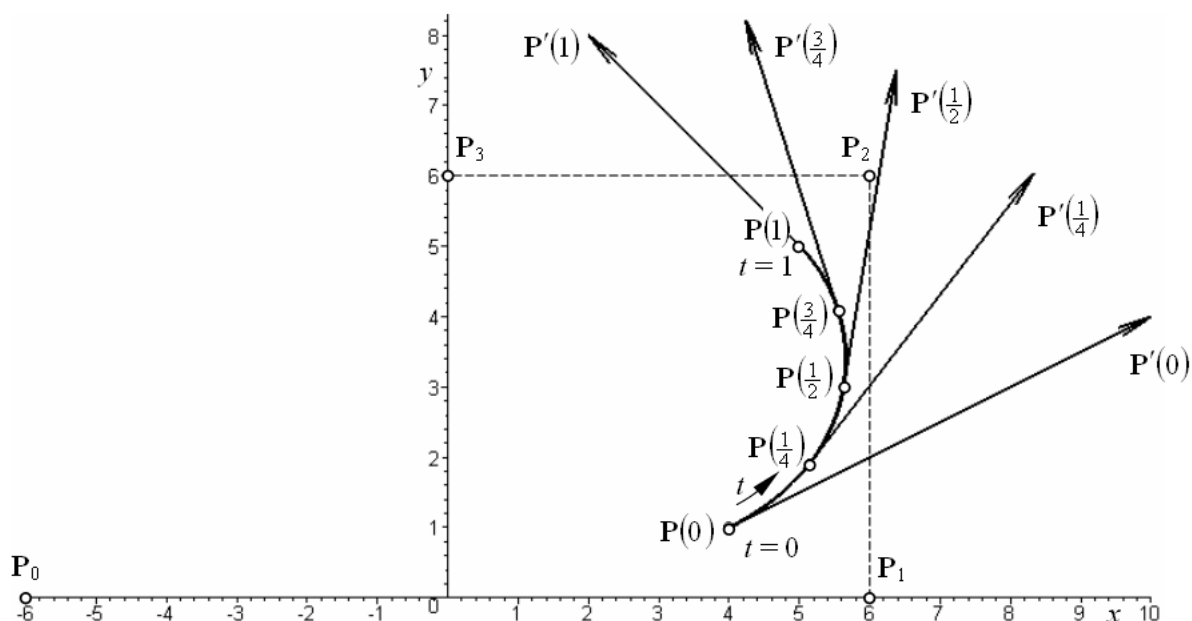
$$\begin{aligned} x(t) &= -6C_0(t) + 6C_1(t) + 6C_2(t) = \\ &= -\frac{6}{6}(1-t)^3 + \frac{6}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) + \frac{6}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = t^3 - 6t^2 + 6t + 4, \\ y(t) &= 6C_2(t) + 6C_3(t) = \frac{6}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + \frac{6}{6}t^3 = -2t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \quad t \in [0, 1], \\ x'(t) &= 3t^2 - 12t + 6, \\ y'(t) &= -6t^2 + 6t + 3, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Coonsovy kubiky a jejího tečného vektoru je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= (t^3 - 6t^2 + 6t + 4, -2t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{P}'(t) &= (3t^2 - 12t + 6, -6t^2 + 6t + 3), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Body Coonsovy kubiky a tečné vektory pro $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ jsou uvedeny v následující tabulce. Tvar Coonsovy kubiky a průběh tečného vektoru podél ní je patrný z obr. 2.20.

	$t = 0$	$t = \frac{1}{4}$	$t = \frac{1}{2}$	$t = \frac{3}{4}$	$t = 1$
$\mathbf{P}(t)$	(4, 1)	$(\frac{329}{64}, \frac{61}{32})$	$(\frac{45}{8}, 3)$	$(\frac{355}{64}, \frac{131}{32})$	(5, 5)
$\mathbf{P}'(t)$	(6, 3)	$(\frac{51}{16}, \frac{33}{8})$	$(\frac{3}{4}, \frac{9}{2})$	$(\frac{-21}{16}, \frac{33}{8})$	(-3, 3)



Obrázek 2.20: Coonsova kubika a tečné vektory v jejích bodech

□

2.3.1 Vlastnosti Coonsovy kubiky

Coonsova kubika má zajímavé vlastnosti, které hrají zásadní roli při jejím širokém uplatnění v modelování křivek obecných tvarů (sledujme obr. 2.18 a obr. 2.19):

- Coonsova kubika neinterpoluje žádný zadaný řídicí bod. Je to důsledek skutečnosti, že pro libovolnou hodnotu parametru $t \in [0, 1]$ nedosahuje žádný Coonsův polynom hodnoty jedna.
- Počáteční bod $\mathbf{P}(0)$ Coonsovy kubiky leží v jedné třetině těžnice $\mathbf{P}_1\mathbf{S}_0$ trojúhelníka $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ sestrojené z řídicího bodu \mathbf{P}_1 . Koncový bod $\mathbf{P}(1)$ Coonsovy kubiky leží v jedné třetině těžnice $\mathbf{P}_2\mathbf{S}_1$ trojúhelníka $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ sestrojené z řídicího bodu \mathbf{P}_2 . Počáteční, resp. koncový bod Coonsovy kubiky se označuje také jako „antitěžiště“ trojúhelníka $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ vzhledem k bodu \mathbf{P}_1 , resp. „antitěžiště“ trojúhelníka $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ vzhledem k bodu \mathbf{P}_2 .
- Tečný vektor $\mathbf{P}'(0)$ v počátečním bodě Coonsovy kubiky má poloviční velikost a souhlasnou orientaci s vektorem $\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2}$. Tečný vektor $\mathbf{P}'(1)$ v koncovém bodě Coonsovy kubiky má poloviční velikost a souhlasnou orientaci s vektorem $\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3}$.
- Tečna v počátečním bodě Coonsovy kubiky protíná ramena $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ v jedné třetině od bodu \mathbf{P}_1 (body **C**, **E**). Tečna v koncovém bodě Coonsovy kubiky protíná ramena $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ v jedné třetině od bodu \mathbf{P}_2 (body **F**, **D**). Z této vlastnosti vyplývá, že tečný vektor $\mathbf{P}'(0)$ je ramenem $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ prořat v jedné třetině od bodu $\mathbf{P}(0)$ (bod **E**) a tečný vektor $\mathbf{P}'(1)$ je ramenem $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ prořat v jedné třetině od bodu $\mathbf{P}(1)$ (bod **D**).

Vztah mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou

Z právě uvedených vlastností lze vyvodit vzájemný vztah mezi Coonsovou a Bézierovou (a tím i Fergusonovou) kubikou. Předpokládejme, že je dán řídicí polygon $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ Coonsovy kubiky. Dosadíme-li do rovnice Bézierovy kubiky (2.18) za $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ a \mathbf{V}_3 následující řídicí body (viz obr. 2.19)

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &= \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}(\mathbf{S}_0 - \mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_1 \right] = \frac{1}{6}\mathbf{P}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{V}_1 &= \mathbf{E} = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{V}_2 &= \mathbf{F} = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_1, \\
\mathbf{V}_3 &= \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}(\mathbf{S}_1 - \mathbf{P}_2) = \mathbf{P}_2 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3) - \mathbf{P}_2 \right] = \frac{1}{6}\mathbf{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_3,
\end{aligned}$$

dostaneme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= B_{0,3}(t) \left[\frac{1}{6}\mathbf{P}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_2 \right] + B_{1,3}(t) \left[\frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2 \right] + \\
&\quad + B_{2,3}(t) \left[\frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_1 \right] + B_{3,3}(t) \left[\frac{1}{6}\mathbf{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_3 \right] = \\
&= \frac{1}{6}B_{0,3}(t)\mathbf{P}_0 + \left\{ \frac{2}{3}[B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t)] + \frac{1}{3}B_{2,3}(t) + \frac{1}{6}B_{3,3}(t) \right\} \mathbf{P}_1 + \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{6}B_{0,3}(t) + \frac{1}{3}B_{1,3}(t) + \frac{2}{3}[B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t)] \right\} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}B_{3,3}(t)\mathbf{P}_3 = \\
&= \frac{1}{6}(1-t)^3\mathbf{P}_0 + \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)\mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}t^3\mathbf{P}_3,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

což je rovnice Coonsovy kubiky zadané řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$, neboť polynomy u jednotlivých řídicích bodů jsou právě Coonsovy polynomy (2.47).

Důležité převodní vztahy mezi řídicími body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ Bézierovy kubiky a řídicími body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ Coonsovy kubiky napíšeme v přehlednější formě:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &= \frac{1}{6}\mathbf{P}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{V}_1 &= \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{V}_2 &= \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_1, \\
\mathbf{V}_3 &= \frac{1}{6}\mathbf{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_3.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Řešíme-li soustavu rovnic (2.49) vzhledem k řídicím bodům $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$, dostaneme převodní vztah mezi řídicími body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ Coonsovy kubiky a řídicími body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ Bézierovy kubiky:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0 &= 6\mathbf{V}_0 - 7\mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2, \\
\mathbf{P}_1 &= 2\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2, \\
\mathbf{P}_2 &= 2\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1, \\
\mathbf{P}_3 &= 2\mathbf{V}_1 - 7\mathbf{V}_2 + 6\mathbf{V}_3.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Vzhledem k tomu, že převodní vztahy mezi Bézierovou a Fergusonovou kubikou již známe, lze jednoduše určit i převodní vztahy mezi Coonsovou a Fergusonovou kubikou.

■ **Příklad 2.12 – Vztah mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou.** Předpokládejte, že Coonsova kubika $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$ z příkladu 2.11 je Bézierova kubika $\mathbf{P}_B(t)$, $t \in [0, 1]$, resp. Fergusonova kubika $\mathbf{P}_F(t)$, $t \in [0, 1]$.

Určete řídicí body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_B(t)$ a nalezněte její parametrické vyjádření. Určete definiční body \mathbf{A}, \mathbf{B} a tečné vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}_F(t)$ a nalezněte její parametrické vyjádření. Výsledky porovnejte. Doprovoďte obrázkem.

Řešení. Řídicí body Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_B(t)$ jsou podle (2.49)

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &= \frac{1}{6}(-6, 0) + \frac{2}{3}(6, 0) + \frac{1}{6}(6, 6) = (4, 1), \\
\mathbf{V}_1 &= \frac{2}{3}(6, 0) + \frac{1}{3}(6, 6) = (6, 2), \\
\mathbf{V}_2 &= \frac{2}{3}(6, 6) + \frac{1}{3}(6, 0) = (6, 4), \\
\mathbf{V}_3 &= \frac{1}{6}(6, 0) + \frac{2}{3}(6, 6) + \frac{1}{6}(0, 6) = (5, 5).
\end{aligned}$$

Parametrické vyjádření Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_B(t) = (x_B(t), y_B(t))$ je podle (2.18)

$$\begin{aligned} x_B(t) &= 4B_{0,3}(t) + 6B_{1,3}(t) + 6B_{2,3}(t) + 5B_{3,3}(t) = t^3 - 6t^2 + 6t + 4, \\ y_B(t) &= B_{0,3}(t) + 2B_{1,3}(t) + 4B_{2,3}(t) + 5B_{3,3}(t) = -2t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

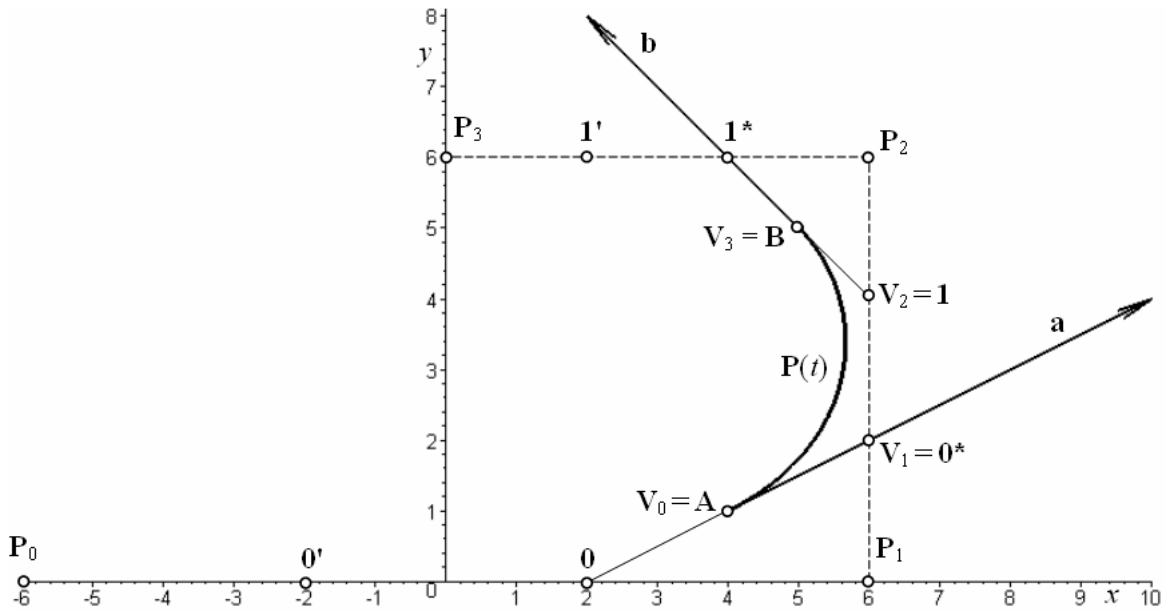
Vstupní data Fergusonovy kubiky $\mathbf{P}_F(t)$ jsou podle (2.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{V}_0 = (4, 1), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}_3 = (5, 5), \\ \mathbf{a} &= 3(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) = 3[(6, 2) - (4, 1)] = (6, 3), \\ \mathbf{b} &= 3(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2) = 3[(5, 5) - (6, 4)] = (-3, 3). \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření $\mathbf{P}_F(t) = (x_F(t), y_F(t))$ je podle (2.1)

$$\begin{aligned} x_F(t) &= 4F_0(t) + 5F_1(t) + 6F_2(t) - 3F_3(t) = t^3 - 6t^2 + 6t + 4, \\ y_F(t) &= F_0(t) + 5F_1(t) + 3F_2(t) + 3F_3(t) = -2t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Protože $x_B(t) = x_F(t) = x(t)$ a $y_B(t) = y_F(t) = y(t)$, jsou všechny tři kubiky totožné. Situaci ilustruje obr. 2.21.



Obrázek 2.21: Vztah mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou □

2.3.2 Odvození Coonsových polynomů

Coonsovy polynomy jsou speciálním případem B-spline bázových funkcí, ale jako takové je odvozovat nebudeme. Zde můžeme využít vztahu Coonsovy a Bézierovy kubiky a za odvození Coonsových polynomů považovat (2.48).

2.3.3 Jednodušší konstrukce krajních bodů Coonsovy kubiky

Ze vztahu Coonsovy a Bézierovy kubiky a z vlastností Coonsovy kubiky vyplývá následující konstrukce krajních bodů Coonsovy kubiky, která je jednodušší než konstrukce pomocí „antitěžišť“ (sledujme obr. 2.21):

1. Rozdělíme ramena řídicího polygonu na třetiny. Tím dostaneme body $0'$, 0 , 0^* , 1 , 1^* a $1'$.
2. Sestrojíme úsečky 00^* a 11^* .
3. Počáteční, resp. koncový bod Coonsovy kubiky leží ve středu úsečky 00^* , resp. 11^* .
4. Je zřejmé, že polovina úsečky 00^* , resp. 11^* je rovna jedné třetině tečného vektoru v počátečním, resp. koncovém bodě Coonsovy kubiky.

■ **Cvičení 2.15** Uvažujte že Bézierova, resp. Fergusonova kubika z příkladu 2.5 je Coonsova kubika. Určete konstrukcí a výpočtem polohu jejích řídicích bodů \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 a nalezněte její parametrické vyjádření.

2.3.4 Coonsova kubika v Rhinu

V Rhinu lze vytvořit Coonsovu kubiku pouze nepřímo s využitím jejího vztahu s Bézierovou kubikou. Konstrukci krajních bodů řídicího polygonu Bézierovy kubiky provedeme podle postupu uvedeném v části 2.3.3. Vnitřní body řídicího polygonu Bézierovy kubiky sestrojíme jako body ve třetinách prostředního ramene řídicího polygonu Coonsovy kubiky dle obr. 2.21.

■ **Cvičení 2.16** Pro zadání z příkladu 2.12 sestrojte v Rhinu dva obrázky:

- 1) Nakreslete řídicí polygon Coonsovy kubiky (příkazem *Samostatné úsečky*), konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierovy kubiky a Bézierovu kubiku nakreslete.
- 2) Nakreslete řídicí polygon Bézierovy kubiky (příkazem *Samostatné úsečky*), konstrukcí určete polohu řídicích bodů Coonsovy kubiky a Coonsovu kubiku nakreslete jako Bézierovu kubiku.

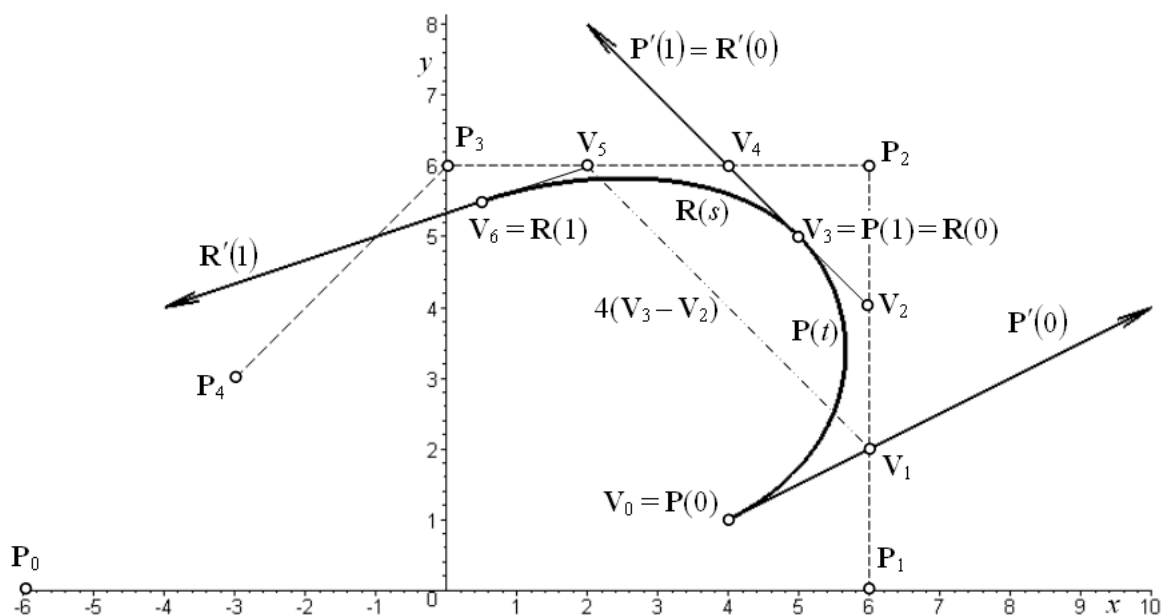
2.4 Coonsův kubický B-spline

Uvažujme nyní řídicí polygon obsahující pět řídicích bodů \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 a \mathbf{P}_4 jak je znázorněno na obr. 2.22 a sestrojíme krajní body Coonsovy kubiky $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, určené řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ a Coonsovy kubiky $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, určené řídicím polygonem $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$. Je zřejmé, že kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ jsou *automaticky* napojeny s C^2 spojitostí.

Důvod je následující: uvažujeme, že Coonsova kubika $\mathbf{P}(t)$, resp. $\mathbf{R}(s)$ je Bézierova kubika definovaná řídicím polygonem $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$, resp. $\mathbf{V}_3\mathbf{V}_4\mathbf{V}_5\mathbf{V}_6$. Potom z podmínek, které jsme odvodili v části 2.2.4 vyplývá, že kubiky $\mathbf{P}(t)$ a $\mathbf{R}(s)$ jsou napojeny:

- s C^0 spojitostí, neboť bod \mathbf{V}_3 je společný oběma kubikám,
- s C^1 spojitostí, neboť $\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_3$,
- s C^2 spojitostí, neboť $\mathbf{V}_5 - \mathbf{V}_1 = 4(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_2)$.

Naznačeným způsobem můžeme připojovat další řídicí body \mathbf{P}_i (na obě strany) a konstruovat další krajní body Coonsových kubik. Segmentovaná C^2 spojitá křivka, kterou tímto způsobem dostaneme, je *uniformní otevřená* nebo *uzavřená B-spline křivka 3. stupně*, jejíž matematický popis zcela přesahuje rámec tohoto učebního textu. Pokud si ale uvědomíme, že tato křivka je složena výhradně z Coonsových kubik, můžeme zformulovat následující definici.



Obrázek 2.22: Coonsův kubický B-spline (automatické C^2 spojitě napojení Coonsových kubik)

- **Definice 2.4 – Coonsův kubický B-spline.** Nechť je dána posloupnost řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$. Potom uniformní otevřená nebo uzavřená B-spline křivka 3. stupně $\mathbf{R}(t)$, kterou tvoří $n - 2$ Coonsových kubik s vektorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0(t) &= C_0(t)\mathbf{P}_0 + C_1(t)\mathbf{P}_1 + C_2(t)\mathbf{P}_2 + C_3(t)\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{R}_1(t) &= C_0(t)\mathbf{P}_1 + C_1(t)\mathbf{P}_2 + C_2(t)\mathbf{P}_3 + C_3(t)\mathbf{P}_4, \quad t \in [0, 1], \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{n-3}(t) &= C_0(t)\mathbf{P}_{n-3} + C_1(t)\mathbf{P}_{n-2} + C_2(t)\mathbf{P}_{n-1} + C_3(t)\mathbf{P}_n, \quad t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.51)$$

se nazývá *Coonsův kubický B-spline*. □

- **Příklad 2.13 – Otevřený a uzavřený Coonsův kubický B-spline.** Jsou dány řídicí body Coonsova kubického B-spline k : $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_1 = (-6, 6)$, $\mathbf{P}_2 = (-6, 0)$, $\mathbf{P}_3 = (0, -6)$, $\mathbf{P}_4 = (6, 0)$, $\mathbf{P}_5 = (6, 6)$, $\mathbf{P}_6 = \mathbf{P}_0 = (0, 0)$.

a) Z kolika Coonsových kubik se Coonsův kubický B-spline k skládá? Určete dílčí řídicí polygony jednotlivých Coonsových kubik. Doprovod'te obrázkem.

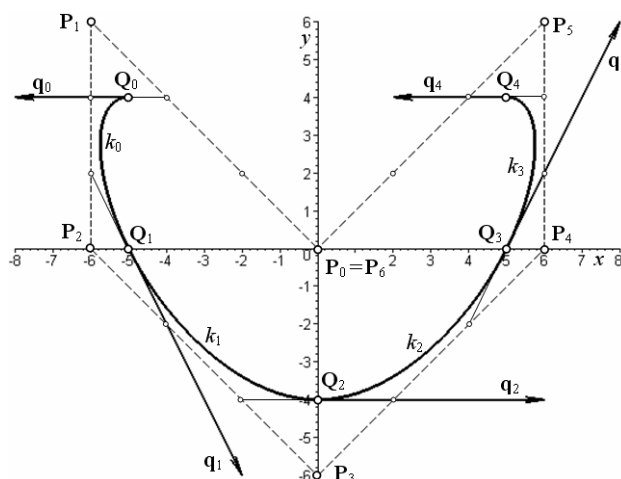
b) Proved'te takovou úpravu řídicího polygonu Coonsova kubického B-spline k , aby vznikla uzavřená křivka.

Z kolika Coonsových kubik se uzavřený Coonsův kubický B-spline k skládá? Určete dílčí řídicí polygony jednotlivých Coonsových kubik. Doprovod'te obrázkem.

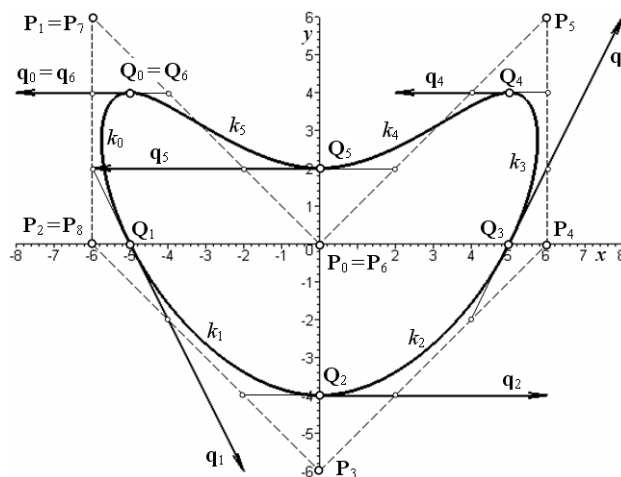
Řešení. a) Protože $n = 6$, skládá se otevřený Coonsův kubický B-spline k ze čtyř Coonsových kubik, které označíme k_0, k_1, k_2, k_3 , viz obr. 2.23. Jejich dílčí řídicí polygony jsou následující:

$$k_0 : \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3, \quad k_1 : \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4, \quad k_2 : \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5, \quad k_3 : \mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6.$$

b) Aby se Coonsův kubický B-spline k uzavřel, je třeba na konec řídicího polygonu přidat další dva řídicí body \mathbf{P}_7 a \mathbf{P}_8 , viz obr. 2.24.



Obrázek 2.23: Otevřený Coonsův kubický B-spline



Obrázek 2.24: Uzavřený Coonsův kubický B-spline

Poloha řídicích bodů \mathbf{P}_7 a \mathbf{P}_8 není libovolná, ale musí splňovat podmínky $\mathbf{P}_7 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_8 = \mathbf{P}_2$. Potom $n = 8$ a uzavřený Coonsův kubický B-spline k se skládá ze šesti Coonsových kubik, jejichž dílčí řídicí polygony jsou následující:

$$k_0 : \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3, \quad k_1 : \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4, \quad k_2 : \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5, \\ k_3 : \mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6, \quad k_4 : \mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6\mathbf{P}_7, \quad k_5 : \mathbf{P}_5\mathbf{P}_6\mathbf{P}_7\mathbf{P}_8.$$

Řídicí polygony Coonsových kubik k_0, k_1, k_2, k_3 uzavřeného Coonsova kubického B-spline jsou stejné jako řídicí polygony Coonsových kubik k_0, k_1, k_2, k_3 otevřeného Coonsova kubického B-spline. \square

2.4.1 Vlastnosti Coonsova kubického B-spline

- Řídicí polygon Coonsova kubického B-spline je tvořen minimálně pěti řídicími body. V případě, že jsou poslední tři body řídicího polygonu totožné s prvními třemi body řídicího polygonu,

tj. $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_{n-2} = \mathbf{P}_0$, je Coonsův kubický B-spline uzavřený. V opačném případě je Coonsův kubický B-spline otevřený.

- Coonsův kubický B-spline žádným z řídicích bodů neprochází.
- Coonsův kubický B-spline je tvořen C^2 spojitě napojenými Coonsovými kubikami. Polohu krajních bodů jednotlivých segmentů Coonsova kubického B-spline a tečné vektory v těchto krajních bodech lze konstruovat podle vlastností Coonsovy kubiky uvedených v části 2.3.1.
- Coonsův kubický B-spline je definován *po částech* (tj. částečně se překrývajícími řídicími polygony). To znamená, že změnou polohy jednoho řídicího bodu se nezmění tvar celého Coonsova kubického B-spline. Změní se tvar pouze těch dílčích Coonsových kubik, v jejichž rovnici se příslušný řídicí bod vyskytuje (tj. maximálně čtyř). Tato vlastnost je obzvláště výhodná při modelování tvaru křivky zadané velkým počtem řídicích bodů.
- Každá dílčí Coonsova kubika Coonsova kubického B-spline má stejnou (jednotkovou) délku oboru parametrizace $t \in [0, 1]$. Pokud má segmentovaná křivka tuto vlastnost, říkáme, že je *uniformní* nebo že má *uniformní parametrizaci*.

Z praktických důvodů se v CAD/CAM systémech používá pouze uzavřený Coonsův kubický B-spline, nikoliv otevřený. Důvod je následující: při použití otevřeného Coonsova kubického B-spline by se vlastní křivka začala vykreslovat až po zadání prvních tří řídicích bodů a navíc by její počáteční bod ležel mimo tyto zadané řídicí body. To je z uživatelského hlediska zcela nepřijatelné, jak dokazuje příklad 2.14.

■ **Příklad 2.14** Předpokládejte, že křivky k^* i k , kterými je modelován znak @ v příkladu 2.6, je Coonsův kubický B-spline.

Určete konstrukcí i výpočtem polohu řídicích bodů Coonsova kubického B-spline k^* a k a křivky načrtněte.

Řešení. Konstrukce je provedena na obr. 2.25.

Při konstrukci vnitřních řídicích bodů Coonsova kubického B-spline ($\mathbf{P}_1^*, \dots, \mathbf{P}_4^*$ a $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_7$ na obr. 2.25) využijeme skutečnost, že vnitřní ramena řídicích polygonů jednotlivých Bézierových kubik tvoří prostřední třetinu vnitřních ramen řídicího polygonu Coonsova kubického B-spline.

Krajní řídicí body Coonsova kubického B-spline (\mathbf{P}_0^* , \mathbf{P}_5^* a \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_8) zkonstruujeme jako vrcholy trojúhelníků, v jejichž „antitěžištích“ krajní body Coonsova kubického B-spline leží (v obr. 2.25 není tato konstrukce uvedena).

Abychom určili výpočtem polohu řídicích bodů Coonsova kubického B-spline, uvědomíme si, že Coonsův kubický B-spline je složen z Coonsových kubik. Vzhledem k tomu, že křivky k^* a k v příkladu 2.6 jsou Bézierovy kubiky, použijeme rov. (2.50), kterými je definován převodní vztah mezi řídicími body Bézierovy a Coonsovy kubiky.

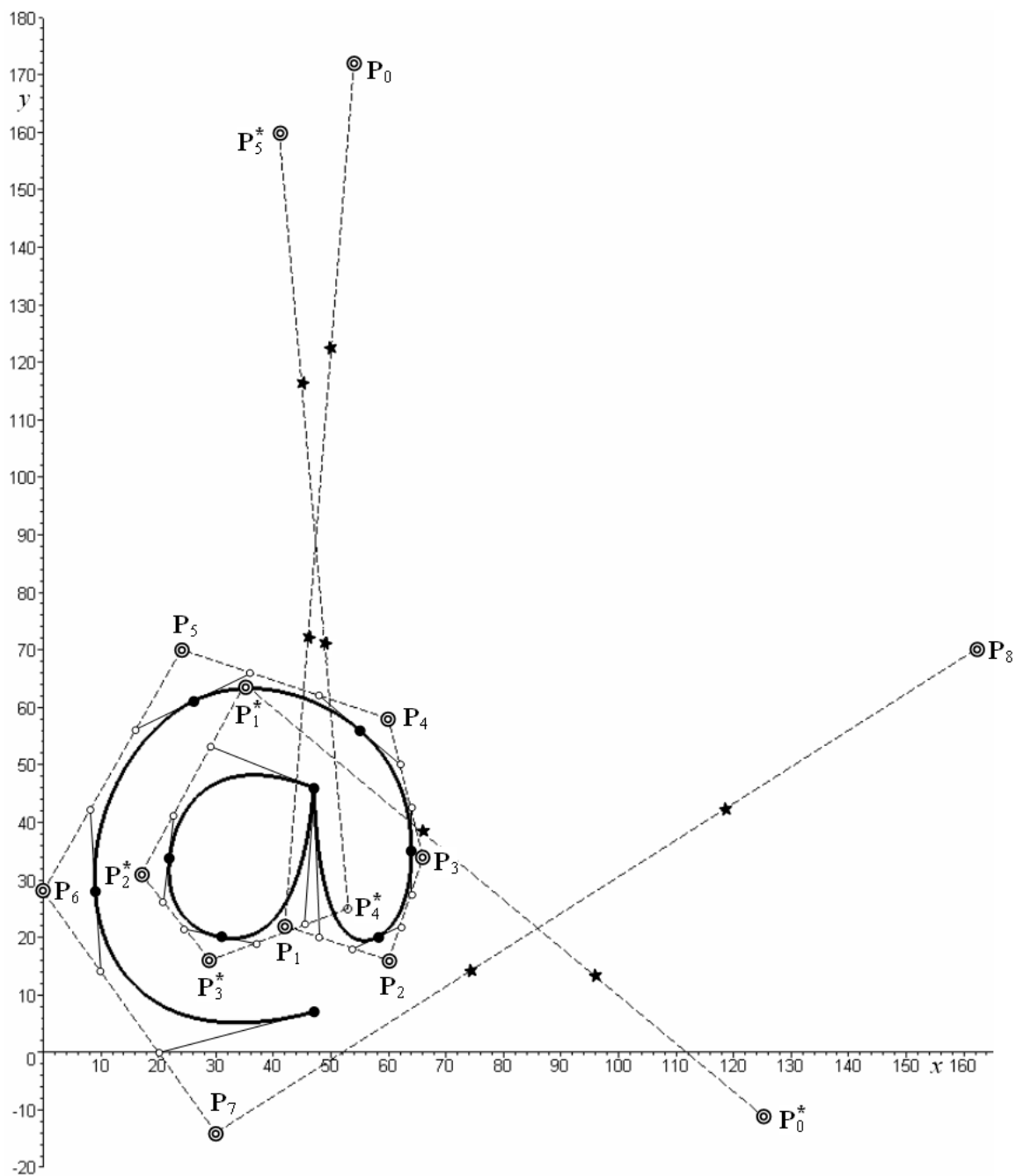
Řídicí body Coonsova kubického B-spline k^* označíme \mathbf{P}_i^* . Podle (2.50) dostaneme řídicí body Coonsovy kubiky k_0^* :

$$\mathbf{P}_0^* = 6\mathbf{V}_0^* - 7\mathbf{V}_1^* + 2\mathbf{V}_2^* = 6(47, 46) - 7(29, 53) + 2(23, 42) = (125, -11),$$

$$\mathbf{P}_1^* = 2\mathbf{V}_1^* - \mathbf{V}_2^* = 2(29, 53) - (23, 42) = (35, 64),$$

$$\mathbf{P}_2^* = 2\mathbf{V}_2^* - \mathbf{V}_1^* = 2(23, 42) - (29, 53) = (17, 31),$$

$$\mathbf{P}_3^* = 2\mathbf{V}_1^* - 7\mathbf{V}_2^* + 6\mathbf{V}_3^* = 2(29, 53) - 7(23, 42) + 6(22, 34) = (29, 16).$$



- ⊙ Řídicí body Coonsova kubického B-spline,
- Krajní body řídicího polygonu Bézierových kubik, které jsou totožné s krajními body řídicích polygonů Coonsových kubik,
- Vnitřní body řídicích polygonů Bézierových kubik,
- ★ Body ve třetinách krajních ramen řídicího polygonu Coonsova kubického B-spline.

Obrázek 2.25: Modelování znaku @ Coonsovým kubickým B-spline

Coonsova kubika k_1^* je dána řídicími body $\mathbf{P}_1^*, \mathbf{P}_2^*, \mathbf{P}_3^*, \mathbf{P}_4^*$, z nichž je třeba určit pouze bod

$$\mathbf{P}_4^* = 2\mathbf{V}_4^* - 7\mathbf{V}_5^* + 6\mathbf{V}_6^* = 2(21, 26) - 7(25, 21) + 6(31, 20) = (53, 25),$$

neboť řídicí body $\mathbf{P}_1^*, \mathbf{P}_2^*$ a \mathbf{P}_3^* jsou stejné jako u Coonsovy kubiky k_0^* . Podobně z řídicích bodů $\mathbf{P}_2^*, \mathbf{P}_3^*, \mathbf{P}_4^*, \mathbf{P}_5^*$ Coonsovy kubiky k_2^* je třeba určit pouze bod

$$\mathbf{P}_5^* = 2\mathbf{V}_7^* - 7\mathbf{V}_8^* + 6\mathbf{V}_0^* = 2(37, 19) - 7(45, 22) + 6(47, 46) = (41, 160).$$

Obdobným způsobem bychom určili řídicí body \mathbf{P}_i Coonsova kubického B-spline k : $\mathbf{P}_0 = (54, 172)$, $\mathbf{P}_1 = (42, 22)$, $\mathbf{P}_2 = (60, 16)$, $\mathbf{P}_3 = (66, 34)$, $\mathbf{P}_4 = (60, 58)$, $\mathbf{P}_5 = (24, 70)$, $\mathbf{P}_6 = (0, 28)$, $\mathbf{P}_7 = (30, -14)$, $\mathbf{P}_8 = (162, 70)$. \square

- **Cvičení 2.17** Nalezněte parametrické vyjádření Coonsovy kubiky $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 1]$, z obr. 2.22 a ověřte C^2 spojitost jejího napojení na Coonsovu kubiku $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$.

- **Cvičení 2.18** Coonsův kubický B-spline je zadán řídicím polygonem $\mathbf{P}_0 = (0, -6)$, $\mathbf{P}_1 = (-6, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (-6, 6)$, $\mathbf{P}_3 = (6, 6)$, $\mathbf{P}_4 = (6, 0)$, $\mathbf{P}_5 = (12, 0)$. Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon, zkonstruuje krajní body jednotlivých segmentů Coonsova kubického B-spline a tečné vektory v těchto bodech. Coonsův kubický B-spline načrtněte. Z kolika segmentů se Coonsův kubický B-spline skládá? S jakou spojitostí jsou jeho jednotlivé segmenty napojeny?

- **Cvičení 2.19** Coonsův kubický B-spline je zadán řídicím polygonem $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_1 = (0, 6)$, $\mathbf{P}_2 = (6, 6)$, $\mathbf{P}_3 = (6, 0)$, $\mathbf{P}_4 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_5 = (0, 6)$, $\mathbf{P}_6 = (6, 6)$. Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon, zkonstruuje krajní body jednotlivých segmentů Coonsova kubického B-spline a tečné vektory v těchto bodech. Coonsův kubický B-spline načrtněte. Z kolika segmentů se Coonsův kubický B-spline skládá? S jakou spojitostí jsou jeho jednotlivé segmenty napojeny?

- **Cvičení 2.20** Bézierova kubika k je dána řídicími body $\mathbf{V}_0 = (-3, 0)$, $\mathbf{V}_1 = (-2, 2)$, $\mathbf{V}_2 = (2, 2)$, $\mathbf{V}_3 = (3, 0)$. Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon a Bézierovu kubiku načrtněte. Předpokládejte, že Bézierova kubika k je Coonsova kubika. Určete konstrukci a výpočtem polohu jejích řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. Upravte řídicí polygon $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ tak, abyste vytvořili uzavřený Coonsův kubický B-spline. Určete počet jeho Coonsových kubik a jejich řídicí polygony. Předpokládejte, že tyto Coonsovy kubiky jsou Bézierovy kubiky. Určete konstrukci polohu jejích řídicích bodů. Jaký je minimální počet segmentů, ze kterých může být uzavřený Coonsův kubický B-spline složen? Jaký musí mít tvar řídicí polygon takového uzavřeného Coonsova kubického B-spline?

- **Cvičení 2.21** Bézierova kubika k je dána řídicími body $\mathbf{V}_0 = (1, 5)$, $\mathbf{V}_1 = (2, 6)$, $\mathbf{V}_2 = (4, 6)$, $\mathbf{V}_3 = (6, 5)$. Zkonstruuje nezbytně nutný počet řídicích polygonů dalších Bézierových kubik tak, abyste vytvořili uzavřenou křivku tvořenou C^2 spojitě napojenými Bézierovými kubikami. Náповěda: využijte souvislost mezi Bézierovou kubikou, Coonsovou kubikou a Coonsovým kubickým B-spline.

- **Cvičení 2.22** Coonsův kubický B-spline je zadán řídicími body

$\mathbf{P}_0 = (3, 9)$, $\mathbf{P}_1 = (9, 3)$, $\mathbf{P}_2 = (3, -3)$, $\mathbf{P}_3 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_4 = (3, 3)$, $\mathbf{P}_5 = (9, -3)$, $\mathbf{P}_6 = (3, -9)$,
 $\mathbf{P}_7 = (-3, -3)$, $\mathbf{P}_8 = (0, 0)$, $\mathbf{P}_9 = (3, -3)$, $\mathbf{P}_{10} = (-3, -9)$, $\mathbf{P}_{11} = (-9, -3)$, $\mathbf{P}_{12} = (-3, 3)$,
 $\mathbf{P}_{13} = (0, 0)$, $\mathbf{P}_{14} = (-3, -3)$, $\mathbf{P}_{15} = (-9, 3)$, $\mathbf{P}_{16} = (-3, 9)$, $\mathbf{P}_{17} = (3, 3)$, $\mathbf{P}_{18} = (0, 0)$,
 $\mathbf{P}_{19} = (-3, 3)$, $\mathbf{P}_{20} = (3, 9)$.

Zobrazte řídicí body, sestrojte řídicí polygon, zkonstruuje krajní body jednotlivých segmentů Coonsova kubického B-spline a tečné vektory v těchto bodech. Coonsův kubický B-spline načrtněte. Z kolika segmentů se Coonsův kubický B-spline skládá? S jakou spojitostí jsou jeho jednotlivé segmenty napojeny?

- **Cvičení 2.23** Upravte řídicí polygon Coonsova kubického B-spline z cvičení 2.22 tak, abyste vytvořili uzavřený Coonsův kubický B-spline.

Sestrojte řídicí polygon uzavřeného Coonsova kubického B-spline, zkonstruuje krajní body jednotlivých segmentů a tečné vektory v těchto bodech. Uzavřený Coonsův kubický B-spline načrtněte. Z kolika segmentů se uzavřený Coonsův kubický B-spline skládá? S jakou spojitostí jsou jeho jednotlivé segmenty napojeny?

2.4.2 Coonsův kubický B-spline v Rhinu

Otevřený Coonsův kubický B-spline nelze v Rhinu vytvořit přímo.

Uzavřený Coonsův kubický B-spline – Příkaz: *Křivka zadávaná řídicími body* → V příkazovém řádku zadat stupeň 3 → Počátek křivky: zadat počáteční bod řídicího polygonu uzavřeného Coonsova kubického B-spline → Další bod: zadat vnitřní body řídicího polygonu uzavřeného Coonsova kubického B-spline → Další bod: kliknout poblíž počátečního bodu vykreslované křivky. Křivka se automaticky uzavře s C^2 spojitostí a vytvoří se uzavřený Coonsův kubický B-spline. Poslední dva body řídicího polygonu se nezadávají.

Poznámky:

- 1) Příkazy pro řídicí body a řídicí polygon uzavřeného Coonsova kubického B-spline jsou stejné jako pro Bézierovu křivku, viz část 2.2.5.
- 2) Pravidla pro modifikaci tvaru uzavřeného Coonsova kubického B-spline jsou stejná jako pro Bézierovu křivku, viz část 2.2.5.

Krajní body Coonsových kubik – Příkaz: *Více bodů* → Umístění bodu: zapnout *Uchopování uzlů*, případně vypnout *Krok*; zaměřovačem pohybovat podél uzavřeného Coonsova kubického B-spline a kliknout, jakmile se zobrazí u zaměřovače informace *Uzel*. V krajních bodech jednotlivých Coonsových kubik se nakreslí body jako samostatné entity.

Pozor! V krajních bodech (uzlech) Coonsových kubik se mění analytické vyjádření Coonsova kubického B-spline. Jakmile použijeme příkazy *Vložit uzel* a *Odstranit uzel*, změní se uzavřený Coonsův kubický B-spline na neuniformní uzavřenou B-spline křivku 3. stupně. Tyto příkazy proto používáme pouze tehdy, pokud si přesně uvědomujeme jejich důsledky.

- **Cvičení 2.24** V Rhinu nakreslete uzavřený Coonsův kubický B-spline z příkladu 2.13, vytvořte jeho řídicí polygon a krajní body Coonsových kubik. V každém krajním bodě Coonsovy kubiky sestrojte tečnu. Ověřte konstrukční vlastnosti Coonsovy kubiky, které jsou uvedeny v části 2.3.1.
- **Cvičení 2.25** Do souboru z příkladu 2.6 doplňte konstrukci řídicích bodů otevřeného Coonsova kubického B-spline podle příkladu 2.14. Zjistěte kartézské souřadnice zkonstruovaných řídicích bodů Coonsova kubického B-spline a porovnejte je s vypočtenými hodnotami v příkladu 2.14.

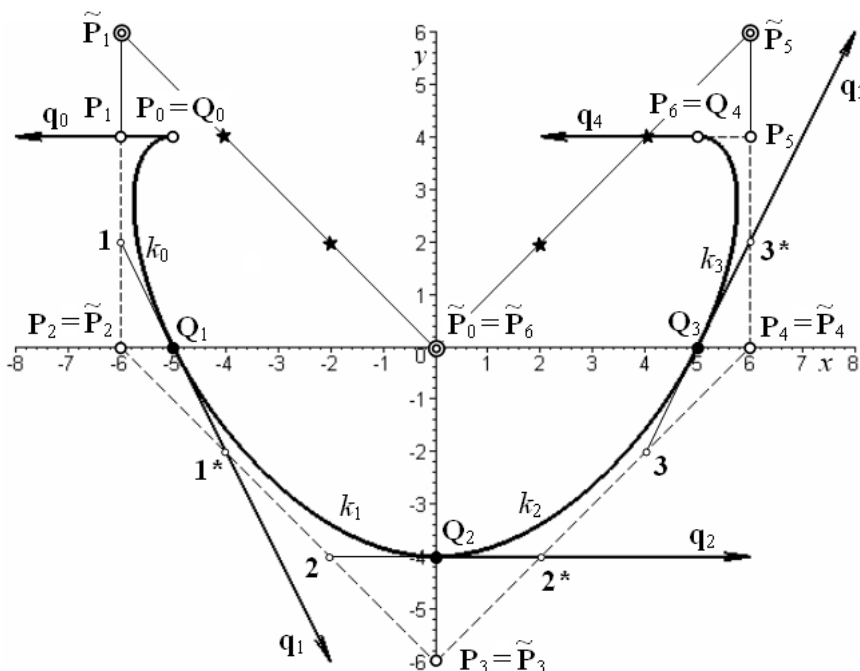
■ **Cvičení 2.26** Konstrukce požadované ve cvičeních 2.20 a 2.21 proved'te v Rhinu.

■ **Cvičení 2.27** V Rhinu nakreslete řešení cvičení 2.23.

2.5 Uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně

Uživatelskou nepřívětivost otevřeného Coonsova kubického B-spline řeší křivka, která interpoluje počáteční a koncový řídicí bod a ostatní řídicí body aproximuje. My se seznámíme se speciálním případem takové křivky – *uniformní ukotvenou B-spline křivkou 3. stupně*, kterou budeme nadále nazývat stručně *ukotvená křivka*. Její matematický popis opět přesahuje rámec publikace, ale my vystačíme pouze se znalostí Bézierovy, popř. Coonsovy kubiky, neboť ukotvená křivka je z těchto kubik šikovně složena.

Na obr. 2.26 je nakreslena ukotvená křivka k , která je totožná s otevřeným Coonsovým kubickým B-spline z příkladu 2.13. Řídicí body ukotvené křivky jsou označeny $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_6$, řídicí body původního Coonsova kubického B-spline jsou označeny $\tilde{\mathbf{P}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_6$.



Obrázek 2.26: Ukotvená křivka

Všimněme si, že řídicí polygon Coonsova kubického B-spline a ukotvené křivky se liší *pouze ve dvou počátečních a ve dvou koncových řídicích bodech*. K určení polohy dvou krajních řídicích bodů ukotvené křivky dospějeme následujícími úvahami:

1. Jestliže má křivka interpolovat počáteční a koncový řídicí bod, musí začínat v „antitěžišti“ \mathbf{Q}_0 trojúhelníka $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ vzhledem k bodu \mathbf{P}_1 a končit v „antitěžišti“ \mathbf{Q}_4 trojúhelníka $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6$ vzhledem k bodu \mathbf{P}_5 .
2. Ze vztahu mezi Coonsovou, Bézierovou a Fergusonovou kubikou odvodíme polohu řídicího bodu \mathbf{P}_1 , který musí ležet v jedné třetině tečného vektoru \mathbf{q}_0 , tedy, jak vyplývá z vlastností Coonsovy kubiky, na rameni $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ v jedné třetině od bodu \mathbf{P}_1 . Obdobně řídicí bod \mathbf{P}_5 musí ležet na rameni $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$ v jedné třetině od bodu \mathbf{P}_5 .

Z polohy řídicích bodů ukotvené křivky je zřejmé, že dva počáteční a dva koncové segmenty ukotvené křivky již nemůžeme považovat za Coonsovy kubiky, ale za Bézierovy kubiky. Konkrétně ukotvená křivka na obr. 2.26 je tvořena pouze z Bézierových kubik, jejichž řídicí polygony jsou následující:

$$k_0 : \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{1}\mathbf{Q}_1, \quad k_1 : \mathbf{Q}_1\mathbf{1}^*\mathbf{2}\mathbf{Q}_2, \quad k_2 : \mathbf{Q}_2\mathbf{2}^*\mathbf{3}\mathbf{Q}_3, \quad k_3 : \mathbf{Q}_3\mathbf{3}^*\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6.$$

Pro úplnost uveďme převodní vztahy mezi řídicími body $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ otevřeného Coonsova kubického B-spline a řídicími body ukotvené křivky $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{Q}_0 = \frac{1}{6}\mathbf{P}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_1 &= \frac{2}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}_i, \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \mathbf{P}_{n-1} &= \frac{1}{3}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{2}{3}\mathbf{P}_{n-1}, \\ \mathbf{P}_n &= \mathbf{Q}_{n-2} = \frac{1}{6}\mathbf{P}_{n-2} + \frac{2}{3}\mathbf{P}_{n-1} + \frac{1}{6}\mathbf{P}_n. \end{aligned} \tag{2.52}$$

2.5.1 Vlastnosti ukotvené křivky

Z předchozího výkladu je zřejmé, že vlastnosti ukotvené křivky jsou souhrnem vlastností všech modelů křivek, se kterými jsme se doposud seznámili (ať už se jedná o Fergusonovu, Bézierovu nebo Coonsovu kubiku či Coonsův kubický B-spline), neboť ze všech těchto křivek se může ukotvená křivka skládat. Ze kterých křivek bude konkrétní ukotvená křivka složena, záleží na počtu bodů řídicího polygonu ukotvené křivky. Podívejme se nyní na jednotlivé situace.

$n = 3$: Protože uvažujeme pouze ukotvenou křivku 3. stupně, nemůže být počet řídicích bodů menší než čtyři. Ukotvená křivka je potom tvořena jediným segmentem – Bézierovou kubikou, jejíž řídicí polygon je shodný s řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ ukotvené křivky.

$n = 4$: Příklad ukotvené křivky určené řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ je uveden na obr. 2.27 a). Ukotvená křivka se skládá ze dvou segmentů k_0 a k_1 . Oba segmenty jsou Bézierovy kubiky s řídicími polygony $k_0: \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{1}\mathbf{Q}_1$ a $k_1: \mathbf{Q}_1\mathbf{1}^*\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$. Bod \mathbf{Q}_1 , který od sebe obě Bézierovy kubiky odděluje, leží ve středu úsečky $\mathbf{1}\mathbf{1}^*$. Bod $\mathbf{1}$, resp. $\mathbf{1}^*$ dělí na poloviny druhé, resp. třetí (předposlední) rameno řídicího polygonu ukotvené křivky.

$n = 5$: Ukotvená křivka je určena řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$ a skládá se ze tří segmentů k_0 , k_1 a k_2 , viz obr. 2.27 b). Všechny tři segmenty jsou Bézierovy kubiky s řídicími polygony $k_0: \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{1}\mathbf{Q}_1$, $k_1: \mathbf{Q}_1\mathbf{1}^*\mathbf{2}\mathbf{Q}_2$, $k_2: \mathbf{Q}_2\mathbf{2}^*\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$.

Konstrukce vnitřních krajních bodů \mathbf{Q}_1 a \mathbf{Q}_2 je následující: druhé a čtvrté (předposlední) rameno řídicího polygonu ukotvené křivky rozdělíme na poloviny; dostaneme body $\mathbf{1}$ a $\mathbf{2}^*$. Třetí rameno rozdělíme na třetiny; dostaneme body $\mathbf{1}^*$ a $\mathbf{2}$. Bod \mathbf{Q}_1 , resp. \mathbf{Q}_2 leží ve středu úsečky $\mathbf{1}\mathbf{1}^*$, resp. $\mathbf{2}\mathbf{2}^*$.

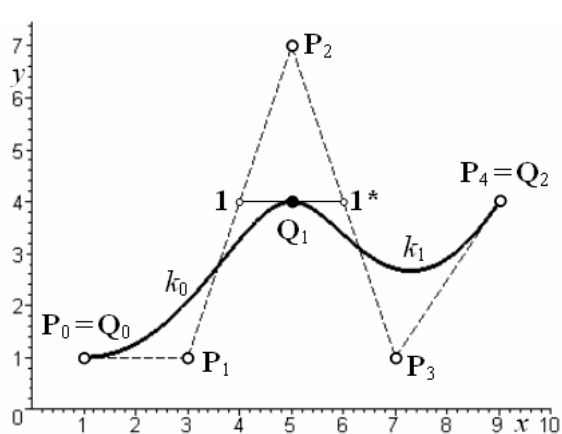
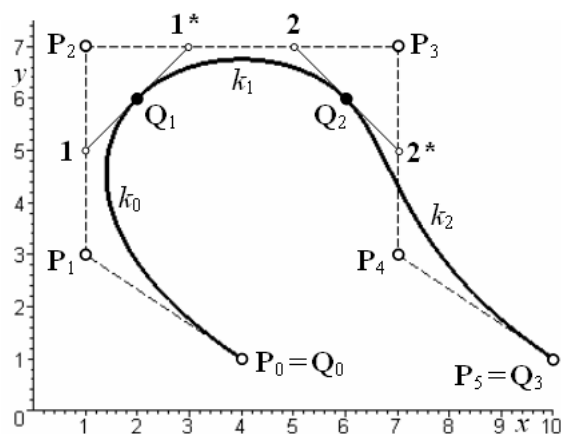
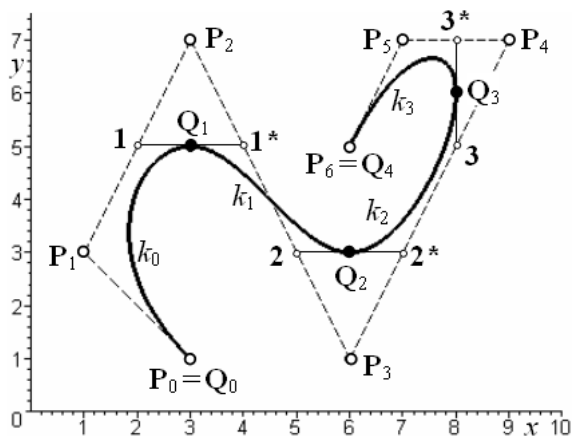
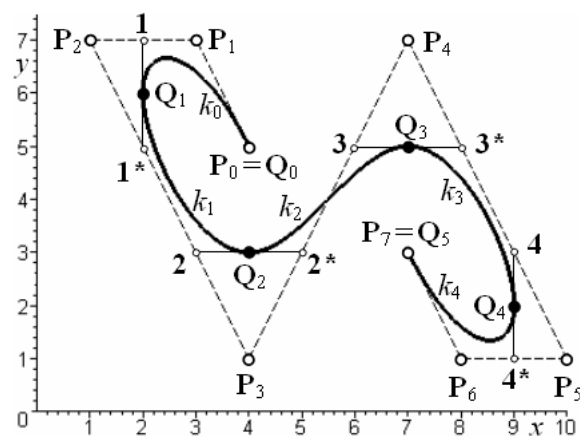
$n = 6$: Ukotvená křivka je určena řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6$ a skládá se ze čtyř segmentů k_0 , k_1 , k_2 , k_3 , viz obr. 2.27 c). Všechny čtyři segmenty jsou Bézierovy kubiky s řídicími polygony $k_0: \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{1}\mathbf{Q}_1$, $k_1: \mathbf{Q}_1\mathbf{1}^*\mathbf{2}\mathbf{Q}_2$, $k_2: \mathbf{Q}_2\mathbf{2}^*\mathbf{3}\mathbf{Q}_3$, $k_3: \mathbf{Q}_3\mathbf{3}^*\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6$.

Konstrukce vnitřních krajních bodů \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 a \mathbf{Q}_3 je následující: druhé a předposlední rameno řídicího polygonu rozdělíme na poloviny; dostaneme body $\mathbf{1}$ a $\mathbf{3}^*$. Zbývající vnitřní ramena

řídícího polygonu rozdělíme na třetiny; dostaneme body 1^* , 2^* , 3 . Bod Q_1 , resp. Q_2 , resp. Q_3 leží ve středu úsečky 11^* , resp. 22^* , resp. 33^* .

$n = 7$: Ukotvená křivka je určena řídícím polygonem $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ a skládá se z pěti segmentů k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 . Všechny segmenty jsou Bézierovy kubiky s řídícími polygony $k_0: P_0P_11Q_1$, $k_1: Q_11^*2Q_2$, $k_2: Q_22^*3Q_3$, $k_3: Q_33^*4Q_4$, $k_4: Q_44^*P_6P_7$. Prostřední segment k_2 je zároveň Coonsova kubika, jejíž řídící polygon je $P_2P_3P_4P_5$.

Konstrukce vnitřních krajních bodů Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4 je obdobná jako v předešlém případě a je patrná z obr. 2.27 d).

a) $n = 4$ b) $n = 5$ c) $n = 6$ d) $n = 7$

Obrázek 2.27: Ukotvená křivka určená různým počtem řídících bodů

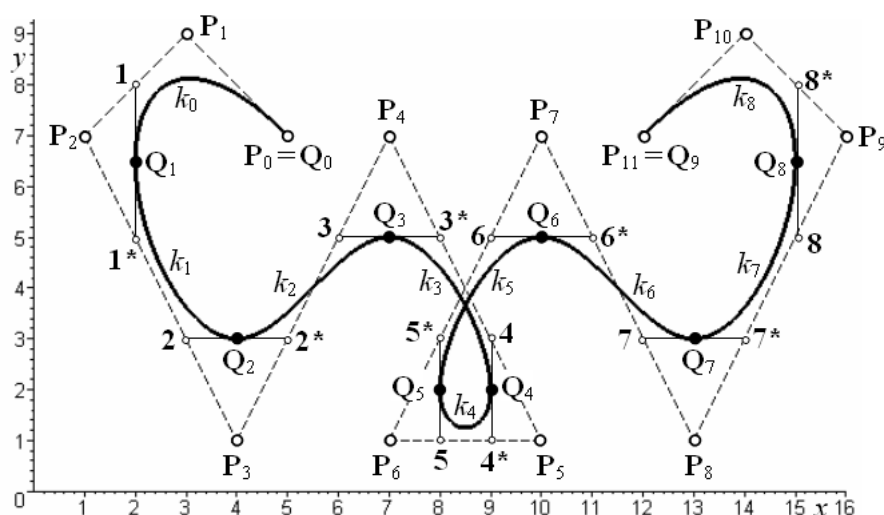
$n > 7$: Ukotvená křivka s řídicím polygonem, který obsahuje více než osm řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$, je tvořena $n - 2$ segmenty k_0, \dots, k_{n-3} . První dva a poslední dva segmenty jsou Bézierovy kubiky. Zbývajících $n - 6$ vnitřních segmentů jsou C^2 spojitě napojené Coonsovy kubiky, které tvoří otevřený Coonsův kubický B-spline určený řídicím polygonem $\mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{n-2}$. Příklad takové křivky je uveden na obr. 2.28.

Je tedy zřejmé, že při jakémkoliv počtu řídicích bodů $n \geq 3$ lze ukotvenou křivku složit z C^2 spojitě napojených Bézierových kubik. C^2 spojitost vyplývá z polohy řídicích bodů každých dvou sousedních Bézierových kubik, které splňují podmínky (2.35), (2.36) i (2.37).

2.5.2 Konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky

Pro $n > 7$ je konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky následující (sledujme obr. 2.28):

1. Počáteční bod \mathbf{Q}_0 je totožný s počátečním bodem \mathbf{P}_0 řídicího polygonu ukotvené křivky.
2. Koncový bod \mathbf{Q}_{n-2} je totožný s posledním bodem \mathbf{P}_n řídicího polygonu ukotvené křivky.
3. První, resp. poslední rameno řídicího polygonu ukotvené křivky nedělíme vůbec.
4. Druhé, resp. předposlední rameno řídicího polygonu ukotvené křivky dělíme napůl – dostaneme bod $\mathbf{1}$, resp. $(n - 3)^*$.
5. Zbývajících vnitřní ramena řídicího polygonu ukotvené křivky dělíme na třetiny – dostaneme body $\mathbf{1}^*, \mathbf{2}, \mathbf{2}^*, \mathbf{3}, \mathbf{3}^*, \dots$
6. Sestrojíme úsečky $\mathbf{1}\mathbf{1}^*, \mathbf{2}\mathbf{2}^*, \dots$
7. Krajní bod $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots$ leží ve středu úsečky $\mathbf{1}\mathbf{1}^*, \mathbf{2}\mathbf{2}^*, \dots$

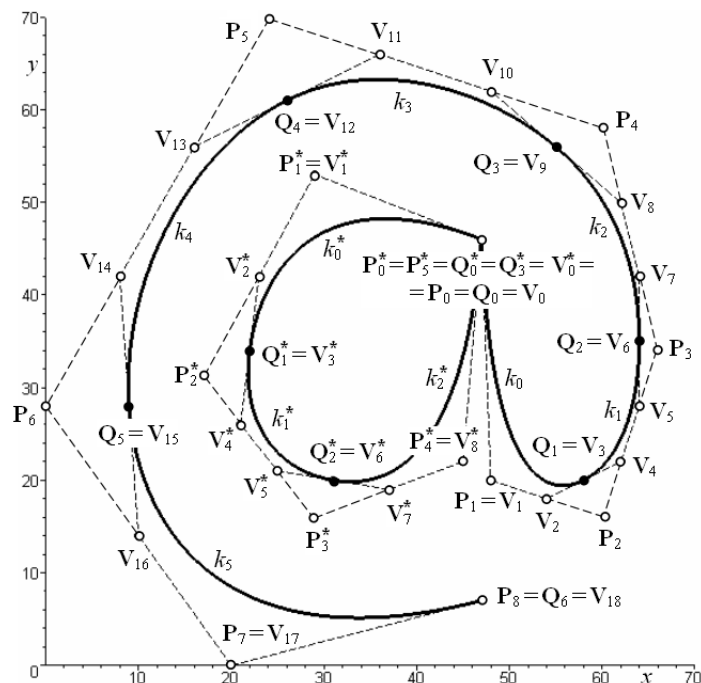


Obrázek 2.28: Konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky

■ **Příklad 2.15 – Modelování znaku @ ukotvenou křivkou.** Předpokládejte, že křivky k^* i k , kterými je modelován znak @ v příkladu 2.6, jsou ukotvené křivky.

Určete konstrukci polohu jejich řídicích bodů, sestrojte příslušné řídicí polygony a ukotvené křivky načrtněte.

Řešení. Konstrukce je patrná z obr. 2.29.



Obrázek 2.29: Modelování znaku @ ukotvenou křivkou

□

■ **Příklad 2.16** Na čtverečkový papír (velikost čtverečku 0.5 cm, formát A4 na šířku, počátek souřadného systému přibližně 2 cm od levého i spodního okraje papíru) sestrojte řídicí polygony následujících křivek (pro stručnost zápisu jsou řídicí body uvedeny pouze souřadnicemi v centimetrech, označení řídicích bodů si zvolte):

k_0 : (3.5, 10), (1, 10), (0, 8.5), (1, 7), (4, 7), (6.5, 8.5), (7, 10), (5.5, 10.5), (3.5, 9.5), (2, 7.5), (2, 4.5), (3, 3.5), (4.5, 3.5), (5.5, 4.5), (6, 6), (5.5, 4.5), (5.5, 2.5), (4.5, 1), (3, 1), (3.5, 3), (6.5, 4), (7.5, 6);

k_1 : (7.5, 6), (7, 4.5), (8.5, 6);

k_2 : (8.5, 6), (7.5, 3.5), (8.5, 3), (9.5, 5), (10.5, 6), (12.5, 6);

k_3 : (12.5, 6), (10.5, 6), (9.5, 5), (9.5, 3), (11.5, 3.5), (12.5, 6);

k_4 : (12.5, 6), (11.5, 3.5), (12.5, 3), (14.5, 6), (16, 7.5), (16.5, 10), (16, 10.5), (15, 8.5), (14, 3.5), (12.5, 0), (14, 0), (14, 4), (13.5, 4), (13.5, 3.5), (14.5, 3.5), (15.5, 4.5), (16.5, 6);

k_5 : (16.5, 6), (15.5, 3.5), (16.5, 3), (18, 6), (19.5, 7.5), (20, 10), (19.5, 10.5), (18.5, 8.5), (18, 6), (17.5, 3.5);

k_6 : (17.5, 3.5), (18, 6), (19, 6), (19.5, 5.5), (19, 4.5), (18, 4.5);

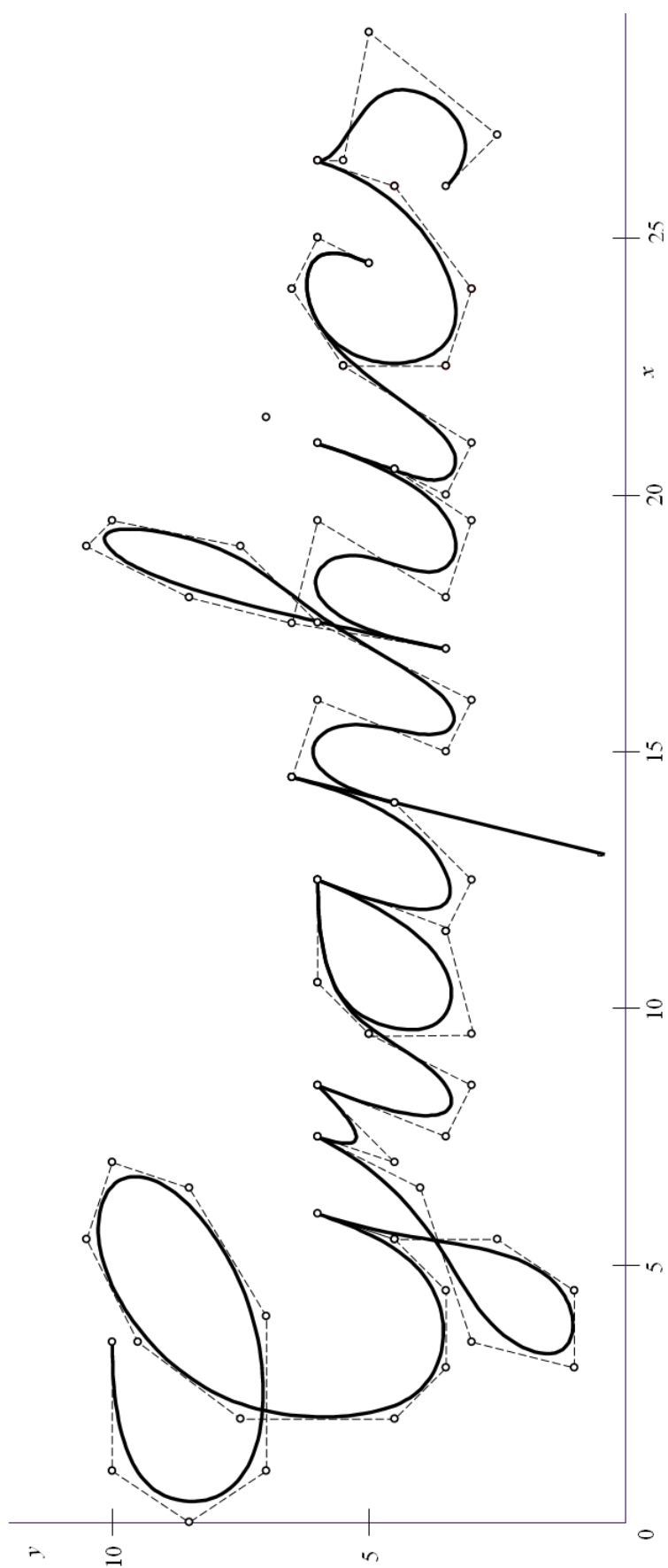
k_7 : (18, 4.5), (18.5, 4.5), (18.5, 4), (19, 3), (20, 5), (21, 6), (23, 6);

k_8 : (23, 6), (21, 6), (20, 5), (20, 3), (22, 3.5), (23, 6);

k_9 : (23, 6), (22, 3.5), (23, 3), (24, 5), (25, 6);

k_{10} : (17, 7).

Je-li počet řídicích bodů křivky menší než 4, považujte danou křivku za Bézierovu křivku; v opačném případě považujte danou křivku za ukotvenou křivku.



Obrázek 2.30: Modelování písma

Sestrojte krajní body jednotlivých segmentů všech křivek a křivky k_0, \dots, k_{10} načrtněte. Jaký je stupeň křivek k_0, \dots, k_{10} ? Z kolika segmentů se křivky k_0, \dots, k_{10} skládají? S jakou spojitostí jsou jednotlivé segmenty křivek k_0, \dots, k_{10} napojeny? S jakou spojitostí jsou křivky k_0, \dots, k_{10} napojeny?

Řešení. Na obr. 2.30 jsou nakresleny jednotlivé křivky včetně svých řídicích polygonů. Vlastní řešení a odpovědi na otázky ponecháváme na čtenáři. \square

■ **Cvičení 2.28** Řídicí polygony ukotvených křivek na obr. 2.27 jsou následující:

- $\mathbf{P}_0 = (1, 1), \mathbf{P}_1 = (3, 1), \mathbf{P}_2 = (5, 7), \mathbf{P}_3 = (7, 1), \mathbf{P}_4 = (9, 4);$
- $\mathbf{P}_0 = (4, 1), \mathbf{P}_1 = (1, 3), \mathbf{P}_2 = (1, 7), \mathbf{P}_3 = (7, 7), \mathbf{P}_4 = (7, 3), \mathbf{P}_5 = (10, 1);$
- $\mathbf{P}_0 = (3, 1), \mathbf{P}_1 = (1, 3), \mathbf{P}_2 = (3, 7), \mathbf{P}_3 = (6, 1), \mathbf{P}_4 = (9, 7), \mathbf{P}_5 = (7, 7), \mathbf{P}_6 = (6, 5);$
- $\mathbf{P}_0 = (4, 5), \mathbf{P}_1 = (3, 7), \mathbf{P}_2 = (1, 7), \mathbf{P}_3 = (4, 1), \mathbf{P}_4 = (7, 7), \mathbf{P}_5 = (10, 1), \mathbf{P}_6 = (8, 1),$
 $\mathbf{P}_7 = (7, 3).$

Předpokládejte, že tyto ukotvené křivky jsou složeny výhradně z Bézierových kubik. Určete konstrukcí a výpočtem polohu řídicích bodů těchto Bézierových kubik a nalezněte jejich vektorové rovnice. Ověřte výpočtem C^2 spojitost napojení jednotlivých Bézierových kubik, ze kterých jsou ukotvené křivky složeny.

■ **Cvičení 2.29** Předpokládejte, že ukotvené křivky na obr. 2.27, jejichž řídicí body jsou uvedeny ve cvičení 2.28, jsou Coonsovy kubické B-spline. Určete konstrukcí polohu řídicích bodů P_i těchto Coonsových kubických B-spline. Nalezněte vektorové rovnice jednotlivých Coonsových kubik, ze kterých jsou Coonsovy kubické B-spline složeny a porovnejte je s vektorovými rovnicemi Bézierových kubik z cvičení 2.28.

■ **Cvičení 2.30** Inspirujte se příkladem 2.16 a vytvořte pomocí známých modelů křivek obecného tvaru své iniciály, případně celé jméno a příjmení.

2.5.3 Napojení ukotvených křivek

Vzhledem k tomu, že se ukotvená křivka skládá z Bézierových kubik, lze podmínky pro C^0 , C^1 a C^2 spojitě napojení dvou Bézierových křivek, které jsme odvodili v části 2.2.4, využít a formulovat podmínky C^0 , C^1 a C^2 spojitěho napojení dvou ukotvených křivek.

Uvažujme ukotvenou křivku k s řídicím polygonem $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_n$, k jejímuž koncovému bodu chceme C^0 , C^1 a C^2 spojitě připojit ukotvenou křivku l s řídicím polygonem $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$.

Spojitost nultého řádu. Je zřejmé, že ukotvené křivky k a l budou napojeny s C^0 spojitostí, bude-li platit

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{R}_0, \quad (2.53)$$

tj. budou-li totožné řídicí body v místě napojení. Poloha ostatních řídicích bodů obou ukotvených křivek je libovolná.

Spojitost 1. řádu. Ukotvené křivky k a l budou napojeny s C^1 spojitostí, bude-li platit podmínka (2.53) a budou-li totožné tečné vektory v bodě napojení. Znamená to, že vektor určený počátečním ramenem řídicího polygonu ukotvené křivky l musí být shodný s vektorem určeným koncovým ramenem ukotvené křivky k :

$$\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0. \quad (2.54)$$

Řídicí bod $\mathbf{P}_n = \mathbf{R}_0$ je potom střed úsečky $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{R}_1$. Poloha ostatních řídicích bodů obou ukotvených křivek je libovolná.

Spojítost 2. řádu. Ukotvené křivky k a l budou napojeny s C^2 spojitostí, budou-li splněny podmínky (2.53) a (2.54) a bude-li vektor $\overrightarrow{S_0S_1}$ roven čtyřnásobku vektoru $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$:

$$S_1 - S_0 = 4(P_n - P_{n-1}), \quad (2.55)$$

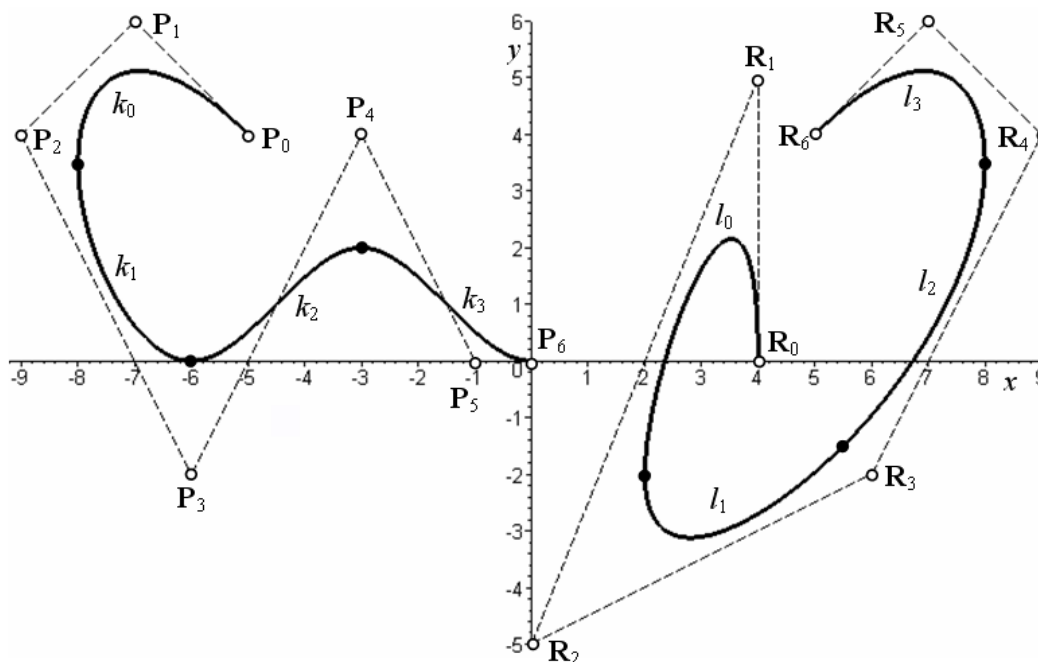
kde bod S_0 je střed předposledního ramene $P_{n-2}P_{n-1}$ řídicího polygonu ukotvené křivky k a bod S_1 je střed druhého ramene R_1R_2 řídicího polygonu ukotvené křivky l , viz obr. 2.34. Poloha ostatních řídicích bodů obou ukotvených křivek je libovolná.

Obdobné podmínky platí pro C^0 , C^1 a C^2 spojitě napojení v počátečním bodě ukotvené křivky k , jenom musíme respektovat opačnou orientaci řídicích bodů.

■ **Příklad 2.17 – Napojení ukotvených křivek.** Ukotvená křivka k je určena řídicím polygonem $P_0 = (-5, 4)$, $P_1 = (-7, 6)$, $P_2 = (-9, 4)$, $P_3 = (-6, -2)$, $P_4 = (-3, 4)$, $P_5 = (-1, 0)$, $P_6 = (0, 0)$. Ukotvená křivka l je určena $R_0 = (4, 0)$, $R_1 = (4, 5)$, $R_2 = (0, -5)$, $R_3 = (6, -2)$, $R_4 = (9, 4)$, $R_5 = (7, 6)$, $R_6 = (5, 4)$.

Zobrazte řídicí polygony ukotvených křivek k a l . Konstrukcí určete polohu krajních bodů jednotlivých segmentů a křivky k , l načrtněte. Určete konstrukcí takovou polohu řídicích bodů ukotvené křivky l , abyste zajistili C^0 , C^1 a C^2 spojitost napojení počátečního bodu křivky l na koncový bod křivky k . Modifikovaný tvar křivky l načrtněte. Které segmenty ukotvené křivky l změni svůj tvar při modifikaci řídicího polygonu?

Řešení. Na obr. 2.31 jsou zobrazeny ukotvené křivky k a l včetně svých řídicích polygonů. Krajní body jednotlivých segmentů jsou vyznačeny symbolem \bullet .

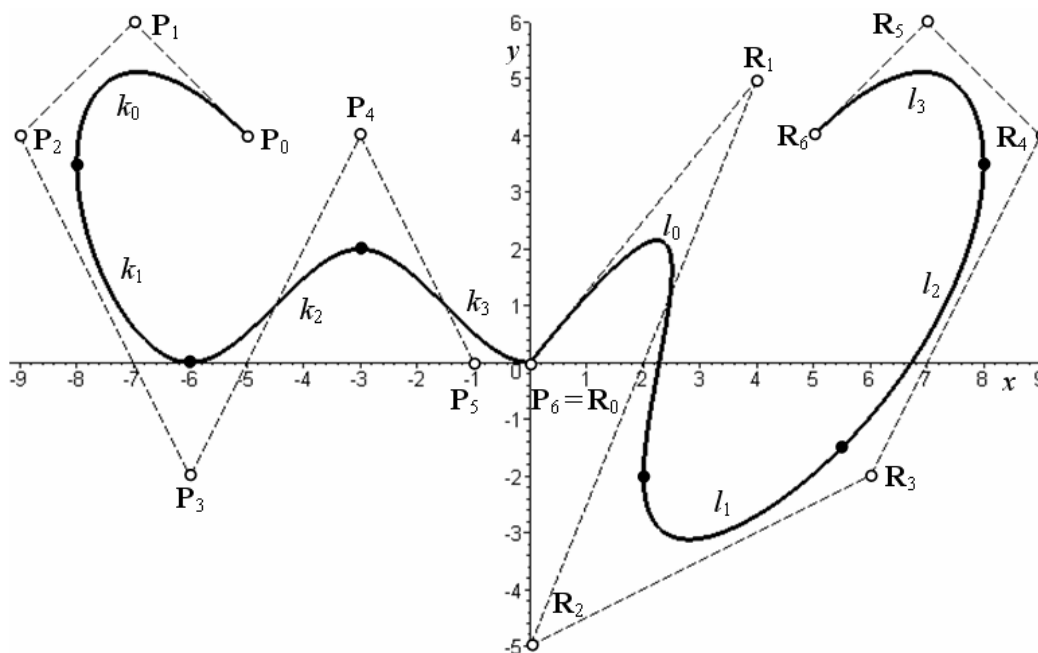


Obrázek 2.31: Ukotvené křivky k , l

Ukotvená křivka l se skládá ze čtyř segmentů. Pro zajištění C^0 spojitosti je třeba podle (2.53) změnit polohu pouze jediného řídicího bodu R_0 tak, aby $R_0 = (0, 0)$. Tím se změni tvar segmentu l_0 , tvar ostatních segmentů křivky l zůstane zachován, viz obr. 2.32.

Pro zajištění C^1 spojitosti je třeba, aby $\mathbf{R}_0 = (0, 0)$ a podle (2.54) je třeba změnit polohu řídicího bodu \mathbf{R}_1 tak, aby $\mathbf{R}_1 = (1, 0)$, viz obr. 2.33. Tím se změní tvar segmentů l_0 a l_1 , tvar ostatních segmentů ukotvené křivky l zůstává beze změn.

C^2 spojitost zajistí poloha $\mathbf{R}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{R}_1 = (1, 0)$ a dále podle (2.55) změna polohy řídicího bodu \mathbf{R}_2 tak, aby $\mathbf{R}_2 = (3, 4)$, viz obr. 2.34. Nyní se změnil tvar segmentů l_0 , l_1 a l_2 , tvar posledního segmentu l_3 ukotvené křivky l zůstane zachován.



Obrázek 2.32: Napojení ukotvených křivek s C^0 spojitostí

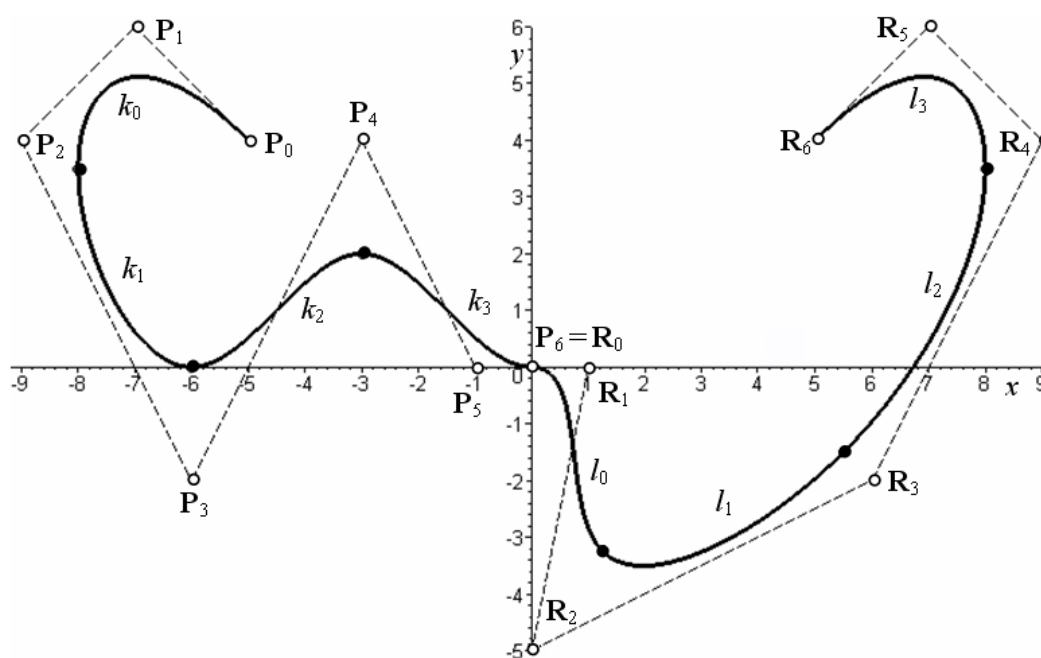
Víme, že ukotvená křivka je složena z C^2 spojitě napojených segmentů. Je tedy zřejmé, že C^2 spojitě napojení dvou ukotvených křivek lze zajistit i jedinou ukotvenou křivkou určenou modifikovaným řídicím polygonem. Touto modifikací se zabývá následující příklad.

- **Příklad 2.18 – Konstrukce řídicího polygonu ukotvené křivky složené ze dvou C^2 spojitě napojených ukotvených křivek.** Upravte konstrukci řídicího polygonu C^2 spojitě napojených ukotvených křivek k a l z obr. 2.34 tak, aby jejich segmenty patřily jediné ukotvené křivce k^* . Tvar jednotlivých segmentů i jejich spojitost musí zůstat zachována.

Řešení. Označme \mathbf{P}_i^* , $i = 0, 1, \dots, n+m-2$, řídicí body křivky k^* . Konstrukce jejich polohy je patrná z obr. 2.35. Poloha řídicích bodů \mathbf{P}_0^* , \mathbf{P}_2^* , \mathbf{P}_3^* a \mathbf{P}_4^* je shodná s polohou řídicích bodů \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 a \mathbf{P}_4 z obr. 2.34. Bod \mathbf{P}_5^* získáme, prodloužíme-li původní rameno $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$ o jednu polovinu délky za bod \mathbf{P}_5 nebo prodloužíme-li původní rameno $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ o jednu polovinu délky za bod \mathbf{R}_1 . Poloha řídicích bodů $\mathbf{P}_6^*, \dots, \mathbf{P}_{10}^*$ je shodná s polohou řídicích bodů $\mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_6$ z obr. 2.34.

2.5.4 Ukotvená křivka v Rhinu

Uniformní ukotvená B-spline křivka p -tého stupně s $n+1$ řídicími body, kde $p < n$, představuje v Rhinu (i v převážné většině CAD/CAM systémů) základní modelovací nástroj, kterým lze velmi pohodlně a intuitivně vytvářet křivky zcela obecného tvaru. Matematický popis takových

Obrázek 2.33: Napojení ukotvených křivek s C^1 spojitostí

křivek je však poměrně komplikovaný. Abychom přesto pronikli do zákonitostí, kterými se řídí modifikace jejich tvaru, věnovali jsme se v kapitole 2 nejprve křivkám s jednoduchou analytickou reprezentací a vysvětlili jsme si jejich vztah k uniformní ukotvené B-spline křivce 3. stupně, která je v praxi nejrozšířenější.

Při vytváření křivek obecného tvaru se tedy v žádném případě nemusíme spoléhat jen na metodu „pokus a omyl“, jejíž výsledky jsou nepředvídatelné. Právě naopak – můžeme aplikovat všechny poznatky o křivkách, se kterými pracujeme a využívat všechny jejich známé geometrické vlastnosti, aby naše práce byla efektivní a zajímavá.

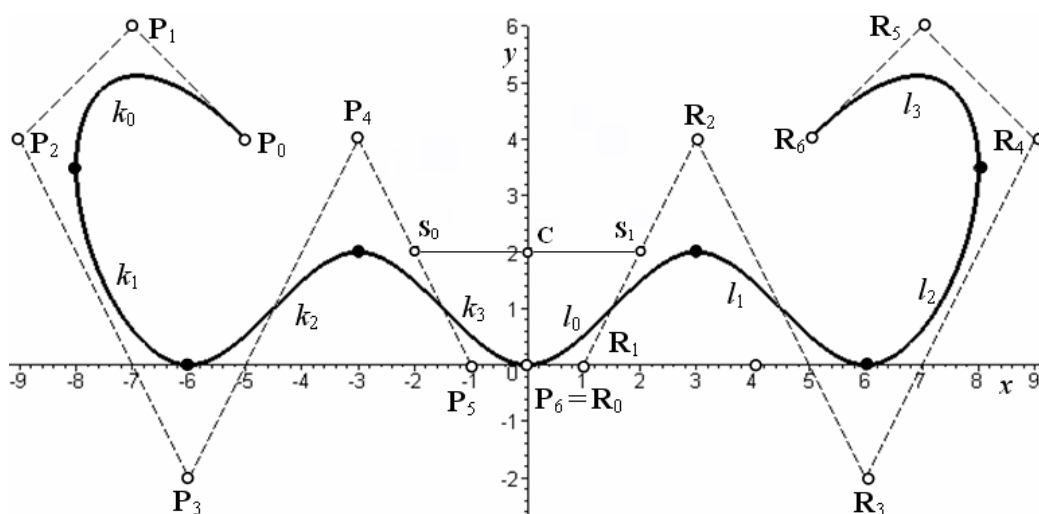
Ukotvená křivka 3. stupně – Příkaz: *Křivka zadávaná řídicími body* → Počátek křivky: v příkazovém řádku zadat stupeň 3; zadat postupně všechny řídicí body → Enter.

Poznámky:

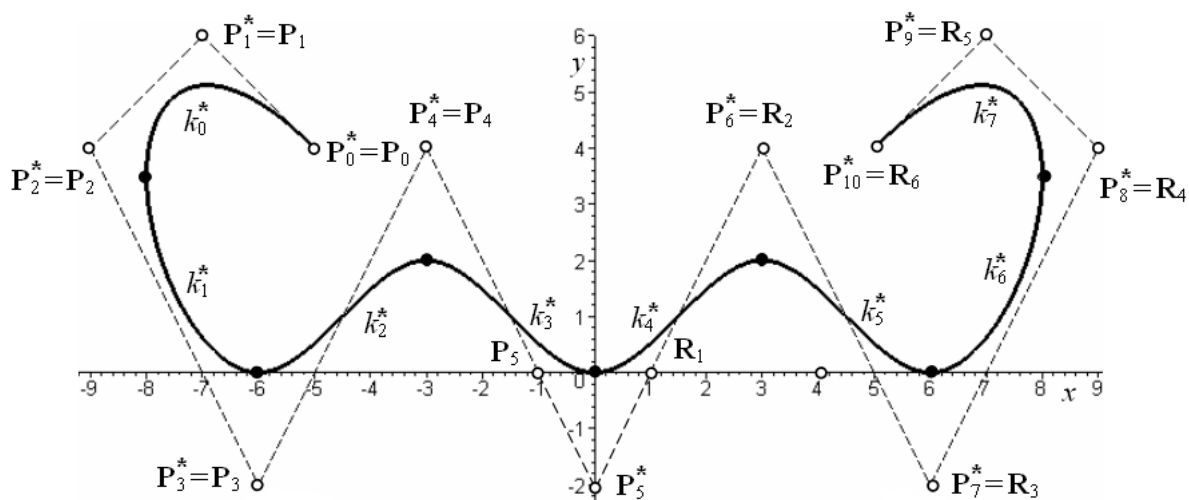
- 1) Příkazy pro řídicí body a řídicí polygon ukotvené křivky jsou stejné jako pro Bézierovu křivku, viz část 2.2.5.
- 2) Pravidla pro modifikaci tvaru ukotvené křivky jsou stejná jako pro Bézierovu křivku, viz část 2.2.5.

Krajní body segmentů ukotvené křivky – Příkaz: *Více bodů* → Umístění bodu: zapnout *Uchopování uzlů*, případně vypnout *Krok*; zaměřovačem pohybovat podél ukotvené křivky a kliknout, jakmile se zobrazí u zaměřovače informace *Uzel*. V krajních bodech jednotlivých segmentů ukotvené křivky se nakreslí body jako samostatné entity.

Pozor! Krajní body jednotlivých segmentů ukotvené křivky jsou právě ty body, které lze uchopit režimem *Uchopování uzlů*. Proto ani k modifikaci tvaru ukotvené křivky nepoužíváme příkazy *Vložit uzel* a *Odstranit uzel*, protože se po takovém zásahu stane z původně uniformní ukotvené B-spline křivky 3. stupně neuniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně.

Obrázek 2.34: Napojení ukotvených křivek s C^2 spojitostí

□

Obrázek 2.35: Řešení C^2 spojitosti jedinou ukotvenou křivkou

□

Napojování ukotvených křivek – Pravidla pro usnadnění práce při konstrukci polohy řídicích bodů zajišťujících požadovanou spojitost jsou obdobná jako tomu bylo při napojování Bézierových kubik (sledujme obr. 2.31, obr. 2.33 a obr. 2.34).

C^0 spojitost: totožnost krajních bodů řídicích polygonů zajistíme přemístěním řídicího bodu \mathbf{R}_0 na obr. 2.31 do řídicího bodu \mathbf{P}_6 se zapnutým režimem *Uchopování koncových bodů*.

C^1 spojitost: polohu řídicího bodu \mathbf{R}_1 na obr. 2.33 určíme jako volný koncový bod úsečky kreslené příkazem *Úsečka z bodu v polovině* → Střed úsečky: kliknout do bodu \mathbf{P}_6 → Konec úsečky: kliknout do bodu \mathbf{P}_5 . Tak bude společný řídicí bod $\mathbf{P}_6 = \mathbf{R}_0$ středem úsečky $\mathbf{P}_5\mathbf{R}_1$.

C^2 spojitost: polohu řídicího bodu \mathbf{R}_2 na obr. 2.34 určíme následujícím postupem:

Nejprve se zapnutým nástrojem *Uchopování koncových bodů* nakreslíme rameno $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$ příkazem *Samostatné úsečky* → Počátek úsečky → kliknout do bodu \mathbf{P}_4 → Konec úsečky: kliknout do bodu \mathbf{P}_5 .

Potom dvakrát zkopírujeme úsečku $\mathbf{P}_5\mathbf{R}_1$ (která představuje dvojnásobek vektoru $\overrightarrow{\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6}$)

příkazem *Kopírovat* → Vyberte objekty ke kopírování: kliknout na úsečku $\mathbf{P}_5\mathbf{R}_1$ → Enter → Východí bod kopírování: kliknout do bodu \mathbf{P}_5 zapnout režim *Uchopování bodů v polovině objektů* → Cílový bod kopírování: kliknout do středu úsečky $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$, tedy do bodu \mathbf{S}_0 → Cílový bod kopírování: kliknout do volného koncového bodu \mathbf{C} zkopírované úsečky → Enter. Vektor $\overrightarrow{\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1}$ je nyní čtyřnásobkem vektoru $\overrightarrow{\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6}$ a bod \mathbf{S}_1 dle obr. 2.34 určuje střed ramene $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$.

Nakonec určíme polohu řídicího bodu \mathbf{R}_2 jako volný koncový bod úsečky kreslené příkazem *Úsečka z bodu v polovině* → Střed úsečky: kliknout do bodu \mathbf{S}_1 → Konec úsečky: kliknout do bodu \mathbf{R}_1 .

Výpis struktury ukotvené křivky – Příkaz: *Výpis databáze objektu* → Vyberte objekty pro výpis podrobných informací: kliknout na ukotvenou křivku → Enter. Zobrazí se dialogové okno *Výpis*, ve kterém se zobrazují podrobné informace. Pro nás jsou užitečné následující informace (uvažujme např. ukotvenou křivku k z příkladu 2.17):

- `order` = 4: křivka je 4. řádu, tedy 3. stupně,
- `cv_count` = 7: počet řídicích bodů je 7,
- `index value`: výpis řídicích bodů a jejich globálních kartézských souřadnic, např.:

index	value
CV[0]	(-5, 4, 0)
CV[1]	(-7, 6, 0)
CV[2]	(-9, 4, 0)
CV[3]	(-6, -2, 0)
CV[4]	(-3, 4, 0)
CV[5]	(-1, 0, 0)
CV[6]	(0, 0, 0)

Poznámky:

1) Informace je možné z dialogového okna zkopírovat do schránky Windows a vložit do výpočetního systému (Maple, Mathematica, ...), kde je lze (po nezbytné editaci) použít jako vstupní data výpočtu.

2) Podrobné informace lze získat pro libovolný objekt Rhina, tedy i pro křivky, kterými jsme se zabývali v předcházejících částech této kapitoly.

- **Cvičení 2.31** V Rhinu nakreslete řídicí polygony ukotvených křivek z obr. 2.27 (vstupní data jsou uvedena ve cvičení 2.28). Určete konstrukcí polohu řídicích bodů jednotlivých Bézierových kubik, ze kterých jsou ukotvené křivky složeny, a Bézierovy kubiky nakreslete. Zobrazte grafy křivosti Bézierových kubik.

Jinou barvou nakreslete ukotvené křivky a krajní body jednotlivých segmentů (se zapnutým režimem *Uchopování uzlů*). Zobrazte grafy křivosti ukotvených křivek.

Porovnejte tvar Bézierových a ukotvených křivek, polohu krajních bodů segmentů a grafy křivosti.

- **Cvičení 2.32** V Rhinu vymodelujte znak @ ukotvenými křivkami podle obr. 2.29. Řídicí body ukotvených křivek jsou následující:

$$\begin{aligned}
 k^*: \quad & \mathbf{P}_0^* = (47, 46), \mathbf{P}_1^* = (29, 53), \mathbf{P}_2^* = (17, 31), \mathbf{P}_3^* = (29, 16), \mathbf{P}_4^* = (45, 22), \mathbf{P}_5^* = (47, 46), \\
 k: \quad & \mathbf{P}_0 = (47, 46), \mathbf{P}_1 = (48, 20), \mathbf{P}_2 = (60, 16), \mathbf{P}_3 = (66, 34), \mathbf{P}_4 = (60, 58), \mathbf{P}_5 = (24, 70), \\
 & \mathbf{P}_6 = (0, 28), \mathbf{P}_7 = (20, 0), \mathbf{P}_8 = (47, 7).
 \end{aligned}$$

Nakreslete krajní body jednotlivých segmentů obou ukotvených křivek a ověřte jejich polohu konstrukcí.

- **Cvičení 2.33** V Rhinu nakreslete křivky k_0 až k_{10} z příkladu 2.16. Ověřte si pomocí nástrojů Rhina své odpovědi na otázky uvedené v příkladu 2.16.
- **Cvičení 2.34** V Rhinu nakreslete uzavřený Coonsův kubický B-spline k , jehož řídicí body jsou následující (pro stručnost zápisu uvádíme pouze souřadnice v mm zaokrouhlené na 3 desetinná místa):

$$\begin{aligned}
 k: \quad & (0.360, 0.000, 10.176), (-0.720, 3.165, 9.649), (-3.184, 4.938, 8.306), \\
 & (-5.899, 5.136, 6.504), (-8.176, 4.104, 4.440), (-9.664, 2.245, 2.261), \\
 & (-9.992, 0.765, 0.729), (-10.000, 0.000, 0.000), (-9.991, -0.765, -0.729), \\
 & (-9.663, -2.244, -2.261), (-8.176, -4.104, -4.440), (-5.900, -5.136, -6.504), \\
 & (-3.184, -4.938, -8.306), (-0.720, -3.165, -9.649), (0.360, 0.000, -10.176), \\
 & (-0.720, 3.165, -9.649), (-3.184, 4.938, -8.306), (-5.900, 5.136, -6.504), \\
 & (-8.176, 4.104, -4.440), (-9.664, 2.245, -2.261), (-9.992, 0.765, -0.729), \\
 & (-10.000, 0.000, 0.000), (-9.991, -0.765, 0.729), (-9.666, -2.244, 2.261), \\
 & (-8.176, -4.104, 4.440), (-5.900, -5.136, 6.504), (-3.184, -4.938, 8.306), \\
 & (-0.720, -3.165, 9.649), (0.360, 0.000, 10.176).
 \end{aligned}$$

Z kolika segmentů se křivka k skládá? Jaká je spojitost podél křivky k ?

Vymodelujte dále kouli (příkaz *Koule: střed a poloměr* → Střed koule: 0,0,0 → Poloměr: 10) a válec (příkaz *Válec* → Dolní podstava válce: w-5,0,-15 → Poloměr: 5 → Horní podstava válce: w-5,0,15.)

Jaký je vztah křivky k ke kouli a válci (nepřesnosti způsobené zaokrouhlením vstupních dat neuvažujte)?

Křivka k je pojmenovaná podle jednoho italského matematika a fyzika (1622-1703). Znáte jeho jméno?

- **Cvičení 2.35** Realizujte cvičení 2.30 v Rhinu.
- **Cvičení 2.36** Realizujte příklad 2.17 a 2.18 v Rhinu.

Kapitola 3

Modelování ploch

Při matematickém modelování ploch obecného tvaru máme více možností než tomu bylo u modelování křivek. Kromě bodů mohou být plochy zadány i křivkami, které na ploše leží, a dále geometrickými podmínkami, které mají být v zadaných bodech nebo podél zadaných křivek splněny. Je-li plocha zadána body, hovoříme o *síti bodů*, a to v případě aproximace o *síti řídicích bodů*, nebo-li *řídicí síti*, v případě interpolace o *síti definičních bodů*, nebo-li *definiční síti*. Je-li plocha zadána křivkami, které na ploše leží, hovoříme o *systému definičních křivek* a vždy vytváříme interpolační plochu.

Plochy složitějších tvarů jsou zadány sítí mnoha bodů, případně systémem mnoha křivek. Zde se omezíme na podrobný výklad matematických modelů popisujících *jediný plát* a seznámíme se s pravidly a zákonitostmi *plátování*, tj. napojování plátů se zajištěním předem dané spojitosti. Z interpolačních plátů se budeme věnovat těm nejjednodušším, které jsou určené pouze svými rohy nebo okraji. Z aproximačních plátů se zaměříme především na pláty určené sítí s devíti, dvanácti a šestnácti řídicími body.

3.1 Vektorová rovnice plochy

Vektorová rovnice plochy je lineární kombinací báзовých funkcí, kterými jsou polynomy dvou proměnných $(u, v) \in [0, 1]^2$. Součinitelé jednotlivých báзовých funkcí jsou zadaná vstupní data – definiční body, okrajové křivky nebo řídicí body. Jsou-li vstupními daty okraje plátu, které jsou už samy o sobě funkcí proměnné u , resp. v , jsou báзовými funkcemi pouze jednoparametrické polynomy druhé proměnné v , resp. u .

Vzhledem ke čtvercové oblasti oboru parametrizace $[0, 1]^2$ je logické uspořádat vstupní data do matice, tzv. *mapy plochy* \mathbf{M} . Označme obecně $\mathbf{M}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$, prvky mapy plochy, které jsou různé podle zvoleného matematického modelu. Vždy ale obsahují tři souřadnicové složky, tedy $\mathbf{M}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Dvouparametrické báзовé funkce vytvoříme vynásobením dvou jednoparametrických báзовých funkcí. Označme obecně $H_i(u)$, $u \in [0, 1]$, $i = 0, 1, \dots, m$, báзовou funkci parametru u a $H_j(v)$, $v \in [0, 1]$, $j = 0, 1, \dots, n$, báзовou funkci parametru v . Ve výsledné lineární kombinaci bude prvek $\mathbf{M}_{i,j}$ součinitelem dvouparametrické báзовé funkce $H_{i,j}(u, v)$ vytvořené součinem jednoparametrických báзовých funkcí příslušných indexů, tedy

$$H_{i,j}(u, v) = H_i(u)H_j(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Říkáme, že báзовá funkce $H_{i,j}(u, v)$ je *asociována* s prvkem $\mathbf{M}_{i,j}$.

V definicích matematických modelů ploch určených více vstupními daty budeme upřednostňovat maticovou formu vektorové rovnice plochy, kterou dostaneme, uspořádáme-li jednoparametrické

bázové funkce do vektorů

$$\mathbf{H}(u) = (H_0(u), H_1(u), \dots, H_m(u)), \quad \mathbf{H}^T(v) = (H_0(v), H_1(v), \dots, H_n(v))^T,$$

kterými zleva a zprava vynásobíme mapu plochy, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= \mathbf{H}(u) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}(v) = \\ &= (H_0(u), H_1(u), \dots, H_m(u)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{0,0} & \mathbf{M}_{0,1} & \dots & \mathbf{M}_{0,n} \\ \mathbf{M}_{1,0} & \mathbf{M}_{1,1} & \dots & \mathbf{M}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{m,0} & \mathbf{M}_{m,1} & \dots & \mathbf{M}_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ \vdots \\ H_n(v) \end{pmatrix}, \\ &(u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Roznásobením matic dostáváme vektorovou rovnici plochy ve formě lineární kombinace bázových funkcí

$$\mathbf{P}(u, v) = H_0(u)H_0(v)\mathbf{M}_{0,0} + H_0(u)H_1(v)\mathbf{M}_{0,1} + \dots + H_m(u)H_n(v)\mathbf{M}_{m,n}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.3)$$

Tuto formu vektorové rovnice plochy použijeme v případě ploch určených méně vstupními daty. Pokud je vstupních dat více, je lineární kombinace bázových funkcí nepřehledná, a proto v těchto případech použijeme již zmíněnou maticovou formu.

V literatuře se často vyjadřuje vektorová rovnice také ve formě dvou sumací

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n H_i(u)H_j(v)\mathbf{M}_{i,j}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.4)$$

kterou zde ale používat nebudeme.

Všechny tři formy vektorové rovnice – maticová, lineární kombinace bázových funkcí i vyjádřená sumacemi – jsou ekvivalentní.

Parametrické vyjádření plochy dostaneme, pokud za vstupní data $\mathbf{M}_{i,j}$ dosadíme konkrétní souřadnicové složky $x_{i,j}$, $y_{i,j}$, $z_{i,j}$ (v maticové formě):

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (H_0(u), H_1(u), \dots, H_m(u)) \cdot \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,n} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m,0} & x_{m,1} & \dots & x_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ \vdots \\ H_n(v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\ y(u, v) &= (H_0(u), H_1(u), \dots, H_m(u)) \cdot \begin{pmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \dots & y_{0,n} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \dots & y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m,0} & y_{m,1} & \dots & y_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ \vdots \\ H_n(v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\ z(u, v) &= (H_0(u), H_1(u), \dots, H_m(u)) \cdot \begin{pmatrix} z_{0,0} & z_{0,1} & \dots & z_{0,n} \\ z_{1,0} & z_{1,1} & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m,0} & z_{m,1} & \dots & z_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(v) \\ H_1(v) \\ \vdots \\ H_n(v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \end{aligned}$$

a provedeme příslušné úkony, tj. vynásobíme matice a upravíme výrazy. Máme-li souřadnicové funkce, můžeme sestavit vektorovou rovnici plochy $\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

3.2 Přímková přechodová plocha

Přechodová plocha interpoluje dva zadané protilehlé okraje – křivky, jejichž analytickou reprezentací je vektorová funkce jedné proměnné. Přímkovou přechodovou plochu, jejíž analytickou reprezentací je vektorová funkce dvou proměnných, dostaneme lineární interpolací mezi zadanými okraji. Lineární interpolace mezi zadanými okraji znamená, že určíme body okrajů odpovídající stejné hodnotě parametru a tyto body spojíme úsečkami. Množina všech těchto úseček tvoří přímkovou přechodovou plochu.

Nadále budeme používat následující stručné označení pro *zadané* rohy a okraje plátu:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{0,0}, \mathbf{P}_{0,1}, \mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{1,1} \dots \text{ zadané rohy plátu } \mathbf{P}(0,0), \mathbf{P}(0,1), \mathbf{P}(1,0), \mathbf{P}(1,1), \\ & \mathbf{P}_0(u), \mathbf{P}_1(u), \mathbf{P}_0(v), \mathbf{P}_1(v) \dots \text{ zadané okraje plátu } \mathbf{P}(u,0), \mathbf{P}(u,1), \mathbf{P}(0,v), \mathbf{P}(1,v). \end{aligned}$$

- **Definice 3.1 Přímková přechodová plocha.** Necht' jsou dány okraje ve směru u , které jsou tvořeny jednosegmentovými křivkami $\mathbf{P}_0(u)$ a $\mathbf{P}_1(u)$, $u \in [0,1]$. Potom je přímková přechodová plocha určená okraji ve směru u tvořena jediným plátem s vektorovou rovnicí

$$\mathbf{P}(u,v) = (1-v)\mathbf{P}_0(u) + v\mathbf{P}_1(u), \quad (u,v) \in [0,1]^2. \quad (3.5)$$

Zadané okraje jsou funkcí u , proto jsou bázové funkce jednoparametrické lineární polynomy proměnné v : $1-v$ a v .

Podobně, necht' jsou dány okraje ve směru v , které jsou tvořeny jednosegmentovými křivkami $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{P}_1(v)$, $v \in [0,1]$. Potom je přímková přechodová plocha určená okraji ve směru v tvořena jediným plátem, jehož vektorová rovnice je

$$\mathbf{P}(u,v) = (1-u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v), \quad (u,v) \in [0,1]^2. \quad (3.6)$$

Zadané okraje jsou funkcí v , proto jsou bázové funkce jednoparametrické lineární polynomy proměnné u : $1-u$ a u . □

- **Příklad 3.1 – Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru u .** Jsou dány okraje $\mathbf{P}_0(u) = (2u, 0, -u^2 + 2)$, $\mathbf{P}_1(u) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2)$, $u \in [0,1]$.

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici přímkové přechodové plochy $\mathbf{P}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u,v)$, $\mathbf{P}^v(u,v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u,v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Souřadnicové funkce $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ plochy $\mathbf{P}(u,v)$ dostaneme, dosadíme-li do (3.5) příslušné souřadnicové funkce zadaných okrajů:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (1-v) \cdot 2u + v \cdot 2u = 2u, \\ y(u,v) &= (1-v) \cdot 0 + v \cdot 2 = 2v, \\ z(u,v) &= (1-v)(-u^2 + 2) + v(2u^2 - 4u + 2) = 3u^2v - u^2 - 4uv + 2, \quad (u,v) \in [0,1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice přímkové přechodové plochy je

$$\mathbf{P}(u,v) = (2u, 2v, 3u^2v - u^2 - 4uv + 2), \quad (u,v) \in [0,1]^2. \quad (3.7)$$

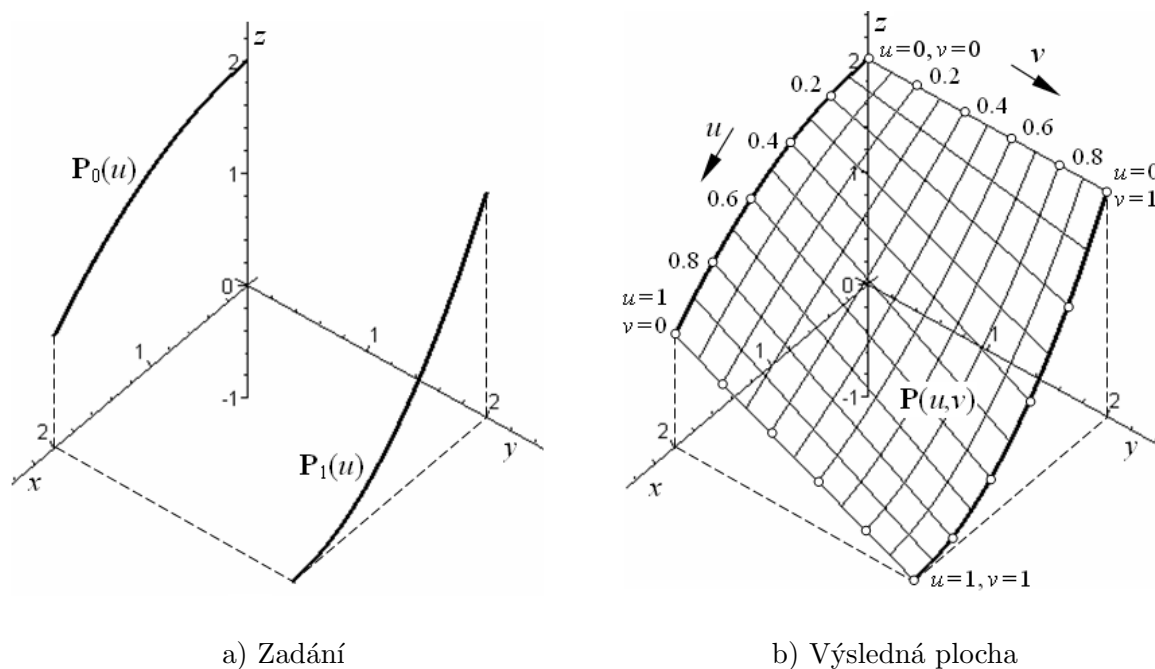
Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.7), dostaneme rohy plátu

$$\mathbf{P}(0,0) = (0,0,2), \quad \mathbf{P}(0,1) = (0,2,2), \quad \mathbf{P}(1,0) = (2,0,1), \quad \mathbf{P}(1,1) = (2,2,0).$$

Dosadíme-li $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$ do (3.7), dostaneme okraje plátu

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(u, 0) = (2u, 0, -u^2 + 2), \quad u \in [0, 1] & \dots\dots\dots \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_0(u), \\
\mathbf{P}(u, 1) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2), \quad u \in [0, 1] & \dots\dots \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_1(u), \\
\mathbf{P}(0, v) = (0, 2v, 2), \quad v \in [0, 1] & \dots\dots\dots \text{úsečka v rovině } x = 0, \\
\mathbf{P}(1, v) = (2, 2v, -v + 1), \quad v \in [0, 1] & \dots\dots\dots \text{úsečka v rovině } x = 2.
\end{array}$$

Na obr. 3.1 a) jsou nakresleny zadané okraje, výsledná přímková přechodová plocha (3.7) je nakreslena na obr. 3.1 b).



Obrázek 3.1: Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru u

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek je dle (1.42) a (1.43)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^u(u, v) &= (2, 0, 6uv - 2u - 4v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\
\mathbf{P}^v(u, v) &= (0, 2, 3u^2 - 4u), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.8), dostaneme tečné vektory v rozích plátu

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^u(0, 0) &= (2, 0, 0), \quad \mathbf{P}^u(0, 1) = (2, 0, -4), \quad \mathbf{P}^u(1, 0) = (2, 0, -2), \quad \mathbf{P}^u(1, 1) = (2, 0, 0), \\
\mathbf{P}^v(0, 0) &= (0, 2, 0), \quad \mathbf{P}^v(0, 1) = (0, 2, 0), \quad \mathbf{P}^v(1, 0) = (0, 2, -1), \quad \mathbf{P}^v(1, 1) = (0, 2, -1).
\end{aligned}$$

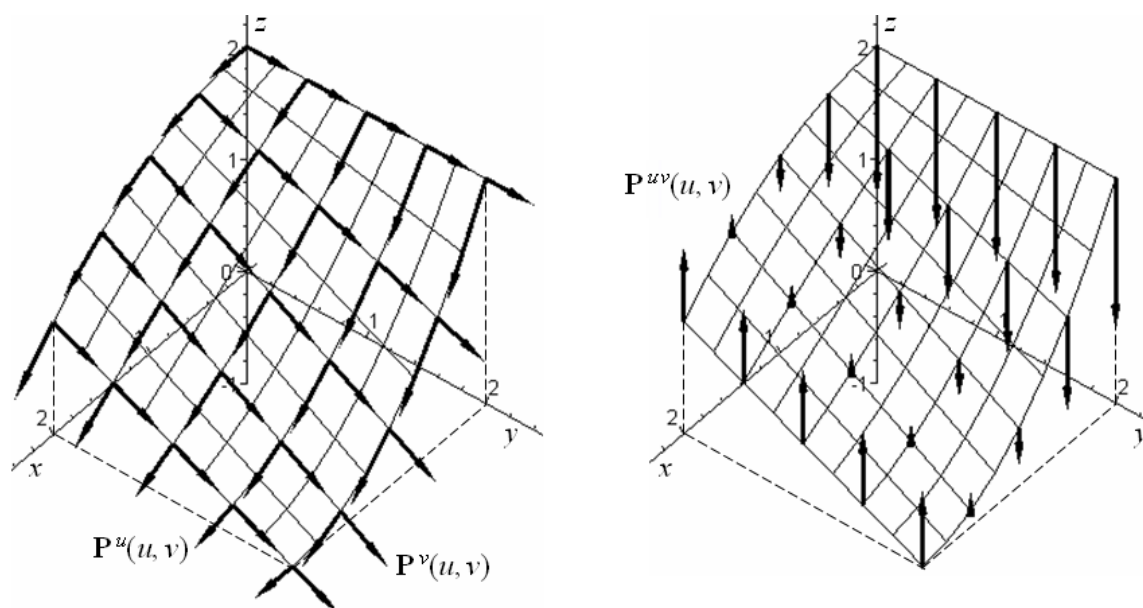
Vektorová rovnice zkrutu je dle (1.49)

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, 6u - 4), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \tag{3.9}$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.9), dostaneme zkruty v rozích plátu

$$\mathbf{P}^{uv}(0, 0) = (0, 0, -4), \quad \mathbf{P}^{uv}(0, 1) = (0, 0, -4), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 0) = (0, 0, 2), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 1) = (0, 0, 2).$$

Na obr. 3.2 a) jsou nakresleny tečné vektory (3.8) parametrických křivek a na obr. 3.2 b) jsou nakresleny zkruty (3.9) v několika bodech přímkové přechodové plochy (3.7). Pro zachování



a) Tečné vektory parametrických křivek

b) Zkruty

Obrázek 3.2: Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru u □

čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena (délka tečných vektorů na $1/5$, délka zkrutů na $1/3$ své skutečné délky).

Dvojice tečných vektorů parametrických křivek v každém bodě plochy určuje tečnou rovinu v tomto bodě. Zkrut potom míru odchýlení plochy od tečné roviny, tedy křivost plochy.

■ **Příklad 3.2 – Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru v .** Jsou dány okraje $\mathbf{P}_0(v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2)$, $\mathbf{P}_1(v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1)$, $v \in [0, 1]$.

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici přímkové přechodové plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Souřadnicové funkce $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ plochy $\mathbf{P}(u, v)$ dostaneme, dosadíme-li do (3.6) příslušné souřadnicové funkce zadaných okrajů:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (1 - u) \cdot 0 + u \cdot 2 = 2u, \\ y(u, v) &= (1 - u) \cdot 2v + u \cdot 2v = 2v, \\ z(u, v) &= (1 - u)(4v^2 - 4v + 2) + u(v^2 - 2v + 1) = \\ &= -3uv^2 + 2uv - u + 4v^2 - 4v + 2, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice přímkové přechodové plochy je

$$\mathbf{P}(u, v) = (2u, 2v, -3uv^2 + 2uv - u + 4v^2 - 4v + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.10)$$

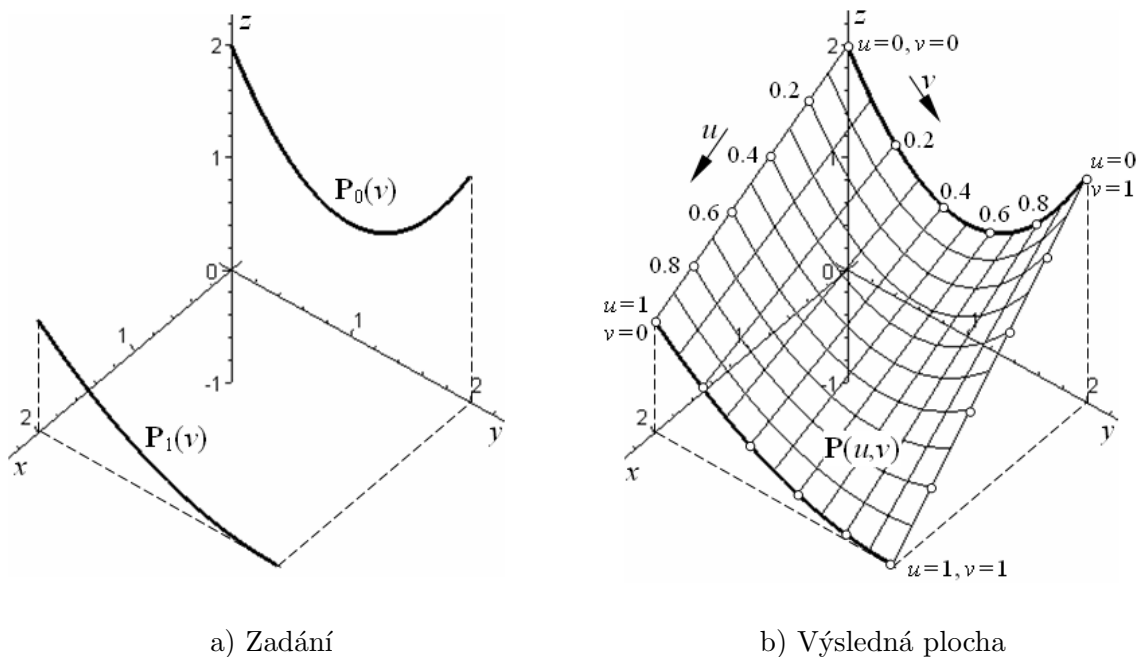
Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.10), dostaneme rohy plátu

$$\mathbf{P}(0, 0) = (0, 0, 2), \quad \mathbf{P}(0, 1) = (0, 2, 2), \quad \mathbf{P}(1, 0) = (2, 0, 1), \quad \mathbf{P}(1, 1) = (2, 2, 0).$$

Dosadíme-li $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$ do (3.10), dostaneme okraje plátu

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(u, 0) = (2u, 0, -u + 2), \quad u \in [0, 1] & \dots\dots\dots \text{úsečka v rovině } y = 0, \\
\mathbf{P}(u, 1) = (2u, 2, -2u + 2), \quad u \in [0, 1] & \dots\dots\dots \text{úsečka v rovině } y = 2, \\
\mathbf{P}(0, v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), \quad v \in [0, 1] & \dots\dots \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_0(v), \\
\mathbf{P}(1, v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1), \quad v \in [0, 1] & \dots\dots \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_1(v).
\end{array}$$

Na obr. 3.3 a) jsou nakresleny zadané okraje, výsledná přímková přechodová plocha (3.10) je nakreslena na obr. 3.3 b).



Obrázek 3.3: Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru v

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek je dle (1.42) a (1.43)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^u(u, v) &= (2, 0, -3v^2 + 2v - 1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\
\mathbf{P}^v(u, v) &= (0, 2, -6uv + 2u + 8v - 4), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.11), dostaneme tečné vektory v rozích plátu

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^u(0, 0) &= (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(0, 1) = (2, 0, -2), \quad \mathbf{P}^u(1, 0) = (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(1, 1) = (2, 0, -2), \\
\mathbf{P}^v(0, 0) &= (0, 2, -4), \quad \mathbf{P}^v(0, 1) = (0, 2, 4), \quad \mathbf{P}^v(1, 0) = (0, 2, -2), \quad \mathbf{P}^v(1, 1) = (0, 2, 0).
\end{aligned}$$

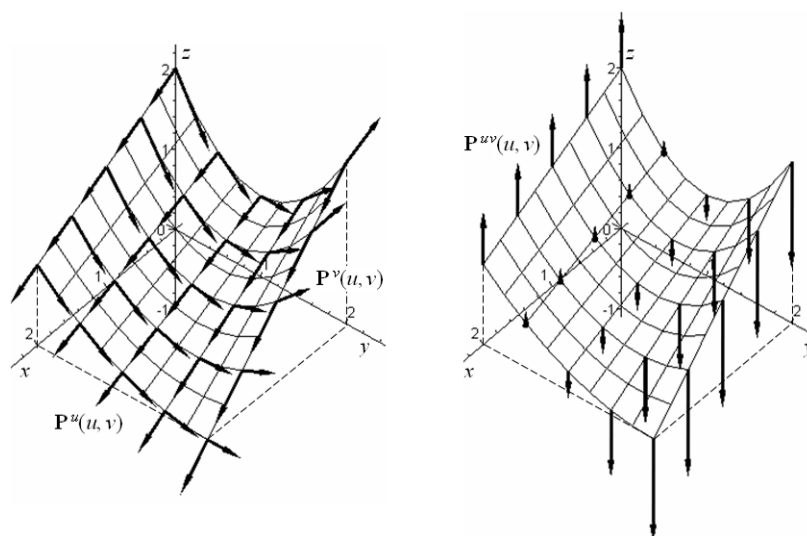
Vektorová rovnice zkrutu je dle (1.49)

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, -6v + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \tag{3.12}$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.12), dostaneme zkruty v rozích plátu

$$\mathbf{P}^{uv}(0, 0) = (0, 0, 2), \quad \mathbf{P}^{uv}(0, 1) = (0, 0, -4), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 0) = (0, 0, 2), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 1) = (0, 0, -4).$$

Na obr. 3.4 a) jsou nakresleny tečné vektory (3.11) parametrických křivek a na obr. 3.4 b) jsou nakresleny zkruty (3.12) v několika bodech přímkové přechodové plochy (3.10). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena (délka tečných vektorů na $1/5$, délka zkrutů na $1/3$ své skutečné délky). \square



a) Tečné vektory parametrických křivek

b) Zkruty

Obrázek 3.4: Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru v

3.2.1 Vlastnosti přímkové přechodové plochy

Přímo z definice 3.1, ale i z obrázků přímkových přechodových ploch v příkladech 3.1 a 3.2 vyplývají následující geometrické vlastnosti přímkové přechodové plochy:

- Přímková přechodová plocha interpoluje zadané okraje.
- Okraje ve směru v přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru u jsou úsečky. Okraje ve směru u přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru v jsou úsečky.

3.2.2 Plátování – pláty z přímkové přechodové plochy

S ohledem na vlastnosti přímkové přechodové plochy je zřejmé, že pomocí plátů z přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru u lze zajistit pouze C^0 spojitě plátování ve směru v . Spojitost plátování ve směru u je závislá na typu souřadnicových funkcí daných okrajů ve směru u . Naopak, pomocí plátů z přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru v lze zajistit pouze C^0 spojitě plátování ve směru u . Spojitost plátování ve směru v je závislá na typu souřadnicových funkcí daných okrajů ve směru v .

■ Cvičení 3.1 Jsou dány okraje

$$\mathbf{P}_0(u) = (3u, 0, 7u^3 - 12u^2 + 3u + 2), \quad \mathbf{P}_1(u) = (3u, 3, 3u^3 - 9u^2 + 6u), \quad u \in [0, 1].$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici přímkové přechodové plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

■ Cvičení 3.2 Jsou dány okraje

$$\mathbf{P}_0(v) = (0, 3v, -2v^3 + 2), \quad \mathbf{P}_1(v) = (3, 3v, -3v^3 + 3v^2), \quad v \in [0, 1].$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici přímkové přechodové plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

3.2.3 Přímková přechodová plocha v Rhinu

Před vytvořením přímkové přechodové plochy je třeba mít nakreslené dva okraje. Vzhledem k tomu, že směr parametru v přímkové přechodové plochy v Rhinu je vždy podél zadaných okrajů a směr u je vždy podél úseček, lze vytvořit pouze přímkovou přechodovou plochu určenou okraji ve směru v . Pokud si ale uvědomíme, že okraji mohou být v prostoru libovolně umístěné dvě rovinné nebo prostorové křivky, viz příklad 3.3, nejsme touto skutečností při modelování přímkových přechodových ploch nijak omezeni.

Přímková přechodová plocha – Příkaz: *Plocha ze 2, 3 nebo 4 hraničních křivek* → Vyberte 2, 3 nebo 4 hraniční křivky: kliknout na oba okraje → Enter. Nakreslí se přímková přechodová plocha určená danými okraji.

Poznámka: Orientace vytvořené přímkové přechodové plochy je dána systémem. Snadno ji zjistíme postupem uvedeným pod heslem **Bod plochy** $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, viz část 1.4.1, když zvolíme $\alpha \neq \beta$, viz příklad 3.3.

■ **Příklad 3.3 Přímková přechodová plocha v Rhinu.** Jsou dány řídicí polygony dvou prostorových Bézierových kubik $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{P}_1(v)$, $v \in [0, 1]$, které tvoří okraje přímkové přechodové plochy.

V Rhinu nakreslete obě Bézierovy kubiky a de Casteljau algoritmem¹ na nich sestrojte body pro $v = \frac{1}{2}$. Vytvořte přímkovou přechodovou plochu. Na přímkové přechodové ploše nakreslete body pro hodnoty parametrů $u = 0$, $v = 0, 0.2, \dots, 1$ a $v = 0$, $u = 0, 0.2, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky.

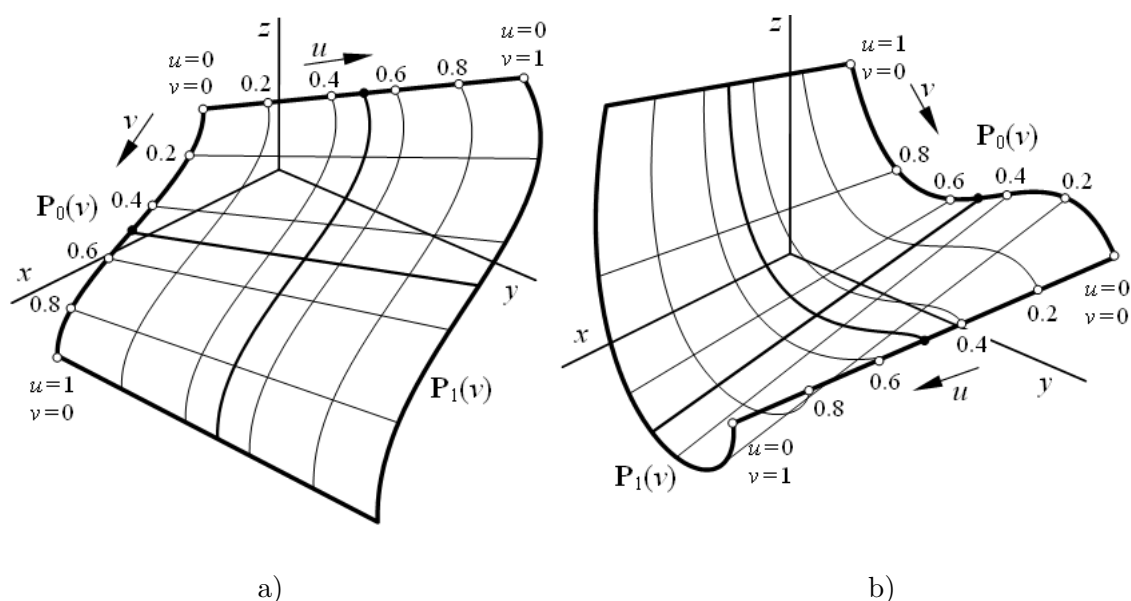
Řešení proved'te pro následující varianty řídicích polygonů Bézierových kubik:

- a) $\mathbf{P}_0(v)$: $\mathbf{V}_0 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{V}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{V}_2 = (3, 0, 0)$, $\mathbf{V}_3 = (4, 1, 0)$,
 $\mathbf{P}_1(v)$: $\mathbf{W}_0 = (0, 3, 2)$, $\mathbf{W}_1 = (0, 4, 1)$, $\mathbf{W}_2 = (2, 3, 0)$, $\mathbf{W}_3 = (3, 4, -1)$,
 b) $\mathbf{P}_0(v)$: $\mathbf{V}_0 = (-1, 4, 1)$, $\mathbf{V}_1 = (-2, 2, 2)$, $\mathbf{V}_2 = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{V}_3 = (-1, 0, 2)$,
 $\mathbf{P}_1(v)$: $\mathbf{W}_0 = (3, 0, 3)$, $\mathbf{W}_1 = (5, 1, 0)$, $\mathbf{W}_2 = (4, 3, -1)$, $\mathbf{W}_3 = (2, 1, -1)$.

Řešení. Na obr. 3.5 a) je zobrazena přímková přechodová plocha určená prostorovými Bézierovými kubikami ze zadání a), na obr. 3.5 b) je zobrazena přímková přechodová plocha určená prostorovými Bézierovými kubikami ze zadání b). Parametrické křivky pro $u, v = \frac{1}{2}$, které se v Rhinu zobrazují automaticky, jsou vyznačeny středně tlustou čarou, body na okrajích sestrojené de Casteljau algoritmem jsou vyznačeny symbolem •.

Řídicí polygony okrajových Bézierových kubik ani konstrukce pomocí de Casteljau algoritmu není z důvodů zachování čitelnosti obrázku nakreslena.

¹De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na prostorové Bézierově křivce probíhá naprosto stejně jako na rovinné Bézierově křivce.



Obrázek 3.5: Přímková přechodová plocha v Rhinu

□

■ **Cvičení 3.3** K plátu z přímkové přechodové plochy podle zadání a) i b) v příkladu 3.3 připojte dva další pláty z přímkové přechodové plochy, které budou mít společný vždy jeden okraj ve směru u ; okraje ve směru v jsou Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů těchto Bézierových kubik tak, abyste zajistili

- C^0 spojitě napojení podél obou okrajů ve směru v ,
- C^1 spojitě napojení podél obou okrajů ve směru v ,
- C^2 spojitě napojení podél obou okrajů ve směru v .

Souřadnice řídicích bodů Bézierových kubik, jejichž poloha požadovanou spojitost neovlivní, vhodně zvolte. Nakreslete parametrické v -křivky připojených plátů (se zapnutým režimem *Uchopování koncových bodů*). Požadovanou spojitost ověřte grafem křivosti parametrických křivek a zebřími pruhy.

3.3 Plocha hyperbolického paraboloidu

Plocha hyperbolického paraboloidu je interpolační plocha tvořená jediným plátem, který je lineární interpolací mezi čtyřmi zadanými body – rohy plátu.

■ **Definice 3.2 – Plocha hyperbolického paraboloidu.** Nechť jsou dány rohy plátu $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{0,1}$, $\mathbf{P}_{1,0}$ a $\mathbf{P}_{1,1}$. Potom je plocha hyperbolického paraboloidu tvořena jediným plátem, jehož vektorová rovnice je následující

$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u)(1 - v)\mathbf{P}_{0,0} + (1 - u)v\mathbf{P}_{0,1} + u(1 - v)\mathbf{P}_{1,0} + uv\mathbf{P}_{1,1}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.13)$$

Bázové funkce jsou dvouparametrické polynomy, které dostaneme vynásobením jednoparametrických lineárních polynomů. □

■ **Příklad 3.4 – Plocha hyperbolického paraboloidu.** Jsou dány rohy plátu $\mathbf{P}_{0,0} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{P}_{0,1} = (0, 2, 2)$, $\mathbf{P}_{1,0} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{P}_{1,1} = (2, 2, 0)$.

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici plochy hyperbolického paraboloidu $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Souřadnicové funkce $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ plochy $\mathbf{P}(u, v)$ dostaneme, dosadíme-li do (3.13) příslušné souřadnice zadaných rohů:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= (1-u)(1-v) \cdot 0 + (1-u)v \cdot 0 + u(1-v) \cdot 2 + uv \cdot 2 = 2u, \\y(u, v) &= (1-u)(1-v) \cdot 0 + (1-u)v \cdot 2 + u(1-v) \cdot 0 + uv \cdot 2 = 2v, \\z(u, v) &= (1-u)(1-v) \cdot 2 + (1-u)v \cdot 2 + u(1-v) \cdot 1 + uv \cdot 0 = \\&= -uv - u + 2, \quad (u, v) \in [0, 1]^2.\end{aligned}$$

Vektorová rovnice plochy hyperbolického paraboloidu je

$$\mathbf{P}(u, v) = (2u, 2v, -uv - u + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.14)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.14), dostaneme rohy plátu

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0, 0) &= (0, 0, 2) \quad \dots \text{zadaný roh } \mathbf{P}_{0,0}, \\ \mathbf{P}(0, 1) &= (0, 2, 2) \quad \dots \text{zadaný roh } \mathbf{P}_{0,1}, \\ \mathbf{P}(1, 0) &= (2, 0, 1) \quad \dots \text{zadaný roh } \mathbf{P}_{1,0}, \\ \mathbf{P}(1, 1) &= (2, 2, 0) \quad \dots \text{zadaný roh } \mathbf{P}_{1,1}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$ do (3.14), dostaneme okraje plátu

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u, 0) &= (2u, 0, -u + 2), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \quad \text{úsečka v rovině } y = 0, \\ \mathbf{P}(u, 1) &= (2u, 2, -2u + 2), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \quad \text{úsečka v rovině } y = 2, \\ \mathbf{P}(0, v) &= (0, 2v, 2), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \quad \text{úsečka v rovině } x = 0, \\ \mathbf{P}(1, v) &= (2, 2v, -v + 1), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \quad \text{úsečka v rovině } x = 2.\end{aligned}$$

Na obr. 3.6 a) jsou nakresleny zadané rohy plátu, výsledná plocha hyperbolického paraboloidu (3.14) je nakreslena na obr. 3.6 b).

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek je dle (1.42) a (1.43)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(u, v) &= (2, 0, -v - 1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\ \mathbf{P}^v(u, v) &= (0, 2, -u), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.\end{aligned} \quad (3.15)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.15), dostaneme tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu

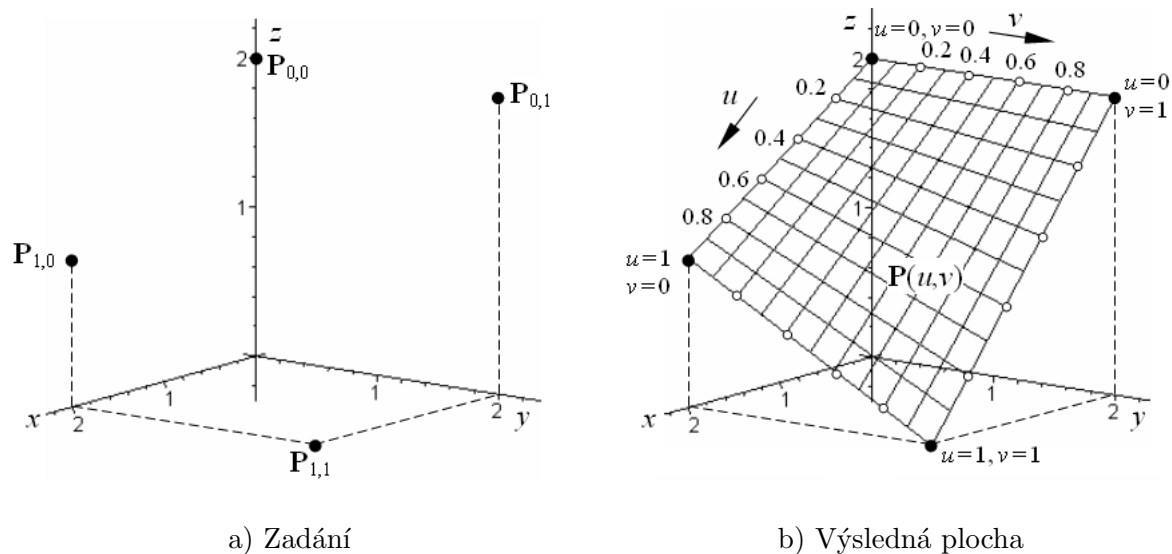
$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(0, 0) &= (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(0, 1) = (2, 0, -2), \quad \mathbf{P}^u(1, 0) = (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(1, 1) = (2, 0, -2), \\ \mathbf{P}^v(0, 0) &= (0, 2, 0), \quad \mathbf{P}^v(0, 1) = (0, 2, 0), \quad \mathbf{P}^v(1, 0) = (0, 2, -1), \quad \mathbf{P}^v(1, 1) = (0, 2, -1).\end{aligned}$$

Vektorová rovnice zkrutu je dle (1.49)

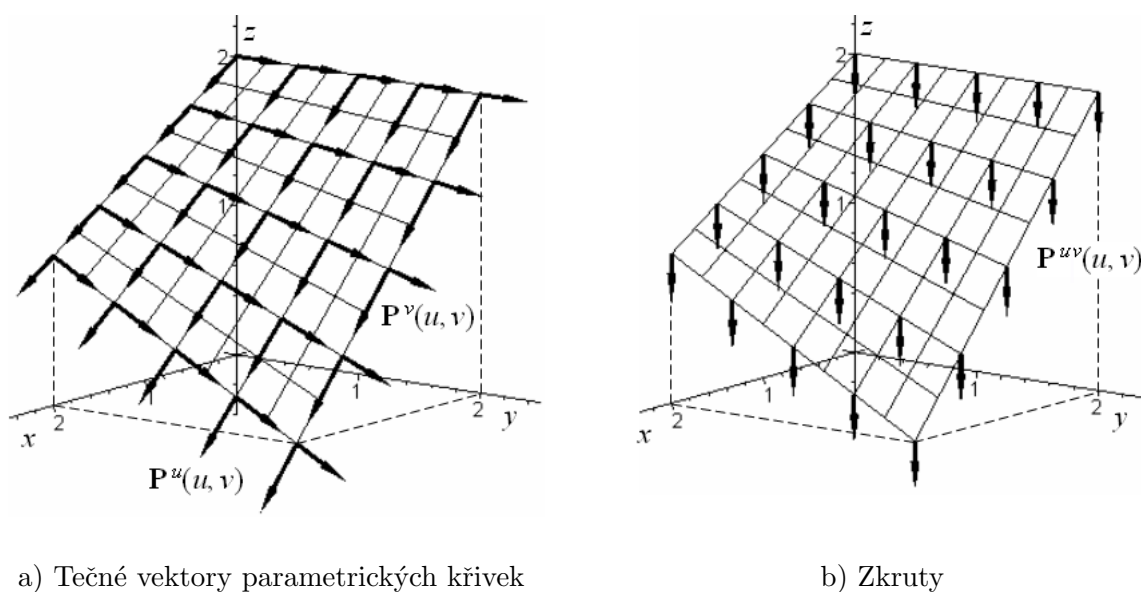
$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, -1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.16)$$

Podle (3.16) je zkrut konstantní v celém plátu, tedy i v jeho rozích. Konstantní zkrut znamená, že odchylka plochy od tečné roviny je ve všech bodech plochy stejná.

Na obr. 3.7 a) jsou nakresleny tečné vektory (3.15) parametrických křivek a na obr. 3.7 b) jsou nakresleny zkruty (3.16) v několika bodech plochy hyperbolického paraboloidu (3.14). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena (délka tečných vektorů na 1/5, délka zkrutů na 1/3 své skutečné délky).



Obrázek 3.6: Plocha hyperbolického paraboloidu



Obrázek 3.7: Plocha hyperbolického paraboloidu

□

3.3.1 Vlastnosti plochy hyperbolického paraboloidu

Z principu vytvoření plochy hyperbolického paraboloidu jako lineární interpolace mezi čtyřmi body vyplývají následující geometrické vlastnosti:

- Plocha hyperbolického paraboloidu interpoluje zadané rohy plátu.
- Parametrické křivky obou soustav jsou úsečky, proto jsou i všechny čtyři okraje úsečky.
- Plocha hyperbolického paraboloidu je totožná s přímkovou přechodovou plochou, jsou-li zadané okraje přímkové přechodové plochy úsečky.

3.3.2 Plátování – pláty z plochy hyperbolického paraboloidu

Plocha hyperbolického paraboloidu se nehodí k vytváření segmentovaných ploch složitějšího tvaru zadaných sítí definičních bodů, neboť v obou směrech umožňuje pouze C^0 spojitě plátování.

■ **Cvičení 3.4** Jsou dány rohy plátu

$$\mathbf{P}_{0,0} = (0, 0, 2), \mathbf{P}_{0,1} = (0, 3, 0), \mathbf{P}_{1,0} = (3, 0, 0), \mathbf{P}_{1,1} = (3, 3, 0).$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici plochy hyperbolického paraboloidu $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

3.3.3 Plocha hyperbolického paraboloidu v Rhinu

Plocha hyperbolického paraboloidu – Příkaz: *Plocha ze 3 nebo 4 rohových bodů* → První roh plochy: postupně zadat všechny 4 rohy → Enter. Nakreslí se plocha hyperbolického paraboloidu.

Poznámky:

1) Rohy je třeba zadat např. v pořadí $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{0,1}$, $\mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{P}_{1,0}$ (tedy po obvodu čtyřúhelníka), aby nevznikla překroucená plocha.

2) Směr a orientace parametrů na ploše je určena systémem. Tyto informace zjistíme postupem uvedeným pod heslem **Bod plochy** $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, viz část 1.4.1, když zvolíme $\alpha \neq \beta$.

■ **Cvičení 3.5** V Rhinu vytvořte plochy hyperbolického paraboloidu z příkladu 3.4 a ze cvičení 3.4.

Na ploše hyperbolického paraboloidu nakreslete body pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.2, \dots, 1$ a $v = 0, u = 0, 0.2, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky.

3.4 Coonsova bilineární plocha

Coonsova bilineární plocha je interpolační plocha tvořená jediným plátem, který interpoluje čtyři zadané okraje se společnými krajními body v rozích plátu. S ohledem na tuto podmínku považujeme rohy plátu za součást zadání, i když jejich souřadnice většinou vypočteme dosazením krajních hodnot oboru parametrizace do zadaných vektorových rovnic okrajových křivek.

■ **Definice 3.3 – Coonsova bilineární plocha.** Nechtě jsou dány okraje $\mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{P}_1(u)$, $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$, které mají společné krajní body v rozích plátu $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{0,1}$, $\mathbf{P}_{1,0}$, $\mathbf{P}_{1,1}$. Vektorová rovnice Coonsovy bilineární plochy je

$$\mathbf{P}(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_0(v) & -\mathbf{P}_{0,1} \\ \mathbf{P}_0(u) & \mathbf{0} & \mathbf{P}_1(u) \\ -\mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_1(v) & -\mathbf{P}_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.17)$$

■ **Příklad 3.5 – Coonsova bilineární plocha.** Jsou dány okraje:

$$\mathbf{P}_0(u) = (2u, 0, -u^2 + 2), \mathbf{P}_1(u) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2), \quad u \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}_0(v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), \mathbf{P}_1(v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1), \quad v \in [0, 1].$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Nejprve vypočteme rohy plátu tak, že buď do vektorových rovnic okrajů $\mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{P}_1(u)$ dosadíme $u = 0, 1$ nebo do vektorových rovnic okrajů $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$ dosadíme $v = 0, 1$. V obou případech dostaneme následující rohy plátu:

$$\mathbf{P}_{0,0} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{P}_{0,1} = (0, 2, 2), \quad \mathbf{P}_{1,0} = (2, 0, 1), \quad \mathbf{P}_{1,1} = (2, 2, 0),$$

které jsou součástí vstupních dat Coonsovy bilineární plochy. Výpočet souřadnic rohů plátu můžeme považovat za kontrolu, zda zadané okraje skutečně mají společné krajní body v rozích plátu.

Souřadnicové funkce $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ plochy $\mathbf{P}(u, v)$ dostaneme, dosadíme-li do (3.17) příslušné souřadnice vypočtených rohů a příslušné souřadnicové funkce zadaných okrajů:

$$x(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2u & 0 & 2u \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = 2u,$$

$$y(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2v & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2v & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = 2v,$$

$$\begin{aligned} z(u, v) &= (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4v^2 - 4v + 2 & -2 \\ -u^2 + 2 & 0 & 2u^2 - 4u + 2 \\ -1 & v^2 - 2v + 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = \\ &= 3u^2v - u^2 - 3uv^2 - uv + 4v^2 - 4v + 2, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Coonsovy bilineární plochy tedy je

$$\mathbf{P}(u, v) = (2u, 2v, 3u^2v - u^2 - 3uv^2 - uv + 4v^2 - 4v + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.18)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.18), dostaneme rohy plátu

$$\mathbf{P}(0, 0) = (0, 0, 2) \quad \dots \quad \text{roh } \mathbf{P}_{0,0},$$

$$\mathbf{P}(0, 1) = (0, 2, 2) \quad \dots \quad \text{roh } \mathbf{P}_{0,1},$$

$$\mathbf{P}(1, 0) = (2, 0, 1) \quad \dots \quad \text{roh } \mathbf{P}_{1,0},$$

$$\mathbf{P}(1, 1) = (2, 2, 0) \quad \dots \quad \text{roh } \mathbf{P}_{1,1}.$$

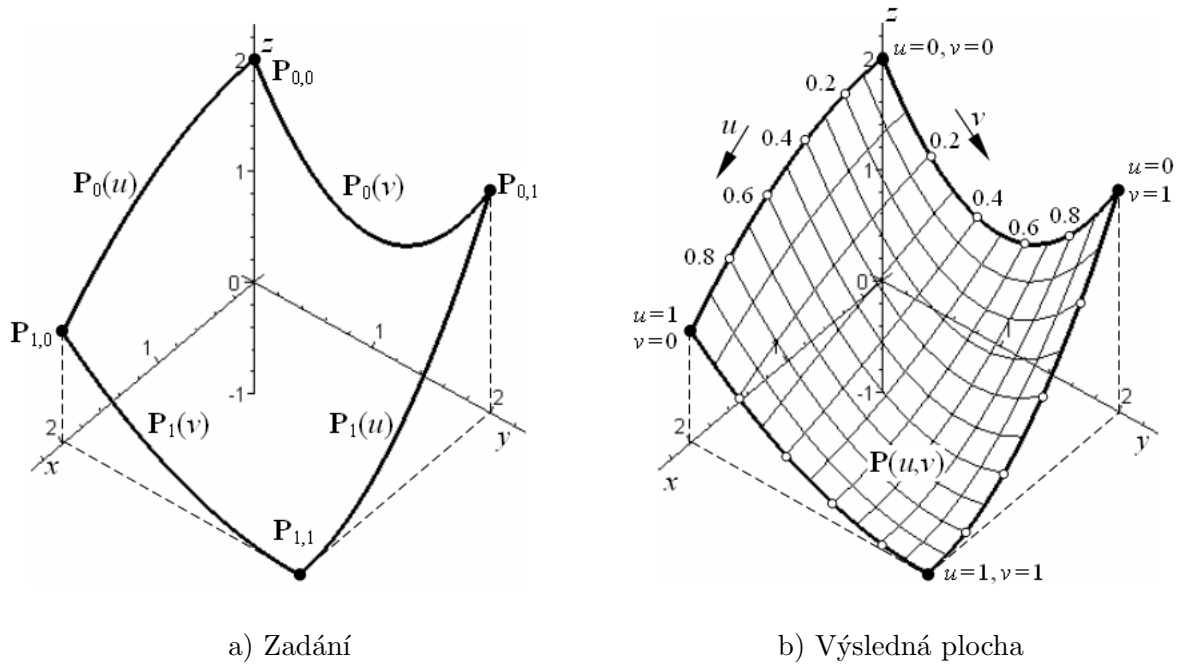
Dosadíme-li $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$ do (3.18), dostaneme okraje plátu

$$\mathbf{P}(u, 0) = (2u, 0, -u^2 + 2), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_0(u),$$

$$\mathbf{P}(u, 1) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_1(u),$$

$$\mathbf{P}(0, v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_0(v),$$

$$\mathbf{P}(1, v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{zadaný okraj } \mathbf{P}_1(v).$$



Obrázek 3.8: Coonsova bilineární plocha

Na obr. 3.8 a) jsou nakresleny zadané okraje a rohy plátu, výsledná Coonsova bilineární plocha je nakreslena na obr. 3.8 b).

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek je dle (1.42) a (1.43)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(u, v) &= (2, 0, 6uv - 2u - 3v^2 - v), \quad (u, v) \in [0, 1], \\ \mathbf{P}^v(u, v) &= (0, 2, 3u^2 - 6uv - u + 8v - 4), \quad (u, v) \in [0, 1].\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.19), dostaneme tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(0, 0) &= (2, 0, 0), \quad \mathbf{P}^u(0, 1) = (2, 0, -4), \quad \mathbf{P}^u(1, 0) = (2, 0, -2), \quad \mathbf{P}^u(1, 1) = (2, 0, 0), \\ \mathbf{P}^v(0, 0) &= (0, 2, -4), \quad \mathbf{P}^v(0, 1) = (0, 2, 4), \quad \mathbf{P}^v(1, 0) = (0, 2, -2), \quad \mathbf{P}^v(1, 1) = (0, 2, 0).\end{aligned}$$

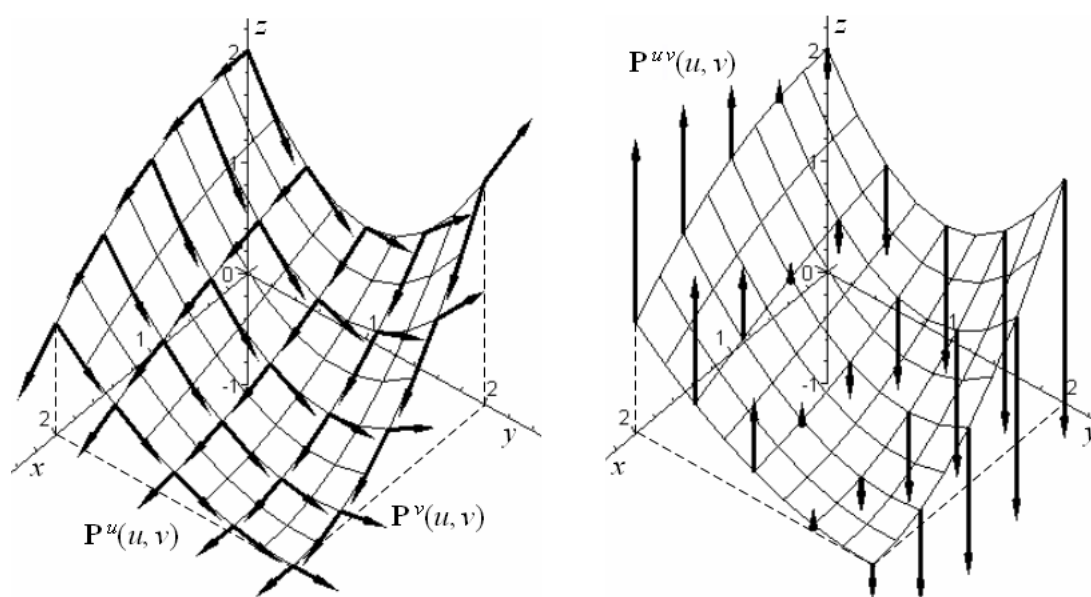
Vektorová rovnice zkrutu je dle (1.49)

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, 6u - 6v - 1), \quad (u, v) \in [0, 1].\quad (3.20)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.20), dostaneme zkruty v rozích plátu

$$\mathbf{P}^{uv}(0, 0) = (0, 0, -1), \quad \mathbf{P}^{uv}(0, 1) = (0, 0, -7), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 0) = (0, 0, 5), \quad \mathbf{P}^{uv}(1, 1) = (0, 0, -1).$$

Na obr. 3.9 a) jsou nakresleny tečné vektory (3.19) parametrických křivek a na obr. 3.9 b) jsou nakresleny zkruty (3.20) v několika bodech Coonsovy bilineární plochy (3.18). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena (délka tečných vektorů na $1/5$, délka zkrutů na $1/3$ své skutečné délky).



a) Tečné vektory parametrických křivek

b) Zkruty

Obrázek 3.9: Coonsova bilineární plocha

□

3.4.1 Vlastnosti Coonsovy bilineární plochy

Následující geometrické vlastnosti Coonsovy bilineární plochy vyplývají z definice 3.3 a jsou patrné z příkladů 3.1, 3.2, 3.4 a 3.5, viz také část 3.4.2.

- Coonsova bilineární plocha interpoluje všechny čtyři zadané okraje.
- Coonsova bilineární plocha interpoluje rohy plátu.

Při speciálních okrajích Coonsovy bilineární plochy je zřejmé, že:

- Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru u je totožná s Coonsovou bilineární plochou, jejíž zadané okraje ve směru v jsou úsečky.
- Přímková přechodová plocha určená okraji ve směru v je totožná s Coonsovou bilineární plochou, jejíž zadané okraje ve směru u jsou úsečky.
- Plocha hyperbolického paraboloidu je totožná s Coonsovou bilineární plochou, jejíž všechny čtyři zadané okraje jsou úsečky.

3.4.2 Odvození vektorové rovnice Coonsovy bilineární plochy

Poněkud zvláštní tvar mapy Coonsovy bilineární plochy i bázových funkcí v definici 3.3 bude zřejmý, pokud si uvědomíme, že Coonsova bilineární plocha je zadána nejen dvěma dvojicemi protilehlých okrajů, kterými jsou určeny dvě přímkové přechodové plochy, ale ještě rohy plátu, kterými je určena plocha hyperbolického paraboloidu. Označme

$$\mathbf{S}(u, v) = (1 - v)\mathbf{P}_0(u) + v\mathbf{P}_1(u), \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

přímkovou přechodovou plochu určenou okraji Coonsovy bilineární plochy ve směru u ,

$$\mathbf{T}(u, v) = (1 - u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

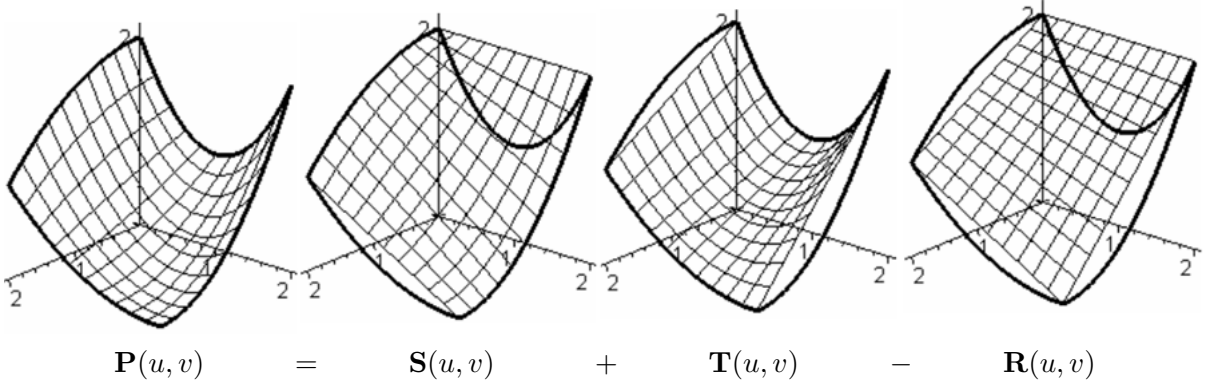
přímkovou přechodovou plochu určenou okraji Coonsovy bilineární plochy ve směru v a

$$\mathbf{R}(u, v) = (1 - u)(1 - v)\mathbf{P}_{0,0} + (1 - u)v\mathbf{P}_{0,1} + u(1 - v)\mathbf{P}_{1,0} + uv\mathbf{P}_{1,1}, \quad (u, v) \in [0, 1]^2$$

plochu hyperbolického paraboloidu určenou rohy Coonsovy bilineární plochy.

Sečteme-li obě přímkové přechodové plochy $\mathbf{S}(u, v) + \mathbf{T}(u, v)$, viz obr. 3.10, dostaneme plochu, která kromě Coonsovy bilineární plochy určené okraji obsahuje navíc plochu hyperbolického paraboloidu $\mathbf{R}(u, v)$ určenou rohy plátu. Důvodem je „zdvojení“ rohů, ke kterému dochází proto, že zadané okraje mají společné body v rozích a obor parametrizace každého z okrajů je $[0, 1]$, tj. včetně rohů. Coonsovu bilineární plochu $\mathbf{P}(u, v)$ tedy dostaneme, pokud od součtu přímkových přechodových ploch nadbytečnou plochu hyperbolického paraboloidu určenou zdvojenými rohy odečteme:

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{S}(u, v) + \mathbf{T}(u, v) - \mathbf{R}(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.21)$$



Obrázek 3.10: K odvození vektorové rovnice Coonsovy bilineární plochy

Ověření provedeme jednoduše – vynásobíme matice v rov. (3.17) a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= \underbrace{(1 - v)\mathbf{P}_0(u) + v\mathbf{P}_1(u)}_{\mathbf{S}(u, v)} + \underbrace{(1 - u)\mathbf{P}_0(v) + u\mathbf{P}_1(v)}_{\mathbf{T}(u, v)} - \\ &\quad - \underbrace{[(1 - u)(1 - v)\mathbf{P}_{0,0} + (1 - u)v\mathbf{P}_{0,1} + u(1 - v)\mathbf{P}_{1,0} + uv\mathbf{P}_{1,1}]}_{\mathbf{R}(u, v)} = \\ &= \mathbf{S}(u, v) + \mathbf{T}(u, v) - \mathbf{R}(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

3.4.3 Plátování – pláty z Coonsovy bilineární plochy

Coonsova bilineární plocha se k plátování příliš nehodí, neboť automaticky zajišťuje pouze C^0 spojitost podél napojovaného okraje, a to i v případě, kdy souřadnicové funkce všech okrajových křivek umožňují spojitost vyšší, viz příklad 3.7. Přesto jsou pláty z Coonsovy bilineární plochy z praktického hlediska nesmírně důležité, neboť situace, kdy máme zadané právě okrajové křivky (nebo o nich máme dostatek informací, abychom je mohli matematicky modelovat), je velmi častá. V dalším textu se setkáme s řadou příkladů využití plátů z Coonsovy bilineární plochy určené speciálními okraji k vytvoření segmentované C^2 spojitě plochy složitějšího obecného tvaru.

- **Cvičení 3.6** Podle vstupních dat určete typ zadané plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, a nalezněte její parametrické (případně explicitní) vyjádření a vektorovou rovnici. Určete parametrické křivky $\mathbf{P}(u, \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, v)$ a bod $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135$, $q = 2\sqrt{2} : 3$, jednotka = 6 cm) načrtněte okrajové křivky $\mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{P}_1(u)$, $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$, parametrické křivky $\mathbf{P}(u, \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, v)$ a zobrazte bod $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Řešení proveďte pro následující varianty zadaných okrajů:

- | | |
|--|--|
| a) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, 1 - u)$, $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, 0)$, | e) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, 1 - u^2)$, |
| $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, 1 - v)$, $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, 0)$, | $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, 0)$, |
| b) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, 1 - u^2)$, $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, 0)$, | $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, 1 - v^2)$, |
| $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, 1 - v)$, $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, 0)$, | $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, 0)$, |
| c) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, 1 - u)$, $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, 0)$, | f) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, u^2)$, |
| $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, 1 - v^2)$, $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, 0)$, | $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, u^2 - 2u + 1)$, |
| d) $\mathbf{P}_0(u) = (u, 0, 1)$, $\mathbf{P}_1(u) = (u, 1, 0)$, | $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, v^2)$, |
| $\mathbf{P}_0(v) = (0, v, 1 - v^2)$, $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, v^2 - 2v + 1)$, | $\mathbf{P}_1(v) = (1, v, v^2 - 2v + 1)$. |

- **Cvičení 3.7** Využijte zadání i řešení příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 a nalezněte vektorovou rovnici Coonsovy bilineární plochy podle (3.21). Výsledek ověřte nalezením vektorové rovnice Coonsovy bilineární plochy podle definice (3.3).

3.4.4 Coonsova bilineární plocha v Rhinu

Před vytvořením Coonsovy bilineární plochy je třeba mít nakreslené čtyři okraje, kterými mohou být i prostorové křivky. Okraje musí mít společné krajní body v rozích budoucího plátu.

Coonsova bilineární plocha – Příkaz: *Plocha ze 2, 3 nebo 4 hraničních křivek* → Vyberte 2, 3 nebo 4 křivky: kliknout na okraje v tomto pořadí: $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$, $\mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{P}_1(u)$ → Enter. Vytvoří se Coonsova bilineární plocha určená zadanými okraji.

Poznámky:

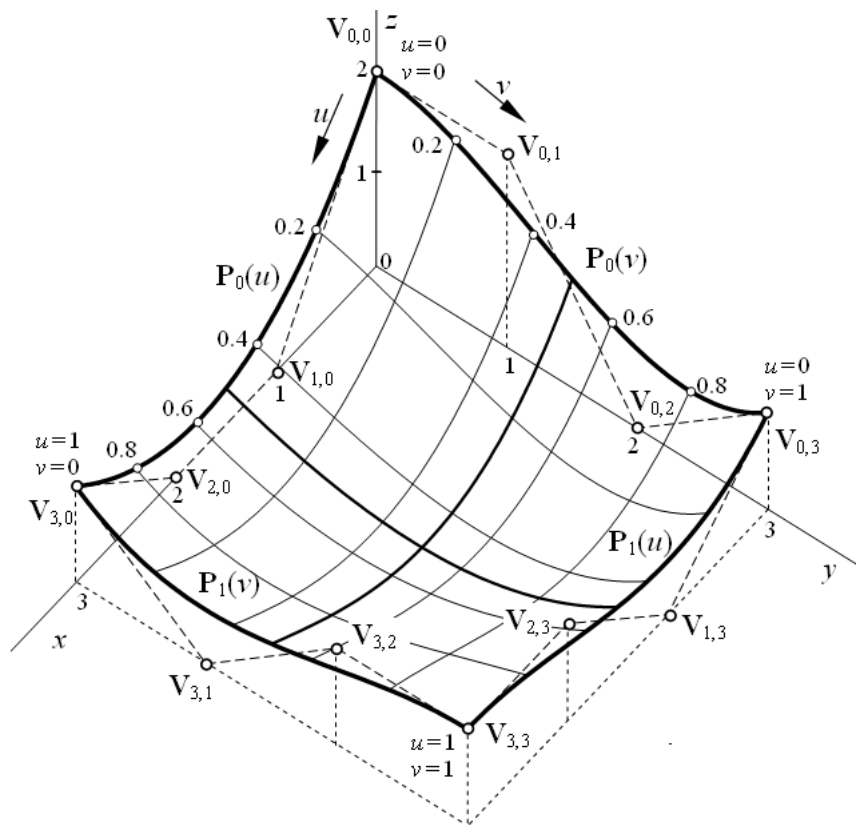
- 1) Pokud dodržíme pořadí zadávaných okrajů, má vytvořená plocha směr i orientaci obou parametrů podle očekávání, viz příklad 3.6.
- 2) Coonsova bilineární plocha se vytvoří i tehdy, pokud zadáme okraje v libovolném pořadí. V takovém případě je však směr i orientace parametrů u a v na ploše určena systémem. Tyto informace lze zjistit postupem uvedeným pod heslem **Bod plochy** $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, viz část 1.4.1, když zvolíme $\alpha \neq \beta$.

- **Příklad 3.6 Coonsova bilineární plocha v Rhinu.** Coonsova bilineární plocha je dána řídicími polygony okrajových Bézierových kubik:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(u): \quad & \mathbf{V}_{0,0} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{V}_{1,0} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{V}_{2,0} = (2, 0, 0), \quad \mathbf{V}_{3,0} = (3, 0, 1), \\ \mathbf{P}_1(u): \quad & \mathbf{V}_{0,3} = (0, 3, 1), \quad \mathbf{V}_{1,3} = (1, 3, 0), \quad \mathbf{V}_{2,3} = (2, 3, 1), \quad \mathbf{V}_{3,3} = (3, 3, 1), \\ \mathbf{P}_0(v): \quad & \mathbf{V}_{0,0} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{V}_{0,1} = (0, 1, 2), \quad \mathbf{V}_{0,2} = (0, 2, 0), \quad \mathbf{V}_{0,3} = (0, 3, 1), \\ \mathbf{P}_1(v): \quad & \mathbf{V}_{3,0} = (3, 0, 1), \quad \mathbf{V}_{3,1} = (3, 1, 0), \quad \mathbf{V}_{3,2} = (3, 2, 1), \quad \mathbf{V}_{3,3} = (3, 3, 1). \end{aligned}$$

V Rhinu nakreslete jednotlivé okraje a vytvořte Coonsovu bilineární plochu, nakreslete body pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.2, \dots, 1$ a $v = 0, u = 0, 0.2, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky.

Řešení. Na obr. 3.11 je zobrazena Coonsova bilineární plocha. Parametrické křivky pro $u, v = \frac{1}{2}$, které se zobrazují automaticky, jsou vyznačeny středně tlustou čarou.



Obrázek 3.11: Coonova bilineární plocha určená okrajovými Bézierovými kubikami \square

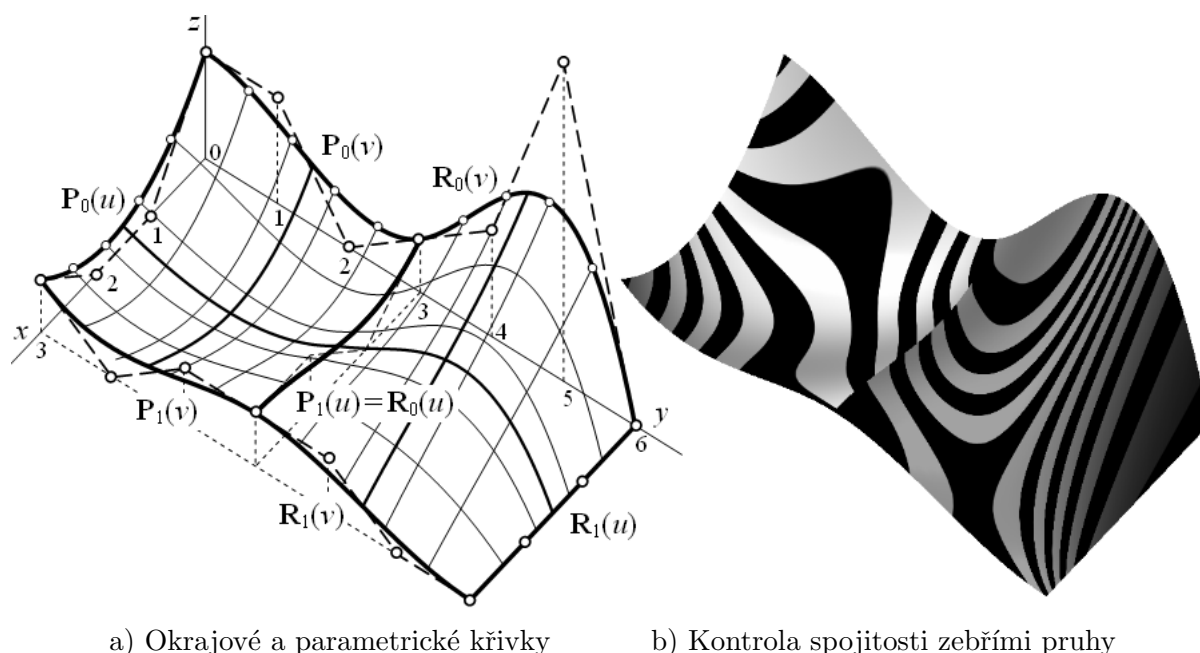
- **Příklad 3.7 – Plátování – pláty z Coonovy bilineární plochy.** K plátu z Coonovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, z příkladu 3.6 připojte v kladném směru osy y další plát z Coonovy bilineární plochy $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{R}_0(v)$ a $\mathbf{R}_1(v)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost napojení těchto okrajů. Společný okraj obou plátů je $\mathbf{R}_0(u) = \mathbf{P}_1(u)$, volný okraj $\mathbf{R}_1(u)$ plátu $\mathbf{R}(u, v)$ je úsečka v rovině (x, y) .

Na připojeném plátu nakreslete navazující parametrické v -křivky (se zapnutým režimem *Uchopování koncových bodů*), body pro hodnoty parametrů $u = 0$, $v = 0, 0.2, \dots, 1$ a parametrické u -křivky procházející těmito body. Analyzujte spojitost napojení plátů zebrými pruhy a grafy křivosti navazujících parametrických v -křivek i okrajů plátů.

Jaká je spojitost napojení plátů podél společného okraje $\mathbf{P}_1(u) = \mathbf{R}_0(u)$?

Řešení. Na obr. 3.12 a) jsou zobrazeny oba pláty včetně řídicích polygonů okrajových křivek, nakreslených bodů pro zadané hodnoty parametrů a jimi procházejících parametrických křivek. I když jsou navazující okraje $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{R}_0(v)$ a $\mathbf{P}_1(v)$, $\mathbf{R}_1(v)$ napojeny s C^2 spojitostí, je dosažená spojitost napojených plátů podél společného okraje $\mathbf{P}_1(u) = \mathbf{R}_0(u)$ pouze nultého řádu, jak je patrné z průběhu zebrých pruhů na obr. 3.12 b). Grafy křivosti okrajových a parametrických křivek na plochách nejsou zobrazeny.

Neschopnost zajistit C^2 spojitost podél společného okraje dvou plátů z Coonovy bilineární plochy, se kterou jsme se setkali v příkladu 3.7, lze skutečně považovat za velice závažnou překážku při vytváření složitých ploch obecného tvaru, u kterých je zmíněná spojitost vyžadována. Určitým možností odstranění tohoto nedostatku se budeme věnovat v části 3.5.5.



a) Okrajové a parametrické křivky

b) Kontrola spojitosti zebřími pruhy

Obrázek 3.12: Plátování pláty z Coonsovy bilineární plochy

□

Pokud si ale uvědomíme, že samotné pláty z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$ i $\mathbf{R}(u, v)$ určené okrajovými Bézierovými kubikami jsou C^2 spojité v celém oboru parametrizace $(u, v) \in [0, 1]^2$ jak lze usuzovat z tvaru zebřích pruhů (a matematicky snadno ověřit), přímo se nabízí následující řešení: Spojíme-li Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_0(v)$, $v \in [0, 1]$, a $\mathbf{R}_0(v)$, $v \in [0, 1]$, do jediné křivky $\mathbf{S}_0(v)$, $v \in [0, 1]$, můžeme tuto *segmentovanou* křivku považovat za jeden z okrajů nového plátu z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Rovněž tak spojíme-li Bézierovy kubiky $\mathbf{P}_1(v)$, $v \in [0, 1]$, a $\mathbf{R}_1(v)$, $v \in [0, 1]$, do jediné křivky $\mathbf{S}_1(v)$, $v \in [0, 1]$, můžeme tuto *segmentovanou* křivku považovat za další z okrajů plátu $\mathbf{S}(u, v)$. Zbývající dva okraje plátu $\mathbf{S}(u, v)$ ve směru u budou totožné s původními okraji plátů $\mathbf{P}(u, v)$ i $\mathbf{R}(u, v)$ takto: $\mathbf{S}_0(u) = \mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{S}_1(u) = \mathbf{R}_1(u)$.

Matematicky bychom „spojení dvou křivek do jediné křivky“ zajistili změnou parametrizace původních křivek, což přesahuje rámec tohoto učebního textu. My provedeme požadované spojení příslušných okrajů v Rhinu (viz příklad 3.8) příkazem *Spojit* → Vyberte objekty pro spojení: kliknout na okrajové křivky, které mají být spojeny → Enter. Zadané křivky vytvoří jedinou entitu, jejich tvar se nezmění.

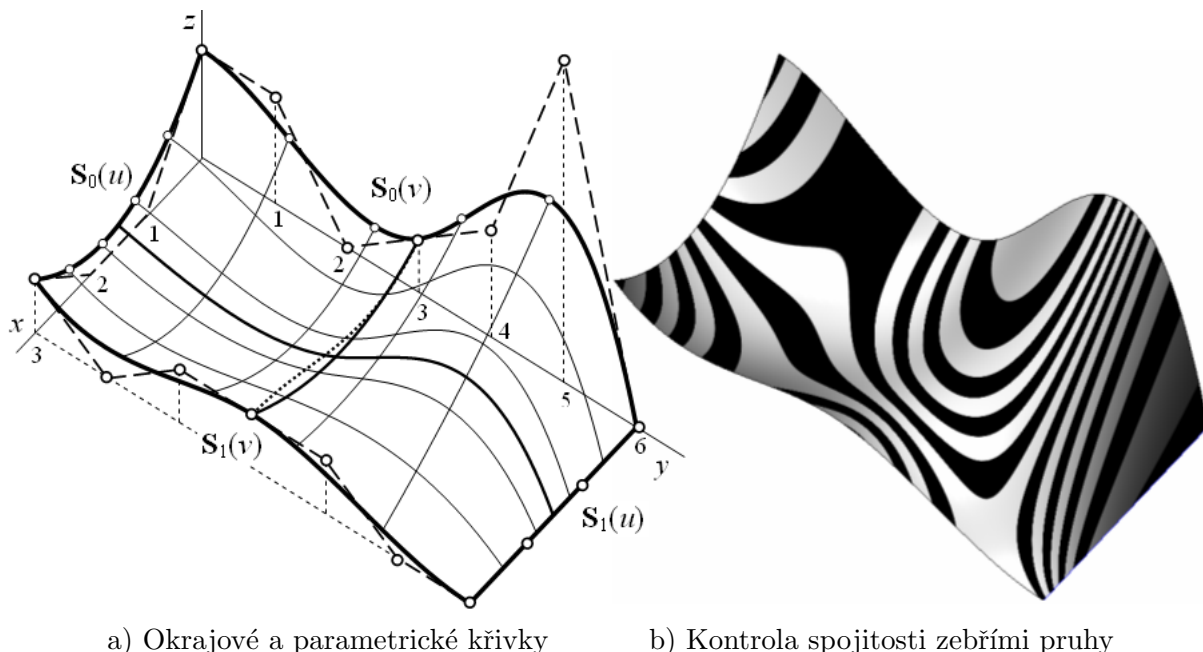
Podrobněji se Coonsovým bilineárním plochám s okrajovými segmentovanými křivkami budeme věnovat v části 3.6.

■ Příklad 3.8 Coonsova bilineární plocha určená okrajovými segmentovanými křivkami.

Uvažujte zadání z příkladu 3.7. Spojením okrajů $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{R}_0(v)$ vytvořte okraj $\mathbf{S}_0(v)$, spojením okrajů $\mathbf{P}_1(v)$, $\mathbf{R}_1(v)$ vytvořte okraj $\mathbf{S}_1(v)$. Pro zbývající okraje platí: $\mathbf{S}_0(u) = \mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{S}_1(u) = \mathbf{R}_1(u)$.

Vytvořte Coonsovu bilineární plochu $\mathbf{S}_0(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Nakreslete body pro hodnoty parametrů $u = 0$, $v = 0, 0.2, \dots, 1$ a $v = 0$, $u = 0, 0.2, \dots, 1$ a parametrické křivky procházející těmito body. Analyzujte spojitost napojení plátů zebřími pruhy a grafy křivostí parametrických křivek i okrajů plátů.

Řešení. Na obr. 3.13 a) je zobrazen plát $\mathbf{S}(u, v)$ včetně řídicích polygonů okrajových křivek, nakreslených bodů pro zadané hodnoty parametrů a jimi procházejících parametrických křivek. Jak lze usuzovat z průběhu zebřích pruhů na obr. 3.13 b), je celá plocha C^2 spojitá. Grafy křivosti okrajových a parametrických křivek na ploše nejsou zobrazeny.



Obrázek 3.13: Coonova bilineární plocha určená okrajovými segmentovanými křivkami \square

Je třeba si však uvědomit, že původní společný okraj $\mathbf{P}_1(u) = \mathbf{R}_0(u)$ z příkladu 3.7 na ploše $\mathbf{S}(u, v)$ v příkladu 3.8 už neleží. V obr. 3.13 a) je tento okraj vyznačen tlustou tečkovanou čarou. Tvarová odchylka ploch vytvořených v příkladech 3.7 a 3.8 je minimální, rozdíl v dosažené spojitosti však značný. Tento způsob řešení volíme v takových případech, kdy C^2 spojitost výsledné plochy má z praktického hlediska větší význam než přesná interpolace všech zadaných okrajů.

■ **Cvičení 3.8** K plátu z Coonovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, z příkladu 3.6 připojte v kladném směru osy x další plát z Coonovy bilineární plochy $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstruční určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{R}_0(u)$ a $\mathbf{R}_1(u)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost napojení těchto okrajů. Společný okraj obou plátů je $\mathbf{R}_0(v) = \mathbf{P}_1(v)$, volný okraj $\mathbf{R}_1(v)$ plátu $\mathbf{R}(u, v)$ je úsečka v rovině (x, y) .

Na připojeném plátu nakreslete navazující parametrické u -křivky (se zapnutým režimem *Uchopování koncových bodů*), body pro hodnoty parametrů $u = 0, 0.2, \dots, 1$, $v = 0$ a parametrické v -křivky procházející těmito body. Analyzujte spojitost napojení plátů zebřícími pruhy a grafy křivosti navazujících parametrických u -křivek i okrajů plátů.

Jaká je spojitost napojení plátů podél společného okraje $\mathbf{P}_1(v) = \mathbf{R}_0(v)$?

■ **Cvičení 3.9** Uvažujte zadání z cvičení 3.8. Spojením okrajů $\mathbf{P}_0(u)$ a $\mathbf{R}_0(u)$ vytvořte okraj $\mathbf{S}_0(u)$, spojením okrajů $\mathbf{P}_1(u)$, $\mathbf{R}_1(u)$ vytvořte okraj $\mathbf{S}_1(u)$. Pro zbývající okraje platí: $\mathbf{S}_0(v) = \mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{S}_1(v) = \mathbf{R}_1(v)$.

Vytvořte Coonsovu bilineární plochu $\mathbf{S}_0(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Nakreslete body pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.2, \dots, 1$ a $u = 0, 0.2, \dots, 1, v = 0$ a parametrické křivky procházející těmito body. Analyzujte spojitost napojení plátů zebřími pruhy a grafy křivostí parametrických křivek i okrajů plátů.

3.5 Bézierova plocha

Bézierova plocha je plocha určená sítí $(m + 1) \times (n + 1)$ řídicích bodů $\mathbf{V}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$, uspořádaných do mapy plochy:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \cdots & \mathbf{V}_{0,n} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \cdots & \mathbf{V}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{V}_{m,0} & \mathbf{V}_{m,1} & \cdots & \mathbf{V}_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Řídicí body jsou uspořádány ve dvou směrech – ve směru parametru u do sloupců a ve směru parametru v do řádků. Bézierova plocha tuto síť aproximuje jediným plátem.

Řídicí body $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,n}$, $\mathbf{V}_{m,0}$, $\mathbf{V}_{m,n}$ nazýváme *rohý sítě*, spojnicí dvou po sobě následujících řídicích bodů v řádku nebo ve sloupci nazýváme *rameno*, čtyřúhelník tvořený čtyřmi sousedními řídicími body $\mathbf{V}_{i,j}\mathbf{V}_{i,j+1}\mathbf{V}_{i+1,j}\mathbf{V}_{i+1,j+1}$, $i = 0, 1, \dots, m - 1$, $j = 0, 1, \dots, n - 1$, nazýváme *okem sítě*, polygony $\mathbf{V}_{i,0}\mathbf{V}_{i,1}\dots\mathbf{V}_{i,n}$, $i = 0, 1, \dots, m$, nazýváme *řádkové řídicí polygony*, polygony $\mathbf{V}_{0,j}\mathbf{V}_{1,j}\dots\mathbf{V}_{m,j}$, $j = 0, 1, \dots, n$, nazýváme *sloupcové řídicí polygony*. Řádkové i sloupcové řídicí polygony určené prvním a posledním řádkem, resp. sloupcem řídicích bodů nazýváme *okrajové řídicí polygony*.

■ **Definice 3.4 – Bézierova plocha.** Necht' je dána mapa plochy (3.22). Vektorová rovnice Bézierovy plochy je

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{B}(u) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.23)$$

kde $\mathbf{B}(u) = (B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u))$, resp. $\mathbf{B}^T(v) = (B_{0,n}(v), B_{1,n}(v), \dots, B_{n,n}(v))^T$ jsou vektory bázevých funkcí – Bernsteinových polynomů. $B_{i,m}(u)$, $i = 0, 1, \dots, m$, resp. $B_{j,n}(v)$, $j = 0, 1, \dots, n$, jsou Bernsteinovy polynomy m -tého, resp. n -tého stupně

$$B_{i,m}(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}, \quad u \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, m,$$

resp.

$$B_{j,n}(v) = \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j}, \quad v \in [0, 1], \quad j = 0, \dots, n.$$

□

Bézierova plocha je tedy tvořena jediným plátem, jehož analytickou reprezentací je polynomiální vektorová funkce dvou proměnných: m -tého stupně proměnné u a n -tého stupně proměnné v . Je-li mapa \mathbf{M} (3.22) čtvercová matice, je stupeň obou proměnných stejný. V takovém případě rozlišujeme Bézierovu plochu *bilineární* ($m = n = 1$, řídicí síť je tvořena čtyřmi řídicími body), *bikvadratickou* ($m = n = 2$, řídicí síť je tvořena devíti řídicími body) a *bikubicou* ($m = n = 3$, řídicí síť je tvořena šestnácti řídicími body). Bézierovými plochami určenými vyšším počtem řídicích bodů se zde nebudeme zabývat, neboť jejich využití v praxi je minimální.

Je-li mapa \mathbf{M} (3.22) obdélníková matice, je stupeň obou proměnných různý. V takovém případě může být Bézierova plocha např. *kvadraticko-kubická* ($m = 2$, $n = 3$, řídicí síť je tvořena dvanácti řídicími body uspořádanými do tří řádků a čtyř sloupců), apod.

■ **Příklad 3.9 – Bézierova bilineární plocha.** Je dána mapa Bézierovy plochy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 1) & (0, 3, 0) \\ (2, 0, 0) & (2, 3, 1) \end{pmatrix}.$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Bézierova plocha je určena sítí obsahující 2×2 řídicí body, viz obr. 3.14 a). Do (3.23) tedy dosadíme lineární Bernsteinovy polynomy $B_{i,1}(u)$, $i = 0, 1$, a $B_{j,1}(v)$, $j = 0, 1$. Výsledná plocha bude bilineární. Souřadnicové funkce $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ této plochy dostaneme, dosadíme-li do (3.23) příslušné souřadnice řídicích bodů.

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (B_{0,1}(u), B_{1,1}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,1}(v) \\ B_{1,1}(v) \end{pmatrix} = (1-u, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} = 2u, \\ y(u, v) &= (B_{0,1}(u), B_{1,1}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,1}(v) \\ B_{1,1}(v) \end{pmatrix} = (1-u, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} = 3v, \\ z(u, v) &= (B_{0,1}(u), B_{1,1}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,1}(v) \\ B_{1,1}(v) \end{pmatrix} = (1-u, u) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} = \\ &= 2uv - u - v + 1, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Bézierovy bilineární plochy je

$$\mathbf{P}(u, v) = (2u, 3v, 2uv - u - v + 1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.24)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.24), dostaneme rohy plátu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0, 0) &= (0, 0, 1) \quad \dots \text{zadaný řídicí bod } \mathbf{V}_{0,0}, \\ \mathbf{P}(0, 1) &= (0, 3, 0) \quad \dots \text{zadaný řídicí bod } \mathbf{V}_{0,1}, \\ \mathbf{P}(1, 0) &= (2, 0, 0) \quad \dots \text{zadaný řídicí bod } \mathbf{V}_{1,0}, \\ \mathbf{P}(1, 1) &= (2, 3, 1) \quad \dots \text{zadaný řídicí bod } \mathbf{V}_{1,1}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$ do (3.24), dostaneme okraje plátu

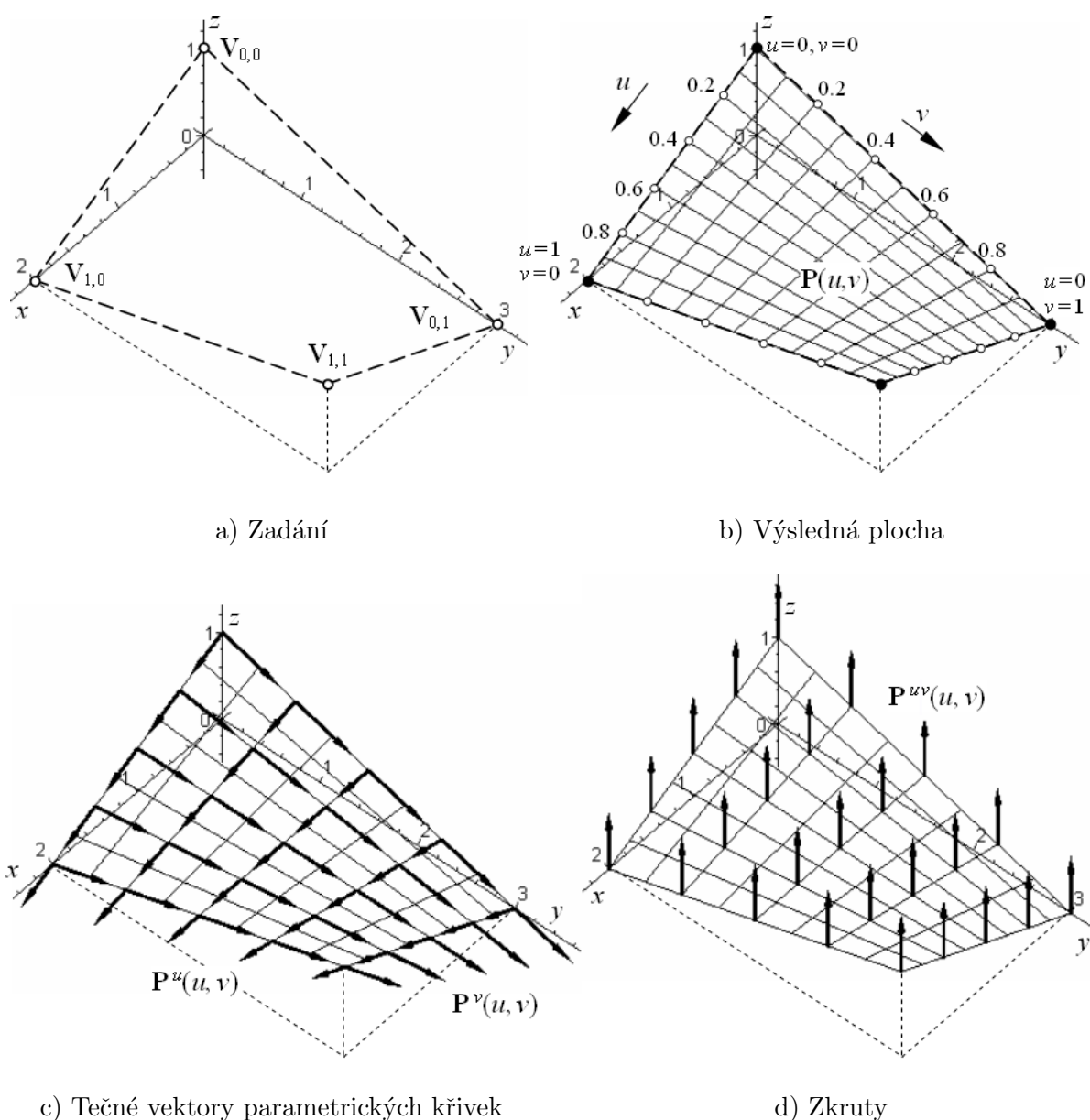
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, 0) &= (2u, 0, -u + 1), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \dots \quad \text{úsečka } \mathbf{V}_{0,0}\mathbf{V}_{1,0}, \\ \mathbf{P}(u, 1) &= (2u, 3, u), \quad u \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{úsečka } \mathbf{V}_{0,1}\mathbf{V}_{1,1}, \\ \mathbf{P}(0, v) &= (0, 3v, -v + 1), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \dots \quad \text{úsečka } \mathbf{V}_{0,0}\mathbf{V}_{0,1}, \\ \mathbf{P}(1, v) &= (2, 3v, v), \quad v \in [0, 1] \quad \dots \dots \dots \quad \text{úsečka } \mathbf{V}_{1,0}\mathbf{V}_{1,1}. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek je

$$\mathbf{P}^u(u, v) = (2, 0, 2v - 1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad \mathbf{P}^v(u, v) = (0, 3, 2u - 1), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.25)$$

Dosadíme-li do (3.25) $u, v = 0, 1$, dostaneme tečné vektory v rozích plátu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^u(0, 0) &= (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(0, 1) = (2, 0, 1), \quad \mathbf{P}^u(1, 0) = (2, 0, -1), \quad \mathbf{P}^u(1, 1) = (2, 0, 1), \\ \mathbf{P}^v(0, 0) &= (0, 3, -1), \quad \mathbf{P}^v(0, 1) = (0, 3, -1), \quad \mathbf{P}^v(1, 0) = (0, 3, 1), \quad \mathbf{P}^v(1, 1) = (0, 3, 1). \end{aligned}$$



Obrázek 3.14: Bézierova bilineární plocha

Vektorová rovnice zkrutu je

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.26)$$

což znamená, že zkrut je konstantní v celém plátu, tedy i v jeho rozích.

Na obr. 3.14 a) jsou nakresleny zadané řídicí body, výsledná Bézierova bilineární plocha je nakreslena na obr. 3.14 b). Na obr. 3.14 c) jsou nakresleny tečné vektory (3.25) parametrických křivek a na obr. 3.14 d) jsou nakresleny zkruty (3.26) v několika bodech Bézierovy bilineární plochy (3.24). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena (délka tečných vektorů na $1/5$, délka zkrutů na $1/3$ své skutečné délky). \square

3.5.1 Bézierova plocha určená sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou

Ve většině dalších příkladů v této části budeme uvažovat pouze takové Bézierovy plochy, jejichž řídicí body leží nad vrcholy jednotkových čtverců v rovině (x, y) , tedy určené sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou. Tím se zjednoduší výpočet souřadnicových funkcí $x(u, v)$ a $y(u, v)$. Předpokládejme, že řídicí síť je umístěna v prvním oktantu souřadného systému. Potom má mapa Bézierovy plochy tvar

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \dots & \mathbf{V}_{0,n} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \dots & \mathbf{V}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{V}_{m,0} & \mathbf{V}_{m,1} & \dots & \mathbf{V}_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, z_{0,0}) & (0, 1, z_{0,1}) & \dots & (0, n, z_{0,n}) \\ (1, 0, z_{1,0}) & (1, 1, z_{1,1}) & \dots & (1, n, z_{1,n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m, 0, z_{m,0}) & (m, 1, z_{m,1}) & \dots & (m, n, z_{m,n}) \end{pmatrix}.$$

Pro x -ovou a y -ovou souřadnicovou funkci dostáváme

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & m & \dots & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,n}(v) \\ B_{1,n}(v) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v) \end{pmatrix} = \\ &= mu, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \\ y(u, v) &= (B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,n}(v) \\ B_{1,n}(v) \\ \vdots \\ B_{n,n}(v) \end{pmatrix} = \\ &= nv, \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \end{aligned}$$

jak se můžeme snadno přesvědčit dosazením Bernsteinových polynomů pro libovolné m i n .

Vektorová rovnice Bézierovy plochy určené sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou je

$$\mathbf{P}(u, v) = (mu, nv, z(u, v)), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.27)$$

a její nalezení se redukuje na určení souřadnicové funkce $z(u, v)$.

■ **Příklad 3.10 – Bézierova bikvadratická plocha.** Je dána mapa Bézierovy plochy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 2) & (0, 1, 1) & (0, 2, 3) \\ (1, 0, 3) & (1, 1, 0) & (1, 2, 0) \\ (2, 0, 1) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) \end{pmatrix}.$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Bézierova plocha je určena sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou, viz obr. 3.15 a), obsahující 3×3 řídicí body. Do (3.23) tedy dosadíme Bernsteinovy polynomy 2. stupně $B_{i,2}(u)$, $i = 0, 1, 2$, a $B_{j,2}(v)$, $j = 0, 1, 2$. Výsledná plocha bude bikvadratická.

Souřadnicové funkce jsou $x(u, v) = 2u$, $y(u, v) = 2v$ a

$$\begin{aligned} z(u, v) &= (B_{0,2}(u), B_{1,2}(u), B_{2,2}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,2}(v) \\ B_{1,2}(v) \\ B_{2,2}(v) \end{pmatrix} = \\ &= ((1-u)^2, 2u(1-u), u^2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{pmatrix} = \\ &= -2u^2v^2 + 8u^2v - 8uv - 3u^2 + 2u + 3v^2 - 2v + 2, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Bézierovy bikvadratické plochy, tečných vektorů parametrických u -křivek, tečných vektorů parametrických v -křivek a zkrutu je

$$\mathbf{P}(u, v) = (2u, 2v, -2u^2v^2 + 8u^2v - 8uv - 3u^2 + 2u + 3v^2 - 2v + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{P}^u(u, v) = (2, 0, -4uv^2 + 16uv - 6u - 8v + 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{P}^v(u, v) = (0, 2, -4u^2v + 8u^2 - 8u + 6v - 2), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, -8uv + 16u - 8), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.31)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.28), (3.29), (3.30) a (3.31), dostaneme rohy plátu, tečné vektory parametrických u -křivek v rozích plátu, tečné vektory parametrických v -křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu, viz následující tabulka.

	$u = 0, v = 0$	$u = 0, v = 1$	$u = 1, v = 0$	$u = 1, v = 1$
$\mathbf{P}(u, v)$	(0, 0, 2)	(0, 2, 3)	(2, 0, 1)	(2, 2, 0)
$\mathbf{P}^u(u, v)$	(2, 0, 2)	(2, 0, -6)	(2, 0, -4)	(2, 0, 0)
$\mathbf{P}^v(u, v)$	(0, 2, -2)	(0, 2, 4)	(0, 2, -2)	(0, 2, 0)
$\mathbf{P}^{uv}(u, v)$	(0, 0, -8)	(0, 0, -8)	(0, 0, 8)	(0, 0, 0)

Všimněme si, že rohy plátu $\mathbf{P}(0, 0)$, $\mathbf{P}(0, 1)$, $\mathbf{P}(1, 0)$ a $\mathbf{P}(1, 1)$ jsou zadané řídicí body $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,2}$, $\mathbf{V}_{2,0}$ a $\mathbf{V}_{2,2}$ – rohy řídicí sítě. Dosadíme-li $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$ do (3.28), dostaneme okraje plátu

$$\mathbf{P}(u, 0) = (2u, 0, -3u^2 + 2u + 2), \quad u \in [0, 1],$$

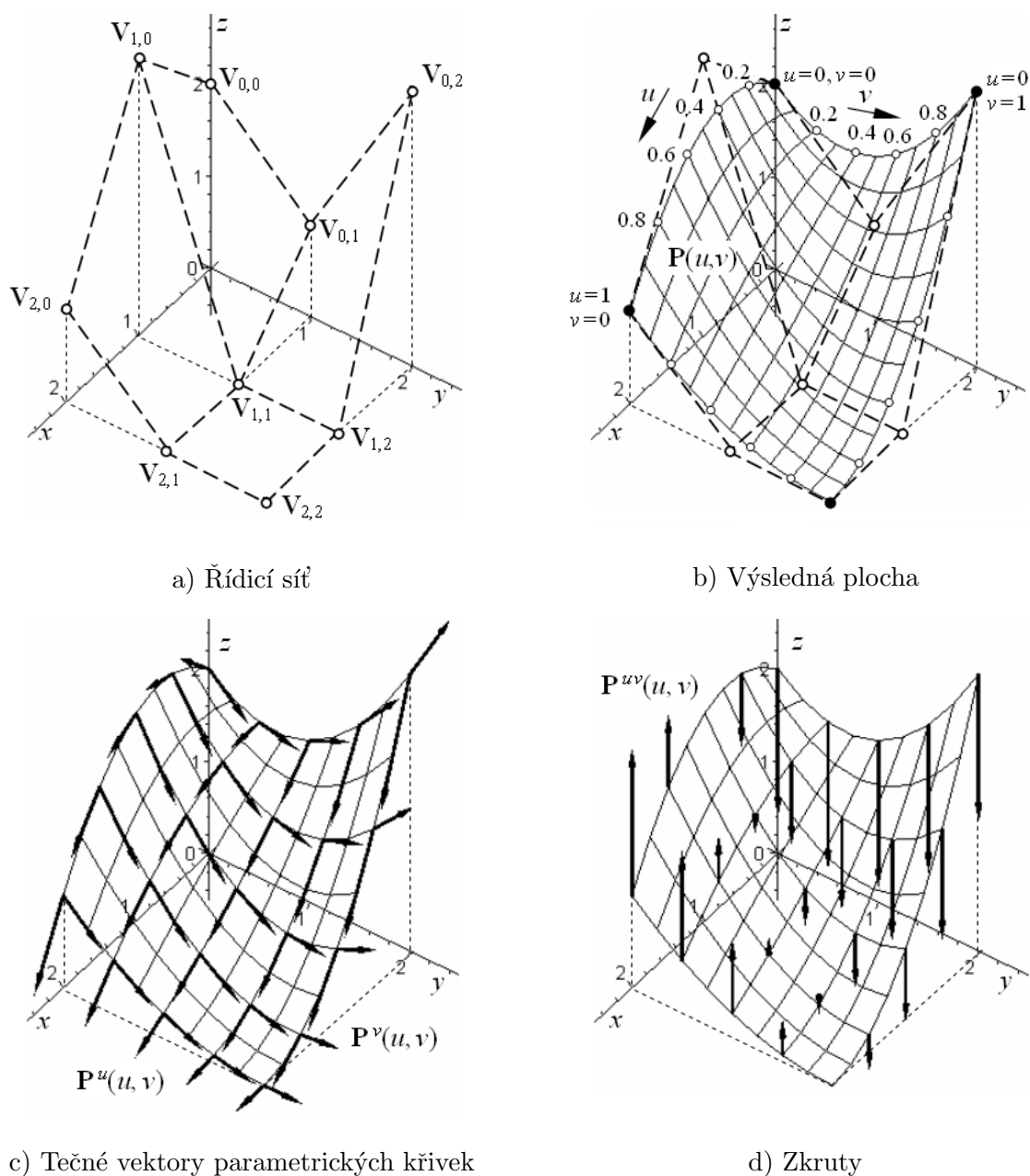
$$\mathbf{P}(u, 1) = (2u, 2, 3u^2 - 6u + 3), \quad u \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}(0, v) = (0, 2v, 3v^2 - 2v + 2), \quad v \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}(1, v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1), \quad v \in [0, 1],$$

což jsou Bézierovy křivky 2. stupně určené okrajovými polygony sítě řídicích bodů.

Na obr. 3.15 a) je nakreslena zadaná řídicí síť, výsledná Bézierova bikvadratická plocha je nakreslena na obr. 3.15 b). Na obr. 3.15 c) jsou nakresleny tečné vektory (3.29) a (3.30) parametrických křivek a na obr. 3.15 d) jsou nakresleny zkruty (3.31) v několika bodech plochy (3.28). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena na 1/5 své skutečné délky.



Obrázek 3.15: Bézierova bikvadratická plocha

□

■ **Příklad 3.11 – Bézierova kvadraticko-kubická plocha.** Je dána mapa Bézierovy plochy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 5) & (0, 1, 5) & (0, 2, 2) & (0, 3, 5) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 1) & (1, 2, 0) & (1, 3, 2) \\ (2, 0, 5) & (2, 1, 2) & (2, 2, 2) & (2, 3, 2) \end{pmatrix}.$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $\mathbf{P}^u(u, v)$, $\mathbf{P}^v(u, v)$ parametrických křivek a zkrutu $\mathbf{P}^{uv}(u, v)$. Pro hodnoty parametrů $u, v = 0, 1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Řešení. Bézierova plocha je určena sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou, viz obr. 3.16 a), obsahující 3×4 řídicí body. Do (3.23) tedy dosadíme Bernsteinovy polynomy 2. stupně $B_{i,2}(u)$, $i = 0, 1, 2$, a Bernsteinovy polynomy 3. stupně $B_{j,3}(v)$, $j = 0, 1, 2, 3$. Výsledná plocha bude kvadraticko-kubická.

Souřadnicové funkce jsou $x(u, v) = 2u$, $y(u, v) = 3v$ a

$$\begin{aligned} z(u, v) &= (B_{0,2}(u), B_{1,2}(u), B_{2,2}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,3}(v) \\ B_{1,3}(v) \\ B_{2,3}(v) \\ B_{3,3}(v) \end{pmatrix} = \\ &= ((1-u)^2, 2u(1-u), u^2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{pmatrix} = \\ &= -3u^2v + 6u^2 - 12uv^3 + 18uv^2 - 6uv - 6u + 9v^3 - 9v^2 + 5, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Bézierovy bilineární plochy, tečných vektorů parametrických u -křivek, tečných vektorů parametrických v -křivek a zkrutu je

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u, v) &= (2u, 3v, -3u^2v + 6u^2 - 12uv^3 + 18uv^2 - 6uv - 6u + 9v^3 - 9v^2 + 5), \\ &\quad (u, v) \in [0, 1]^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{P}^u(u, v) = (2, 0, -6uv + 12u - 12v^3 + 18v^2 - 6v - 6), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{P}^v(u, v) = (0, 3, -36uv^2 + 36uv - 3u^2 - 6u + 27v^2 - 18v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{P}^{uv}(u, v) = (0, 0, -6u - 36v^2 + 36v - 6), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.35)$$

Dosadíme-li $u, v = 0, 1$ do (3.32), (3.33), (3.34) a (3.35), dostaneme rohy plátu, tečné vektory parametrických u -křivek v rozích plátu, tečné vektory parametrických v -křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu, viz následující tabulka.

	$u = 0, v = 0$	$u = 0, v = 1$	$u = 1, v = 0$	$u = 1, v = 1$
$\mathbf{P}(u, v)$	(0, 0, 5)	(0, 3, 5)	(2, 0, 5)	(2, 3, 2)
$\mathbf{P}^u(u, v)$	(2, 0, -6)	(2, 0, -6)	(2, 0, 6)	(2, 0, 0)
$\mathbf{P}^v(u, v)$	(0, 3, 0)	(0, 3, 9)	(0, 3, -9)	(0, 3, 0)
$\mathbf{P}^{uv}(u, v)$	(0, 0, -6)	(0, 0, -6)	(0, 0, -12)	(0, 0, -12)

Všimněme si, že rohy plátu $\mathbf{P}(0, 0)$, $\mathbf{P}(0, 1)$, $\mathbf{P}(1, 0)$ a $\mathbf{P}(1, 1)$ jsou zadané řídicí body $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,3}$, $\mathbf{V}_{2,0}$ a $\mathbf{V}_{2,3}$ – rohy řídicí sítě. Dosadíme-li $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$ do (3.32), dostaneme okraje plátu

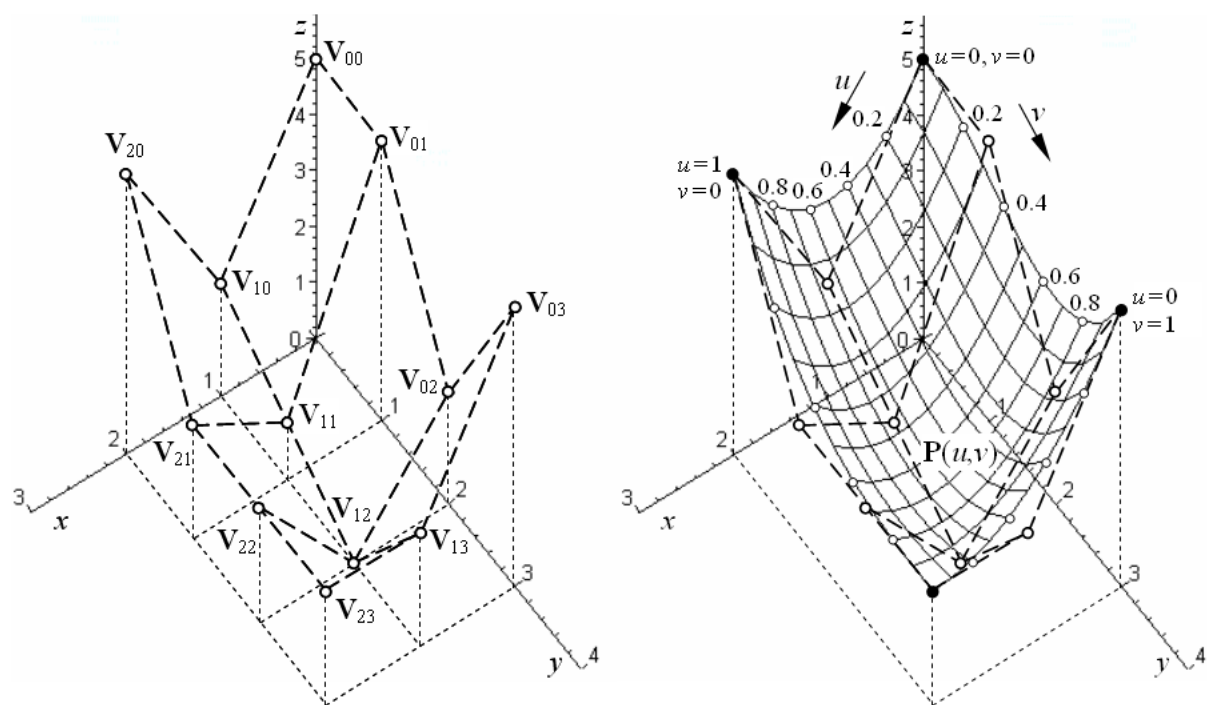
$$\mathbf{P}(u, 0) = (2u, 0, 6u^2 - 6u + 5), \quad u \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}(u, 1) = (2u, 3, 3u^2 - 6u + 5), \quad u \in [0, 1],$$

$$\mathbf{P}(0, v) = (0, 3v, 9v^3 - 9v^2 + 5), \quad v \in [0, 1],$$

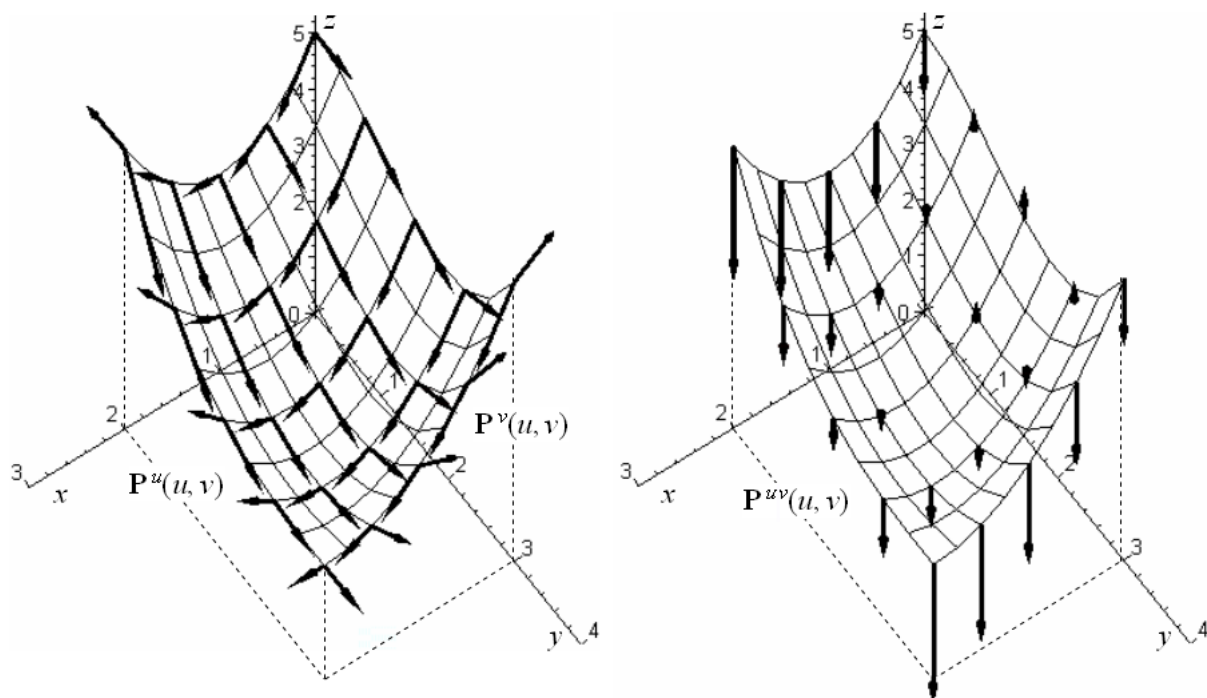
$$\mathbf{P}(1, v) = (2, 3v, -3v^3 + 9v^2 - 9v + 5), \quad v \in [0, 1],$$

což jsou Bézierovy křivky 2. stupně ve směru u a Bézierovy kubiky ve směru v určené okrajovými polygony řídicí sítě.



a) Řídicí síť

b) Výsledná plocha



c) Tečné vektory parametrických křivek

d) Zkruty

Obrázek 3.16: Bézierova kvadraticko-kubická plocha

Na obr. 3.16 a) je nakreslena zadaná řídicí síť, výsledná Bézierova kvadraticko-kubická plocha je nakreslena na obr. 3.16 b). Na obr. 3.16 c) jsou nakresleny tečné vektory (3.33) a (3.34) parametrických křivek a na obr. 3.16 d) jsou nakresleny zkruty (3.35) v několika bodech plochy (3.32). Pro zachování čitelnosti obrázku je délka nakreslených vektorů zkrácena na 1/5 své skutečné délky. \square

3.5.2 Vlastnosti Bézierovy plochy

Bézierova plocha má zajímavé geometrické vlastnosti, s některými z nich jsme se už setkali při řešení příkladů 3.9, 3.10 a 3.11. Protože největší využití v praxi má Bézierova bikubická plocha, budou některé dále uvedené vlastnosti konkretizovány právě pro tuto plochu.

- Bézierova plocha interpoluje rohy řídicí sítě a žádnými jinými řídicími body neprochází.
- Okraje plátu tvořeného Bézierovou plochou jsou Bézierovy křivky.
- Tečné vektory parametrických u -křivek v rozích plátu jsou m -násobkem krajních ramen okrajových řídicích polygonů ve směru u ; tečné vektory parametrických v -křivek v rozích plátu jsou n -násobkem krajních ramen okrajových řídicích polygonů ve směru v . Pro Bézierovu bikubickou plochu je to konkrétně

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^u(0, 0) &= 3(\mathbf{V}_{1,0} - \mathbf{V}_{0,0}), & \mathbf{P}^u(0, 1) &= 3(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{0,3}), \\
 \mathbf{P}^u(1, 0) &= 3(\mathbf{V}_{3,0} - \mathbf{V}_{2,0}), & \mathbf{P}^u(1, 1) &= 3(\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{2,3}), \\
 \mathbf{P}^v(0, 0) &= 3(\mathbf{V}_{0,1} - \mathbf{V}_{0,0}), & \mathbf{P}^v(0, 1) &= 3(\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2}), \\
 \mathbf{P}^v(1, 1) &= 3(\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{3,2}), & \mathbf{P}^v(1, 0) &= 3(\mathbf{V}_{3,1} - \mathbf{V}_{3,0}).
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Tato vlastnost vyplývá z předchozí vlastnosti a z vlastností Bézierových křivek uvedených v části 2.2.1. Povšimněme si, že tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu jsou určeny výhradně řídicími body *okrajových řídicích polygonů* a že tečné roviny v rozích plátu tvořeného Bézierovou plochou jsou určeny *krajními rameny okrajových řídicích polygonů*.

- Zkruty v rozích plátu tvořeného Bézierovou plochou určenou sítí $(m+1) \times (n+1)$ řídicích bodů, $m, n \leq 3$, lze vyjádřit jako mn -násobek vektorového součtu vektorů určených protilehlými rameny rohových ok sítě. Pro Bézierovu bikubickou plochu je to konkrétně

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^{uv}(0, 0) &= 9[(\mathbf{V}_{0,0} - \mathbf{V}_{1,0}) + (\mathbf{V}_{1,1} - \mathbf{V}_{0,1})] = 9[(\mathbf{V}_{0,0} - \mathbf{V}_{0,1}) + (\mathbf{V}_{1,1} - \mathbf{V}_{1,0})], \\
 \mathbf{P}^{uv}(0, 1) &= 9[(\mathbf{V}_{0,2} - \mathbf{V}_{1,2}) + (\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{0,3})] = 9[(\mathbf{V}_{0,2} - \mathbf{V}_{0,3}) + (\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{1,2})], \\
 \mathbf{P}^{uv}(1, 0) &= 9[(\mathbf{V}_{2,0} - \mathbf{V}_{3,0}) + (\mathbf{V}_{3,1} - \mathbf{V}_{2,1})] = 9[(\mathbf{V}_{2,0} - \mathbf{V}_{2,1}) + (\mathbf{V}_{3,1} - \mathbf{V}_{3,0})], \\
 \mathbf{P}^{uv}(1, 1) &= 9[(\mathbf{V}_{2,2} - \mathbf{V}_{3,2}) + (\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{2,3})] = 9[(\mathbf{V}_{2,2} - \mathbf{V}_{2,3}) + (\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{3,2})].
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

O tom se můžeme snadno přesvědčit, dosadíme-li do (3.23) namísto Bernsteinových polynomů 3. stupně funkční hodnoty jejich prvních derivací pro $u, v = 0, 1$. Povšimněme si také, že zkrut v rohu plátu je určen výhradně *řídicími body příslušného rohového oka sítě*.

- Je-li rohové oko sítě řídicích bodů rovnoběžník, je zkrut v tomto rohu nulový.

Je-li rohové oko rovnoběžník, je přímo částí tečné roviny v rohu plátu, a protože zkrut v rohu plátu udává míru odchylky plochy od tečné roviny v rohu plátu, musí být v tomto

případě nulový. Jinými slovy: vektory určené protilehlými okraji rovnoběžníkového rohového oka v rov. (3.37) jsou vektory opačně orientované a jejich vektorový součet je roven nule. Zkrut v rohu plátu tedy také udává míru odchylky rohového oka sítě od rovnoběžníku.

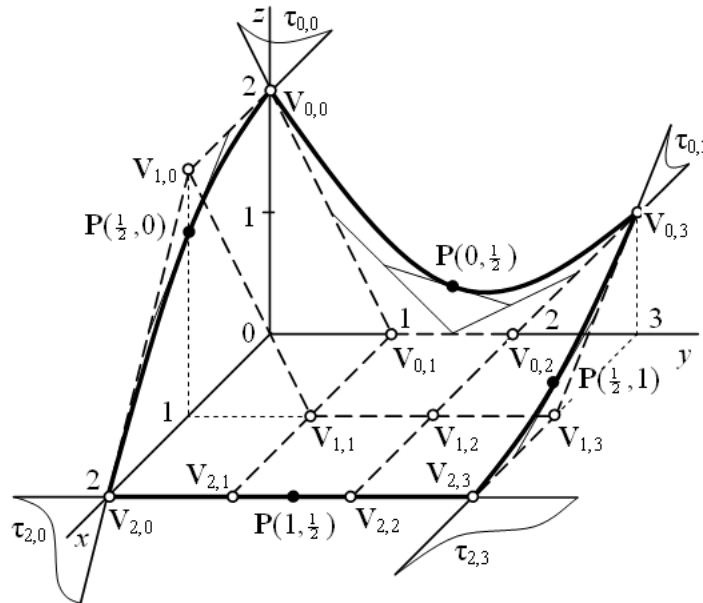
- Bézierova plocha určená sítí obsahující pouze čtyři řídicí body je totožná s plochou hyperbolického paraboloidu určeného stejnými řídicími body – rohy plátu.

■ **Příklad 3.12 – Bézierova kvadraticko-kubická plocha.** Je dána mapa \mathbf{M} Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 2) & (0, 1, 0) & (0, 2, 0) & (0, 3, 1) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 0) & (1, 2, 0) & (1, 3, 0) \\ (2, 0, 0) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 0) \end{pmatrix}.$$

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q = 2\sqrt{2} : 3$, jednotka = 3 cm) sestrojte síť řídicích bodů uspořádaných do mapy \mathbf{M} . De Casteljau algoritmem sestrojte body $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, 1)$, $\mathbf{P}(0, \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(1, \frac{1}{2})$ na okrajových křivkách plátu z Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Okrajové křivky načrtněte. Vyznačte tečné roviny $\tau_{0,0}$, $\tau_{0,1}$, $\tau_{1,0}$ a $\tau_{1,1}$ v rozích plátu.

Řešení. Bézierova plocha je zadána sítí obsahující 3×4 řídicí body, jde tedy o kvadraticko-kubickou plochu, viz obr. 3.17.



Obrázek 3.17: Bézierova kvadraticko-kubická plocha

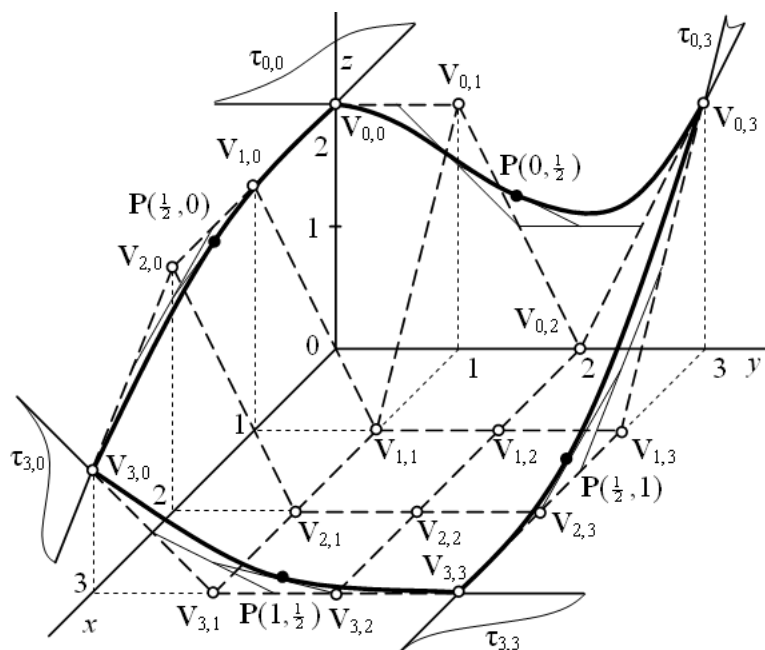
□

■ **Příklad 3.13 – Bézierova bikubická plocha.** Je dána mapa \mathbf{M} Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 2) & (0, 1, 2) & (0, 2, 0) & (0, 3, 2) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 0) & (1, 2, 0) & (1, 3, 0) \\ (2, 0, 2) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 0) \\ (3, 0, 1) & (3, 1, 0) & (3, 2, 0) & (3, 3, 0) \end{pmatrix}.$$

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q = 2\sqrt{2} : 3$, jednotka = 3 cm) sestrojte síť řídicích bodů uspořádaných do mapy M. De Casteljaou algoritmem sestrojte body $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, 0)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, 1)$, $\mathbf{P}(0, \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}(1, \frac{1}{2})$ na okrajových křivkách plátu z Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Okrajové křivky načrtněte. Vyznačte tečné roviny $\tau_{0,0}$, $\tau_{0,1}$, $\tau_{1,0}$ a $\tau_{1,1}$ v rozích plátu.

Řešení. Bézierova plocha je zadána sítí obsahující 4×4 řídicí body, jde tedy o bikubickou plochu, viz obr. 3.18.



Obrázek 3.18: Bézierova bikubická plocha

□

Vztah Bézierovy bikubické plochy a Coonsovy bilineární plochy

Víme, že Coonsova bilineární plocha je určena čtyřmi okrajovými křivkami, které mají společné body v rozích plátu. Dále víme, že okraje plátu tvořeného Bézierovou bikubickou plochou jsou Bézierovy kubiky, a že Bézierova plocha interpoluje rohy plátu. Naskýtá se tedy otázka, zda existuje nějaká souvislost mezi Coonsovou bilineární plochou určenou okrajovými Bézierovými kubikami a Bézierovou bikubickou plochou se stejnými okraji.

Okrajové řídicí polygony ovlivňují tvar okrajových Bézierových kubik, které vystupují ve vektorové rovnici Coonsovy bilineární plochy. Tvar Bézierovy bikubické plochy je navíc ovlivněn polohou vnitřních řídicích bodů. Ve skutečnosti existuje nekonečně mnoho Bézierových ploch, které mají shodné okraje, ale odlišný tvar vlastní plochy právě díky odlišné poloze vnitřních řídicích bodů. Při vhodné poloze vnitřních řídicích bodů je jedna z těchto ploch totožná s Coonsovou bilineární plochou, jak říká následující věta.

- **Věta 3.1 – Vztah Bézierovy bikubické a Coonsovy bilineární plochy.** Nechť je Coonsova bilineární plocha $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, určena okrajovými Bézierovými kubikami, jejichž řídicí polygony jsou následující

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(u): \mathbf{V}_{0,0} \mathbf{V}_{1,0} \mathbf{V}_{2,0} \mathbf{V}_{3,0}, & \quad \mathbf{P}_1(u): \mathbf{V}_{0,3} \mathbf{V}_{1,3} \mathbf{V}_{2,3} \mathbf{V}_{3,3}, \\ \mathbf{P}_0(v): \mathbf{V}_{0,0} \mathbf{V}_{0,1} \mathbf{V}_{0,2} \mathbf{V}_{0,3}, & \quad \mathbf{P}_1(v): \mathbf{V}_{3,0} \mathbf{V}_{3,1} \mathbf{V}_{3,2} \mathbf{V}_{3,3}. \end{aligned}$$

Potom je tato Coonsova bilineární plocha totožná s Bézierovou bikubickou plochou určenou sítí řídicích bodů uspořádaných do mapy

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{pmatrix},$$

pro jejíž vnitřní řídicí body platí

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{1,1} &= \mathbf{V}_{0,0} + \frac{1}{3}\mathbf{P}^u(0,0) + \frac{1}{3}\mathbf{P}^v(0,0) + \frac{1}{9}\mathbf{P}^{uv}(0,0), \\ \mathbf{V}_{1,2} &= \mathbf{V}_{0,3} + \frac{1}{3}\mathbf{P}^u(0,1) - \frac{1}{3}\mathbf{P}^v(0,1) - \frac{1}{9}\mathbf{P}^{uv}(0,1), \\ \mathbf{V}_{2,1} &= \mathbf{V}_{3,0} - \frac{1}{3}\mathbf{P}^u(1,0) + \frac{1}{3}\mathbf{P}^v(1,0) - \frac{1}{9}\mathbf{P}^{uv}(1,0), \\ \mathbf{V}_{2,2} &= \mathbf{V}_{3,3} - \frac{1}{3}\mathbf{P}^u(1,1) - \frac{1}{3}\mathbf{P}^v(1,1) + \frac{1}{9}\mathbf{P}^{uv}(1,1), \end{aligned} \quad (3.38)$$

kde $\mathbf{P}^u(0,0)$, $\mathbf{P}^u(0,1)$, $\mathbf{P}^u(1,0)$ a $\mathbf{P}^u(1,1)$ jsou tečné vektory parametrických u -křivek v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy, $\mathbf{P}^v(0,0)$, $\mathbf{P}^v(0,1)$, $\mathbf{P}^v(1,0)$ a $\mathbf{P}^v(1,1)$ jsou tečné vektory parametrických v -křivek v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy a $\mathbf{P}^{uv}(0,0)$, $\mathbf{P}^{uv}(0,1)$, $\mathbf{P}^{uv}(1,0)$ a $\mathbf{P}^{uv}(1,1)$ jsou zkruty v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy.

Důkaz (pouze naznačíme): Vztahy (3.38) jsou řešením soustavy rovnic (3.37), dosadíme-li za řídicí body okrajových řídicích polygonů z (3.36). \square

- **Příklad 3.14 – Vztah Bézierovy bikubické a Coonsovy bilineární plochy.** Jsou dány řídicí polygony Bézierových kubik

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & & & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & & & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0,4) & (0,1,4) & (0,2,1) & (0,3,1) \\ (1,0,1) & & & (1,3,1) \\ (2,0,1) & & & (2,3,1) \\ (3,0,4) & (3,1,1) & (3,2,1) & (3,3,1) \end{pmatrix},$$

kteří tvoří okraje Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$.

Nalezněte vektorovou rovnici Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$.

Předpokládejte, že Coonsova bilineární plocha $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$ je Bézierova bikubická plocha $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$, určená sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou. Určete vnitřní řídicí body Bézierovy bikubické plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u,v)$, $(u,v) \in [0,1]^2$, nalezněte její vektorovou rovnici. Výsledky porovnejte.

Řešení. Nejprve určíme vektorové rovnice okrajových Bézierových kubik:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(u) &= (3u, 0, 9u^2 - 9u + 4), \quad u \in [0,1], \\ \mathbf{P}_1(u) &= (3u, 3, 1), \quad u \in [0,1], \\ \mathbf{P}_0(v) &= (0, 3v, 6v^3 - 9v^2 + 4), \quad v \in [0,1], \\ \mathbf{P}_1(v) &= (3, 3v, -3v^3 + 9v^2 - 9v + 4), \quad v \in [0,1]. \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření Coonsovy bilineární plochy je podle (3.17)

$$x_{\mathbf{C}}(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3u & 0 & 3u \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = 3u, \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

$$y_{\mathbf{C}}(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3v & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3v & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = 3v, \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

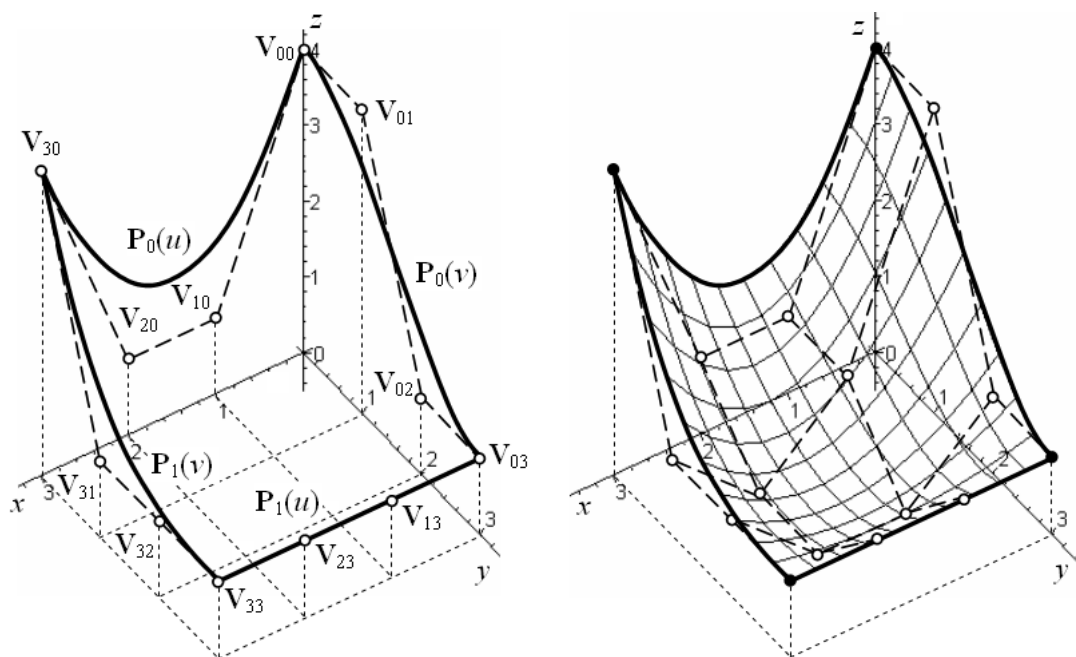
$$z_{\mathbf{C}}(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6v^3 - 9v^2 + 4 & -1 \\ 9u^2 - 9u + 4 & 0 & 1 \\ -4 & -3v^3 + 9v^2 - 9v + 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= -9u^2v + 9u^2 - 9uv^3 + 18uv^2 - 9u + 6v^3 - 9v^2 + 4, \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Vektorová rovnice Coonsovy bilineární plochy je

$$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(u, v) = (3u, 3v, -9u^2v + 9u^2 - 9uv^3 + 18uv^2 - 9u + 6v^3 - 9v^2 + 4), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.39)$$

Na obr. 3.19 a) jsou nakresleny zadané okrajové řídicí polygony a jimi určené Bézierovy kubiky, kterými je určena Coonsova bilineární plocha (3.39).



a) Zadané okrajové Bézierovy kubiky Coonsovy bilineární plochy

b) Výsledná plocha a síť řídicích bodů Bézierovy bikubické plochy

Obrázek 3.19: Vztah Bézierovy bikubické a Coonsovy bilineární plochy

Vektorová rovnice tečných vektorů parametrických křivek Coonsovy bilineární plochy je

$$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^u(u, v) = (3, 0, -18uv + 18u - 9v^3 + 18v^2 - 9), \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^v(u, v) = (0, 3, -9u^2 - 27uv^2 + 36uv + 18v^2 - 18v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.40)$$

Dosadíme-li do (3.40) $u, v = 0, 1$, dostaneme tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^u(0,0) &= (3, 0, -9), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^u(0,1) = (3, 0, 0), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^u(1,0) = (3, 0, 9), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^u(1,1) = (3, 0, 0), \\ \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^v(0,0) &= (0, 3, 0), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^v(0,1) = (0, 3, 0), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^v(1,0) = (0, 3, -9), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^v(1,1) = (0, 3, 0). \end{aligned}$$

Vektorová rovnice zkrutu Coonsovy bilineární plochy je

$$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{uv}(u, v) = (0, 0, -18u - 27v^2 + 36v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (3.41)$$

Dosadíme-li do (3.41) $u, v = 0, 1$, dostaneme zkruty v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy

$$\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{uv}(0,0) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{uv}(0,1) = (0, 0, 9), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{uv}(1,0) = (0, 0, -18), \quad \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{uv}(1,1) = (0, 0, -9).$$

Nyní můžeme podle (3.38) určit vnitřní řídicí body Bézierovy bikubické plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{1,1} &= (0, 0, 4) + \frac{1}{3}(3, 0, -9) + \frac{1}{3}(0, 3, 0) + \frac{1}{9}(0, 0, 0) = (1, 1, 1), \\ \mathbf{V}_{1,2} &= (0, 3, 1) + \frac{1}{3}(3, 0, 0) - \frac{1}{3}(0, 3, 0) - \frac{1}{9}(0, 0, 9) = (1, 2, 0), \\ \mathbf{V}_{2,1} &= (3, 0, 4) - \frac{1}{3}(3, 0, 9) + \frac{1}{3}(0, 3, -9) - \frac{1}{9}(0, 0, -18) = (2, 1, 0), \\ \mathbf{V}_{2,2} &= (3, 3, 1) - \frac{1}{3}(3, 0, 0) - \frac{1}{3}(0, 3, 0) + \frac{1}{9}(0, 0, -9) = (2, 2, 0), \end{aligned}$$

a doplnit mapu \mathbf{M} Bézierovy bikubické plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u, v)$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 4) & (0, 1, 4) & (0, 2, 1) & (0, 3, 1) \\ (1, 0, 1) & (1, 1, 1) & (1, 2, 0) & (1, 3, 1) \\ (2, 0, 1) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 1) \\ (3, 0, 4) & (3, 1, 1) & (3, 2, 1) & (3, 3, 1) \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že Bézierova bikubická plocha $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$ je určena sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou, jsou její souřadnicové funkce $x_{\mathbf{B}}(u, v) = 3u$, $y_{\mathbf{B}}(u, v) = 3v$ a

$$\begin{aligned} z_{\mathbf{B}}(u, v) &= (B_{0,3}(u), B_{1,3}(u), B_{2,3}(u), B_{3,3}(u)) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{0,3}(v) \\ B_{1,3}(v) \\ B_{2,3}(v) \\ B_{3,3}(v) \end{pmatrix} = \\ &= ((1-u)^3, 3u(1-u)^2, 3u^2(1-u), u^3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{pmatrix} = \\ &= -9u^2v + 9u^2 - 9uv^3 + 18uv^2 - 9u + 6v^3 - 9v^2 + 4, \quad (u, v) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Vektorová rovnice Bézierovy bikubické plochy $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, je

$$\mathbf{P}_{\mathbf{B}}(u, v) = (3u, 3v, -9u^2v + 9u^2 - 9uv^3 + 18uv^2 - 9u + 6v^3 - 9v^2 + 4), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Výsledná Bézierova bikubická plocha je nakreslena na obr. 3.19 b) včetně sítě řídicích bodů. Protože $x_{\mathbf{B}}(u, v) = x_{\mathbf{C}}(u, v)$, $y_{\mathbf{B}}(u, v) = y_{\mathbf{C}}(u, v)$ a $z_{\mathbf{B}}(u, v) = z_{\mathbf{C}}(u, v)$, jsou obě plochy totožné. \square

3.5.3 Odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy

Vektorovou rovnici (3.23) Bézierovy plochy můžeme odvodit dvojím způsobem – buď budeme respektovat „plošnou“ podstatu Bézierovy plochy a její vektorovou rovnici odvodíme postupnou lineární interpolací mezi čtyřmi body nebo můžeme preferovat její „křivkovou“ podstatu a vektorovou rovnici vyjádřit jako rovnici Bézierovy křivky, jejíž řídicí body nejsou konstantní, ale proměnné. Oba přístupy jsou rovnocenné a vedou ke stejnému výsledku.

Postupná lineární interpolace mezi čtyřmi body

Tento postup odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy je adekvátní postupu odvození Bernsteinových polynomů (a tím i vektorové rovnice Bézierovy křivky) z části 2.2.2, který byl založen na postupné lineární interpolaci mezi dvěma body – krajními body ramene řídicího polygonu. Rameni řídicího polygonu křivky odpovídá oko řídicí sítě plochy. V případě, že je řídicí síť tvořena čtyřmi řídicími body, je výsledná Bézierova plocha totožná s plochou hyperbolického paraboloidu (viz vlastnosti uvedené v části 3.5.2). Plocha hyperbolického paraboloidu vzniká právě lineární interpolací mezi zadanými čtyřmi body.

Jestliže je počet řídicích bodů Bézierovy plochy vyšší, musíme lineární interpolaci mezi čtyřmi body opakovat. Princip postupné lineární interpolace je naznačen na obr. 3.20 a), kde je zobrazena síť řídicích bodů Bézierovy bikvadratické plochy. Tato síť je složena ze čtyř ok, jejichž mapy jsou:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} \\ \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} \\ \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Každé oko sítě považujeme za plochu hyperbolického paraboloidu. Bod pro hodnoty parametrů $(u, v) = (\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ v každém oku sítě vyjádříme jako bod na ploše hyperbolického paraboloidu (na obr. 3.20 a) je naznačen postup pro $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$):

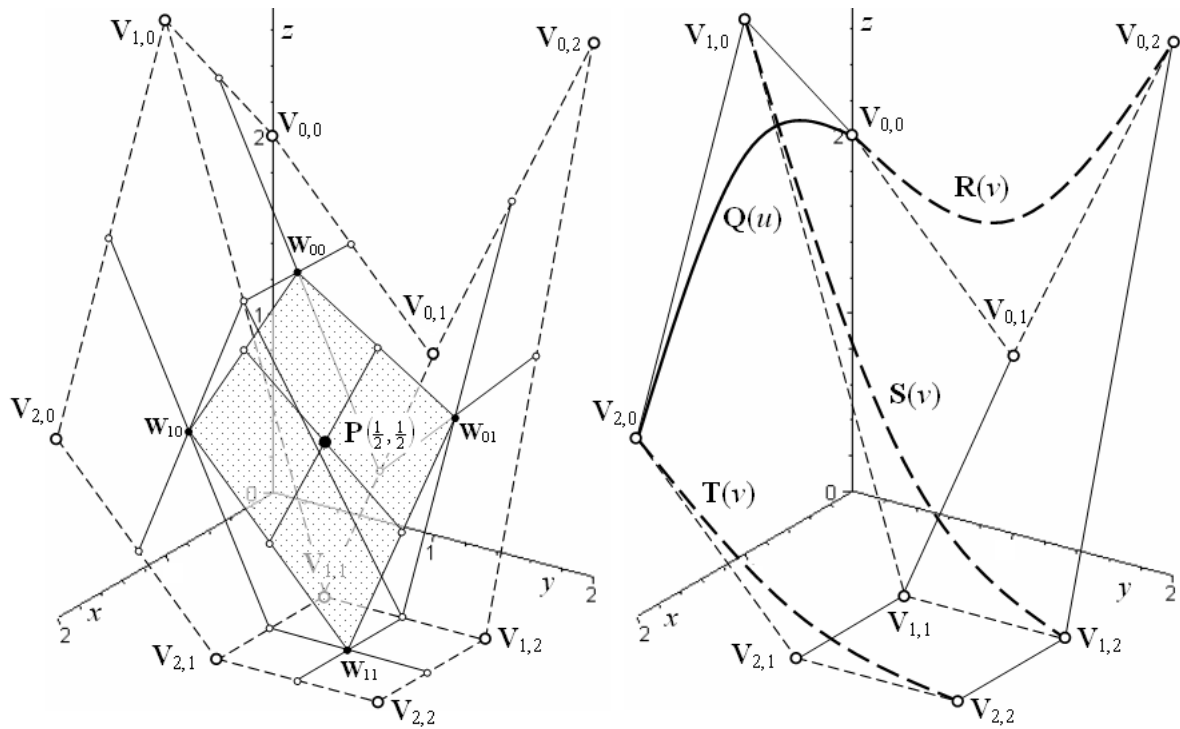
$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{00} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{V}_{0,0} + (1 - \alpha)\beta\mathbf{V}_{0,1} + \alpha(1 - \beta)\mathbf{V}_{1,0} + \alpha\beta\mathbf{V}_{1,1}, \\ \mathbf{W}_{01} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{V}_{0,1} + (1 - \alpha)\beta\mathbf{V}_{0,2} + \alpha(1 - \beta)\mathbf{V}_{1,1} + \alpha\beta\mathbf{V}_{1,2}, \\ \mathbf{W}_{10} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{V}_{1,0} + (1 - \alpha)\beta\mathbf{V}_{1,1} + \alpha(1 - \beta)\mathbf{V}_{2,0} + \alpha\beta\mathbf{V}_{2,1}, \\ \mathbf{W}_{11} &= (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{V}_{1,1} + (1 - \alpha)\beta\mathbf{V}_{1,2} + \alpha(1 - \beta)\mathbf{V}_{2,1} + \alpha\beta\mathbf{V}_{2,2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Body \mathbf{W}_{00} , \mathbf{W}_{01} , \mathbf{W}_{10} , \mathbf{W}_{11} považujeme za rohy nového oka redukované sítě řídicích bodů (v obr. 3.20 a) je toto oko vytečkováno). Bod $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ na Bézierově bikvadratické ploše vyjádříme jako bod na ploše hyperbolického paraboloidu určeného rohy \mathbf{W}_{00} , \mathbf{W}_{01} , \mathbf{W}_{10} a \mathbf{W}_{11} :

$$\mathbf{P}(\alpha, \beta) = (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{W}_{00} + (1 - \alpha)\beta\mathbf{W}_{01} + \alpha(1 - \beta)\mathbf{W}_{10} + \alpha\beta\mathbf{W}_{11}. \quad (3.44)$$

Uvažujeme-li hodnoty parametrů u a v v celém oboru parametrizace a dosadíme-li do rov. (3.44) za \mathbf{W}_{00} , \mathbf{W}_{01} , \mathbf{W}_{10} , \mathbf{W}_{11} z rov. 3.43, dostaneme po úpravách vektorovou rovnici Bézierovy bikvadratické plochy.

Stejným způsobem bychom postupovali při odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy určené sítí obsahující libovolný počet řádků a sloupců řídicích bodů. V případě, že je počet řádků a sloupců shodný (čtvercová mapa), redukuje se v poslední fázi původní řídicí síť na jediné oko. V případě, že je počet řádků a sloupců různý (obdélníková mapa), redukuje se v poslední fázi původní řídicí síť na jediné rameno řídicího polygonu.



a) Postupná lineární interpolace
mezi čtyřmi body

b) Bézierova křivka
s proměnnými řídicími body

Obrázek 3.20: K odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy

Bézierova křivka s proměnnými řídicími body

Princip tohoto postupu odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy je naznačen na obr. 3.20 b). Uvažujeme Bézierovu křivku $\mathbf{Q}(u)$, $u \in [0, 1]$, jejíž řídicí body nejsou konstantní, ale funkcí v :

$$\mathbf{Q}(u) = B_{0,2}(u)\mathbf{V}_{0,0}(v) + B_{1,2}(u)\mathbf{V}_{1,0}(v) + B_{2,2}(u)\mathbf{V}_{2,0}(v), \quad u \in [0, 1]. \quad (3.45)$$

Situaci si můžeme představit tak, že se řídicí bod $\mathbf{V}_{0,0}$ pohybuje po Bézierově křivce $\mathbf{R}(v)$, řídicí bod $\mathbf{V}_{1,0}$ se pohybuje po Bézierově křivce $\mathbf{S}(v)$ a řídicí bod $\mathbf{V}_{2,0}$ se pohybuje po Bézierově křivce $\mathbf{T}(v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{0,0}(v) &= \mathbf{R}(v) = B_{0,2}(v)\mathbf{V}_{0,0} + B_{1,2}(v)\mathbf{V}_{0,1} + B_{2,2}(v)\mathbf{V}_{0,2}, \quad v \in [0, 1], \\ \mathbf{V}_{1,0}(v) &= \mathbf{S}(v) = B_{0,2}(v)\mathbf{V}_{1,0} + B_{1,2}(v)\mathbf{V}_{1,1} + B_{2,2}(v)\mathbf{V}_{1,2}, \quad v \in [0, 1], \\ \mathbf{V}_{2,0}(v) &= \mathbf{T}(v) = B_{0,2}(v)\mathbf{V}_{2,0} + B_{1,2}(v)\mathbf{V}_{2,1} + B_{2,2}(v)\mathbf{V}_{2,2}, \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dosadíme-li do (3.45) za $\mathbf{V}_{0,0}(v)$, $\mathbf{V}_{1,0}(v)$ a $\mathbf{V}_{2,0}(v)$ z (3.46), obdržíme po úpravách vektorovou rovnici Bézierovy bikvadratické plochy. Stejně bychom postupovali v případě libovolného počtu řádků a sloupců sítě řídicích bodů, pouze bychom museli uvažovat odpovídající stupeň Bernsteinových polynomů.

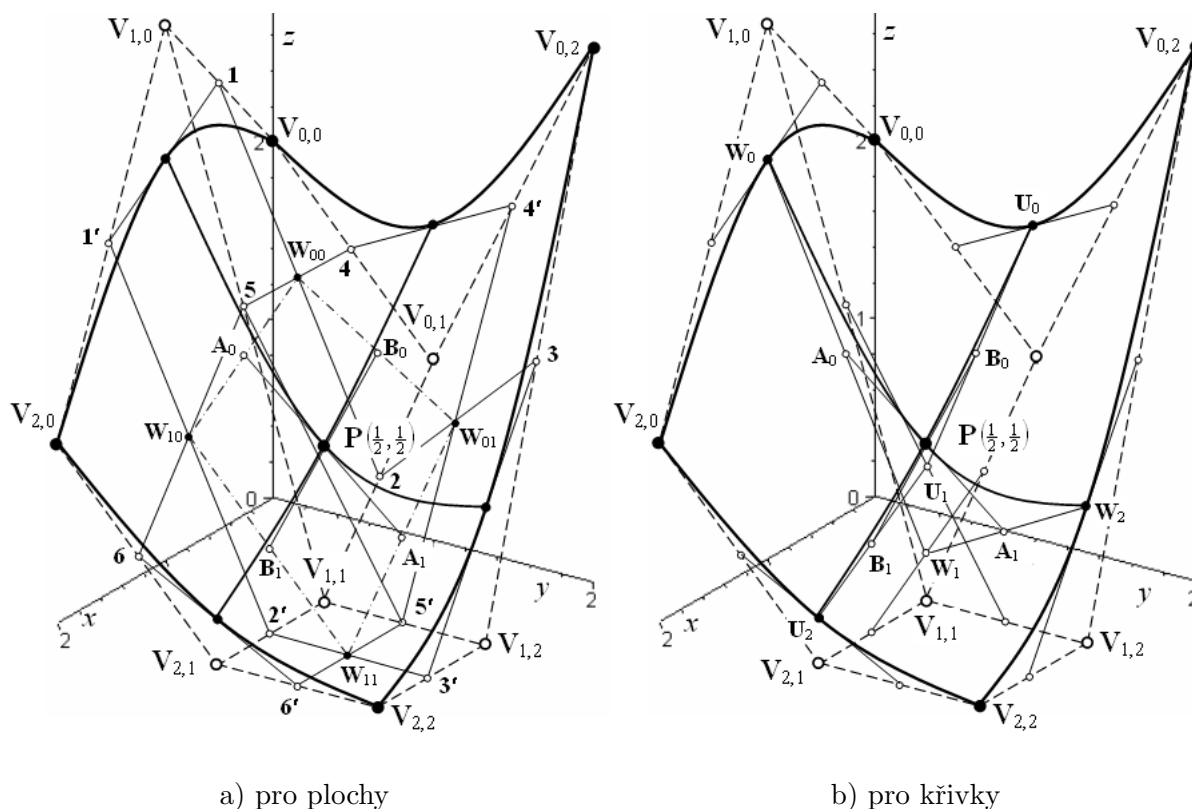
3.5.4 De Casteljaun algoritmus konstrukce bodu na Bézierově ploše

Tak jako k odvození vektorové rovnice Bézierovy plochy, můžeme i ke konstrukci bodu na Bézierově ploše de Casteljaun algoritmem přistupovat dvojím způsobem. Pokud budeme vycházet

z „plošné“ podstaty Bézierovy plochy, budeme stručně hovořit o *de Casteljau algoritmu pro plochy*, pokud budeme vycházet z „křivkové“ podstaty Bézierovy plochy, budeme stručně hovořit o *de Casteljau algoritmu pro křivky*.

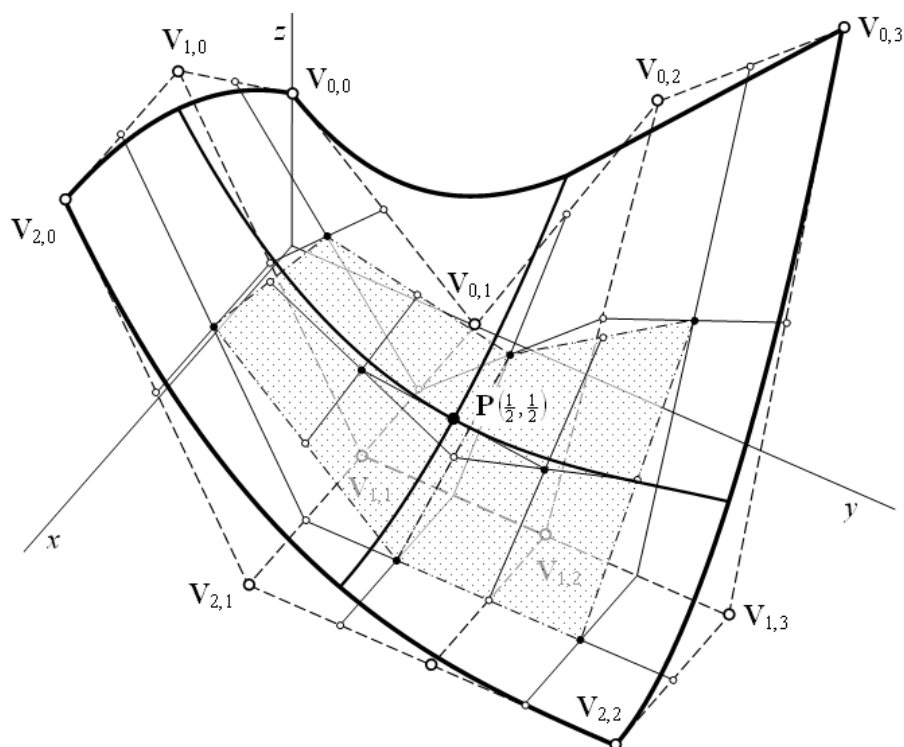
De Casteljau algoritmus pro plochy

Geometrickou interpretací postupné lineární interpolace mezi čtyřmi body je přímo de Casteljau algoritmus konstrukce bodu $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$, na Bézierově ploše $\mathbf{P}(u, v)$, viz obr. 3.21 a).



Obrázek 3.21: De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na Bézierově ploše

1. Zvolíme $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$; na obr. 3.21 a) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
2. Ramena sítě ve směru u dělíme v poměru $\alpha : (1 - \alpha)$, obdržíme body **1, 1', 2, 2', 3, 3'**.
3. Ramena sítě ve směru v dělíme v poměru $\beta : (1 - \beta)$, obdržíme body **4, 4', 5, 5', 6, 6'**.
4. Rohy nového oka redukované sítě leží v následujících průsečících:
 $\mathbf{W}_{0,0} = \mathbf{12} \cap \mathbf{45}$, $\mathbf{W}_{0,1} = \mathbf{23} \cap \mathbf{4'5'}$, $\mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{1'2'} \cap \mathbf{56}$, $\mathbf{W}_{1,1} = \mathbf{2'3'} \cap \mathbf{5'6'}$.
5. Kroky 2) až 4) opakujeme vždy pro redukovanou síť řídicích bodů a končíme, jakmile dostaneme jediné oko (při čtvercové mapě), resp. jediné rameno řídicího polygonu (při obdélníkové mapě).
 Podle obr. 3.21 a) tedy dělíme ramena $\mathbf{W}_{00}\mathbf{W}_{10}$ a $\mathbf{W}_{01}\mathbf{W}_{11}$ v poměru $\alpha : (1 - \alpha)$, obdržíme body $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$. Ramena $\mathbf{W}_{00}\mathbf{W}_{01}$ a $\mathbf{W}_{10}\mathbf{W}_{11}$ dělíme v poměru $\beta : (1 - \beta)$, obdržíme body $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$.



Obrázek 3.22: De Casteljau algoritmus pro plochy
(Bézierova plocha je určena obdélníkovou mapou)

6. V případě čtvercové mapy leží bod Bézierovy plochy $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ v průsečíku úseček spojujících dělicí body posledního oka, na obr. 3.21 a) v průsečíku úseček $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$. Tyto úsečky určují tečny k parametrickým křivkám v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$.

V případě obdélníkové mapy leží bod Bézierovy plochy $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ v dělicím bodě posledního ramene řídicího polygonu, které zároveň určuje tečnu jedné parametrické křivky, viz obr. 3.22. Tečnu druhé parametrické křivky je třeba zkonstruovat podle de Casteljau algoritmu pro křivky.

De Casteljau algoritmus pro křivky

V tomto případě aplikujeme pouze de Casteljau algoritmus pro křivky z části 2.2.3, viz obr. 3.21 b).

1. Zvolíme $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$; na obr. 3.21 b) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.
2. Pro $u = \alpha$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivkách určených řídicími polygony ve směru u . Obdržíme body $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$.
3. Pro $v = \beta$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem bod na Bézierově křivce určené řídicím polygonem $\mathbf{W}_0\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2$. Tento bod je bodem Bézierovy plochy pro $u = \alpha, v = \beta$. Poslední rameno (na obr. 3.21 b) je to rameno $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$) určuje tečnu parametrické v -křivky v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$.
4. Pro $v = \beta$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivkách určených řídicími polygony ve směru v . Obdržíme body $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$.

5. Pro $u = \alpha$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem bod na Bézierově křivce určené řídicím polygonem $\mathbf{U}_0\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$. Tento bod je opět bodem Bézierovy plochy pro $u = \alpha$, $v = \beta$. Poslední rameno (na obr. 3.21 b) je to rameno $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$) určuje tečnu parametrické u -křivky v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$.

Na obr. 3.21 jsou doplněny i konstrukce bodů na okrajových křivkách. Zde použijeme de Casteljau algoritmus pro křivky jak ho známe z části 2.2.3.

Uvědomme si, že úsečky $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$ určující tečny parametrických křivek v bodě $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ na obr. 3.21 a) jsou stejné jako úsečky $\mathbf{A}_0\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$ na obr. 3.21 b).

- **Příklad 3.15 – De Casteljau algoritmus konstrukce bodu na Bézierově ploše.** Je dána mapa Bézierovy plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 2) & (0, 1, 0) & (0, 2, 1) \\ (1, 0, 0) & (1, 1, 0) & (1, 2, 0) \\ (2, 0, 1) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) \end{pmatrix}.$$

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135$, $q = 2\sqrt{2} : 3$, jednotka = 3 cm), zobrazte síť řídicích bodů a de Casteljau algoritmem zkonstruujte body pro hodnoty parametru $u, v = 0, \frac{1}{2}, 1$. Pro konstrukci bodu na ploše použijte a) de Casteljau algoritmus pro plochy, b) de Casteljau algoritmus pro křivky. Načrtněte okrajové Bézierovy křivky a parametrické křivky procházející bodem $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Vyznačte tečné roviny v rozích.

Řešení. Konstrukce bodu na Bézierově ploše de Casteljau algoritmem pro plochy je zobrazena na obr. 3.23 a), na obr. 3.23 b) je nakreslena konstrukce téhož bodu de Casteljau algoritmem pro křivky. \square

3.5.5 Plátování – pláty z Bézierovy plochy

Budeme uvažovat dva pláty z Bézierovy bikubické plochy a vyšetříme podmínky jejich C^0 , C^1 a C^2 spojitého napojení. První plát označíme $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, a předpokládáme, že je určen *známými* řídicími body. K jeho okraji $\mathbf{P}(u, 1)$, $u \in [0, 1]$, připojíme druhý plát, který označíme $\mathbf{R}(s, t)$, $(s, t) \in [0, 1]^2$, jehož řídicí body jsou *neznámé*. Vektorové rovnice obou plátů jsou následující:

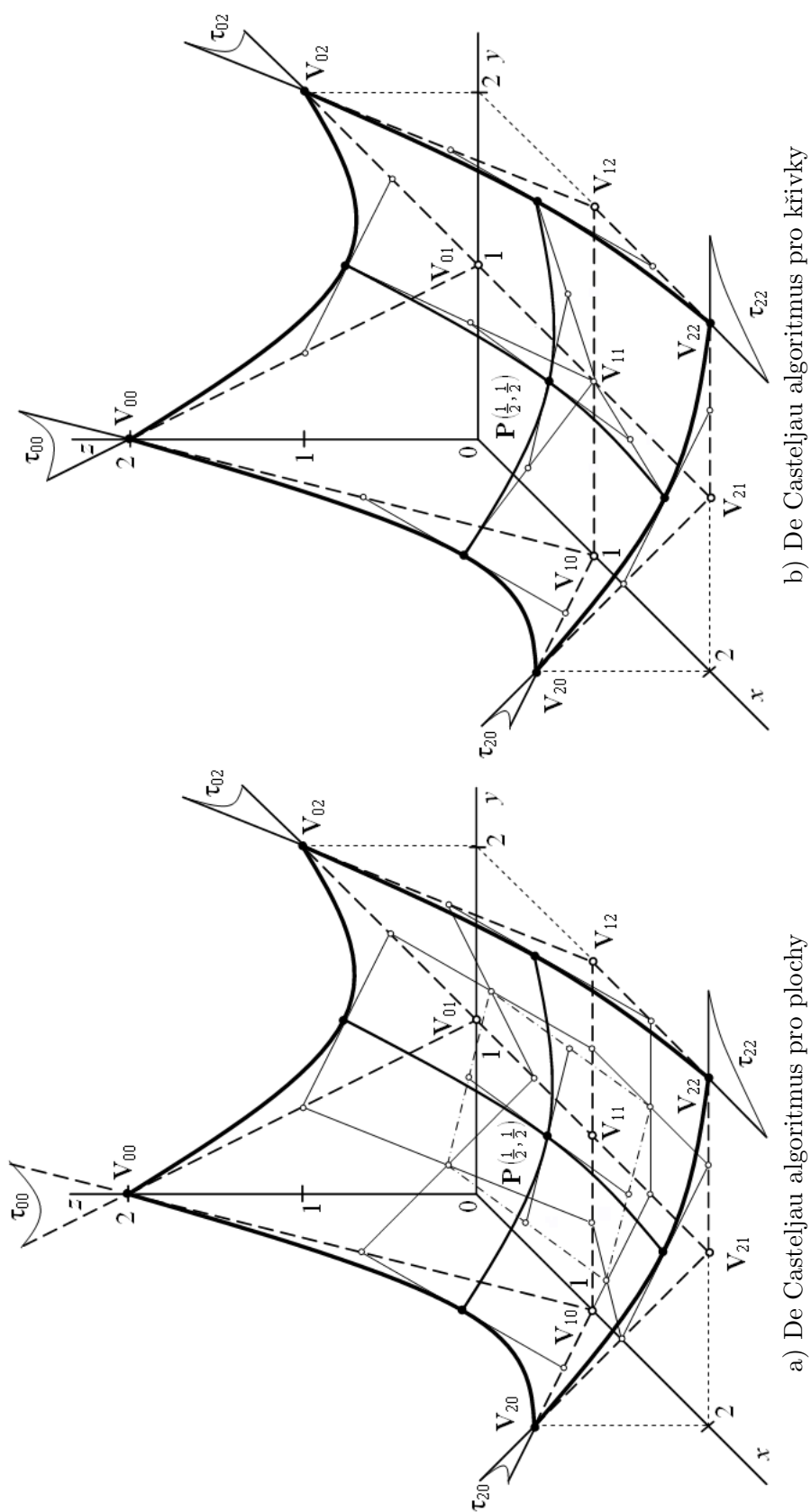
$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{B}(u) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}(t), \quad (s, t) \in [0, 1]^2, \quad (3.48)$$

kde $\mathbf{B}(w)$, $w = u, v, s, t$, jsou vektory Bernsteinových polynomů 3. stupně a \mathbf{M} , resp. \mathbf{N} je mapa prvního, resp. druhého plátu

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \\ \mathbf{V}_{3,0} & \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{V}_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{0,0} & \mathbf{W}_{0,1} & \mathbf{W}_{0,2} & \mathbf{W}_{0,3} \\ \mathbf{W}_{1,0} & \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,2} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{2,0} & \mathbf{W}_{2,1} & \mathbf{W}_{2,2} & \mathbf{W}_{2,3} \\ \mathbf{W}_{3,0} & \mathbf{W}_{3,1} & \mathbf{W}_{3,2} & \mathbf{W}_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Preferujeme nyní „křivkovou“ podstatu Bézierovy plochy a považujeme oba pláty za Bézierovy kubiky ve směru u s proměnnými řídicími body, které se pohybují po Bézierových kubikách



Obrázek 3.23: Konstrukce bodu na Bézierově ploše de Casteljau algoritmem

určených řídicími polygony ve směru v . Je zřejmé, že k zajištění spojitosti plátů ve směru v stačí zajistit spojitost Bézierových kubik určených řídicími polygony ve směru v , tedy řádkovými řídicími polygony. K tomu můžeme využít podmínek C^0 , C^1 a C^2 spojitosti napojení dvou Bézierových kubik jak jsme si je odvodili v části 2.2.4.

Mapu \mathbf{N} plátu $\mathbf{R}(s, t)$ lze pomocí zadaných řídicích bodů mapy \mathbf{M} plátu $\mathbf{P}(u, v)$ vyjádřit takto:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{0,0} = \mathbf{V}_{0,3} & \mathbf{W}_{0,1} = 2\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{W}_{0,2} = 4(\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2}) + \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{W}_{0,3} \\ \mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{V}_{1,3} & \mathbf{W}_{1,1} = 2\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{W}_{1,2} = 4(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{1,2}) + \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{2,0} = \mathbf{V}_{2,3} & \mathbf{W}_{2,1} = 2\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{W}_{2,2} = 4(\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{2,2}) + \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{W}_{2,3} \\ \mathbf{W}_{3,0} = \mathbf{V}_{3,3} & \mathbf{W}_{3,1} = 2\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{3,2} & \mathbf{W}_{3,2} = 4(\mathbf{V}_{3,3} - \mathbf{V}_{3,2}) + \mathbf{V}_{3,1} & \mathbf{W}_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Spojitost dvou Bézierových ploch napojovaných ve směru v je tedy dána spojitostí napojení Bézierových kubik určených řádkovými řídicími polygony, tj.:

- Požadujeme-li C^0 spojitost obou plátů, musí mít řídicí body $\mathbf{W}_{i,0}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou nultým sloupcem mapy (3.50), poloha ostatních řídicích bodů může být libovolná.
- Požadujeme-li C^1 spojitost obou plátů, musí mít řídicí body $\mathbf{W}_{i,0}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou nultým sloupcem mapy (3.50), řídicí body $\mathbf{W}_{i,1}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou prvním sloupcem mapy (3.50) a poloha ostatních řídicích bodů je libovolná.
- Požadujeme-li C^2 spojitost obou plátů, musí mít řídicí body $\mathbf{W}_{i,0}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou nultým sloupcem mapy (3.50), řídicí body $\mathbf{W}_{i,1}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou prvním sloupcem mapy (3.50), řídicí body $\mathbf{W}_{i,2}$, $i = 0, 1, 2, 3$, polohu určenou druhým sloupcem mapy (3.50) a pouze poloha řídicích bodů $\mathbf{W}_{i,3}$, $i = 0, 1, 2, 3$, je libovolná.

Snadno lze také ověřit, že splňují-li řídicí body mapy \mathbf{N} polohu vyjádřenou v (3.50), je automaticky zajištěna totožnost zkrutů podél společného okraje, tedy že platí $\mathbf{P}^{uv}(u, 1) = \mathbf{R}^{st}(s, 0)$.

Obdobně bychom odvodili podmínky spojitosti při napojování dvou plátů z Bézierových bikubických ploch ve směru parametru u . Zde by požadovaná spojitost plátů byla dána spojitostí napojení Bézierových kubik určených sloupcovými řídicími polygony.

Obecně lze říci, že spojitost podél libovolného společného okraje dvou plátů z Bézierovy plochy je vždy dána spojitostí Bézierových kubik určených řádkovými, resp. sloupcovými řídicími polygony.

Lze dokázat, že výše stanovené podmínky pro zajištění C^0 , C^1 a C^2 spojitosti dvou plátů z Bézierovy bikubické plochy platí pro C^0 , C^1 i C^2 spojitě napojení dvou plátů z Bézierových ploch libovolného stupně.

■ **Příklad 3.16 – Plátování – pláty z Bézierovy plochy.** Je dána mapa \mathbf{M} plátu z Bézierovy kvadraticko-kubické plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, určené sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou

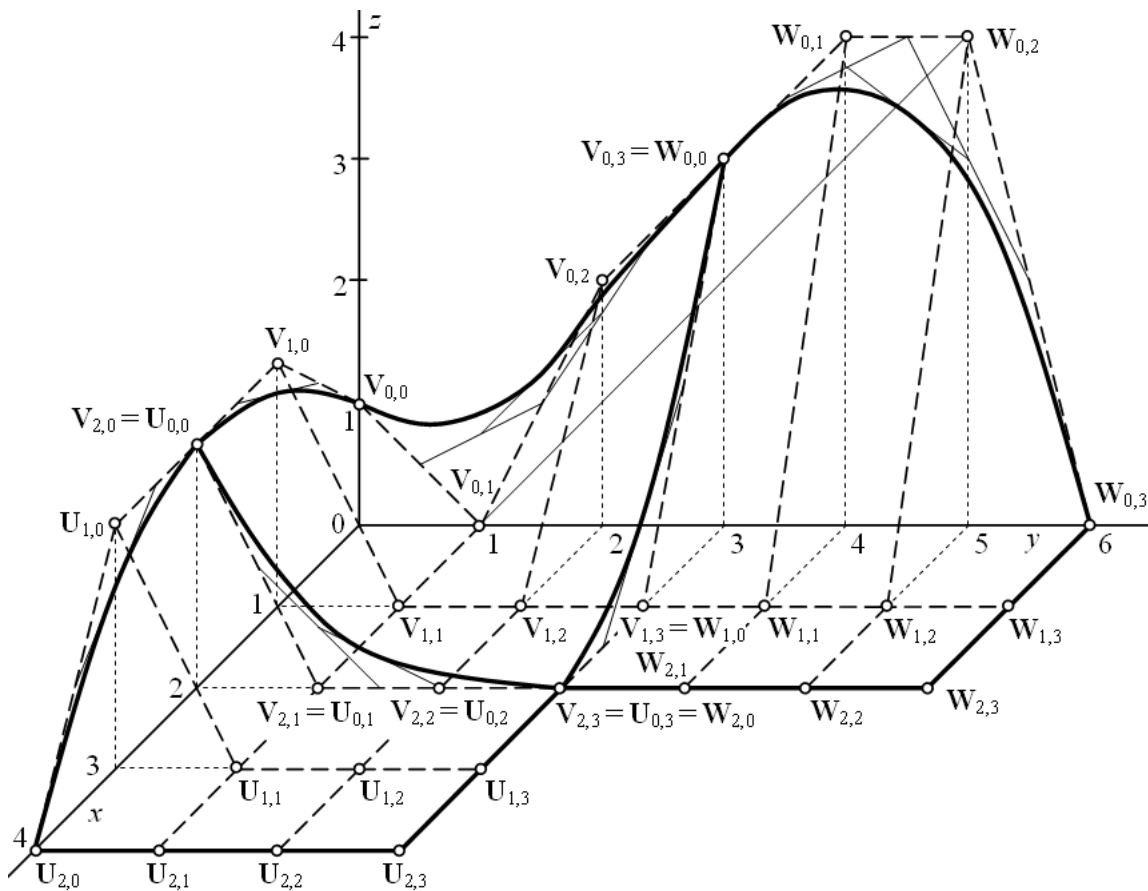
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \mathbf{V}_{0,2} & \mathbf{V}_{0,3} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \mathbf{V}_{1,2} & \mathbf{V}_{1,3} \\ \mathbf{V}_{2,0} & \mathbf{V}_{2,1} & \mathbf{V}_{2,2} & \mathbf{V}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0, 1) & (0, 1, 0) & (0, 2, 2) & (0, 3, 3) \\ (1, 0, 2) & (1, 1, 0) & (1, 2, 0) & (1, 3, 0) \\ (2, 0, 2) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 0) \end{pmatrix}.$$

Podél okraje $\mathbf{V}_{0,3}\mathbf{V}_{1,3}\mathbf{V}_{2,3}$ je připojen s C^2 spojitostí plát z Bézierovy kvadraticko-kubické plochy $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$ a podél okraje $\mathbf{V}_{2,0}\mathbf{V}_{2,1}\mathbf{V}_{2,2}\mathbf{V}_{2,3}$ je připojen s C^1 spojitostí

plát z Bézierovy kvadraticko-kubické plochy $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Oba připojené pláty jsou určeny sítí nad jednotkovou čtvercovou mřížkou.

V kosoúhlém promítání ($\omega = 135$, $q = 2\sqrt{2} : 3$, jednotka = 3 cm) sestrojte síť řídicích bodů plátu $\mathbf{P}(u, v)$. Určete konstrukcí a výpočtem polohu řídicích bodů obou připojených plátů tak, abyste zajistili požadovanou spojitost podél obou společných okrajů. z -ové souřadnice řídicích bodů, jejichž poloha požadovanou spojitost neovlivní, volte nulové. De Casteljau algoritmem sestrojte body na okrajových křivkách všech plátů pro hodnotu příslušného parametru $\frac{1}{2}$. Okrajové křivky všech plátů načrtněte.

Řešení. Na obr. 3.24 je provedeno konstrukční řešení.



Obrázek 3.24: Plátování – pláty z Bézierovy plochy

Řídicí body plátu $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, označíme $\mathbf{W}_{i,j}$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3$. Z podmínky C^0 spojitosti plyne:

$$\mathbf{W}_{0,0} = \mathbf{V}_{0,3} = (0, 3, 3), \quad \mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{V}_{1,3} = (1, 3, 0), \quad \mathbf{W}_{2,0} = \mathbf{V}_{2,3} = (2, 3, 0).$$

Z podmínky C^1 spojitosti plyne:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{0,1} &= 2\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2} = 2(0, 3, 3) - (0, 2, 2) = (0, 4, 4), \\ \mathbf{W}_{1,1} &= 2\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{1,2} = 2(1, 3, 0) - (1, 2, 0) = (1, 4, 0), \\ \mathbf{W}_{2,1} &= 2\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{2,2} = 2(2, 3, 0) - (2, 2, 0) = (2, 4, 0). \end{aligned}$$

Z podmínky C^2 spojitosti plyne:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{0,2} &= 4(\mathbf{V}_{0,3} - \mathbf{V}_{0,2}) + \mathbf{V}_{0,1} = 4((0, 3, 3) - (0, 2, 2)) + (0, 1, 0) = (0, 5, 4), \\ \mathbf{W}_{1,2} &= 4(\mathbf{V}_{1,3} - \mathbf{V}_{1,2}) + \mathbf{V}_{1,1} = 4((1, 3, 0) - (1, 2, 0)) + (1, 1, 0) = (1, 5, 0), \\ \mathbf{W}_{2,2} &= 4(\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{2,2}) + \mathbf{V}_{2,1} = 4((2, 3, 0) - (2, 2, 0)) + (2, 1, 0) = (2, 5, 0).\end{aligned}$$

Mapa plátu $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{0,0} & \mathbf{W}_{0,1} & \mathbf{W}_{0,2} & \mathbf{W}_{0,3} \\ \mathbf{W}_{1,0} & \mathbf{W}_{1,1} & \mathbf{W}_{1,2} & \mathbf{W}_{1,3} \\ \mathbf{W}_{2,0} & \mathbf{W}_{2,1} & \mathbf{W}_{2,2} & \mathbf{W}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 3, 3) & (0, 4, 4) & (0, 5, 4) & (0, 6, 0) \\ (1, 3, 0) & (1, 4, 0) & (1, 5, 0) & (1, 6, 0) \\ (2, 3, 0) & (2, 4, 0) & (2, 5, 0) & (2, 6, 0) \end{pmatrix}.$$

z -ové souřadnice řídicích bodů $\mathbf{W}_{0,3}$, $\mathbf{W}_{1,3}$ a $\mathbf{W}_{2,3}$ jsou nulové, neboť poloha těchto řídicích bodů požadovanou spojitost neovlivňuje.

Řídicí body plátu $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, označíme $\mathbf{U}_{i,j}$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2$. Z podmínky C^0 spojitosti plyne:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{0,0} &= \mathbf{V}_{2,0} = (2, 0, 2), & \mathbf{U}_{0,1} &= \mathbf{V}_{2,1} = (2, 1, 0), \\ \mathbf{U}_{0,2} &= \mathbf{V}_{2,2} = (2, 2, 0), & \mathbf{U}_{0,3} &= \mathbf{V}_{2,3} = (2, 3, 0).\end{aligned}$$

Z podmínky C^1 spojitosti plyne:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{1,0} &= 2\mathbf{V}_{2,0} - \mathbf{V}_{1,0} = 2(2, 0, 2) - (1, 0, 2) = (3, 0, 2), \\ \mathbf{U}_{1,1} &= 2\mathbf{V}_{2,1} - \mathbf{V}_{1,1} = 2(2, 1, 0) - (1, 1, 0) = (3, 1, 0), \\ \mathbf{U}_{1,2} &= 2\mathbf{V}_{2,2} - \mathbf{V}_{1,2} = 2(2, 2, 0) - (1, 2, 0) = (3, 2, 0), \\ \mathbf{U}_{1,3} &= 2\mathbf{V}_{2,3} - \mathbf{V}_{1,3} = 2(2, 3, 0) - (1, 3, 0) = (3, 3, 0).\end{aligned}$$

Mapa plátu $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0,0} & \mathbf{U}_{0,1} & \mathbf{U}_{0,2} & \mathbf{U}_{0,3} \\ \mathbf{U}_{1,0} & \mathbf{U}_{1,1} & \mathbf{U}_{1,2} & \mathbf{U}_{1,3} \\ \mathbf{U}_{2,0} & \mathbf{U}_{2,1} & \mathbf{U}_{2,2} & \mathbf{U}_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2, 0, 2) & (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 0) \\ (3, 0, 2) & (3, 1, 0) & (3, 2, 0) & (3, 3, 0) \\ (4, 0, 0) & (4, 1, 0) & (4, 2, 0) & (4, 3, 0) \end{pmatrix}.$$

z -ové souřadnice řídicích bodů $\mathbf{U}_{2,0}$, $\mathbf{U}_{2,1}$, $\mathbf{U}_{2,2}$ a $\mathbf{U}_{2,3}$ jsou nulové, neboť poloha těchto řídicích bodů požadovanou spojitost neovlivňuje. \square

3.5.6 Bézierova plocha v Rhinu

Už víme, že směr parametrů u a v plochy v Rhinu je dán systémem. Po vytvoření plochy již nelze směry parametrů měnit a v řadě případů je nelze ani předem nijak ovlivnit. U Bézierovy plochy však můžeme vhodným pořadím zadávaných vstupních dat rozhodnout o směru parametrů u a v sami. Předpokládejme dále, že v souladu s definicí 3.4 je parametr u Bézierovy plochy stupně m a parametr v je stupně n .

Bézierova plocha stupně $m \times n$ – Příkaz: *Plocha z mřížky řídicích bodů* \rightarrow v příkazovém řádku zvolit *Stupeň*: zadat stupeň m Bézierovy plochy ve směru $u \rightarrow$ Počet bodů v řádku: zadat $m + 1$ (tj. počet řádků mapy) \rightarrow v příkazovém řádku zvolit *Stupeň*: zadat stupeň n Bézierovy plochy ve směru $v \rightarrow$ Počet bodů ve sloupci: zadat $n + 1$ (tj. počet sloupců

mapy) \rightarrow Bod(1 z $m + 1$, 1 z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{0,0} \rightarrow$ Enter \rightarrow Bod(1 z $m + 1$, 2 z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{0,1} \rightarrow \dots \rightarrow$ Bod($m + 1$ z $m + 1$, $n + 1$ z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{m,n} \rightarrow$ Enter. Nakreslí se Bézierova plocha určená sítí $(m + 1) \times (n + 1)$ řídicích bodů se směrem a orientací parametrů u a v podle očekávání, tj. parametr u roste s přibývajícím indexem řádků, parametr v roste s přibývajícím indexem sloupců, viz obr. 3.25 a).

Poznámky:

1) Uvědomme si, že vstupní data se v tomto případě úmyslně nezadávají v souladu s výzvami v příkazovém řádku. Záměrně zadáváme data z transponované matice (mapy plochy) namísto původní, abychom zajistili směr parametrů u a v podle definice 3.4 a podle zvyklostí.

2) Na obr. 3.25 b) je uvedena část výpisu struktury (viz dále) takto zadané Bézierovy plochy, konkrétně kartézské souřadnice jednotlivých řídicích bodů. Je zřejmé, že uspořádání řídicích bodů přesně odpovídá mapě Bézierovy plochy z definice 3.4.

Bézierova plocha stupně $n \times m$ – Příkaz: *Plocha z mřížky řídicích bodů* \rightarrow v příkazovém řádku zvolit *Stupeň*: zadat stupeň n Bézierovy plochy ve směru $v \rightarrow$ Počet bodů v řádku: zadat $n + 1$ (tj. počet sloupců mapy) \rightarrow v příkazovém řádku zvolit *Stupeň*: zadat stupeň m Bézierovy plochy ve směru $u \rightarrow$ Počet bodů ve sloupci: zadat $m + 1$ (tj. počet řádků mapy) \rightarrow Bod(1 z $n + 1$, 1 z $m + 1$): zadat $\mathbf{V}_{0,0} \rightarrow$ Enter Bod(1 z $n + 1$, 2 z $m + 1$): zadat $\mathbf{V}_{1,0} \rightarrow \dots \rightarrow$ Bod($n + 1$ z $n + 1$, $m + 1$ z $m + 1$): zadat $\mathbf{V}_{m,n} \rightarrow$ Enter. Nakreslí se Bézierova plocha určená sítí $(n + 1) \times (m + 1)$ řídicích bodů s prohozeným směrem parametrů u a v , tj. parametr u roste podél sloupců, parametr v roste podél řádků, viz obr. 3.26 a).

Poznámky:

1) V tomto případě přesně odpovídají zadávaná data výzvám v příkazovém řádku.

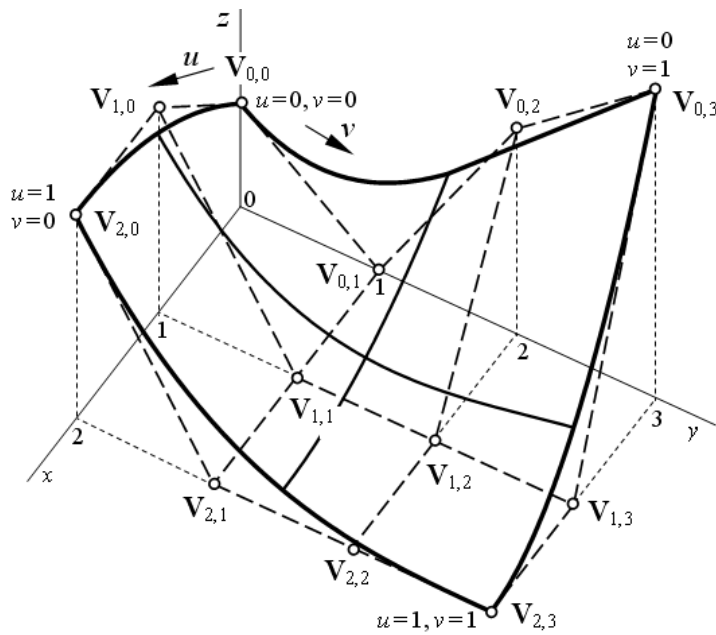
2) Na obr. 3.26 b) je uvedena část výpisu struktury (viz dále) takto zadané Bézierovy plochy, konkrétně kartézské souřadnice jednotlivých řídicích bodů. Je zřejmé, že uspořádání řídicích bodů neodpovídá mapě Bézierovy plochy z definice 3.4, ale mapě, která představuje transponovanou matici.

Síť řídicích bodů – Síť řídicích bodů (body i ramena) Bézierovy plochy lze zobrazit/skrýt příkazem *Zapnout řídicí body/Vypnout řídicí body* \rightarrow Vyberte objekty pro zobrazení řídicích bodů: kliknout na plochu. Řídicí body se zobrazí jako dočasně viditelné body, ramena se zobrazí jako dočasně viditelné úsečky tečkovanou čarou. Zobrazené řídicí body lze uchopit s režimem *Uchopování bodů*.

Řídicí body lze navíc kreslit současně při vytváření Bézierovy plochy příkazem *Plocha z mřížky řídicích bodů*, zvolíme-li v příkazovém řádku *ZachovatBody=Ano*. Po dokončení příkazu se řídicí body nakreslí jako tečky a dohromady tvoří společnou samostatnou entitu, tzv. *mrak bodů*.

Poznámka: Síť řídicích bodů nakreslené Bézierovy plochy lze vytvořit příkazem *Vyjmout síť z řídicího polygonu NURBS* (\rightarrow Vyberte křivky nebo plochy pro vyjmutí řídicího polygonu: kliknout na plochu \rightarrow Enter), ale výsledek tohoto příkazu nesplní očekávání. Nakreslí se polygonová síť, tj. plocha složená z uzavřených polygonů, která přesně interpoluje síť řídicích bodů Bézierovy plochy. Její vrcholy ležící v řídicích bodech lze uchopit se zapnutým režimem *Uchopování bodů*. S hranami nelze pracovat jako s úsečkami, neboť polygonovou síť nelze rozložit.

Řádkové a sloupcové řídicí polygony – Potřebujeme-li pracovat s jednotlivými rameny rádkových a sloupcových řídicích polygonů jako s úsečkami (např. při konstrukci bodu na



a) Směr a orientace parametrů u a v

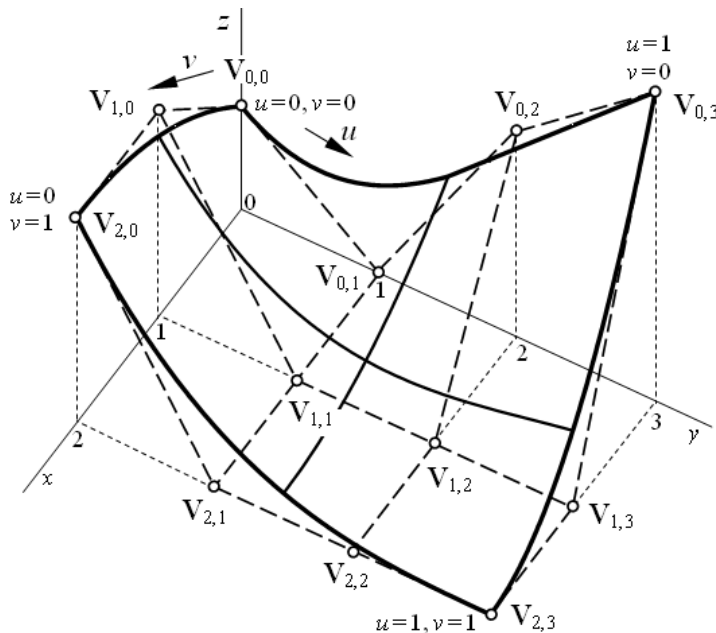
- CV[0] [0] (0,0,1)
- CV[0] [1] (0,1,0)
- CV[0] [2] (0,2,2)
- CV[0] [3] (0,3,3)

- CV[1] [0] (1,0,2)
- CV[1] [1] (1,1,0)
- CV[1] [2] (1,2,0)
- CV[1] [3] (1,3,0)

- CV[2] [0] (2,0,2)
- CV[2] [1] (2,1,0)
- CV[2] [2] (2,2,0)
- CV[2] [3] (2,3,0)

b) Výpis struktury

Obrázek 3.25: Bézierova plocha stupně $m \times n$



a) Směr a orientace parametrů u a v

- CV[0] [0] (0,0,1)
- CV[0] [1] (1,0,2)
- CV[0] [2] (2,0,2)

- CV[1] [0] (0,1,0)
- CV[1] [1] (1,1,0)
- CV[1] [2] (2,1,0)

- CV[2] [0] (0,2,2)
- CV[2] [1] (1,2,0)
- CV[2] [2] (2,2,0)

- CV[3] [0] (0,3,3)
- CV[3] [1] (1,3,0)
- CV[3] [2] (2,3,0)

b) Výpis struktury

Obrázek 3.26: Bézierova plocha stupně $n \times m$

Bézierově ploše de Casteljaou algoritmem), lze řádkové a sloupcové řídicí polygony vytvořit jako řídicí polygon předem nakreslené Bézierovy křivky postupem uvedeným v části 2.2.5. Pro další práci nepotřebné Bézierovy křivky po vytvoření řídicích polygonů vymažeme.

Ramena sítě řídicích bodů lze také nakreslit příkazem *Samostatné úsečky* se zapnutým režimem *Uchopování bodů*.

Modifikace tvaru Bézierovy plochy – Tvar Bézierovy plochy lze modifikovat následujícími doporučenými způsoby:

1) Přemístěním zobrazených řídicích bodů. Cílovou polohu řídicího bodu lze zadat pouze kliknutím (nikoliv např. zadáním nových souřadnic z klávesnice), proto je vhodné nejprve nakreslit v cílové poloze bod jako samostatnou entitu a řídicí bod přesně přemístit do cílové polohy se zapnutým režimem *Uchopování bodů*. Řídicí body Bézierovy plochy nelze vymazat (na rozdíl od řídicích bodů Bézierovy křivky) ani je nelze přidávat.

2) Editací tečen v bodě Bézierovy plochy příkazem *Editor tečen* → Vyberte křivku nebo plochu pro úpravy: kliknout na plochu. Zobrazí se dvě tečny k parametrickým křivkám v bodě kliknutí. Přemístěním jejich koncových bodů lze změnit tvar Bézierovy plochy. Sít řídicích bodů se editací tečen změní automaticky.

Pozor! Pro úpravu tvaru Bézierovy plochy nepoužíváme příkazy *Vložit uzel* a *Odstranit uzel*, jejichž důsledkem je segmentace plochy a neuniformní parametrizace plochy (obor parametrizace jednotlivých plátů plochy je různý, nikoliv $[0, 1]^2$). Nepoužíváme také příkaz *Změnit váhu*, který vede na racionální parametrizaci plochy. Po těchto úpravách již není původní plocha Bézierovou plochou, ale obecně NURBS plochou, viz [10].

De Casteljaou algoritmus – De Casteljaou algoritmus pro křivky lze realizovat podle postupu uvedeném v části 2.2.5. De Casteljaou algoritmus pro plochy předpokládá, že jsou vytvořené všechna ramena sítě řídicích bodů jako samostatné úsečky. Samotná konstrukce potom probíhá přesně podle postupu uvedeném v části 3.5.4.

Napojování plátů z Bézierových ploch – Konstrukci polohy řídicích bodů napojovaného plátu z Bézierovy plochy si můžeme usnadnit postupem uvedeným v části 2.2.5, který aplikujeme na jednotlivé řádkové nebo sloupcové řídicí polygony.

Vztah Bézierovy bikubické plochy a Coonsovy bilineární plochy – Předpokládejme, že je nakreslena Coonsova bilineární plocha určená okrajovými Bézierovými kubikami. Sít řídicích bodů této Coonsovy bilineární plochy je totožná se sítí řídicích bodů Bézierovy bikubické plochy, která má stejnou vektorovou rovnici jako výchozí Coonsova bilineární plocha.

Sít řídicích bodů Coonsovy bilineární plochy zobrazíme příkazem *Zapnout řídicí body* (stejně jako sít Bézierovy plochy). Kartézské souřadnice jednotlivých řídicích bodů můžeme zjistit příkazem *Vyhodnotit bod*, viz 1.4.1. Kartézské souřadnice všech řídicích bodů zjistíme ve výpisu struktury plochy, viz dále.

Výpis struktury Bézierovy plochy – Příkaz: *Výpis databáze objektu* → Vyberte objekty pro výpis podrobných informací: kliknout na Bézierovu plochu → Enter. Zobrazí se dialogové okno *Výpis*, ve kterém se zobrazují podrobné informace. Pro nás jsou užitečné následující informace (předpokládáme výpis Bézierovy plochy z obr. 3.25):

- **order = (m+1)x(n+1)**: plocha je řádu $(m + 1)$, tedy m -tého stupně ve směru parametru u , a řádu $(n + 1)$, tedy n -tého stupně ve směru parametru v ,

- `cv_count = (m+1)x(n+1)`: počet řádků řídicích bodů je $m+1$, počet sloupců řídicích bodů je $n+1$,
- `Control Points = (m+1)x(n+1) non-rational points`: celkový počet řídicích bodů je $(m+1) \times (n+1)$,
- `index value` .. výpis řídicích bodů a jejich globálních kartézských souřadnic, např.:

index	value
CV[0][0]	(0,0,1)
CV[0][1]	(0,1,0)
CV[0][2]	(0,2,2)
CV[0][3]	(0,3,3)
CV[1][0]	(1,0,2)
CV[1][1]	(1,1,0)
CV[1][2]	(1,2,0)
CV[1][3]	(1,3,0)
CV[2][0]	(2,0,2)
CV[2][1]	(2,1,0)
CV[2][2]	(2,2,0)
CV[2][3]	(2,3,0)

Poznámky:

1) Informace je možné z dialogového okna zkopírovat do schránky Windows a vložit do výpočetního systému (Maple, Mathematica, ...), kde je lze (po nezbytné editaci) použít jako vstupní data výpočtu.

2) Podrobné informace lze získat pro libovolný objekt Rhina, tedy i pro plochy, kterými jsme se zabývali v předcházejících částech této kapitoly.

- **Cvičení 3.10** Nakreslete v Rhinu Bézierovy plochy z obr. 3.25 a z obr. 3.26 přesně podle uvedených postupů. Nakreslete body ploch pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.1, \dots, 1$ a $u = 0, 0.1, \dots, 1, v = 0$, a jimi procházející parametrické křivky. Dobře si uvědomte rozdíl mezi oběma způsoby zadání Bézierovy plochy a nadále používejte pouze první způsob, tj. podle obr. 3.25.

- **Cvičení 3.11 – Vztah Bézierovy bikubické a Coonsovy bilineární plochy.** Nakreslete v Rhinu Coonsovu bilineární plochu $\mathbf{P}_C(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, z příkladu 3.14.

Zobrazte řídicí síť této plochy a zjistěte kartézské souřadnice vnitřních řídicích bodů. Porovnejte je s vypočtenými hodnotami.

Nakreslete Bézierovu plochu $\mathbf{P}_B(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, příkazem *Plocha z mřížky řídicích bodů*, jejíž řídicí body zadávejte kliknutím (se zapnutým režimem *Uchopování bodů*) do zobrazených řídicích bodů plochy $\mathbf{P}_C(u, v)$.

Presvědčte se o tom, že plochy $\mathbf{P}_C(u, v)$ a $\mathbf{P}_B(u, v)$ jsou totožné (změňte barvu jedné z ploch a zapněte *Stínované zobrazení*).

- **Příklad 3.17 – Využití vztahu Bézierovy bikubické a Coonsovy bilineární plochy při C^2 spojitém plátování.** Nakreslete plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, z příkladu 3.6.

a) K plátu $\mathbf{P}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{P}_1(u)$ plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích

bodů Bézierových kubik $\mathbf{R}_0(v)$ a $\mathbf{R}_1(v)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{P}_1(v)$. Volný okraj $\mathbf{R}_1(u)$ je úsečka v rovině (x, y) .

K plátu $\mathbf{P}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{P}_1(v)$ plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{S}_0(u)$ a $\mathbf{S}_1(u)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{P}_0(u)$ a $\mathbf{P}_1(u)$. Volný okraj $\mathbf{S}_1(v)$ je úsečka v rovině (x, y) .

K plátům $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{R}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{S}_1(u)$ a $\mathbf{R}_1(v)$ plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{T}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{T}_1(u)$ a $\mathbf{T}_1(v)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{S}_1(v)$ a $\mathbf{R}_1(v)$. z -ové souřadnice řídicích bodů, jejichž poloha C^2 spojitost okrajů neovlivní, jsou nulové.

Určete řídicí body okrajových Bézierových kubik plátu $\mathbf{T}(u, v)$, jejichž poloha neovlivní požadovanou C^2 spojitost okrajů.

Analyzujte dosaženou spojitost napojení plátů zebřími pruhy.

b) Využijte vztah mezi Bézierovou bikubickou a Coonsovou bilineární plochou (viz část 3.5.2) a konstrukcí určete takovou polohu vnitřních řídicích bodů plátů $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$, která zajistí C^2 spojitost celé plochy tvořené všemi čtyřmi pláty. Přemístěte vnitřní řídicí body plátů $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$ do jejich nových poloh a dosaženou spojitost ověřte zebřími pruhy.

Lze po této úpravě považovat pláty $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$ stále ještě za pláty z Coonsovy bilineární plochy?

Řešení. a) Na obr. 3.27 a) jsou nakresleny okrajové křivky plátů $\mathbf{P}(u, v)$, $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$ z Coonsových bilineárních ploch. Zároveň jsou zobrazeny sítě řídicích bodů Bézierových bikubických ploch, které jsou totožné s Coonsovými bilineárními plochami. Parametrické křivky, které se v Rhinu zobrazují automaticky, jsou vyznačeny středně silnou čarou.

Pláty z Coonsovy bilineární plochy jsou napojeny pouze s C^0 spojitostí, viz příklad 3.7. Tato spojitost je velmi dobře patrná na obr. 3.27 a) v bodě napojení parametrické u -křivky $\mathbf{R}(u, \frac{1}{2})$ na parametrickou u -křivku $\mathbf{T}(u, \frac{1}{2})$ a v bodě napojení parametrické v -křivky $\mathbf{S}(\frac{1}{2}, v)$ na parametrickou v -křivku $\mathbf{T}(\frac{1}{2}, v)$. Zřetelně se C^0 spojitost potvrzuje i při zobrazení zebřích pruhů, jak je patrné z obr. 3.27 b).

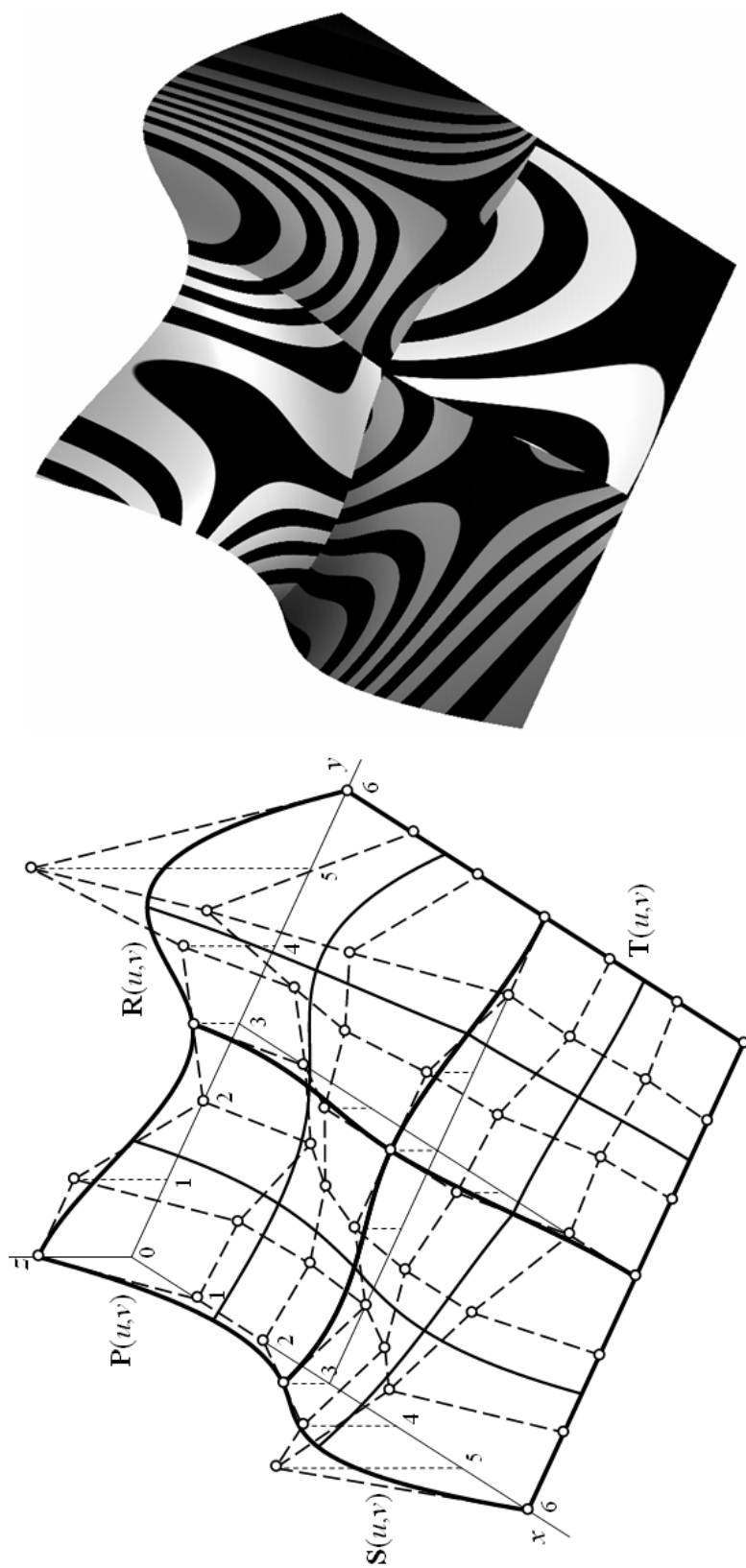
Řídicí body okrajové Bézierovy kubiky $\mathbf{T}_0(v)$, resp. $\mathbf{T}_0(u)$ jsou plně určeny okrajovým řídicím polygonem plátu $\mathbf{R}(u, v)$, resp. $\mathbf{S}(u, v)$. Poloha prvních tří řídicích bodů okrajové Bézierovy kubiky $\mathbf{T}_1(v)$, resp. $\mathbf{T}_1(u)$ vyplývá z podmínek C^0 , C^1 a C^2 spojitosti napojení těchto Bézierových kubik na kubiky $\mathbf{S}_1(v)$, resp. $\mathbf{R}_1(u)$. Pouze poloha posledního řídicího bodu Bézierovy kubiky $\mathbf{T}_1(v)$, který je totožný s posledním řídicím bodem Bézierovy kubiky $\mathbf{T}_1(u)$, je libovolná.

b) Na obr. 3.28 a) jsou nakresleny okrajové křivky plátů $\mathbf{P}(u, v)$, $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$ s modifikovanou polohou vnitřních řídicích bodů. Všechny čtyři pláty jsou z Bézierových bikubických ploch, jejichž sítě řídicích bodů jsou na obr. 3.28 a) také zobrazeny.

Spojítost plátů podél všech společných okrajů je C^2 , jak je patrné z tvaru zebřích pruhů na obr. 3.28 b).

Pláty na obr. 3.28 již nelze považovat za pláty z Coonsovy bilineární plochy, neboť vnitřní řídicí body jejich sítí nesplňují podmínku (3.38) vzhledem k tečným vektorům parametrických křivek v rozích plátu a zkrutům v rozích plátu z Coonsovy bilineární plochy. \square

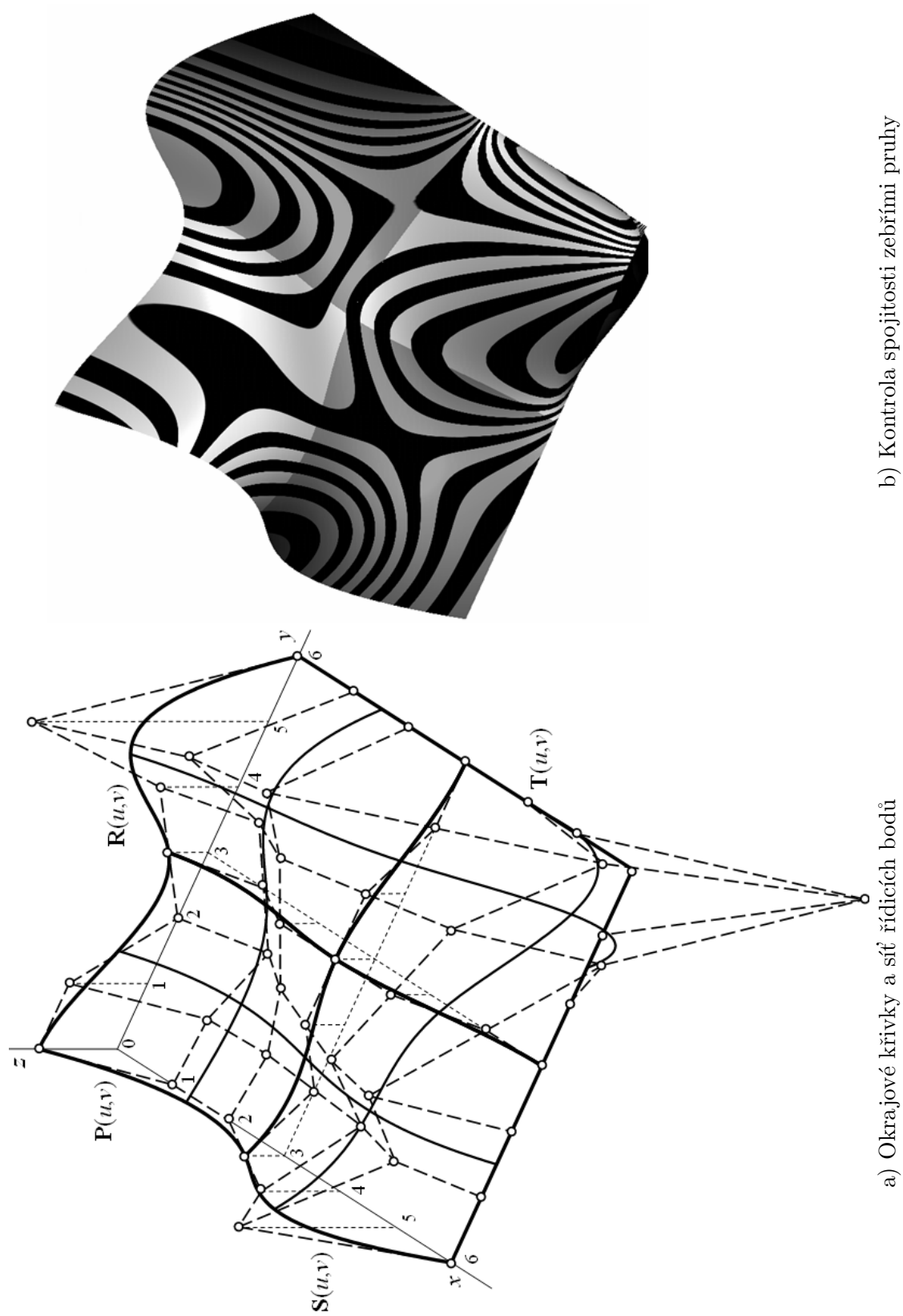
- **Cvičení 3.12** Nakreslete v Rhinu Bézierovy plochy z příkladů 3.9, 3.10 a 3.11. Nakreslete body ploch pro hodnoty parametrů $u = 0$, $v = 0, 0.1, \dots, 1$ a $u = 0, 0.1, \dots, 1$, $v = 0$, a jimi



b) Kontrola spojitosti zebřemi pruhy

a) Okrajové křivky a síť řídicích bodů

Obrázek 3.27: C^0 spojitě plátování pláty z Coonsovy bilineární plochy



Obrázek 3.28: C^2 spojitě plátování pláty z Bézierovy bikubické plochy

procházející parametrické křivky. Sestrojte tečné roviny v rozích plátů z Bézierových ploch a určete, zda je roh plátu eliptický, hyperbolický nebo parabolický bod Bézierovy plochy.

- **Cvičení 3.13** Realizujte v Rhinu příklady 3.12 a 3.13.
- **Cvičení 3.14** V Rhinu nakreslete Coonsovu bilineární plochu podle zadání z příkladu 3.14. Zjistěte kartézské souřadnice vnitřních řídicích bodů a porovnejte je s vypočtenými hodnotami.
- **Cvičení 3.15** V Rhinu nakreslete Bézierovu plochu z příkladu 3.15. Zkonstruujte de Casteljau algoritmem pro plochy i pro křivky bod $\mathbf{P}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a přesvědčte se, že leží v průsečíku příslušných parametrických křivek. Vyzkoušejte i pro jiné zvolené hodnoty parametrů u a v .
- **Cvičení 3.16** Realizujte příklad 3.16 v Rhinu. Nakreslete body na Bézierových plochách pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.1, \dots, 1$ a $v = 0, u = 0, 0.1, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky. Požadovanou spojitost ověřte grafy křivostí navazujících parametrických křivek a zebřími pruhy.
- **Cvičení 3.17** Nakreslete plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{P}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, z příkladu 3.14.

a) K plátu $\mathbf{P}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{P}_0(u)$ (tj. ve směru záporné osy y) plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{R}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{R}_0(v)$ a $\mathbf{R}_1(v)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{P}_1(v)$. Volný okraj $\mathbf{R}_1(u)$ je úsečka v rovině (x, y) .

K plátu $\mathbf{P}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{P}_0(v)$ (tj. ve směru záporné osy x) plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{S}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{S}_0(u)$ a $\mathbf{S}_1(u)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{P}_0(u)$ a $\mathbf{P}_1(u)$. Volný okraj $\mathbf{S}_1(v)$ je úsečka v rovině (x, y) .

K plátům $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{R}(u, v)$ připojte podél okraje $\mathbf{S}_1(u)$ a $\mathbf{R}_1(v)$ plát z Coonsovy bilineární plochy $\mathbf{T}(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, jehož okraje jsou rovinné Bézierovy kubiky. Konstrukcí určete polohu řídicích bodů Bézierových kubik $\mathbf{T}_1(u)$ a $\mathbf{T}_1(v)$ tak, abyste zajistili C^2 spojitost jejich napojení na okraje $\mathbf{S}_1(v)$ a $\mathbf{R}_1(v)$. z -ové souřadnice řídicích bodů, jejichž poloha C^2 spojitost okrajů neovlivní, jsou nulové.

Určete řídicí body okrajových Bézierových kubik plátu $\mathbf{T}(u, v)$, jejichž poloha neovlivní požadovanou C^2 spojitost okrajů.

Nakreslete body na všech Coonsových bilineárních plochách pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.1, \dots, 1$ a $v = 0, u = 0, 0.1, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky. Dosaženou spojitost analyzujte grafy křivostí navazujících parametrických křivek a zebřími pruhy.

b) Využijte vztah mezi Bézierovou bikubickou a Coonsovou bilineární plochou (viz část 3.5.2) a konstrukcí určete takovou polohu vnitřních řídicích bodů plátů $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$, která zajistí C^2 spojitost celé plochy tvořené všemi čtyřmi pláty. Přemístěte vnitřní řídicí body plátů $\mathbf{R}(u, v)$, $\mathbf{S}(u, v)$ a $\mathbf{T}(u, v)$ do jejich nových poloh.

Nakreslete body na všech Bézierových plochách pro hodnoty parametrů $u = 0, v = 0, 0.1, \dots, 1$ a $v = 0, u = 0, 0.1, \dots, 1$ a jimi procházející parametrické křivky. Požadovanou spojitost ověřte grafy křivostí navazujících parametrických křivek a zebřími pruhy.

3.6 Uniformní ukotvená bikubická B-spline plocha

Uniformní ukotvená bikubická B-spline plocha má v hierarchii matematických modelů ploch podobné postavení jako uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně v hierarchii matematických modelů křivek. Matematický popis uniformní ukotvené bikubické B-spline plochy, kterou budeme nadále nazývat stručně jen *ukotvená plocha*, přesahuje rámec tohoto učebního textu. Z uživatelského hlediska je však ukotvená plocha natolik významná, že ji nemůžeme vynechat. Nebudeme si zde uvádět definice ani početní příklady, ze kterých by vyplynuly zajímavé geometrické vlastnosti ukotvené plochy. Zvolíme uživatelský přístup, kdy si nejprve všechny tyto důležité vlastnosti vyjmenujeme a o jejich platnosti a významu se přesvědčíme prostřednictvím modelování v Rhinu.

3.6.1 Vlastnosti ukotvené plochy

- Ukotvená plocha je určena sítí $(m+1) \times (n+1)$, $m, n > 4$, řídicích bodů $\mathbf{V}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$, uspořádaných do mapy plochy.
- Ukotvená plocha interpoluje rohy sítě $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,n}$, $\mathbf{V}_{m,0}$, $\mathbf{V}_{m,n}$ řídicích bodů. Ostatními řídicími body neprochází.
- Okrajové křivky ukotvené plochy jsou ukotvené křivky.
- Z přecházejících dvou vlastností vyplývá, že Coonsova bilineární plocha určená okrajovými ukotvenými křivkami je speciální případ ukotvené plochy.

Zřejmě existuje nekonečně mnoho ukotvených ploch, které mají totožné okrajové ukotvené křivky, ale díky odlišné poloze vnitřních řídicích bodů mají odlišný tvar vlastní plochy. Pokud vnitřní řídicí body sítě ukotvené plochy splňují určité podmínky (které zde nebudeme odvozovat), je ukotvená plocha totožná s Coonsovou bilineární plochou určenou okrajovými ukotvenými křivkami.

- Ukotvená plocha je segmentovaná, protože počet řádků i sloupců řídicích bodů je větší než 4, což je počet právě nutný k vytvoření plochy 3. stupně ve směru parametru u i v .
- Ukotvená plocha je složena z $(m - 2) \times (n - 2)$ segmentů – plátů z Bézierovy bikubické plochy.
- Všechny pláty z Bézierovy bikubické plochy jsou *automaticky* C^2 spojitě napojené, proto je ukotvená plocha C^2 spojitá v celém oboru parametrizace.
- Změnou polohy libovolného vnitřního řídicího bodu se změní tvar ukotvené plochy, ale nezmění se C^2 spojitost ukotvené plochy.

3.6.2 Plátování – pláty z ukotvené plochy

Vzhledem ke skutečnosti, že ukotvená plocha je složena z plátů z Bézierových bikubických ploch, lze při C^0 , C^1 a C^2 spojitém napojování plátů z ukotvené plochy využít podmínky C^0 , C^1 a C^2 spojitého napojení plátů z Bézierových bikubických ploch odvozené v části 3.5.5. Rovněž tak můžeme využít podmínek C^0 , C^1 a C^2 spojitého napojení dvou ukotvených křivek, neboť – podobně jako u Bézierovy plochy – při respektování „křivkové“ podstaty plochy můžeme na ukotvenou plochu pohlížet jako na ukotvenou křivku s proměnnými řídicími body. Pokud zajistíme C^0 , C^1 nebo C^2 spojitost ukotvených křivek určených řádkovými, resp. sloupcovými

řídícími polygony, je tím automaticky zajištěna C^0 , C^1 nebo C^2 spojitost napojení plátů z ukotvených ploch v příslušném směru.

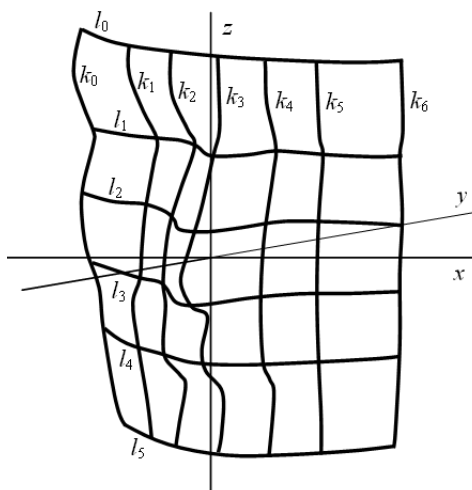
I když by se mohlo zdát, že napojování plátů z ukotvené plochy poněkud postrádá smysl (ukotvená plocha je už přece složena z C^2 spojitě napojených plátů z Bézierovy bikubické plochy), není tomu tak. V technické praxi se můžeme setkat s plochami natolik tvarově složitými, že je musíme ve fázi návrhu rozdělit do menších částí, modelovat nejprve tvar těchto částí a řešit problémy s jejich napojením. Případné spojení dílčích částí do jediného celku – plochy složené z velkého množství plátů – lze provést až v konečné fázi návrhu. Ukázka takového přístupu je uvedena v příkladu 3.18.

■ **Příklad 3.18 Modelování části lidského obličeje.** Část lidského obličeje, která má být vymodelována C^2 spojitou plochou, je určena dvěma soustavami definičních křivek k_0, \dots, k_6 a l_0, \dots, l_5 , viz obr. 3.29. Tyto definiční křivky jsou ukotvené křivky, které mají na výsledné ploše ležet. Obě soustavy křivek jsou souměrné podle roviny (y, z) procházející řídícím polygonem křivky k_3 .

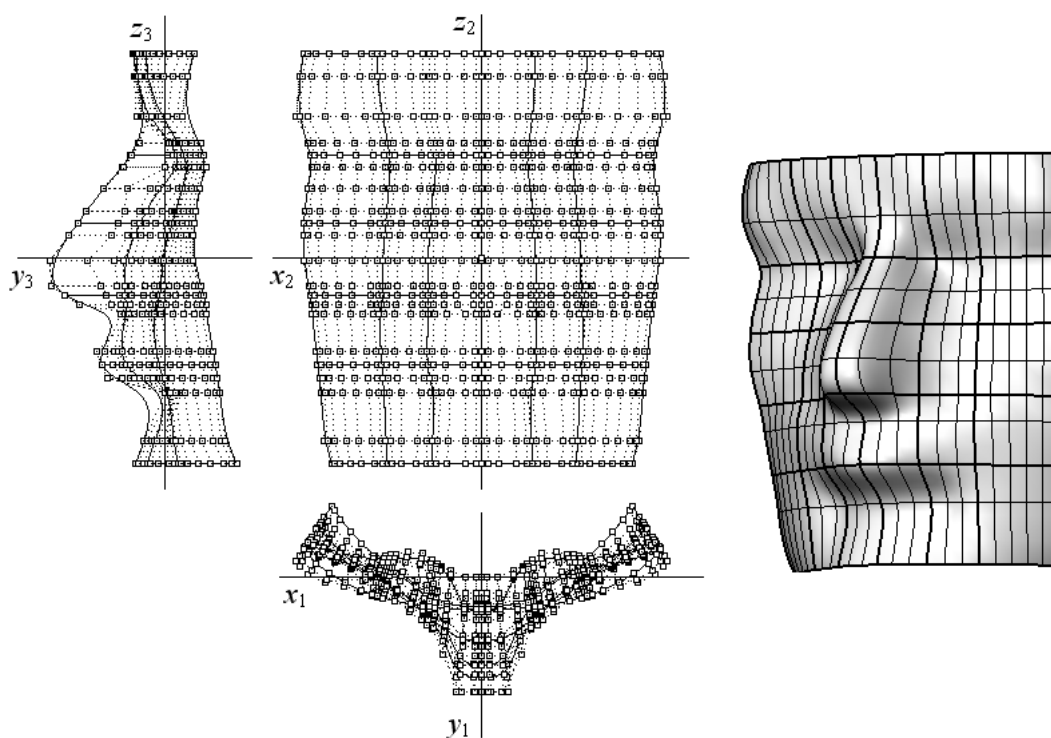
Řešení. Je zřejmé, že v tomto případě nelze požadovanou plochu modelovat jako ukotvenou plochu určenou pouze okrajovými ukotvenými křivkami k_0, k_6, l_0, l_5 , neboť tvarová odchylka výsledné plochy od vnitřních definičních křivek, které mají na ploše ležet, by byla zcela nepřijatelná.

Ani pokud rozdělíme křivky l_0 a l_5 v průsečíku s křivkou k_3 na dvě části a vytvoříme dva souměrné pláty z ukotvené plochy, nedostaneme uspokojivý výsledek. Oba pláty by byly napojeny pouze s C^0 spojitostí a tvarová odchylka výsledné plochy od definičních křivek by byla značná. Navíc – tvar plochy by vůbec nevystihoval tvar lidského obličeje.

Abychom splnili zadání, tj. aby definiční křivky ležely na modelované ploše, je třeba křivky k_0, \dots, k_6 rozdělit v průsečících s křivkami l_0, \dots, l_5 a křivky l_0, \dots, l_5 rozdělit v průsečících s křivkami k_0, \dots, k_6 . Tím dostaneme soustavu šesti řádků o šesti sloupcích částečných ukotvených křivek l_i a soustavu pěti řádků o sedmi sloupcích částečných ukotvených křivek k_i . Můžeme tedy vytvořit celkem třicet plátů z ukotvené plochy určené částečnými okrajovými křivkami dotýkajícími se v rozích.



Obrázek 3.29: Definiční křivky



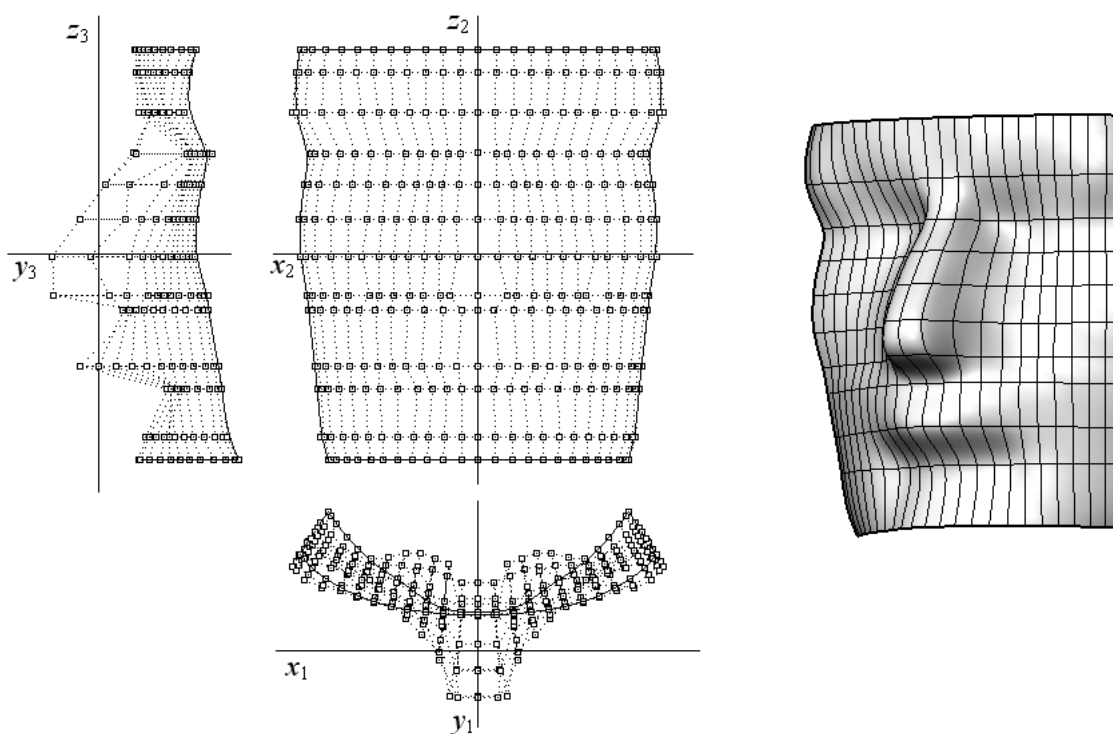
Obrázek 3.30: Část lidského obličeje modelovaného C^2 spojitě napojenými pláty z ukotvené plochy

I když jsou navazující okraje C^2 spojitě napojeny, pláty jsou podél společných okrajů napojeny pouze s C^0 spojitostí. C^2 spojitě napojení však můžeme dosáhnout přemístěním vnitřních řídicích bodů plátů do takové polohy, která požadovanou spojitost zajistí. Nárys, půdorys a levý bokorys sítě takto modifikovaných řídicích bodů jednotlivých plátů jsou nakresleny na obr. 3.30 vlevo, výsledná C^2 spojitá plocha složená z třiceti C^2 spojitě napojených plátů je nakreslena na tomtéž obrázku vpravo.

Konečnou úpravu, kterou provedeme, je spojení všech třiceti plátů z ukotvených ploch do jediné ukotvené plochy. Uvažujeme-li vždy pouze řádkové nebo sloupcové řídicí polygony, můžeme polohu řídicích bodů jediné ukotvené plochy určit konstrukcí naznačenou na obr. 2.35. Nárys, půdorys a levý bokorys výsledné sítě řídicích bodů této ukotvené plochy jsou zobrazeny na obr. 3.31 vlevo, výsledná plocha je na tomtéž obrázku vpravo.

Porovnáme-li sítě řídicích bodů na obr. 3.30 a obr. 3.31, vidíme, že vstupní data jediné ukotvené plochy na obr. 3.31 jsou mnohem úspornější než vstupní data třiceti plátů z obr. 3.30. To je další z důvodů a výhod, proč se ukotvené plochy používají k modelování velmi obecných tvarů.

Plocha, kterou jsme modelovali část lidského obličeje v příkladu 3.18, je část plochy, kterou byla modelována umělá lidská hlava vyrobená do zařízení pro měření kvality a testování elektroakustických soustav, viz [9] a [8]. Zařízení se využívá k vědeckým a pedagogickým účelům na katedře radioelektroniky a fyziky Fakulty elektrotechnické ČVUT v Praze.



Obrázek 3.31: Část lidského obličeje modelovaná jedinou ukotvenou plochou

3.6.3 Ukotvená plocha v Rhinu

Ukotvená plocha určená sítí řídicích bodů – Jak již bylo řečeno, směr parametrů u i v je dán systémem. Pro pořadí zadávaných vstupních dat platí u ukotvené plochy stejná pravidla jako tomu bylo u Bézierovy plochy, viz část 3.5.6. Zde se budeme věnovat pouze prvnímu způsobu zadávání, kdy parametr u roste s přibývajícím indexem řádků a parametr v roste s přibývajícím indexem sloupců.

Příkaz: *Plocha z mřížky řídicích bodů* → v příkazovém řádku zvolit stupeň: zadat 3 → Počet bodů v řádku: zadat $m + 1$ (tj. počet řádků mapy plochy) → v příkazovém řádku zvolit *Stupeň*: zadat 3 → Počet bodů ve sloupci: zadat $n + 1$ (tj. počet sloupců mapy) → Bod(1 z $m + 1$, 1 z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{0,0}$ → Enter → Bod(1 z $m + 1$, 2 z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{0,1}$ → ... → Bod($m + 1$ z $m + 1$, $n + 1$ z $n + 1$): zadat $\mathbf{V}_{m,n}$ → Enter. Nakreslí se ukotvená plocha určena sítí $(m + 1) \times (n + 1)$ řídicích bodů se směrem a orientací parametrů u a v podle očekávání, tj. parametr u roste s přibývajícím indexem řádků a parametr v roste s přibývajícím indexem sloupců.

Poznámka: Na ukotvené ploše se automaticky zobrazují parametrické křivky, které od sebe oddělují jednotlivé segmenty – pláty z Bézierovy bikubické plochy, viz dále.

Síť řídicích bodů – Síť řídicích bodů (body i ramena) ukotvené plochy lze zobrazit/skrýt příkazem *Zapnout řídicí body/Vypnout řídicí body* → Vyberte objekty pro zobrazení řídicích bodů: kliknout na plochu. Řídicí body se zobrazí jako dočasně viditelné body, ramena se zobrazí jako dočasně viditelné úsečky tečkovanou čarou. Zobrazené řídicí body lze uchopit s režimem *Uchopování bodů*.

Ukotvená plocha určená okrajovými ukotvenými křivkami – Před vytvořením ukotvené plochy určené okrajovými ukotvenými křivkami je třeba mít okrajové křivky nakreslené.

Příkaz: Plocha ze 2, 3 nebo 4 hraničních křivek → Vyberte 2, 3 nebo 4 křivky: kliknout na okraje v tomto pořadí: $\mathbf{P}_0(v)$, $\mathbf{P}_1(v)$, $\mathbf{P}_0(u)$, $\mathbf{P}_1(u)$ → Enter. Nakreslí se Coonsova bilineární plocha určená zadanými okraji. Tato Coonsova bilineární plocha je totožná s ukotvenou plochou určenou právě tou sítí řídicích bodů, která se zobrazí příkazem *Zapnout řídicí body* → Vyberte objekty pro zobrazení řídicích bodů: kliknout na Coonsovu bilineární plochu.

Pozor! Je zřejmé, že obráceně tento vztah mezi ukotvenou a Coonsovou bilineární plochou neplatí. Pokud nakreslíme ukotvenou plochu příkazem *Plocha z mřížky řídicích bodů*, a potom nakreslíme Coonsovu bilineární plochu určenou okrajovými ukotvenými křivkami ukotvené plochy, nemusíme obecně dostat totožné plochy.

Modifikace tvaru ukotvené plochy – Pro modifikaci tvaru ukotvené plochy platí stejná pravidla jako u Bézierovy plochy, viz část 3.5.6. Z uživatelského hlediska lze za nejvýznamnější vlastnost ukotvené plochy považovat schopnost automaticky zachovat okraje i C^2 spojitosti celé plochy po změně polohy vnitřního řídicího bodu.

Pozor! Ani u ukotvené plochy nepoužíváme k modifikaci tvaru příkazy *Vložit uzel* a *Odestranit uzel*, jejichž důsledkem se změní uniformní parametrizace plochy na neuniformní a příkaz *Změnit váhu*, který vede na racionální parametrizaci.

Rozdělení ukotvené plochy na pláty z Bézierovy bikubické plochy – Příkaz: *Rozdělit plochu izočarou* → v příkazovém řádku zvolit *Izočára* → Vyberte objekty pro rozdělení: kliknout na ukotvenou plochu → v příkazovém řádku zvolit *Zmenšit=Ano* → Rozdělit v bodě: postupně kliknout do koncových bodů všech parametrických u -křivek → v příkazovém řádku zvolit *Přepnout* → postupně kliknout do koncových bodů všech parametrických v -křivek → Enter. V příkazovém řádku se zobrazí informace, že plocha byla rozdělena na $(m-2) \times (n-2)$ kusů – plátů z Bézierových bikubických ploch.

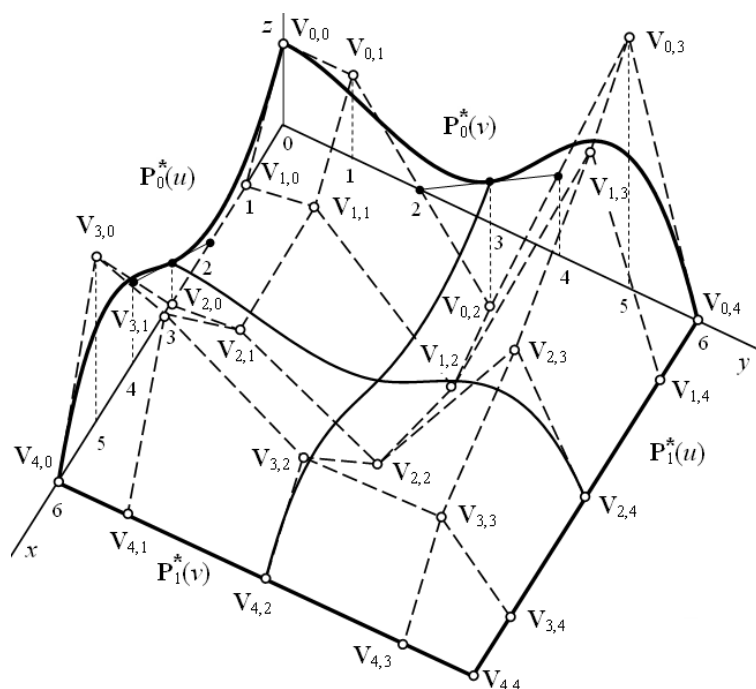
Pozor! Přemístěním libovolného řídicího bodu libovolného plátu z Bézierovy plochy se ruší C^2 spojitost mezi pláty.

■ **Příklad 3.19 – Ukotvená plocha.** Uvažujte zadání a řešení příkladu 3.17.

Určete konstrukcí polohu řídicích bodů okrajových ukotvených křivek ukotvené plochy $\mathbf{P}^*(u, v)$, $(u, v) \in [0, 1]^2$. Okrajové ukotvené křivky $\mathbf{P}_0^*(u)$, resp. $\mathbf{P}_0^*(v)$ jsou složeny z C^2 spojitě napojených okrajových Bézierových kubik $\mathbf{P}_0(u)$ a $\mathbf{S}_0(u)$, resp. $\mathbf{P}_0(v)$ a $\mathbf{R}_0(v)$ z příkladu 3.17. Okraje $\mathbf{P}_1^*(u)$, resp. $\mathbf{P}_1^*(v)$ jsou úsečky v rovině (x, y) .

Dále nakreslete ukotvenou plochu jako Coonsovu bilineární plochu určenou okrajovými ukotvenými křivkami $\mathbf{P}_0^*(u)$, $\mathbf{P}_1^*(u)$, $\mathbf{P}_0^*(v)$, $\mathbf{P}_1^*(v)$. Potom zobrazte její síť řídicích bodů a nakreslete další ukotvenou plochu určenou touto sítí řídicích bodů (se zapnutým režimem *Uchopování bodů*). Přesvědčte se, že obě ukotvené plochy jsou totožné (změňte barvu jedné z ploch a zapněte *Stínované zobrazení*).

Řešení. Na obr. 3.32 jsou zobrazeny okrajové ukotvené křivky, parametrické křivky a síť řídicích bodů ukotvené plochy. Původní řídicí body okrajových Bézierových kubik jsou na obr. 3.32 vyznačeny symbolem •. Rekonstrukce řídicích bodů ukotvené křivky složené ze dvou C^2 spojitě napojených Bézierových kubik je provedena podle postupu v příkladu 2.18.



Obrázek 3.32: Ukotvená plocha

□

- **Příklad 3.20 – Rozdělení ukotvené plochy na jednotlivé pláty z Bézierovy bikubické plochy.** Jsou dány řídicí polygony okrajových ukotvených křivek ukotvené plochy:

$$\mathbf{P}_0(u) : \mathbf{V}_{0,0} = (0, 0, 3), \mathbf{V}_{1,0} = (1, 0, 4), \mathbf{V}_{2,0} = (2, 0, 3), \mathbf{V}_{3,0} = (3, 0, 0), \mathbf{V}_{4,0} = (4, 0, 2),$$

$$\mathbf{P}_1(u) : \mathbf{V}_{0,5} = (0, 5, 4), \mathbf{V}_{1,5} = (1, 5, 0), \mathbf{V}_{2,5} = (2, 5, 0), \mathbf{V}_{3,5} = (3, 5, 0), \mathbf{V}_{4,5} = (4, 5, 0),$$

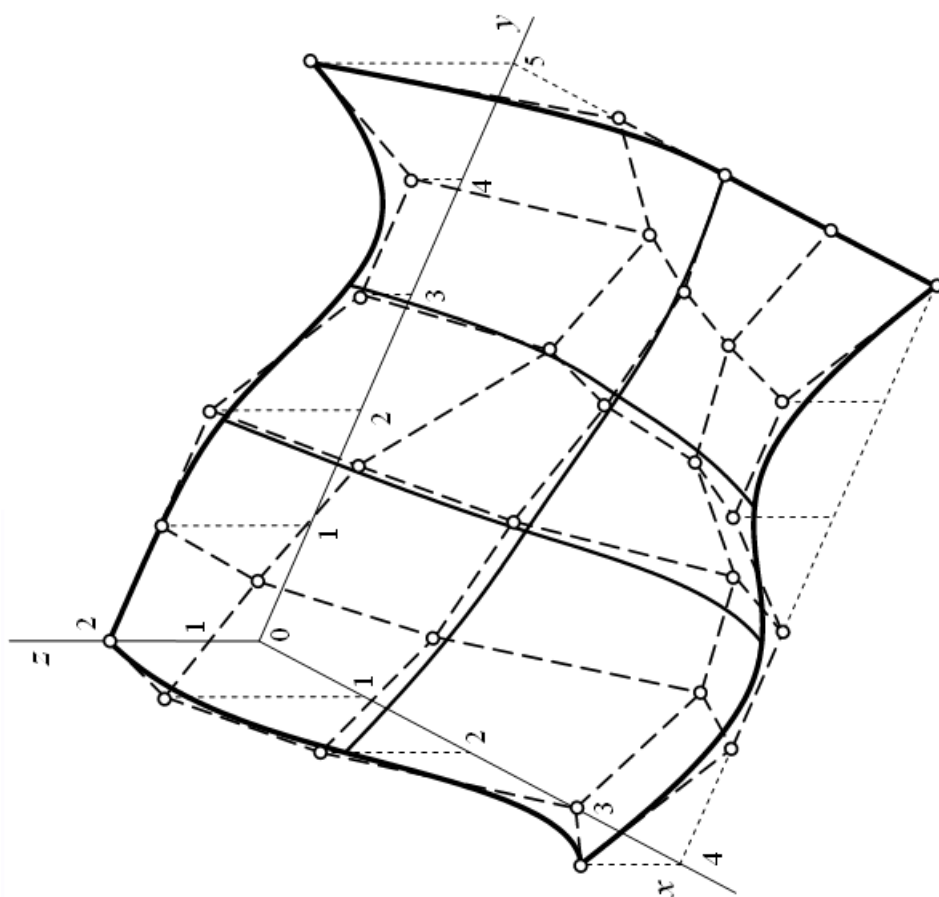
$$\mathbf{P}_0(v) : \mathbf{V}_{0,0} = (0, 0, 3), \mathbf{V}_{0,1} = (0, 1, 3), \mathbf{V}_{0,2} = (0, 2, 3), \mathbf{V}_{0,3} = (0, 3, 1), \mathbf{V}_{0,4} = (0, 4, 1), \\ \mathbf{V}_{0,5} = (0, 5, 4),$$

$$\mathbf{P}_1(v) : \mathbf{V}_{4,0} = (4, 0, 2), \mathbf{V}_{4,1} = (4, 1, 0), \mathbf{V}_{4,2} = (4, 2, 0), \mathbf{V}_{4,3} = (4, 3, 2), \mathbf{V}_{4,4} = (4, 4, 2), \\ \mathbf{V}_{4,5} = (4, 5, 0).$$

Nakreslete okrajové ukotvené křivky a ukotvenou plochu jimi určenou. Zkopírujte vytvořenou plochu. Kopii ukotvené plochy rozdělte na jednotlivé pláty z Bézierových bikubických ploch. Porovnejte spojitost takto vzniklé plochy se spojitostí původní ukotvené plochy. Přesvědčte se, že přemístěním libovolného vnitřního řídicího bodu libovolného plátu z Bézierovy bikubické plochy se ruší C^2 spojitost mezi pláty.

Řešení. Na obr. 3.33 a) je zobrazena ukotvená plocha včetně sítě řídicích bodů. Parametrické křivky, podél nichž dojde k rozdělení na jednotlivé pláty z Bézierovy bikubické plochy, a které se zobrazují automaticky, jsou vyznačeny středně silnou čarou. Na obr. 3.33 b) jsou zobrazeny zebří pruhy ukotvené plochy.

Vzhledem k tomu, že ukotvená plocha je určena sítí 6×5 řídicích bodů ($m = 5$, $n = 4$), je složena z šesti $((m - 2) \times (n - 2) = 6)$ plátů z Bézierovy bikubické plochy. Na obr. 3.34 a) jsou zobrazeny jednotlivé pláty z Bézierovy bikubické plochy (před modifikací tvaru přemístěním řídicího bodu) včetně jejich sítě řídicích bodů. Z tvaru zebřích pruhů těchto plátů na obr. 3.34 b) i zebřích pruhů původní ukotvené plochy na obr. 3.33 b) lze usuzovat na stejnou (tj. C^2) spojitost napojení podél všech společných okrajů.

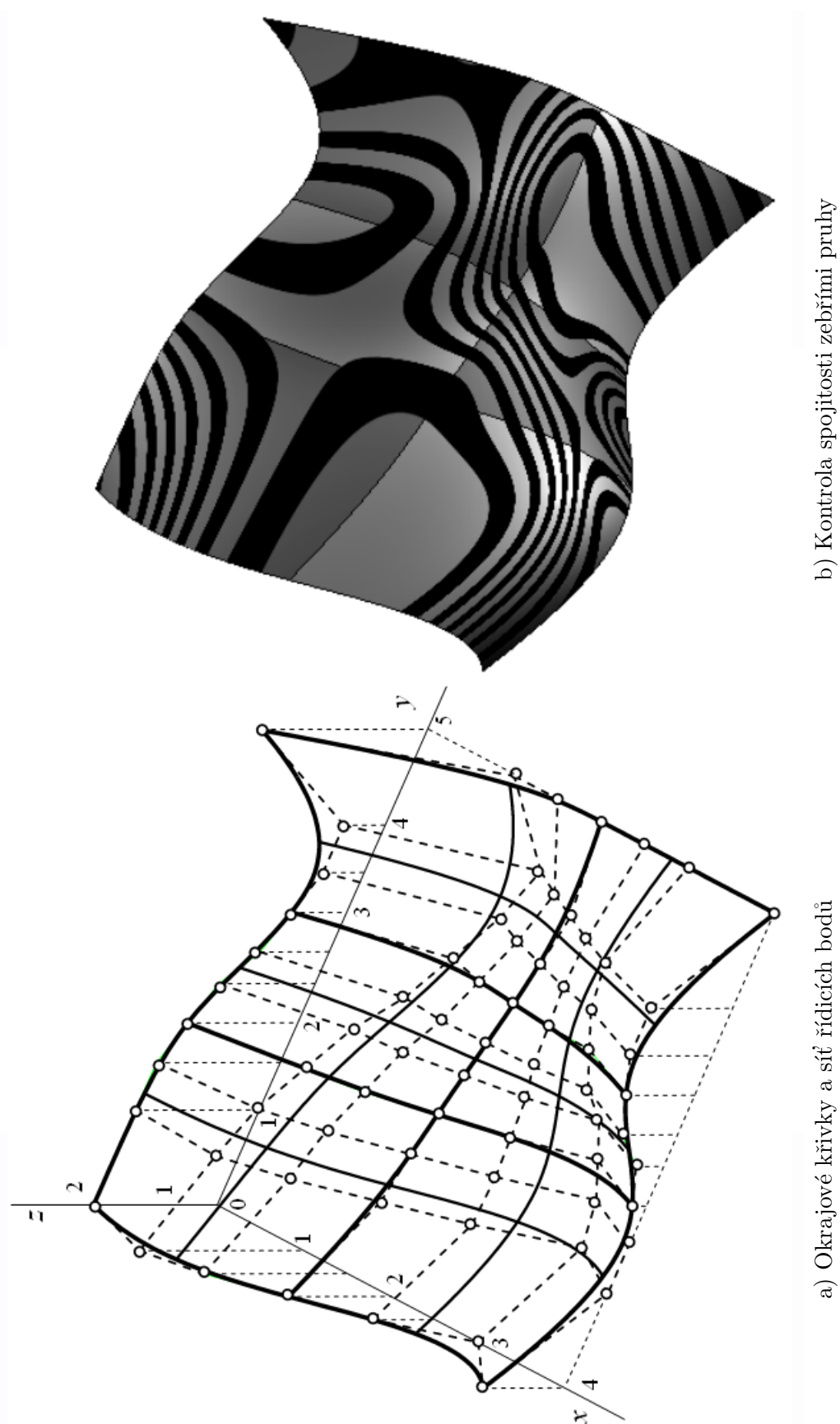


a) Okrajové křivky a síť řídicích bodů



b) Kontrola spojitosti zebřími pruhy

Obrázek 3.33: Ukotvená plocha



b) Kontrola spojitosti zebřími pruhy

a) Okrajové křivky a síť řídicích bodů

Obrázek 3.34: Jednotlivé pláty z Bézierovy bikubické plochy

- **Cvičení 3.18** Jednu z ukotvených ploch z příkladu 3.19 vymažte, aby zůstala nakreslena pouze jediná ukotvená plocha. Zobrazte její řídicí body a změňte tvar ukotvené plochy přemístěním libovolného vnitřního řídicího bodu (popř. bodů). Přesvědčte se (zobrazením zebřích pruhů), že modifikovaná plocha je stále C^2 spojitá.

Nakreslete znovu Coonovu bilineární plochu určenou okrajovými křivkami modifikované ukotvené plochy. Přesvědčte se, že nyní již obě plochy totožné nejsou.



















- **Cvičení 3.19** Rozdělte ukotvenou plochu, která je řešením příkladu 3.19 na jednotlivé pláty z Bézierových bikubických ploch a zjistěte kartézské souřadnice jejich řídicích vrcholů. Nalezněte vektorové rovnice těchto plátů a ověřte výpočtem C^2 spojitost podél společných okrajů.

Příloha A

Rhino – seznam použitých příkazů

V následujícím seznamu jsou uvedeny abecedně seřazené příkazy Rhina, se kterými jsme se setkali v předcházejících kapitolách. Jako první je uveden název příkazu, který se zobrazuje v bublinové nápovědě tlačítka a v závorce název nástrojové palety, na které se tlačítko nachází. Dále je uveden obrázek tlačítka, kterým lze příkaz zadat a nakonec postup zadání příkazu z menu. Zkratka PTM (Pravé Tlačítko Myši) znamená, že příkaz je třeba volit stisknutím pravého tlačítka myši v nástrojové paletě tlačítek, případně v titulkovém pruhu pohledu.

Nástrojovou paletu zobrazíme volbou z menu Nástroje → Rozvržení nástrojových palet → zaškrtnout požadovanou nástrojovou paletu.

Analýza křivosti (Analýza)		Analýza → Plocha → Analýza křivosti
Analýza pomocí pruhů zebry (Analýza plochy)		Analýza → Plocha → Zebra
Anuloid (Těleso)		Těleso → Anuloid
Bod (Bod)		Křivka → Bod
Bod z UV souřadnic (Analýza plochy)		Analýza → Plocha → Bod z UV souřadnic
Duplikovat hranici (Křivka z jiného objektu)		Křivka → Křivka z jiných objektů → Duplikovat hranici
Duplikovat hranu (Křivka z jiného objektu)		Křivka → Křivka z jiných objektů → Duplikovat hranu
Elipsa: střed (Elipsa)		Křivka → Elipsa → Střed
Editor tečen (Úpravy bodů)		Úpravy → Řídicí body → Editor tečen
Geometrická spojitost 2 křivek (Analýza)		Analýza → Křivka → Geometrická spojitost
Graf křivosti zapnout (Analýza)		Analýza → Křivka → Zapnout graf křivosti
Hlavní křivosti	NENÍ	Analýza → Hlavní křivosti
Kopírovat (Transformace)		Transformace → Kopírovat
Kružnice: kolem křivky (Kružnice)		NENÍ
Křivka zadávaná řídicími body (Křivka)		Křivka → Volný tvar → Řídicí body
Lomená čára (Úsečky)		Křivka → Lomená čára → Lomená čára
Označit konec křivky (Bod)		PTM..Křivka → Bod → Označit konec křivky
Označit počátek křivky (Bod)		Křivka → Bod → Označit počátek křivky
Plocha ze 2, 3 nebo 4 hraničních křivek (Plocha) ...		Plocha → Hraniční křivky

Plocha ze 3 nebo 4 rohových bodů (Plocha)	 Plocha → Rohové body
Plocha z mřížky řídicích bodů (Plocha)		PTM..NENÍ
Plocha z rovinných křivek (Plocha)	 Plocha → Rovinné křivky
Poloměr (Analýza)	 Analýza → Poloměr
Prodloužit křivku obloukem do bodu (Prodloužit)	 Křivka → Prodloužit křivku → Obloukem do bodu
Průsečík objektů (Křivka z jiného objektu)	 Křivka → Křivka z jiných objektů → Průsečík
Přepnout silné hrany (Pokročilé zobrazení)	 NENÍ
Přesunout (Transformace)	 Transformace → Přesunout
Rozdělit křivku počtem segmentů (Bod)		PTM..Křivka → Bod → Rozdělit křivku → Počtem segmentů
Rozpojit (Hlavní2)	 Úpravy → Rozpojit
Samostatné úsečky (Úsečky)		PTM..Křivka → Úsečka → Samostatné úsečky
Stínované zobrazení (Standardní)	 PTM v titulkovém pruhu pohledu → Stínované zobrazení
Uchopování objektů: Na křivce (Uchopování objektů) ..	 Nástroje → Uchopování objektů → Na křivce
Uchopování objektů: Na ploše (Uchopování objektů) ..	 Nástroje → Uchopování objektů → Na ploše
Úsečka: kolmice z křivky (Úsečky)	 Křivka → Úsečka → Kolmice ke křivce
Úsečka: normály plochy (Úsečky)	 Křivka → Úsečka → Normála plochy
Úsečka: tečna z křivky (Úsečky)	 Křivka → Úsečka → Tečna ke křivce
Úsečka: z bodu v polovině (Úsečky)	 NENÍ
UV souřadnice bodu (Analýza plochy)		PTM..Analýza → Plocha → UV souřadnice bodu
Více bodů (Bod)	 Křivka → Bod → Více bodů
Vyhodnotit bod (Analýza)	 Analýza → Bod
Vytáhnout přímo (Vytáhnout)	 Plocha → Vytáhnout křivku → Přímou
Vyjmout izočáru (Křivka z jiného objektu)	 Křivka → Křivka z jiných objektů → Vyjmout izočáru
Vyjmout drátový model (Křivka z jiného objektu)	 Křivka → Křivka z jiných objektů → Vyjmout drátový model
Vyjmout síť z řídicího polygonu NURBS (Polygonová síť)		PTM..Nástroje → Polygonová síť → Z řídicího polygonu NURBS
Výpis databáze objektu (Analýza)	 Analýza → Diagnostika → Vypsání struktury
Vypnout editační body (Úpravy bodů)		PTM..Úpravy → Řídicí body → Vypnout
Vypnout řídicí body (Úpravy bodů)		PTM..Úpravy → Řídicí body → Vypnout
Vytáhnout podél křivky (Vytáhnout)	 Plocha → Vytáhnout křivku → Podél křivky
Zapnout řídicí body (Úpravy bodů)	 Úpravy → Řídicí body → Zapnout
Zobrazit editační body (Úpravy bodů)	 Úpravy → Řídicí body → Zobrazit editační body

Literatura

- [1] Drs, L.: Matematické metody v počítačové grafice. Postgraduální skriptum. Ediční středisko ČVUT, Praha, 1990. ISBN 80-01-00353-1.
- [2] Farin, G.: Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. Academic Press, INC. San Diego. 1996. ISBN 0-12-249054-1.492 s.
- [3] Ježek, F.: Geometrické modelování. Pomocný učební text verze 8.1, ZČU Plzeň, 2006.
- [4] Kočandrlová, M.: Křivkový integrál. Studijní text pro obor G+K. ČVUT v Praze, Stavební fakulta. 2004. 24 s.
<http://mat.fsv.cvut.cz/ma3g/soubory/KI.PDF>
- [5] Kočandrlová, M.: Plošný integrál. Studijní text pro obor G+K. ČVUT v Praze, Stavební fakulta. 2004. 18 s.
<http://mat.fsv.cvut.cz/ma3g/soubory/PI.PDF>
- [6] Linkeová, I.: NURBS křivky. Monografie. Ediční středisko ČVUT, Praha 2007. ISBN 978-80-01-03893-2.
- [7] Linkeová, I.: Speciální případy NURBS reprezentace. In: Sborník 25. konference o geometrii a počítačové grafice, JČMF, Praha 2005. ISBN 80-7015-013-0, s. 149-154.
- [8] Linkeová, I.: Manufacturing an Artificial Human Head. In: Journal for Geometry and Graphics. 2003, vol. 7, no. 1, s. 89-99. ISSN 1433-8157.
- [9] Linkeová, I. Konstrukce, měření a výroba obecných tvarových ploch. Doktorská práce. ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Praha 1999. 71 s.
- [10] L. Piegl, W. Tiller: The NURBS Book. Monografie. Springer, Berlin, 1997.
- [11] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užití matematiky. SNTL, Praha, 1981.
- [12] Shene, Ch. K.: Introduction to Computing with Geometry Notes, Michigan Technological University. Electronická kniha.
mathbfwww.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/NOTES
- [13] Velichová, D.: Konštrukčná geometria. Skripta. Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU, Bratislava, 1996. ISBN 80-227-0904-2.