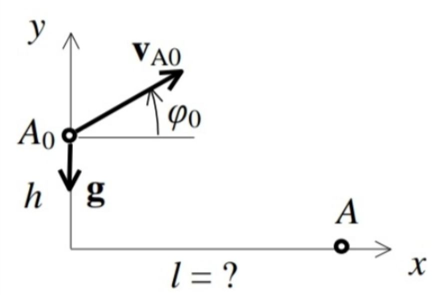
Příklad 2.4



Vypočtěte, do jaké vzdálenosti l dopadne střela, vystřelená z bodu A_0. Nakreslete trajektorii bodu A.

Dáno: $h = 300$ m , $g = 9{,}81$ ms^{-2} , $v_{A0} = 100$ ms^{-1} , $\varphi_0 = \pi/6$ Rad .

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \dot{x} &= \int \ddot{x}\, dt = C_3 \\ x &= \int \dot{x}\, dt = C_3 \cdot t + C_4 \end{aligned}\right\}$$

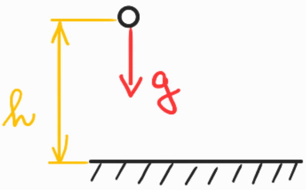
počáteční podmínky : $\dot{x}(t=0) = v_{A0} \cdot \cos\varphi_0 = C_3$

$\Rightarrow x = v_{A0} \cdot \cos\varphi_0 \cdot t + C_4$

$x(t=0) = 0 = C_4$

$\Rightarrow x(t) = v_{A0} \cdot \cos\varphi_0 \cdot t$

neznáme čas dopadu $t = T = ?$



$$\ddot{y} = -g$$
$$\dot{y} = \int \ddot{y}\, dt = -gt + C_1$$
$$y = \int \dot{y}\, dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 \cdot t + C_2$$

C_1, C_2 určíme z počátečních podm.

počáteční podmínka pro rychlost:

$\dot{y}(t=0) = v_{A0y} = v_{A0} \cdot \sin\varphi_0$; $\dot{y}(t=0) = C_1$ $\Rightarrow C_1 = v_{A0} \cdot \sin\varphi_0$

$\Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + v_{A0} \cdot \sin\varphi_0$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 \cdot t + C_2$

počáteční podmínka pro polohu:

$y(t=0) = h$; $y(t=0) = C_2$ $\Rightarrow C_2 = h$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 \cdot t + h$

- potřebujeme určit, za jak dlouho střela dopadne, abychom mohli určit vzdálenost l

$\hookrightarrow y(t=T) = 0$

$0 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 \cdot T + h$ → kvadratická rovnice $aT^2 + bt + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

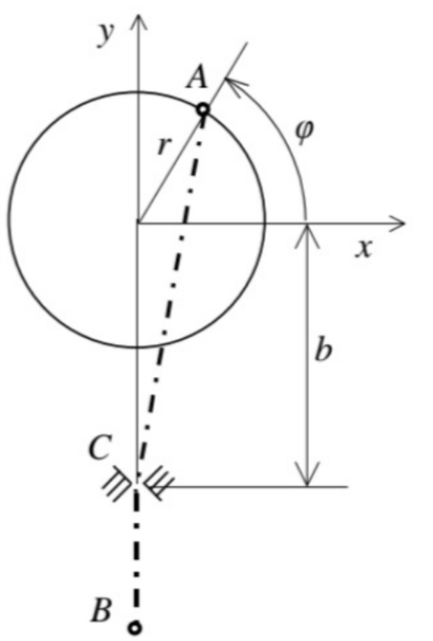
$$T_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 \pm \sqrt{v_{A0}^2 \cdot \sin^2\varphi_0 + 2 \cdot g \cdot h}}{-g} = \frac{v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 \mp \sqrt{v_{A0}^2 \cdot \sin^2\varphi_0 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}$$

$\longrightarrow$ máme 2 řešení, ALE $\sqrt{\sim} > v_{A0} \cdot \sin\varphi_0$ $\Rightarrow$ jedno řešení je záporný čas $\Rightarrow$ NELZE

$$\Rightarrow T = \frac{v_{A0} \cdot \sin\varphi_0 + \sqrt{v_{A0}^2 \cdot \sin^2\varphi_0 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}$$

střela dopadne v čase T ve vzdálenosti l: $x(t=T) = \boxed{l = v_{A0} \cdot \cos\varphi_0 \cdot T}$

Příklad 2.5



Koncový bod A lana délky l se pohybuje po kružnici o poloměru r. Jeho pohyb je popsán úhlem φ průvodiče v závislosti na čase. Lano prochází úzkou štěrbinou v bodě C. Vyřešte pohyb druhého koncového bodu B lana. Souřadnice bodů A a B vyčíslete v čase t_1 a nakreslete grafy závislosti souřadnic y_A a y_B bodů A a B na čase v intervalu < 0 ; 2 > s .

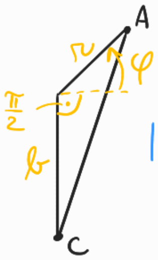
Dáno: r = 400 mm , b = 500 mm , l = 1000 mm , $\varphi = \varphi(t) = \pi t$ Rad , t_1 = 0,3 s .

$x_A = r \cdot \cos\varphi$

$y_A = r \cdot \sin\varphi$

• pro vyšetření bodu B rozdělíme lano na dva úseky: $\overline{AC}$, $\overline{CB}$

$|\overline{AC}| \rightarrow$ použijeme kosinovou větu



$$|\overline{AC}|^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cdot \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{\ldots}$$

$|\overline{CB}| \rightarrow$ dopočítáme přes celkovou délku lana: $|\overline{CB}| = l - |\overline{AC}|$

$x_B = 0$

$y_B = -x_C - |\overline{CB}| = -b - |\overline{CB}|$