

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky  
Obor: Matematické inženýrství  
Zaměření: Matematické modelování



# Numerické řešení deformace pružných těles metodou konečných prvků

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Jan Valášek  
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.  
Rok: 2011

Před svázáním místo téhle stránky 

vložíte zadání práce
----------------------

 s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....  
Jan Valášek

## **Poděkování**

Děkuji Doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, za laskavé rady a podnětné návrhy, které ji obohatily. Také velmi děkuji rodičům za podporu ve studiu, své přítelkyni Lucii Samlerové za trpělivost při vytváření této práce a v neposlední řadě kamarádovi Michalovi Královi za pomoc s grafickou částí.

Jan Valášek

*Název práce:*

**Numerické řešení deformace pružných těles metodou konečných prvků**

*Autor:* Jan Valášek

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.  
Katedra technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení  
technické v Praze

*Konzultant:* Doc. Dr. Ing. Michal Beneš  
Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České  
vysoké učení technické v Praze

*Abstrakt:* Tato bakalářská práce se zabývá praktickou aplikací metody konečných prvků na problém lineární rovinné pružnosti. Práce obsahuje fyzikální základy rovinné pružnosti, matematický popis řešeného problému, jeho variační formulaci a způsob aproximace metodou konečných prvků včetně hlavních výsledků její konvergence. Dále je provedena implementace metody konečných prvků. Jsou použity trojúhelníkové lineární konečné prvky, detailně je popsán způsob odvození matice tuhosti. Popsaná metoda je realizovaná v programu C a jeho funkčnost je ověřena na řadě testovacích příkladů, na kterých je číselně vyhodnocena rychlost konvergence metody.

*Klíčová slova:* Metoda konečných prvků, lineární pružnost, variační principy

*Title:*

**Numerical solution of deformation of elastic bodies by finite element method**

*Author:* Jan Valášek

*Abstract:* This bachelor thesis deals with the practical application of the finite element method to the problem of planar linear elasticity. The work includes physical fundamentals of plane elasticity, mathematical description of the problem being solved, its variational formulation and the method of finite element approximations including the main results of the convergence. Further the implementation of the finite element method is carried out. There are used linear triangular finite elements, the derivation of the stiffness matrix method is described in detail. The described method is implemented in a C program and its functionality is verified on a number of test examples, on which the convergence speed of the method is numerically evaluated.

*Key words:* Finite element method, linear elasticity, variational principles

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Matematicko-fyzikální model</b>	<b>3</b>
1.1 Objemové a plošné síly	3
1.2 Podmínky rovnováhy	4
1.3 Deformace tělesa	5
1.4 Hookeův zákon	6
1.5 Rovinná pružnost	7
1.6 Okrajové podmínky	7
<b>2 Matematický aparát</b>	<b>8</b>
2.1 Zavedení použitých prostorů a norem	8
2.2 Důležité vztahy	10
<b>3 Numerický model</b>	<b>12</b>
3.1 Modelová úloha	12
3.2 Slabá formulace	12
3.3 Diskrétní formulace	13
3.4 Metoda konečných prvků	14
3.4.1 Triangulace	14
3.4.2 Konečné prvky	15
3.4.3 Volba báze funkcí	17
3.5 Práce se zvolenými báze funkcemi	18
3.5.1 Transformace referenčního trojúhelníku	18
3.5.2 Výpočet obsahu trojúhelníku	19
3.5.3 Odvození gradientu báze funkcí	19

3.6	Konvergence metody konečných prvků . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Variační princip úlohy rovinné pružnosti</b>	<b>22</b>
4.1	Slabé řešení . . . . .	22
4.2	Variační princip . . . . .	24
4.3	Existence a jednoznačnost řešení . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Implementace</b>	<b>28</b>
5.1	Triangulace . . . . .	28
5.2	Vyvinutý program . . . . .	30
5.2.1	Načtení triangulace . . . . .	30
5.2.2	Další datové struktury . . . . .	31
5.2.3	Vyplnění matice tuhosti . . . . .	32
5.2.4	Zavedení Dirichletových okrajových podmínek . . . . .	33
5.2.5	Setřídění řídké matice . . . . .	34
5.2.6	Řešení vzniklé soustavy . . . . .	34
5.2.7	Výstupní soubor . . . . .	35
5.3	Zobrazení výsledků . . . . .	36
5.4	Odlišnosti implementace pro úlohu rovinné pružnosti . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Výsledky numerické simulace</b>	<b>38</b>
6.1	Modelová úloha . . . . .	38
6.1.1	Řád konvergence . . . . .	38
6.1.2	Řešení úlohy a konvergence metody . . . . .	39
6.2	Úloha rovinné pružnosti . . . . .	41
	<b>Závěr</b>	<b>45</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>46</b>
	<b>Příloha</b>	<b>47</b>

# Úvod

Metoda konečných prvků je velice univerzální metoda řešení nejrůznějších inženýrských úloh a úloh matematické fyziky. Je velice ceněna nejen pro své široké uplatnění, ale přináší také mnoho důležitých teoretických výsledků. Je velice hezká i pro svou eleganci.

Metoda konečných prvků byla poprvé přihlášena na patentovém úřadě ve čtyřicátých letech v USA. Větší pozornosti se jí ale dostalo až v padesátých letech díky pozvolnému rozvoji počítačů a urychlení velkého množství výpočtů. V šedesátých letech byl k této původně inženýrské metodě dopracován i teoretický matematický základ, viz [4]. První uplatnění našla metoda především v teorii pružnosti, ale během dalších let byla díky své oblibě a užitečnosti použita i při řešení širšího spektra úloh, například je velice oceňována v problémech proudění tekutin. Mezi další uplatnění patří její využití v aeroelasticitě, teplotním poli a teorii parciálních diferenciálních rovnic obecně, viz např. [12].

Základem metody je myšlenka rozdělení problému na menší celky (konečné prvky) a vyhodnocení bilance mezi těmito prvky. Rozdělení úlohy na menší celky docílíme například triangulací zkoumaného tělesa. Na trojúhelnících aproximujeme přesné řešení hodnotami nalezeného numerického řešení v jeho vrcholech. Numerické řešení získáme vyřešením soustavy lineárních rovnic s maticí soustavy, kde její prvky odpovídají vzájemnému působení sousedních uzlů. Pro dostatečnou přesnost volíme velmi jemnou triangulaci s velkým množstvím trojúhelníků, a proto sestavená soustava často dosahuje značných rozměrů, nezřídka i v řádech  $10^5$  a více. Kouzlo metody konečných prvků tkví v tom, že při správném sestavení soustavy je její výsledná matice řídká, často diagonálně dominantní nebo pozitivně definitní. Taková matice je pak poměrně dobře a rychle řešitelná, viz [13].

K masovému rozšíření metody konečných prvků pomohl rozvoj počítačů a specializovaných výpočetních programů, které dokáží mnoho kroků vyřešit samy. Jejich vývoj je výsledkem mnohaleté práce celých univerzitních vědeckých týmů. Stále však nelze úlohu pouze zadat k vyřešení a očekávat výsledek, nýbrž je třeba mít alespoň elementární znalost jejích matematických základů. Na konci výpočtu je nutné ověřit souhlas předpokládaného a nalezeného řešení. V programu se totiž může vyskytnout chyba nebo nalezené řešení nemusí být z mnoha dalších příčin správné.

V této práci se zaměříme především na sestavení základního algoritmu řešení metodou konečných prvků pro úlohu pružnosti. Cílem práce bylo:



- seznámit se s literaturou, která se zabývá variačním principem a základy metody konečných prvků,
- získat přehled používaných matematických modelů a numerických metod,
- vývoj vlastního programu pro aplikaci numerické metody založené na metodě konečných prvků,
- ověření správnosti numerické metody a její realizace vyvinutým programem,
- aplikace na vybraný problém.

V první kapitole jsou uvedeny základy fyzikální teorie pružnosti. Do druhé kapitoly zařazujeme pro větší přehlednost potřebný matematický aparát. Ve třetí kapitole je odvozena formulace slabého řešení a popsána modelová metoda konečných prvků. Ve čtvrté kapitole jsou pak vysvětleny principy pro úlohu rovinné pružnosti. Implementace numerického schématu je popsána v páté kapitole. Do šesté kapitole jsou shrnuty numerické výsledky a v závěru je zhodnocení dosažených výsledků.

# Kapitola 1

## Matematicko-fyzikální model

V této kapitole se blíže seznámíme s matematickou teorií elastických těles, viz např. [2],[7]. Naším cílem je získat rovnice popisující statickou rovnováhu poddajného tělesa a z nich následně určit deformaci zkoumaného tělesa. Poddajné těleso budeme modelovat kontinuem. Na začátku tedy předpokládáme, že máme danou oblast  $\Omega$ , která je totožná s naším tělesem. V této oblasti jsou polohy bodů, deformace, napětí a síly definovány jako funkce prostorových souřadnic.

### 1.1 Objemové a plošné síly

Uvažujme těleso reprezentované oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Na něj mohou působit síly dvojího druhu. Prvním druhem jsou síly objemové. To jsou síly, které působí uvnitř celého objemu tělesa, a jsou úměrné velikosti a hmotnosti každého elementu. To nám dovoluje zavést objemovou hustotu sil  $\mathbf{F}$ , sílu vztaženou na jednotku objemu, kde působí. Její složky budeme značit  $F_i$ . Příklady objemových sil jsou síly gravitační nebo odstředivé.

Druhým druhem jsou síly plošné. Příklad představují různé tahové či tlakové síly, které vznikají na povrchu kontinua ve styku s okolním kontinuem. Z povrchu se pak účinek těchto sil šíří dovnitř celého tělesa po ploškách prostřednictvím vzájemného působení jednotlivých vrstev molekul.

Následně prozkoumáme působení plošných sil na zadaný plošný element  $dS$ . Jejich vliv, přímo úměrný velikosti plochy  $dS$ , můžeme popsat pomocí vektoru napětí  $\mathbf{T}$  jako  $d\mathbf{F} = \mathbf{T}dS$ . Nechť naše ploška uzavírá určitý konečný objem  $dV$  z kontinua. Pak za orientaci  $\mathbf{T}$  zvolíme vnější normálu plochy  $dS$ . Pro zdůraznění se někdy tato závislost značí  $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ , kde  $\mathbf{n}$  je jednotková normála  $dS$ . Většinou je však orientace  $\mathbf{T}$  jasná a  $\mathbf{n}$  vynecháváme.

Dále budeme využívat Einsteinovu sumační konvenci. To znamená, že vyskytnou-li se ve výrazu dva stejné indexy, pak přes ně automaticky sčítáme přes všechny možné hodnoty opakujícího se indexu. Z kontextu by měl být vždy zřejmý rozsah.

V této kapitole sčítáme do tří. Složky  $T_i$  vektoru napětí  $\mathbf{T}$  můžeme nyní vyjádřit pomocí tenzoru napětí  $\tau_{ij}$ , tedy

$$T_i = \tau_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

kde  $n_j$  jsou složky jednotkového normálového vektoru  $\mathbf{n}$ . Složky  $\tau_{ij}$  jsou tedy průměty složek vektoru napětí  $T_i$  do os  $x_j$ . Tenzor  $\tau_{ij}$  je symetrickým tenzorem druhého řádu. Jeho diagonální složky představují normálová napětí, mimodiagonální složky mají význam smykových napětí.

## 1.2 Podmínky rovnováhy

Aby kontinuum mohlo dosáhnout rovnováhy, musí být každý jeho element v rovnovážném stavu, kdy se účinky jednotlivých sil vyrovnají. Vezměme si libovolně velkou část kontinua a zformulujeme pro něj podmínky rovnováhy. To znamená, že součet sil objemových  $\mathbf{F}$  a plošných  $\mathbf{T}$ , působících na povrchu vybrané části, se musí vyrovnat

$$\int_V \mathbf{F} dV + \int_S \mathbf{T} dS = 0, \quad (1.2)$$

rozepsáno ve složkách

$$\int_V F_i dV + \int_S T_i dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Použitím vztahu (1.1) a Gaussovy věty na druhý integrál dostáváme

$$\int_S T_i dS = \int_S \tau_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (1.4)$$

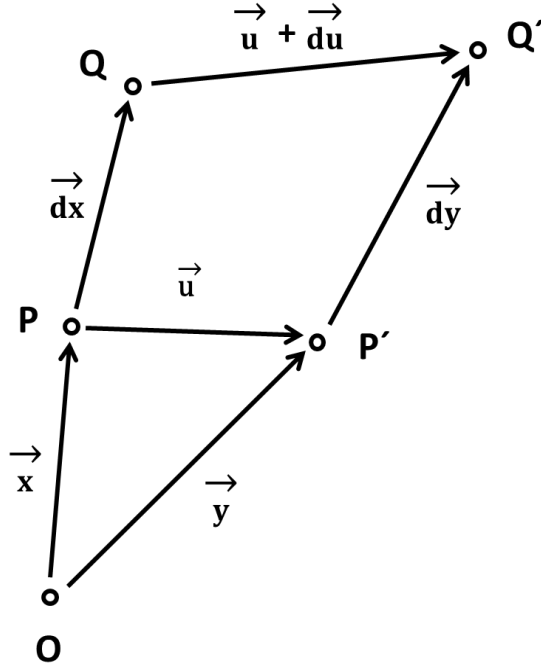
Z podmínky (1.4) tedy získáme vztah

$$\int_V (F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}) dV = 0, \quad (1.5)$$

který musí platit pro libovolný objem  $V$ . Vztah (1.5) může být splněn pro libovolný objem  $V$  jen tehdy, pokud je roven nule integrand. Odvodili jsme tak tři rovnice rovnováhy pro elastické těleso.

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \text{ v } \Omega. \quad (1.6)$$

Kromě podmínky rovnováhy sil, musí být též zachována podmínka rovnováhy momentů sil. Jak je ukázáno např. v [2], podmínka je splněna pro symetrický tenzor napětí  $\tau_{ij}$ .



Obrázek 1.1: Deformace bodů  $P$  a  $Q$  vůči vztažnému bodu  $O$ .

### 1.3 Deformace tělesa

Uvažujme těleso reprezentované oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  v nedeformovaném stavu. Každý bod tělesa v nedeformovaném stavu je popsán polohovým vektorem se složkami  $x_1, x_2, x_3$ . Působením vnějších sil se bod posune do nových souřadnic  $y_1, y_2, y_3$ . Proběhlou deformaci popíšeme vektorovou funkcí  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ , pro kterou platí

$$y_i = x_i + u_i(x_j), \quad (1.7)$$

kde  $u_i$  jsou složky  $\mathbf{u}$ . Předpokládáme, že funkce  $u_i$  jsou spojité a mají spojité parciální derivace potřebných řádů v oblasti  $\Omega$ . Lokální deformaci kontinua v daném bodě  $P$  vyjádříme pomocí posunutí nekonečně blízkého bodu  $Q$  v nedeformovaném stavu, viz obrázek 1.1. Bod  $P$  je popsán souřadnicemi  $x_i$ ,  $Q$  pak má souřadnice  $x_i + dx_i$ . Deformací přejdou body  $P, Q$  na body  $P', Q'$ , určenými souřadnicemi  $y_i$  a  $y_i + dy_i$ .

Pro  $dy_i$  pak dostáváme (při použití Einsteinova sumačního pravidla)

$$dy_i = dx_i + du_i(x_j) = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j. \quad (1.8)$$

Porovnáním kvadrátu vzdáleností obou bodů v původním  $ds_0^2$  a v deformovaném stavu  $ds^2$  získáme ( $j$  a  $k$  jsou sčítací indexy):

$$ds_0^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx_i dx_i = \delta_{jk} dx_j dx_k \quad (1.9)$$

a

$$ds^2 = d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} = dy_i dy_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \quad (1.10)$$

Úpravou vztahu (1.10) získáme

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left( \delta_{ij}\delta_{ik} + \delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k \\ &= \delta_{ik} dx_j dx_k + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nyní zadefinujeme novou veličinu vztahem pro její složky:

$$\epsilon_{jk} = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (j, k = 1, 2, 3), \quad (1.12)$$

kteřou nazveme *tenzorem konečné deformace*. Tento tenzor vyjadřuje změnu vzájemné vzdálenosti bodů  $P$  a  $Q$ . Pokud budeme uvažovat pouze malé výchylky, můžeme člen se smíšenými derivacemi zanedbat a získáme tak *tenzor malých deformací*

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (1.13)$$

Tenzor malých deformací je symetrický tenzor druhého řádu. Jeho diagonální složky vyjadřují relativní prodloužení zkoumaného elementu podél souřadnicových os a složky mimodiagonální mají význam poloviny smykových úhlů sevřených mezi souřadnými osami daných indexů.

## 1.4 Hookeův zákon

V této práci budeme uvažovat případ malých deformací elastického tělesa. V tomto případě popisuje realitu dostatečně přesně lineární závislost složek tenzoru deformace na složkách tenzoru napětí. Pro třírozměrný případ je tedy každá ze 6 složek tenzoru napětí lineární funkcí 6 složek tenzoru deformace. Vektorově zapsán takzvaný zobecněný Hookeův zákon vypadá takto:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \quad (1.14)$$

kde  $\tau_{ij}$ ,  $e_{kl}$  jsou tenzory druhého řádu,  $k, l$  sčítací indexy. Tenzor čtvrtého řádu  $C_{ijkl}$  je symetrický v indexech  $i$  a  $j$ ,  $k$  a  $l$ . Veličiny  $C_{ijkl}$  nazýváme elastickými koeficienty. Obecně jsou funkcí souřadnic, ale pokud jsou vlastnosti tělesa ve všech bodech stejné, pak se koeficienty  $C_{ijkl}$  stanou konstantami charakterizující těleso. Takové těleso nazýváme homogenní. Podobně, budou-li vlastnosti tělesa ve všech směrech stejné, nazývá se těleso izotropní. Jak je odvozeno v např. [2], maximální počet nezávislých koeficientů pro případ homogenního anizotropního tělesa je 15. Pro případ izotropního tělesa se počet nezávislých koeficientů redukuje na dva. Izotropní tělesa lze popsat například pomocí tzv. Lamého konstant  $\lambda$  a  $\mu$ . Zobecněný Hookeův zákon (1.14) pro izotropní homogenní těleso lze pak zapsat

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij}, \quad (1.15)$$

kde invariant  $\theta = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \operatorname{div} \mathbf{u}$  představuje kubickou dilataci tělesa. Lamého koeficienty lze určit ze známých materiálových konstant – Youngova modulu pružnosti  $E$  a Poissonovy konstanty  $\sigma$ , podle vztahu

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (1.16)$$

## 1.5 Rovinná pružnost

V této práci budeme řešit rovinnou deformaci tělesa. To znamená, že budeme hledat funkce posunutí v každém bodě tělesa na základě zadaných objemových sil a okrajových podmínek, viz dále. Navíc budeme předpokládat, že deformace ve směru osy  $z$  budou nulové či nezadbatelné a funkce posunutí ve směrech os  $x$ ,  $y$  nebudou funkcí souřadnice  $z$ . Toho je dosaženo u těles s převládajícími rozměry v ose  $z$ , jako například dlouhá deska či dlouhá tlustostěnná trubka. Výsledná deformace bude zachovávat rovinný průřez kolmý na osu  $z$ . Ze soustavy rovnic ale nakonec vyjde nenulové napětí v ose  $z$ , jež je dáno jako funkce napětí ve směrech os  $x$  a  $y$ .

Jak je ukázáno v [3], snadnou úpravou soustavy rovnic se problém rovinné deformace převede na problém rovinné pružnosti, a tamtéž – [3] je dokázána ekvivalence řešení obou úloh.

## 1.6 Okrajové podmínky

Pro úplnou matematickou formulaci problému je třeba rovnici (1.6) doplnit předepsáním okrajových podmínek. Rozlišujeme dva základní typy zadání okrajových podmínek:

**Dirichletovy podmínky** – na hranici zkoumaného tělesa jsou předepsány funkce posunutí

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{\text{Dir}}} = \mathbf{u}_{\text{Dir}}. \quad (1.17)$$

To odpovídá situaci, kdy je například nosník pevně ukotven ve stěně, nebo víme, že následkem působebních vnějších sil je těleso v rovnovážném stavu při určitém, předepsaném tvaru deformace jeho okrajů.

**Neumannovy podmínky** – na hranici zkoumaného tělesa je zadáno působení vnějších plošných sil pomocí tenzoru napětí

$$\tau_{ij} \cdot n_j|_{\Gamma_{\text{Neu}}} = q_i. \quad (1.18)$$

Příkladem této podmínky může být zatížení jednoho konce nosníku závažím. Toto závaží působí plošnými silami na body svého úchyty. Dalším příkladem je tah za jeden konec tyče.

Vedle těchto dvou typů můžeme ještě řešit úlohu **smíšenou**, ve které jsou zadány obě podmínky na disjunktních částech hranice  $\Gamma_{\text{Dir}}$  a  $\Gamma_{\text{Neu}}$ , kde  $\Gamma_{\text{Dir}} \cup \Gamma_{\text{Neu}} = \partial\Omega$ .

# Kapitola 2

## Matematický aparát

V dalším textu budeme vycházet z několika pojmů z funkcionální analýzy, které v tomto odstavci uvedeme.

### 2.1 Zavedení použitých prostorů a norem

Pro vlastnosti funkčních prostorů, které budeme definovat, je důležité, nad jakou oblastí jsou sestrojeny:

**Definice: 1** (viz [7]). *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  je omezená oblast. Řekneme, že hranice oblasti  $\partial\Omega$  je lipschitzovsky spojitá, když splňuje následující podmínku: Pro libovolné  $z \in \partial\Omega$  existuje okolí  $U = U(z)$  takové, že množinu  $U \cap \partial\Omega$  lze v nějakém kartézském souřadnicovém systému  $(x_1, \dots, x_d)$  vyjádřit ve tvaru*

$$x_d = F(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad (2.1)$$

a množinu  $U \cap \Omega$  lze vyjádřit nerovností

$$x_d < F(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad (2.2)$$

kde  $F$  je lipschitzovsky spojitá funkce.

**Poznámka.** Oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí má definovaný jednotkový vektor vnější normály skoro všude na  $\partial\Omega$ .

Pro zjednodušení budeme dále používat značení.

**Definice: 2.** *Derivací podle multiindexu  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ , kde  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  rozumíme parciální derivace  $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ , kde  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ .*

Mezi základní prostory funkcí patří prostor  $L^p(\Omega)$ , kde  $1 \leq p < \infty$ . Tyto prostory jsou definovány pomocí Lebesgueovy míry a integrálu. Prostor  $L^p(\Omega)$  obsahuje takové funkce  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , pro které platí

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty. \quad (2.3)$$

Prostory  $L^p(\Omega)$  jsou Banachovy prostory s normou

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.4)$$

pro  $1 \leq p < \infty$ . Pro  $p = \infty$  je norma volena jako  $\text{ess sup } f$ , viz [1].

**Poznámka.** Obdobně pracujeme s prostory  $L^p(\partial\Omega)$ , kde  $\partial\Omega$  je hranice oblasti  $\Omega$ .

Pro  $k \in \mathbb{N}$  a  $1 \leq p \leq \infty$  můžeme definovat Sobolevův prostor

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}, \quad (2.5)$$

kde symbolem  $D^\alpha$  je označena derivace podle multiindexu  $\alpha$ . Normu na tomto prostoru zavádíme jako

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6)$$

Kromě normy pracujeme na tomto prostoru také se seminormou

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = |u|_{k,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=k} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Bude-li z kontextu jasné, přes jakou oblast integrujeme, budeme tento index  $\Omega$  vynechávat.

O hodnotě funkce na hranici oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  můžeme mluvit pouze v případě, kdy je  $2k > d$  a ze Sobolevových vět plyne vnoření  $W^{k,p}(\Omega)$  do  $C(\bar{\Omega})$ , viz [4]. V ostatních případech používáme větu o stopách, zde uvedenou bez důkazu:

**Věta: 1.** *Nechť je oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  s lipschitzovskými spojitými hranicemi. Pak existuje právě jeden omezený lineární operátor  $T : W^{k,p}(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$  takový, že  $\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  platí, že  $Tu = u|_{\partial\Omega}$ .*

Znění a důkaz viz [8].

Nyní, když má smysl hodnota funkce na hranici, můžeme zavést prostor  $V$  se stejnou normou jako na prostoru  $W^{1,2}(\Omega)$  takto

$$V = \{f \in W^{1,2}(\Omega) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{Dir}\} \subset W^{1,2}(\Omega) \quad (2.8)$$

Pokud budeme požadovat integrovatelnost i vyšších derivací, lze tento prostor ještě zobecnit na

$$V^{(k)} = \{f \in W^{k,2}(\Omega) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{Dir}\} \subset W^{k,2}(\Omega) \quad (2.9)$$

Prostor všech omezených lineárních funkcí definovaných na prostoru  $V$  označíme jako  $V^*$ , mluvíme pak o tzv. duálním prostoru. Na tomto prostoru definujeme normu pro  $F \in V^*$  vztahem

$$\|F\|_* = \max_{u \in V} \frac{|F(u)|}{\|u\|_V} \quad (2.10)$$



Pro řešení úlohy rovinné pružnosti zavedeme značení kartézského součinu Sobolevových prostorů jako  $\mathbf{V} = V \times V = \{f \in W^{1,2}(\Omega) | f = 0 \text{ na } \Gamma_{Dir}\}^2$ . Na tomto prostoru definujeme normu vztahem

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} = \sqrt{\|u_1\|_{1,2}^2 + \|u_2\|_{1,2}^2} \quad (2.11)$$

Z teorie Sobolevových prostorů využijeme i prostor funkcí s kompaktním nosičem,  $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_V}$ , tj. uzávěr nekonečně hladkých funkcí s kompaktním nosičem na oblasti  $\Omega$  v normě prostoru  $V$ , viz např. [11].

## 2.2 Důležité vztahy

Dále budeme používat následující vztahy.

**Věta: 2** (o substituci). *Nechť  $P, R \subset \mathbb{R}^d$  a  $f$  je prosté spojitě regulární zobrazení otevřené množiny  $P$  na  $R$ , které má nenulový jakobiánem  $|f'(\hat{x})|$ . Nechť  $M \subset R$ . Pak pro libovolnou funkci měřitelnou  $g$  platí*

$$\int_M g(x) dx = \int_{f^{-1}(M)} g(f(\hat{x})) |f'(\hat{x})| d\hat{x} \quad (2.12)$$

Znění a důkaz viz [6].

**Věta: 3** (Greenova věta). *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  je oblast s lipschitzovskou hranicí  $\partial\Omega$  a nechť funkce  $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$ . Pak platí*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i dS - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx \quad (2.13)$$

kde  $n_i$  je  $i$ -tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály.

Znění a důkaz viz [7].

**Věta: 4** (Friedrichsova nerovnost). *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je oblast s lipschitzovskou hranicí  $\partial\Omega$  a  $\Gamma \subset \partial\Omega$  je její část s kladnou Lebesgueovou mírou. Pak existuje kladná konstanta  $C_F$  závislá jen na  $\Omega$  a  $\Gamma$  taková, že pro každou funkci  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  platí:*

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq C_F \left( \int_{\Gamma} u^2 dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) \quad (2.14)$$

Znění a důkaz viz [8].

**Věta: 5** (Kornova nerovnost). *Nechť  $\mathbf{V}$  je uzavřený podprostor  $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ , kde  $[W_0^{1,2}(\Omega)]^2 \subset \mathbf{V} \subset [W^{1,2}(\Omega)]^2$ . Nechť  $P_{\mathbf{V}} = P \cap \mathbf{V}$  a  $Q_{\mathbf{V}}$  je ortogonální doplněk*

množiny  $P_V$  v prostoru  $\mathbf{V}$ , tedy  $\mathbf{V} = P_V \oplus Q_V$ . Pak existuje kladná konstanta  $C_K > 0$ , že platí

$$\sum_{i,j} e_{ij}(\mathbf{u})^2 \geq C_K \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad \forall \mathbf{u} \in Q_V, \quad (2.15)$$

kde  $e_{ij}$  je tenzor malých deformací a  $P$  je podprostor rotací<sup>1</sup> v prostoru  $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ .

Znění a důkaz viz [7].

**Věta: 6** (Lax - Milgram). *Nechť  $V$  je Hilbertův prostor,  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  je bilineární forma na  $V$  a nechť  $L$  je lineární omezený funkcionál na  $V$ . Nechť dále platí:*

1. *na  $V$  omezená, tj.  $(\exists K > 0)$ , že  $(|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{u}\|_{1,2} \|\mathbf{v}\|_{1,2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$*
2. *na  $V$  koercivní, nebo-li  $(\exists \alpha > 0)$ , že  $(\forall \mathbf{v} \in V)(|\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2)$*

*Pak existuje právě jedna funkce  $\mathbf{u} \in V$  taková, že  $L(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$ . Navíc platí  $\|\mathbf{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_*$ .*

Znění a důkaz viz [8].

---

<sup>1</sup>To jsou takové funkce  $\mathbf{v} \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$ , že  $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{v}$  a tudíž je pro ně  $e_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ , více v [7].

# Kapitola 3

## Numerický model

Pro zjednodušení vysvětlíme pojem slabého řešení na modelové úloze a následně odvození metody konečných prvků.

### 3.1 Modelová úloha

V této kapitole se budeme zabývat modelovou jednorozměrnou úlohou na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Tedy hledáme funkci  $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , která splňuje následující rovnici. Dále předpokládáme, že funkce  $f \in C(\Omega)$ , a řešíme

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ v } \Omega \\ u &= 0 \text{ na } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tato okrajová úloha je tzv. Poissonova úloha a na její řešení vedle jednorozměrného případu lineární pružnosti vedou též problémy přenosu tepla či elektrostatiky.

**Definice: 3.** *Klasickým řešením rovnice (3.1) nazveme funkci  $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$  splňující parciální diferenciální rovnici (3.1) spolu s okrajovou podmínkou v každém bodě oblasti  $\Omega$ .*

### 3.2 Slabá formulace

Modelovou úlohu převedeme do slabé formulace. Nejprve rovnici (3.1) vynásobíme funkcí  $v$  z prostoru  $V$ , zavedeného v předchozí kapitole. Následnou rovnost zintegrujeme přes celou oblast  $\Omega$

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \tag{3.2}$$

První člen upravíme pomocí Greenovy věty

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \tag{3.3}$$

Protože je testovací funkce  $v$  nulová na hranici oblasti  $\Omega$ , je i výraz  $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot v \, dx$  roven nule. Získáváme tak výslednou rovnost

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \quad (3.4)$$

**Definice: 4.** *Slabým řešením rovnice (3.1) nazveme takovou funkci  $u \in V$ , která splňuje rovnost (3.4) pro každou funkci  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .*

### 3.3 Diskrétní formulace

V metodě konečných prvků budeme hledat numerické řešení problému (3.1), tedy numerickou aproximaci slabého řešení úlohy (3.4) tak, že si zvolíme prostor  $V_h$  testovacích funkcí s konečnou dimenzí  $N_h$ . Numerické řešení  $u_h$  hledáme v prostoru  $V_h$ , tedy hledáme  $u_h \in V_h$  takové, že pro všechny funkce  $v_h$  z  $V_h$  platí

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx. \quad (3.5)$$

V prostoru  $V_h$  můžeme zvolit konečně-člennou bázi. Prvky báze budeme nazývat bázové funkce prostoru  $V_h$  a budeme je označovat jako  $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$ . Potom můžeme každou funkci a tedy i řešení úlohy (3.5) vyjádřit pomocí lineární kombinace:

$$u_h = \sum_{m=1}^{N_h} \alpha_m \varphi_m \quad (3.6)$$

Všechny funkce na konečně rozměrném prostoru se dají nakombinovat z báze, proto lze podmínku (3.5) přeformulovat tak, že musí být splněna pro všechny bázové funkce  $\varphi_n$  z prostoru  $V_h$

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_n \, dx, \quad (3.7)$$

kde  $n \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Po dosazení

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{m=1}^{N_h} \alpha_m \varphi_m \right) \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_n \, dx \quad (3.8)$$

a vytknutím obdržíme

$$\sum_{m=1}^{N_h} \alpha_m \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_n \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi_n \, dx. \quad (3.9)$$

Známe-li nyní báze funkce, můžeme spočítat intergály na pravé i na levé straně a získáme soustavu rovnic pro neznámý vektor koeficientů  $\alpha_m$

$$\sum_{m=0}^{N_h} \alpha_m \underbrace{\sum_{n=0}^{N_h} \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n \, dx}_{=a_{nm}} = \sum_{n=0}^{N_h} \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_n \, dx}_{=b_n}. \quad (3.10)$$

Zkráceně

$$\mathbb{A}^T \vec{\alpha} = \vec{b}, \quad (3.11)$$

kde jsou jednotlivé prvky soustavy dány těmito vztahy

$$a_{nm} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n \, dx \quad (3.12)$$

$$b_n = \int_{\Omega} f \varphi_n \, dx. \quad (3.13)$$

**Poznámka.** Matice soustavy se často nazývá maticí tuhosti, podle prvních aplikací metody konečných prvků. Tato matice je symetrická a pozitivně definitní, tedy i regulární. Řešení této lineární soustavy rovnic jednoznačně určuje numerické řešení  $u_h$  jako lineární kombinaci báze funkce  $\varphi_m$  z prostoru  $V_h$ .

## 3.4 Metoda konečných prvků

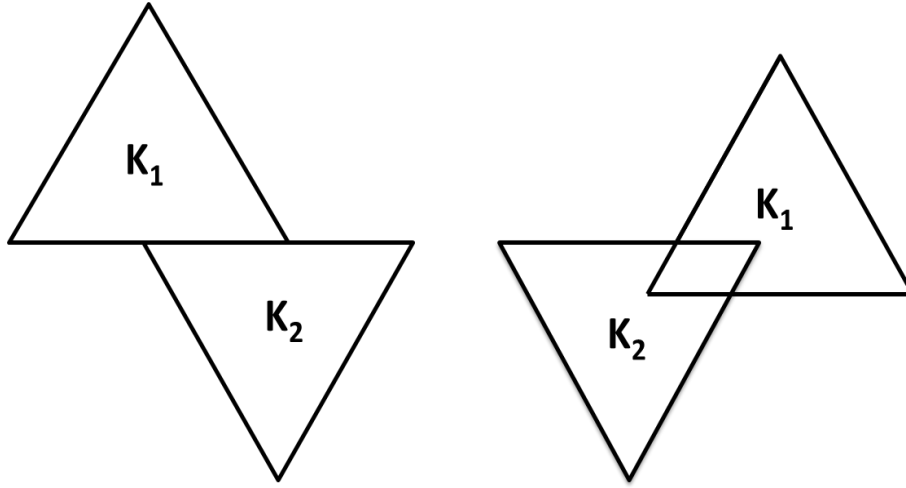
Potíží při řešení vzniklé soustavy (3.10) je, že matice soustavy  $\mathbf{A}$  je obecně plná. Protože dimenze prostoru  $V_h$  je obvykle velká, není jednoduché tuto soustavu rovnic vyřešit. Proto se v následujícím postupu budeme snažit převést problém do diskrétní formulace s co nejjednodušší maticí. Nejprve však vysvětleme, jaké vlastnosti musí mít triangulace dané oblasti.

### 3.4.1 Triangulace

**Definice: 5.** Mějme danu omezenou polygonální oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Triangulaci  $\tau_h$  nazýváme přípustnou pokud platí:

- Triangulace  $\tau_h$  je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků  $K$ .
- $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$
- Nechť  $K_i, K_j \in \tau_h, K_i \neq K_j$ . Pak jsou pro  $K_i \cap K_j$  tři možnosti – buď jsou disjunktní -  $\emptyset$ , nebo mají společný vrchol, anebo mají společnou hranu.

Mezi přípustné triangulace nepatří například situace z následujícího obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Ukázky nepřipustných triangulací

**Definice 6.** O systému triangulací  $(\tau_h)_{h \in (0, h_0)}$  dané oblasti  $\Omega$  říkáme, že je regulární právě, když existuje kladná konstanta  $c$ , která splňuje následující podmínku

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c \text{ pro všechna } K \in \tau_h, h \in (0, h_0), \quad (3.14)$$

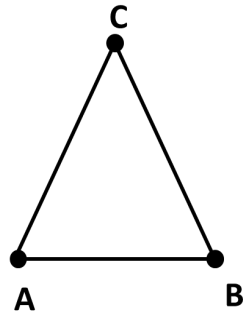
kde  $h_K$  je délka nejdelší strany trojúhelníka  $K$  a  $\rho_K$  je poloměr kružnice vepsané do  $K$ . Dále položíme  $h_{max} = \max_{K \in \tau_h} h_K$  a případně ho budeme nazývat parametr triangulace.

### 3.4.2 Konečné prvky

Nyní vysvětlíme, co myslíme konečným prvkem, viz též [4]. Formálně můžeme konečný prvek v  $\mathbb{R}^d$  definovat jako trojici  $(K, \Sigma, P)$ , kde

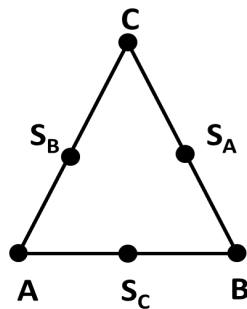
- $K$  je uzavřená podmnožina  $\mathbb{R}^d$  s lipschitzovskými hranicemi a neprázdným vnitřkem.
- $\Sigma$  je konečná množina spojitých lineárních forem definovaných na  $C^\infty(K)$ , které nazýváme stupně volnosti. Jejich počet označme  $N$  a jednotlivé formy  $L_i$ .
- $P$  je prostor funkcí  $p : K \rightarrow \mathbb{R}^d$  takových, že  $\Sigma$  je  $P$ -unisolvantní. Tzn. pro každou  $N$ -tici  $\alpha_1 \dots \alpha_N$  existuje právě jedna funkce  $p \in P$ , že  $L_i(p) = \alpha_i$ .

Ukázky nejjednodušších konečných prvků jsou znázorněny na následujících obrázcích 3.2, 3.3, 3.4 a 3.5. Mimo ně existují i další složitější prvky, kdy jsou buď využity složitější geometrické útvary nebo je za množinu  $\Sigma$  volena množina daná hodnotami nejen funkce, ale i jejich derivací ve zvolených bodech.



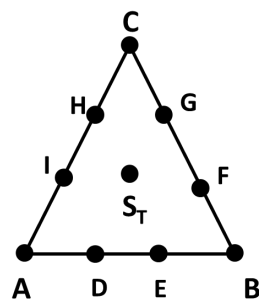
$K$  - trojúhelník s vrcholy  $A, B, C$   
 $\Sigma$  - je dána třemi lineárními formami  $L_i$  :  
 $L_1(f) = f(A)$   $L_2(f) = f(B)$   $L_3(f) = f(C)$   
 $P$  - volíme jako prostor polynomů  
prvního stupně

Obrázek 3.2: Langrangeovský lineární trojúhelníkový prvek.



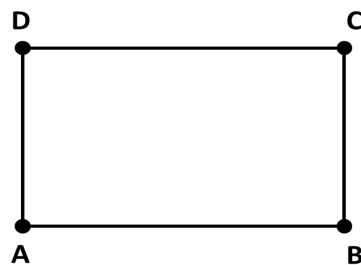
$K$  - trojúhelník s vrcholy  $A, B, C$  a  
středy stran  $S_A, S_B, S_C$   
 $\Sigma$  - je dána šesti lineárními formami  $L_i$  :  
 $L_1(f) = f(A)$   $L_2(f) = f(B)$   $L_3(f) = f(C)$   
 $L_4(f) = f(S_A)$   $L_5(f) = f(S_B)$   $L_6(f) = f(S_C)$   
 $P$  - volíme jako prostor polynomů  
druhého stupně

Obrázek 3.3: Langrangeovský kvadratický trojúhelníkový prvek.



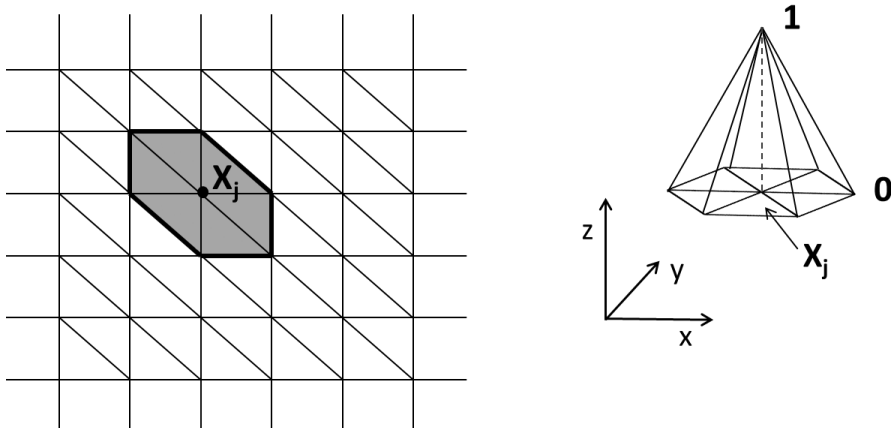
$K$  - trojúhelník s vrcholy  $A, B, C$  a  
body  $D, E, F, G, H, I$  a těžištěm  $S_T$   
 $\Sigma$  - je dána desíti lineárními formami  $L_i$  :  
 $L_1(f) = f(A)$   $L_2(f) = f(B)$   $L_3(f) = f(C)$   
 $L_4(f) = f(D)$   $L_5(f) = f(F)$   $L_6(f) = f(H)$   
 $L_7(f) = f(E)$   $L_8(f) = f(G)$   $L_9(f) = f(I)$   $L_{10}(f) = f(S_T)$   
 $P$  - volíme jako prostor polynomů třetího  
stupně

Obrázek 3.4: Kubický konečný prvek.



$K$  - obdélník s vrcholy  $A, B, C, D$   
 $\Sigma$  - je dána čtyřmi lineárními  
formami  $L_i$  :  
 $L_1(f) = f(A)$   $L_2(f) = f(B)$   $L_3(f) = f(C)$   
 $L_4(f) = f(D)$   
 $P$  - volíme jako prostor funkcí  
tvaru  $[1, x, y, xy]_\lambda$

Obrázek 3.5: Obdélníkový příklad konečného prvku.



Obrázek 3.6: Volba bázových funkcí - na levé straně je vyšrafován nosič bázové funkce od vrcholu  $X_j$ , napravo graf jejího průběhu na nosiči.

### 3.4.3 Volba bázových funkcí

V numerickém schématu jsme oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  pokryli trojúhelníky a za konečné prvky jsme zvolili Langrangeovské lineární trojúhelníky. Prostor testovacích funkcí získáme z prostoru  $H_h$ , tvořeného po částech lineárními funkcemi. Tj.  $H_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}) \mid \varphi|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\}$ , kde  $P_k(K)$  budeme značit prostor polynomů maximálně  $k$ -tého stupně nad množinou  $K$ . Funkce z prostoru  $H_h$  jsou pak jednoznačně určeny hodnotami ve vrcholech, kterých je  $N_h$ . Bázové funkce potom na těchto trojúhelnících mají tvar

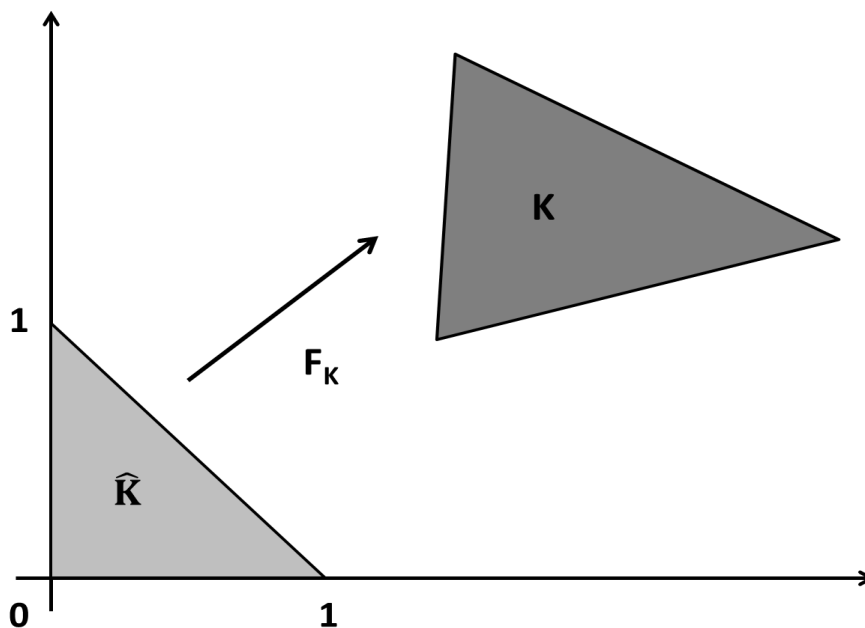
$$\forall i = 1, \dots, N_h \text{ je } \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.15)$$

kde  $x_j$  je  $j$ -tý vrchol. V ostatních bodech trojúhelníku  $K$  klesá daná bázová funkce  $\varphi_i$  lineárně až k nule, kterou nabývá na protilehlé straně  $j$ -tého vrcholu. Mimo trojúhelníky obsahující  $j$ -tý bod je bázová funkce  $\varphi_j$  nulová, jak je znázorněno na obrázku 3.6. Prostor testovacích funkcí  $V_h$  dostaneme jako podprostor  $V_h \subset H_h$ , jehož bázové funkce v bodech na hranici oblasti  $\Omega$  jsou nulové.

Protože volba  $V_h$  je důležitá nejen z praktického pohledu zahrnujícím implementaci a složitost výpočtu, ale též kvůli teoretickému pozadí umocněného otázkou konvergence, je třeba vzít v úvahu následující body:

- Volba lokálního prostoru  $C^1(K)$  - prostory polynomů jsou praktické pro implementaci a mají vypracovanou teorii konvergence.
- Spojitost konečných prvků  $V_h \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  - je zaručena volbou bázových funkcí.
- Volba prostoru bázových funkcí z prostoru  $V_h$  s malým nosičem - podstatné pro sestavení matice a její řídkou strukturu.
- Volba afinně ekvivalentních prvků - výhodné pro snadnou implementaci. Potřebné vztahy lze pak získat transformací z referenčního prvku na libovolný konečný prvek, viz dále.





Obrázek 3.7: Afinní zobrazení trojúhelníka  $\hat{K}$  na  $K$ .

Další odstavce se věnují odvozením potřebných vztahů pro následnou implementaci.

## 3.5 Práce se zvolenými bázovými funkcemi

### 3.5.1 Transformace referenčního trojúhelníku

Referenčním trojúhelníkem nazveme trojúhelník  $\hat{K}$  s vrcholy  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  z obrázku 3.7. Nyní můžeme libovolný trojúhelník triangulace  $\tau_h$  získat jako obraz referenčního trojúhelníku  $\hat{K}$  pomocí afinního zobrazení. Toto zobrazení lze definovat předpisem:

$$F_K : \hat{K} \mapsto K, \quad F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_K, \quad (3.16)$$

kde  $\mathbb{B}_K$  je regulární matice a  $\mathbf{c}_K$  je konstantní vektor.

Nyní odvodíme hodnotu prvků matice  $\mathbb{B}_K$  pro libovolně zvolený trojúhelník  $K$  s vrcholy  $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2]$ . Má-li se vrchol  $\hat{A} = [0, 0]$  zobrazit na vrchol  $A$ , pak

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{c}_K + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a tudíž musí být } \mathbf{c}_K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Pro vrchol  $B$  musí platit, že je obrazem vrcholu  $\hat{B}$ :  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Odtud je pak první sloupec matice roven  $\mathbb{B}_{K1,\cdot} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ . Zopakováním stejné podmínky pro vrchol  $C$  dostaneme již hodnotu všech prvků matice  $\mathbb{B}_K$

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

**Poznámka.** Z matice  $\mathbb{B}_K$  je patrné, že splývají-li dva body nebo leží-li všechny tři body na jedné přímce (a tedy vektor  $\vec{AC}$  je násobkem vektoru  $\vec{AB}$ ), pak je matice  $\mathbb{B}_K$  singulární a naopak.

### 3.5.2 Výpočet obsahu trojúhelníku

Zde dokážeme, že obsah trojúhelníku  $K$  je roven  $\frac{1}{2} \det \mathbb{B}_K$ . Obsah trojúhelníku  $K$  spočítáme jako  $S_K = \iint_K 1 dx dy$  s pomocí věty o substituci. Tu zvolíme jako

$$F_K : \hat{K} \mapsto K : \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c}_K + \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Pak je jakobián zobrazení

$$|F'_K| = \begin{vmatrix} \frac{\partial(a_1+b_{K11}\hat{x}+b_{K12}\hat{y})}{\partial\hat{x}} & \frac{\partial(a_1+b_{K11}\hat{x}+b_{K12}\hat{y})}{\partial\hat{y}} \\ \frac{\partial(a_2+b_{K21}\hat{x}+b_{K22}\hat{y})}{\partial\hat{x}} & \frac{\partial(a_2+b_{K21}\hat{x}+b_{K22}\hat{y})}{\partial\hat{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{K11} & b_{K12} \\ b_{K21} & b_{K22} \end{vmatrix} = \det \mathbb{B}_K. \quad (3.20)$$

Po dosazení tedy získáme

$$S_K = \iint_K 1 dx dy = \iint_{\hat{K}} \det \mathbb{B}_K d\hat{x} d\hat{y} = \det \mathbb{B}_K \iint_{\hat{K}} 1 d\hat{x} d\hat{y} = \frac{\det \mathbb{B}_K}{2}. \quad (3.21)$$

### 3.5.3 Odvození gradientu báзовých funkcí

Za báзовé funkce jsme zvolili lineární polynomy dvou proměnných. Jedna báзовá funkce příslušející vybranému vrcholu je nenulová na všech trojúhelnících, kde leží daný vrchol. V tomto vrcholu je rovna jedné a lineárně klesá až ke zbylým dvěma vrcholům, kde je již nulová. Nechť tedy máme vybraný trojúhelník  $K$  a báзовá funkce příslušná vrcholu  $A$  na něm nabývá hodnoty jedna a lineárně klesá, až na byde hodnoty nula ve vrcholech  $B, C$ . Analogický tvar požadujeme i na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$ . Proto musí platit  $\hat{\varphi}_A(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$ . Protože je ale

$$\varphi_A(x, y) = \hat{\varphi}_A(\hat{x}, \hat{y}), \quad \text{kde} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix},$$

a proto

$$\varphi_A(x(\hat{x}, \hat{y}), y(\hat{x}, \hat{y})) = \hat{\varphi}_A(\hat{x}, \hat{y}).$$

Ze znalosti  $\partial_x \hat{\varphi}_A, \partial_y \hat{\varphi}_A$  lze pak vyjádřit i  $\partial_x \varphi_A, \partial_y \varphi_A$ . Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_A}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \varphi_A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_A}{\partial \hat{y}} &= \frac{\partial \varphi_A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \varphi_A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ale protože je

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{K11} & b_{K21} \\ b_{K12} & b_{K22} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^T. \quad (3.23)$$

Celkem pak

$$\mathbb{B}_K^T \begin{pmatrix} \partial_x \varphi_A \\ \partial_y \varphi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \varphi_A \\ \partial_{\hat{y}} \varphi_A \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

A nakonec

$$\begin{pmatrix} \partial_x \varphi_A \\ \partial_y \varphi_A \end{pmatrix} = (\mathbb{B}_K^T)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \varphi_A \\ \partial_{\hat{y}} \varphi_A \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} b_{K22} & -b_{K21} \\ -b_{K12} & b_{K11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}} \varphi_A \\ \partial_{\hat{y}} \varphi_A \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Stejný vztah platí i pro báze funkce pro vrcholy  $B$  a  $C$  trojúhelníku  $K$ .

**Poznámka.** Protože jsme za báze funkce zvolili prostor polynomů prvního stupně, jsou jejich derivace konstantní funkce. Proto se lze při sestavování matice tuhosti vyhnout numerické integraci a jednotlivé prvky spočítat přesně.

## 3.6 Konvergence metody konečných prvků

Základem vět o konvergenci metody konečných prvků je Céovo lemma.

**Lemma 1** (Ceo). *Nechť  $u$  je přesné řešení Galerkinova/Ritzova problému<sup>1</sup> a  $u_h$  je jeho diskrétní řešení. Pak*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{K}{\alpha} \|u - v_h\|_V \text{ pro všechny } v_h \in V_h, \quad (3.26)$$

kde  $K$ , resp.  $\alpha$  je koeficient omezenosti, resp. koercivity z Lax - Milgramovy věty.

Důkaz: viz [4]

Pokud se nyní omezíme na polygonální oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a nechť je dále  $K$  trojúhelník,  $\Sigma$  určena hodnotami ve vrcholech a  $P$  polynomy prvního stupně. Pak lze pro konvergenci dokázat následující větu a odhad:

**Věta: 7.** *Nechť systém triangulací  $(\tau_h)$  je regulární,  $V_h$  je definován jako podprostor  $V_h \subset V$  po částech spojitých funkcí  $P$  na triangulaci  $\tau_h$  a nechť známe řešení  $u \in V^2(\Omega)$ . Pak existuje konstanta  $C > 0$ , že pro přibližné řešení Galerkinova/Ritzova problému  $u_h$  platí odhad chyby v normě prostoru  $V$ :*

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch|u|_{2,2} \quad (3.27)$$

**Poznámka.** Za předpokladu  $u \in V^{k+1}$  platí pro volbu polynomů  $k$ -tého stupně - tj.  $P_k$  odhad  $\|u - u_h\|_{1,2} \leq Ch^k|u|_{k+1,2}$ .

<sup>1</sup>bude vysvětleno v navazující kapitole, zde to lze chápat jako slabé řešení problému z (3.4)

**Důsledek.** Pro volbu Langrangeovských lineárních trojúhelníků pak je konvergence  $\|u - u_h\|_{1,2} \approx O(h)$ .

**Poznámka.** Použitím Aubin - Nietscheho triku a za dodatečného předpokladu regularity duální úlohy, viz [10], lze pro polynomy prvního stupně ukázat

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2|u|_{2,2} \quad (3.28)$$

**Důsledek.** Pak při splnění tohoto předpokladu dostáváme odhad konvergence  $\|u - u_h\|_{0,2} \approx O(h^2)$ .

# Kapitola 4

## Variační princip úlohy rovinné pružnosti

Dále budeme řešit dvourozměrný případ, tj.  $\mathbf{u} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ . V první kapitole jsme z teorie pružnosti získali Lamého rovnice popisující statickou rovnováhu vyšetřovaného tělesa. Z Hookeova zákona máme implicitně zadánu funkci  $\mathbf{u}$  pomocí funkce  $\tau_{ij}(\mathbf{u})$  a  $e_{kl}(\mathbf{u})$ . Navíc předpokládejme, že platí  $f_i \in C(\bar{\Omega})$  a že máme zadány okrajové podmínky smíšeného typu, kdy platí, že funkce  $\mathbf{u}_{\text{Dir}} \in [C(\Gamma_{\text{Dir}})]^2$ ,  $q_i \in C(\Gamma_{\text{Neu}})$ . O omezené oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  předpokládáme, že má lipschitzovsky spojitou hranici  $\partial\Omega$  s neprázdnou částí  $\Gamma_{\text{Dir}}$ .

Řešíme tedy okrajovou úlohu

$$-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{v } \Omega \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{\text{Dir}}} = \mathbf{u}_{\text{Dir}} \quad (4.1b)$$

$$\tau_{ij} \cdot n_j|_{\Gamma_{\text{Neu}}} = q_i \quad (4.1c)$$

Za *klasické řešení* rovnic (4.1), (4.1b) a (4.1c) považujeme funkci  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , kde  $u_1, u_2 \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})$  splňující rovnici (4.1) spolu s podmínkami (4.1b, c) v každém bodě.

**Poznámka.** Požadavek  $\mathbf{u}_{\text{Dir}} \in [C(\Gamma_{\text{Dir}})]^2$  lze nahradit požadavkem  $\mathbf{u}_{\text{Dir}} \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$ , kdy předpokládáme, že okrajovou podmínku lze rozšířit na celou oblast  $\Omega$  tak, že výsledná funkce bude z  $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ .

### 4.1 Slabé řešení

Pro metodu konečných prvků budeme formulovat problém (4.1) ve slabém smyslu. Mluvíme o tzv. *slabém řešení*.

Nejdříve vynásobíme rovnici (4.1) funkcí  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{V}$ , kde  $v_1, v_2 \in V$  a zinte-

grujeme přes celou oblast  $\Omega$

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx. \quad (4.2)$$

Použijeme Greenovu větu a získáme

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \, dx = \int_{\Omega} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_{\partial\Omega} \tau_{ij} n_j v_i \, dx.$$

Z definice prostoru  $\mathbf{V}$  a z okrajových podmínek (4.1c) dostáváme

$$\int_{\partial\Omega} \tau_{ij} n_j v_i \, dx = \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{Dir}}} \tau_{ij} n_j v_i \, dx}_{=0} - \int_{\Gamma_{\text{Neu}}} q_i v_i \, dx.$$

Zároveň můžeme využít symetrie tenzoru  $\tau_{ij}$  a dále upravíme  $\int_{\Omega} \tau_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \, dx$

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \, dx = \int_{\Omega} \tau_{ij} e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx. \quad (4.3)$$

S použitím Hookeova zákona rozepíšeme  $\tau_{ij}$

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx. \quad (4.4)$$

Nyní převedeme výraz s Neumannovou okrajovou podmínkou na pravou stranu rovnice a upravíme do konečné podoby

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}} q_i v_i \, dx. \quad (4.5)$$

Tímto postupem jsme převedli rovnici do integrální podoby, čím jsme i oslabili potřebné počáteční předpoklady. Nyní postačuje ke korektnosti rovnice výše, aby  $C_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f_i \in L^2(\Omega)$  a  $q_i \in L^2(\partial\Omega)$ .

*Slabým řešením* nyní nazveme takovou funkci  $\mathbf{u} \in [W(\Omega)^{1,2}]^2$ , pro kterou platí:

- $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$
- $\mathbf{w}|_{\Gamma_{\text{Dir}}} = \mathbf{u}_{\text{Dir}}$ ,  $\mathbf{w} \in [W(\Omega)^{1,2}]^2$  a  $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ .
- funkce  $\mathbf{u}$  splňuje rovnost (4.5) pro všechna  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ .

**Tvrzení 1.** *Klasické řešení rovnice (4.1) je také slabým řešením (a tedy splňuje (4.5)).*

Důkaz: Je-li splněna rovnice (4.1), prováděním výše uvedených úprav zůstává zachována rovnost až do konečného tvaru (4.5). c.b.d.

**Poznámka.** Z posledních úprav je vidět, že došlo k oslabení předpokladů kladených na funkce  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{q}_{Neu}$ . Nyní stačí pouze  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{q}_{Neu} \in L^2(\Gamma_{Neu})$ .

## 4.2 Variační princip

Na prostoru funkcí  $[W^{1,2}(\Omega)]^2$  definujeme bilineární formu  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  předpisem

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx. \quad (4.6)$$

O této bilineární formě nejprve ukážeme, že je omezená na prostoru  $\mathbf{V}$ :

**Lemma 2.** *Nechť existuje konstanta  $K > 0$  taková, že  $(\forall i, j, k, l)(|C_{ijkl}| < K)$ . Pak pro všechna  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$  je výraz  $\int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx$  omezený.*

Důkaz:

Zvětšením absolutní hodnoty a použitím konstanty  $K$  dostaneme

$$\left| \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |C_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{v})| \, dx \leq \sum_{i,j,k,l} K \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{u})| |e_{kl}(\mathbf{v})| \, dx.$$

Nyní na tento součin použijeme Schwartzovu nerovnost a získáme

$$\sum_{i,j,k,l} K \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{u})| |e_{kl}(\mathbf{v})| \, dx \leq \sum_{i,j,k,l} K \left( \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{u})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |e_{kl}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Vícenásobným použitím aritmeticko - geometrické nerovnosti dostaneme platnost nerovnosti

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,k,l} K \left( \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{u})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |e_{kl}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq KL \left( \sum_{i,j} \int_{\Omega} |e_{ij}(\mathbf{u})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k,l} \int_{\Omega} |e_{kl}(\mathbf{v})|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde  $L \geq 2$  je jistá kladná konstanta. Celkem pak po odhadnutí obou výrazů v absolutní hodnotě normou prostoru  $\mathbf{V}$  dostáváme

$$\left| \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \right| \leq KL \|\mathbf{u}\|_{1,2} \|\mathbf{v}\|_{1,2}. \quad (4.9)$$

c.b.d.

Budeme-li nyní uvažovat homogenní a izotropní těleso, bude mít tenzoru čtvrtého řádu  $C_{ijkl}$  speciální tvar. Pro něj dokážeme následující lemma:

**Lemma 3.** *Nechť pro  $i = j$  je  $C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}) = \lambda\theta + 2\mu e_{ii}(\mathbf{u})$ , a pak pro  $i \neq j$  nechť  $C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}) = \mu e_{ij}(\mathbf{u})$ , kde  $\theta = e_{11}(\mathbf{u}) + e_{22}(\mathbf{u})$ , a  $\lambda, \mu$  jsou kladné konstanty. Pro všechna  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  je pak forma  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  koercivní, tj.  $(\exists K > 0)$ , že  $(\int_{\Omega} C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})dx \geq K\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2)$ .*

Důkaz:

Vyjádríme nejprve výraz a odhadneme

$$\begin{aligned} C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u}) &= \lambda(e_{11}(\mathbf{u}) + e_{22}(\mathbf{u}))^2 + 2\mu(e_{11}(\mathbf{u})^2 + e_{22}(\mathbf{u})^2) + \mu(e_{12}(\mathbf{u})^2 + e_{21}(\mathbf{u})^2) \\ &\geq B \sum_{i,j} e_{ij}(\mathbf{u})^2, \quad B = \min\{\lambda, \mu\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dále použijeme Kornovu nerovnost. Tu použít můžeme, neboť máme na části hranice  $\partial\Omega$  předepsánu Dirichletovu okrajovou podmínku, a proto podprostor posunutí a rotací  $P_V = \emptyset$ . Pak obdržíme

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u}) dx \geq BC_K \int_{\Omega} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx, \quad (4.11)$$

kde  $C_K$  je kladná konstanta z Kornovy nerovnosti. K takto odhadnuté pravé straně nyní přičteme integrál  $BC_K \int_{\Gamma_{Dir}} \mathbf{u}^2 dS$ . Ten je rovný nule, neboť integrujeme přes část hranice  $\Gamma_{Dir}$  s kladnou mírou, kde platí Dirichletova podmínka a testovací funkce  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  jsou zde nulové. Pak můžeme použít Friedrichsovo lemma a získáme konečný odhad

$$BC_K \left( \int_{\Omega} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_{Dir}} \mathbf{u}^2 dS \right) \geq K\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2, \quad (4.12)$$

kde  $K = \frac{BC_K}{C_F}$  a  $C_F$  je konstanta z daného lemmatu. c.b.d.

**Poznámka.** Při této speciální volbě  $C_{ijkl}$  je forma  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  též symetrická.

Dále zavedeme lineární funkcionál  $L(\cdot)$  na prostoru  $\mathbf{V}$  jako

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_{Neu}} q_i v_i dx. \quad (4.13)$$

Je zřejmé, že se jedná o funkcionál. Dokážeme, že je i omezený:

$$|L(\mathbf{v})| \leq \left| \int_{\Omega} f_i v_i dx \right| + \left| \int_{\Gamma_{Neu}} q_i v_i dx \right| \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{q}_{Neu}\|_{L^2(\Gamma_{Neu})}\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_{Neu})}, \quad (4.14)$$



kde jsme využili Schwartzovu nerovnost na prostoru  $L^2(\Omega)$  a  $L^2(\Gamma_{\text{Neu}})$ . Pro funkce  $\mathbf{z}$  z prostoru  $\mathbf{V}$  platí  $\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{v}\|_{1,2}$ . Z věty o stopách můžeme dále odhadnout omezený operátor stop konstantou  $C_T$  a tedy

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_{\text{Neu}})} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_T \|\mathbf{v}\|_{1,2}. \quad (4.15)$$

Navíc, protože je  $\mathbf{q}_{\text{Neu}} \in C^2(\Gamma_{\text{Neu}})$  a  $\mathbf{f} \in C^2(\bar{\Omega})$ , existují konstanty  $C_q, C_f > 0$  takové, že  $\|\mathbf{q}_{\text{Neu}}\|_{L^2(\Gamma_{\text{Neu}})} \leq C_q$  a  $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_f$ . Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{q}_{\text{Neu}}\|_{L^2(\Gamma_{\text{Neu}})} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_{\text{Neu}})} &\leq C_f \|\mathbf{v}\|_{1,2} + C_q C_T \|\mathbf{v}\|_{1,2} \\ &= (C_f + C_q C_T) \|\mathbf{v}\|_{1,2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

c.b.d.

*Galerkinovou formulací* pak nazýváme problém (4.1) přepsaný ve slabém smyslu pomocí (4.6) a (4.13) takto: Hledáme takovou funkci  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ , že  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w}|_{\Gamma_{\text{Dir}}} = \mathbf{u}_{\text{Dir}} \in [W(\Omega)^{1,2}]^2$  a  $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ , aby

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \text{ pro } \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (4.17)$$

Problém (4.17) lze alternativně formulovat pomocí minimalizace funkcionálu  $F$ . Poznatek, že řešení (4.1) minimalizuje funkcionál  $F$ , je variační princip úlohy rovinné pružnosti.

Hledáme tedy takovou funkci  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w}|_{\Gamma_{\text{Dir}}} = \mathbf{u}_{\text{Dir}} \in [W(\Omega)^{1,2}]^2$ , že funkce  $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$  je minimem funkcionálu  $F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - L(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{z})$ . *Ritzovou formulací* pak nazýváme hledání takového  $\mathbf{z}$  se stejně zadanými podmínkami jako výše, pro které platí

$$F(\mathbf{z}) \leq F(\mathbf{v}) \text{ pro všechny } \mathbf{v} \text{ z prostoru } \mathbf{V}, \quad (4.18)$$

**Poznámka.** Podmínka  $F(\mathbf{z}) \leq F(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$  je ekvivalentní s podmínkou, že funkce  $\mathbf{u}$  minimalizuje funkcionál na lineární varietě, tj.  $F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in \mathbf{u}_{\text{Dir}} + \mathbf{V}$ .

Řešení obou problémů jsou ekvivalentní, jak popisuje následující tvrzení.

**Tvrzení 2.** Funkce  $\mathbf{u}$  řeší Galerkinův problém právě tehdy, když řeší i Ritzův problém.

Důkaz podle [10]:

1. Nechť  $\mathbf{u}$  řeší Galerkinův problém. Pak platí  $\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  pro libovolné  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ . Vezměme tedy libovolné  $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$  a položme jej  $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$ . Pak

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}) &= F(\mathbf{z} + \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{z} + \mathbf{v}, \mathbf{z} + \mathbf{v}) - L(\mathbf{z} + \mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{z} + \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - L(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \\ &= F(\mathbf{z}) + \underbrace{\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v})}_{=0} + \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq F(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

2. Necht'  $\mathbf{u}$  řeší Ritzův problém. Pak platí  $F(\mathbf{z}) \leq F(\mathbf{v})$  pro všechny  $\mathbf{v}$ . Zavedeme reálnou funkci  $\varphi(t)$  vztahem  $\varphi(t) = F(\mathbf{z} + t\mathbf{v})$ . Potom můžeme psát

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= F(\mathbf{z} + t\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{z} + t\mathbf{v}, \mathbf{z} + t\mathbf{v}) - L(\mathbf{z} + t\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{z} + t\mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) - L(\mathbf{z}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) + t\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - tL(\mathbf{v}) + t\mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}t^2\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \\ &= F(\mathbf{z}) + t(\mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v})) + \frac{1}{2}t^2\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Kvadratická funkce  $\varphi(t)$  nabývá svého minima v bodě  $t = 0$ , neboť z definice má funkcionál  $F$  minimum na funkci  $\mathbf{z}$ . Proto musí být i její první derivace rovna v bodě 0 nule:

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \varphi'(t)|_{t=0} = \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + t\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v})|_{t=0} = \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) + \mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

Tím jsme ukázali, že funkce  $\mathbf{u}$  řeší Galerkinův problém. c.b.d.

### 4.3 Existence a jednoznačnost řešení

Existenci a jednoznačnost úlohy (4.1) ve slabé formulaci pro speciální tvar tenzoru, jak byl zvolen v lemmatu 3, a tedy i Galerkinova a Ritzova problému, je zaručena *Lax - Milgramovou větou*. Protože jsme již ověřili předpoklady této věty v předchozích lemmatech, víme, že existuje právě jedno řešení  $\mathbf{u}$ , které řeší problém (4.17) a tedy i (4.18).

# Kapitola 5

## Implementace

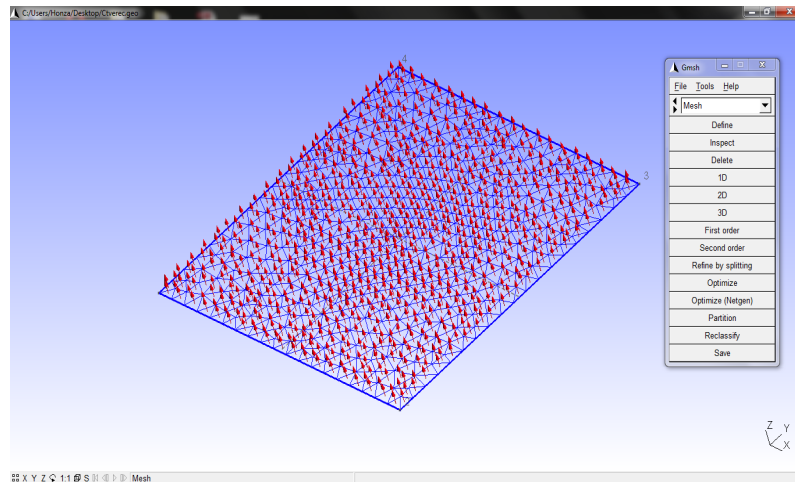
Tato kapitola obsahuje čtyři části. Nejprve představíme program pro triangulaci plochy. Pak popíšeme strukturu vyvinutého programu včetně popisu datových struktur a funkcí jednotlivých částí. Následně uvedeme příklad programu vhodného pro vizualizaci výsledků. Na závěr jsou ještě diskutovány rozdíly v implementaci pro úlohu rovinné pružnosti.

### 5.1 Triangulace

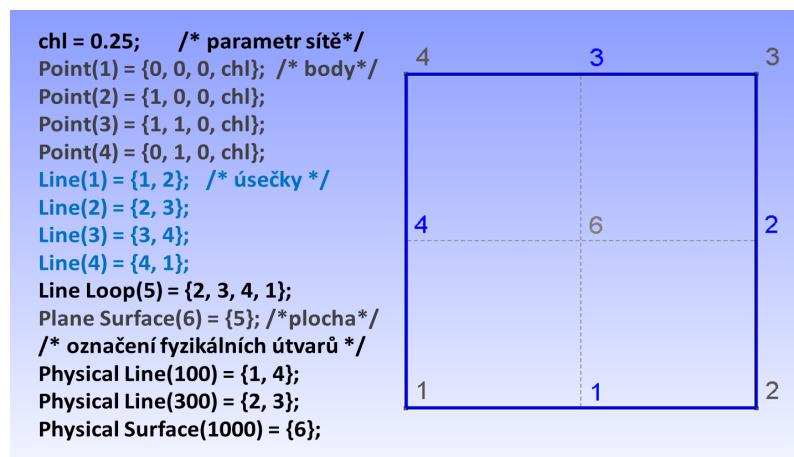
Triangulaci oblasti  $\Omega$  vygenerujeme v programu *Gmsh*. Tento program je dostupný v licenci GNU General Public License, lze ho získat například z internetové adresy [geuz.org](http://geuz.org) [5] i s potřebnou dokumentací. Má interaktivní prostředí, např. viz obrázek 5.1, podporuje vytváření sítí ve 2D i ve 3D a obsahuje zabudovaný CAD engine pro vytváření složitějších geometrických útvarů a těles.

Zkoumaný objekt je možno sestavit pomocí myši přímo v editoru nebo napsat ve formátu *.geo* do poznámkového bloku a ten pak načíst, viz například obrázek 5.2. Během editace můžeme označit jednotlivé geometrické útvary. Toto označení je pak zachováno i ve výstupním souboru. Toho využijeme pro odlišení různých hran. Následně můžeme na každé předepsat jinou okrajovou podmínku. Před vlastní triangulací lze nastavit i parametr velikosti sítě každému objektu zvlášť, přitom je zajištěna návaznost triangulací mezi jednotlivými sousedícími oblastmi. Program vygeneruje triangulaci s požadovanou hustotou a uloží ji ve formátu *.msh*. Ukázka formátu *.msh* je popsána například na obrázku 5.3. Před dalšími kroky je vhodné ještě v programu ověřit správnou orientaci všech vygenerovaných trojúhelníků.

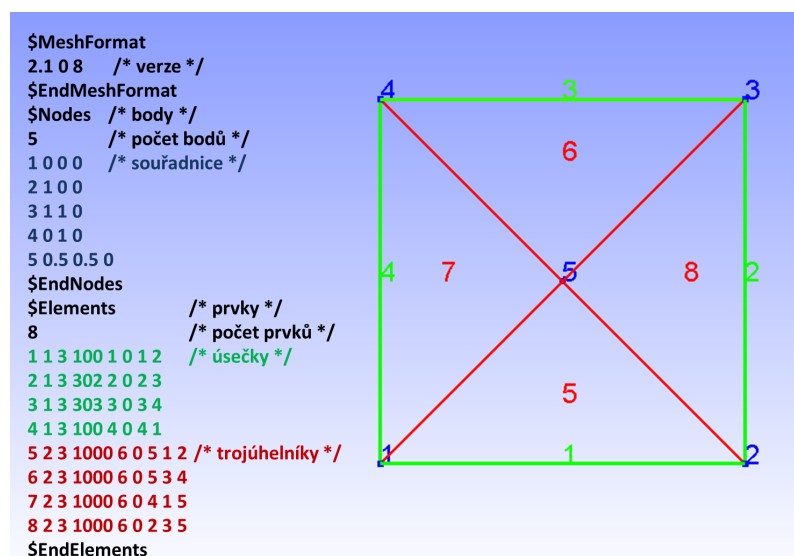
Tento program řeší velkou část praktické aplikace metody konečných prvků, která je jinak velmi pracná.



Obrázek 5.1: Gmsh: Zobrazení vygenerované sítě a kontrola orientace jednotlivých trojúhelníků.



Obrázek 5.2: Ukázka formátu .geo.



Obrázek 5.3: Ukázka formátu .msh.

## 5.2 Vyvinutý program

Program řešící odvozené numerické schéma pro modelovou úlohu je napsán v programovacím jazyku C. Vytvořený program umí načíst síť ze souboru ve formátu *.msh*, vyplnit řádkou matici tuhosti a vektor pravé strany, vzniklou soustavu vyřešit a řešení uložit do souboru ve formátu *.vtk*. V dalším jsou jednotlivé části programu popsány podrobněji.

### 5.2.1 Načtení triangulace

Základní datová struktura, do které načteme triangulaci, vypadá takto:

```
typedef struct {
long NPoints;           /* počet bodů */
long NTriangles;       /* počet trojúhelníků */
long NBoundarySides;   /* počet okrajových hran */
double *x, *y;         /* souřadnice bodů */
short *PointMark;      /* index oznamující polohu bodu na hranici */
long *SideA, *SideB;   /* body, tvořící úsečku */
short *SideMark;       /* index označující typ hranice */
long *ElementA, *ElementB, *ElementC; /*vrcholy tvořící trojúhelník*/
short *ElementMark;    /* index oblasti, kde se trojúhelník nachází */
} mesh2D;
```

Načtení probíhá ve třech krocích:

- Procedura `ReadNumbGEO(const char *fname, mesh2D *P)` načte z příslušných řádek vstupního souboru počet bodů. Počet trojúhelníků a okrajových hran zjistí projitím seznamu objektů a údaje zapíše do *mesh2D*. Vhodné je zkontrolovat, že součet počtu hraničních stěn a trojnásobku počtu trojúhelníků je dělitelný dvěma.
- Ve druhém kroku procedura `AllocateGEO(mesh2D *P)` naalokuje pole o potřebných velikostech zbylých proměnných struktury *mesh2D* a zkontroluje, že k jejich alokaci došlo (a nepřetekla operační paměť).
- Nakonec procedura `ReadGEO(const char *fname, mesh2D *P)` načte souřadnice bodů a uloží je do dynamicky alokovaných proměnných *x*, *y*. Místo toho, abychom si ukládali do další proměnné pořadí bodů, stačí nám k tomu využít přístupový index pole, na který se budeme přes další proměnné odvolávat. Do proměnné *PointMark* uložíme index bodu z *.msh*, který značí, zda daný bod leží na hranici oblasti  $\Omega$  nebo ne.

Pak vyplníme pole *ElementA*, *ElementB*, *ElementC* a *SideA*, *SideB*, kam pod *i*-tý index označující *i*-tý trojúhelník, resp. okrajovou hranu, zapíšeme, které body je tvoří. Při tom využíváme očíslování vrcholů pomocí indexů.

Do proměnných *ElementMark* a *SideMark* uložíme index, který označuje, v jakých oblastech nebo stěnách se daný trojúhelník, resp. okrajová hrana nachází. To je kromě rozlišení okrajových podmínek výhodné i pro případ, kdy je těleso nehomogenní a jeho jednotlivé oblasti se odlišují fyzikálními konstantami (například vystupujícími v Hookeově zákoně).

Po úspěšném načtení triangulace dané oblasti je vhodné jednak zkontrolovat správnou orientaci trojúhelníků danou pořadím jejich bodů a jednak pro ověření spočítat celkovou plochu oblasti a porovnat její shodu se součtem ploch všech trojúhelníků provedené triangulace. K tomu lze využít funkci `SpoctiObsah(mesh2D *P)`, kde v cyklu přes trojúhelníky počítáme jejich obsah jako polovinu determinantu jejich přidruženého afinního zobrazení.

**Poznámka.** Dynamické alokování má výhodu vyvarování se na jedné straně použití příliš mnoho nepotřebné operační paměti a na straně druhé odstraňuje nezbezpečí práce s nedostatečně velkými strukturami a případnou hrozbu jejich přetečení při nastavení pevných rozměrů použitých polí.

## 5.2.2 Další datové struktury

Protože numerické řešení hledáme ve všech bodech triangulace dané oblasti, použijeme pro jeho reprezentaci alokované pole *PStrana*, kde se budeme opět přes indexy odvolávat na pořadí bodů. Toto pole vytvoříme v proceduře `AllocPStrana(PStrana *B, mesh2D *P)`. Datová struktura řešení a pravé strany je následující:

```
typedef struct{
double *VAL; /* pole hodnot */
} PStrana;
```

Do stejné datové struktury uložíme i vektor pravých stran. Opět je alokujeme pomocí procedury `AllocPStrana(PStrana *B, mesh2D *P)` a vyplníme v proceduře `VyplnPStrana(PStrana *B, mesh2D *P)`.

Složky pravé strany odpovídající první částí výrazu

$$\int_{\Omega} f \varphi_n \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}} q \varphi_n \, dx$$

postupně vyplňujeme v cyklu přes všechny trojúhelníky a na nich nenulové bázové funkce. Složky pravé strany počítáme pomocí numerické integrace. Jako dostatečně přesná aproximace pro náš případ se osvědčil průměr hodnot dané funkce ve vrcholech trojúhelníku

$$\int_K f \varphi_n \, dx \approx \frac{1}{3}|K|(f(A) + f(B) + f(C)),$$

kde  $|K|$  je obsah trojúhelníku  $K$ .

Druhou část tvoří příspěvek od bodů na hranici s Neumannovou podmínkou. Proto tuto část spočítáme v cyklu přes všechny body s testem na podmínku, zda se bod nachází na dané části hranice. To zjistíme z uloženého indexu *PointMark*. Pak jednotlivé příspěvky vyjádříme pomocí podobné numerické integrace takto

$$\int_{S_{\text{Neu}}} q \varphi_n \, dx \approx \frac{1}{2} |S| (q(A) + q(B)),$$

kde  $|S|$  značíme délku okrajové hrany. Výsledek pak přičteme k dané složce vektoru. Poslední datovou strukturu, kterou využijeme pro reprezentaci řídké matice tuhosti, nazveme *Triplet*:

```
typedef struct{
long nz;      /* počet příspěvků */
long *I, *J; /* indexy příspěvku */
double *VAL; /* hodnota příspěvku */
} triplet;
```

Nenulové prvky řídké matice do *Tripletu* uložíme tak, že zapíšeme jejich indexy do *I*, *J* a hodnotu daného prvku do alokovaného seznamu *VAL*. Tento formát se označuje *CCS* (Compressed Column Storage). Do proměnné *nz* si uložíme počet platných záznamů v *Tripletu*. V proceduře `AllocTriplet(triplet *M, mesh2D *P)` alokujeme mnohem více paměti, protože tím zjednodušíme následné vyplnění matice tuhosti, jak bude vysvětleno dále.

### 5.2.3 Vyplnění matice tuhosti

Matici sestavíme v proceduře `VYPLNtriplet(triplet *M, mesh2D *P, PStrana *B)`. Jak víme z teoretické části, jednotlivé prvky matice spočítáme jako

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n \, dx.$$

Předností konečných prvků obecně je, že bázové funkce jsou nenulové pouze na několika trojúhelnících. Pak stačí prvky matice tuhosti vypočítat v cyklu přes všechny trojúhelníky, podrobnosti dále.

Další výhodou při volbě lineárních Langrangeovských prvků je, že jejich gradient je roven konstantní funkci. Potom lze tento integrál spočítat přesně (nebereme-li v potaz nepřesnost počítačové aritmetiky). Díky větě o substituci a dřívějšímu odvození je integrál roven

$$\int_K \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n \, dx = \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n \int_{\hat{K}} \det B_K \, d\hat{x} = \frac{1}{2} \det B_K \nabla \varphi_m \nabla \varphi_n,$$

kde poslední výraz je součinu tří reálných čísel určených z geometrie úlohy a zvolených bázových funkcí z kapitoly 3.5.

Nenulový prvek matice tuhosti vznikne součtem více příspěvků integrace přes trojúhelníky, a proto by bylo velmi neefektivní částečně vyplněný seznam nenulových prvků procházet a hledat, obsahuje-li již daný prvek či nikoliv. Proto budeme zapisovat všechny vypočítané příspěvky od *Tripletu* a až dodatečně seznam setřídíme. Na to potřebujeme dostatečně velkou strukturu *Triplet*, tj. za každý trojúhelník naalokujeme devět míst a za každou okrajovou hranu dvě místa *Tripletu*. Takto máme zaručeno, že nedojde k přetečení.

Pak postupujeme následovně: v cyklu projdeme všechny trojúhelníky a spočítáme příspěvky od všech jeho kombinací bázevých funkcí ve vrcholech, zapíšeme je do *Tripletu* a zvýšíme počítadlo platných záznamů *nz*.

#### 5.2.4 Zavedení Dirichletových okrajových podmínek

Dalšího vylepšení programu dosáhneme tím, že již během této procedury `VYPLNtriplet` budeme testovat, leží-li první vrchol na hranici s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Tuto informaci máme uloženu v indexu *PointMark*. Leží-li tam, pak nic nezapisujeme, tj. pokládáme ho rovný nule. Leží-li na hranici s Dirichletovou okrajovou podmínkou i druhý vrchol, pak též nezapisujeme příspěvek k prvku matice, ale rovnou odečteme od vektoru pravých stran součin hodnoty Dirichletovy okrajové podmínky ve druhém vrcholu a vypočtenou, ale nezapsanou hodnotu příspěvku prvku matice odpovídající součinu gradientu bázevých funkcí prvního a druhého vrcholu.

Tomuto postupu odpovídá stav, kdy máme singulární matici soustavy s pravou stranou a navíc máme předepsaný dostatečný počet hodnot řešení v několika bodech na to, aby soustava byla regulární. Ekvivalentními úpravami odeliminujeme proměnné s danými řešeními a vzniklou regulární soustavu pak můžeme standardně vyřešit. Náš postup je takový, že tuto již určenou proměnnou v soustavě necháme a matici nezmenšíme, ale v řádku určeném prvním vrcholem nevyplňujeme prvky matice, a až dodatečně položíme diagonální prvek roven jedné. Sloupec odpovídající prvnímu vrcholu pak též nevyplňujeme, ale od pravé strany odečteme jeho násobek bez diagonální složky s hodnotou Dirichletovy okrajové podmínky v prvním bodě. Následně přepíšeme složku vektoru pravé strany odpovídající prvnímu vrcholu na hodnotu jeho Dirichletovy okrajové podmínky.

První část vylepšení ještě provedeme testováním podmínky na hodnotu *PointMarku* v cyklu přes všechny trojúhelníky v proceduře `VYPLNtriplet`, zbylé úpravy pak v proceduře `Dirichlet(mesh2D *P, PStrana *B, triplet *M)`. V této proceduře tedy procházíme všechny body a kontrolujeme, zda leží na hranici s Dirichletovou okrajovou podmínkou. V kladném případě pak do *Tripletu* přidáme člen odpovídající diagonálnímu prvku matice od tohoto bodu a položíme ho rovný jedné. Následně složku vektoru pravé strany vztahující se k tomuto bodu přepíšeme hodnotou Dirichletovy podmínky v tomto bodě.



## 5.2.5 Setřídění řídké matice

Po vyplnění *Tripletu* je třeba ho dále připravit pro dořešení. Jednotlivé příspěvky do jednoho prvku matice soustavy jsou rozptýleny do více záznamů seznamu *Triplet*. Je třeba je sečíst. To je provedeno následovně.

V prvním kroku v proceduře `Quicksort(triplet *M)` pomocí rekurzivního algoritmu setřídíme seznam příspěvku v *Tripletu* od nejmenší po největší podle prvního indexu  $I$  příspěvku do matice tuhosti. V případě rovnosti seřadíme příspěvky i podle druhého indexu  $J$ .

Po setřídění se tedy v seznamu objevuje několik příspěvků stejného prvku matice tuhosti za sebou. Proto na takto setříděný *Triplet* použijeme proceduru `Zhusteni(triplet *M)`. Tato procedura postupně prochází celý *Triplet*. Používá dvě pomocné proměnné  $i, j$ . V proměnné  $i$  je zapsána aktuální pozice během procházení *Tripletu* a  $j$  označuje další pozici použitou pro srovnání s aktuální pozicí.

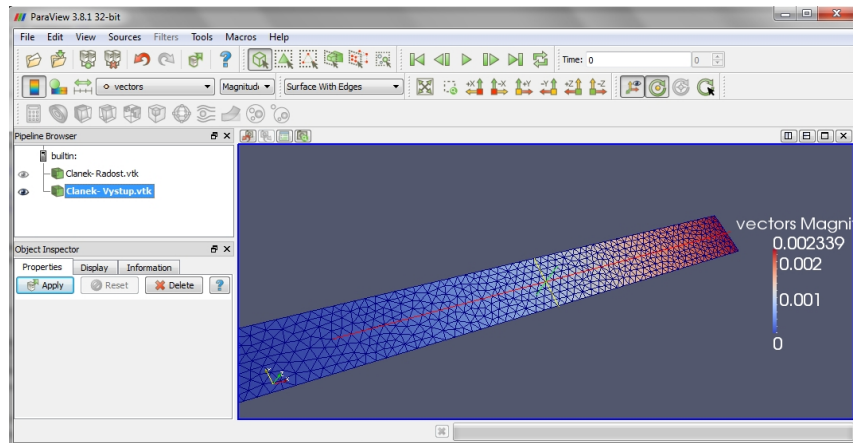
Jsou-li indexy příspěvků na místech  $i$  a  $j$  v *tripletu* shodné, přičteme hodnotu  $VAL$  z vyššího indexu  $j$  do pozice na místě  $i$  a zvýšíme  $j$ . Nejsou-li indexy příspěvků na pozicích  $i$  a  $j$  shodné, pak zvýšíme  $i$ , přepíšeme indexy a hodnotu na místě  $i$  odpovídajícími hodnotami z pozice  $j$ . Následně zvýšíme  $j$ . Tento cyklus ukončíme, až index  $j$  dosáhne hodnoty  $nz$  udávající počet záznamů v *Tripletu*. Ten pak upravíme na aktuální pozici  $i$ . Takto v *Tripletu* nejen posčítáme stejné příspěvky do jednoho prvku matice, ale i přepíšeme nepotřebné pozice a celý *Triplet* zkrátíme.

Mezi jednotlivými procedurami pracujícími s *Tripletem* je vhodné kontrolně sečíst všechny jeho složky. Takto lze zjistit mnoho případných chyb odvozené implementace.

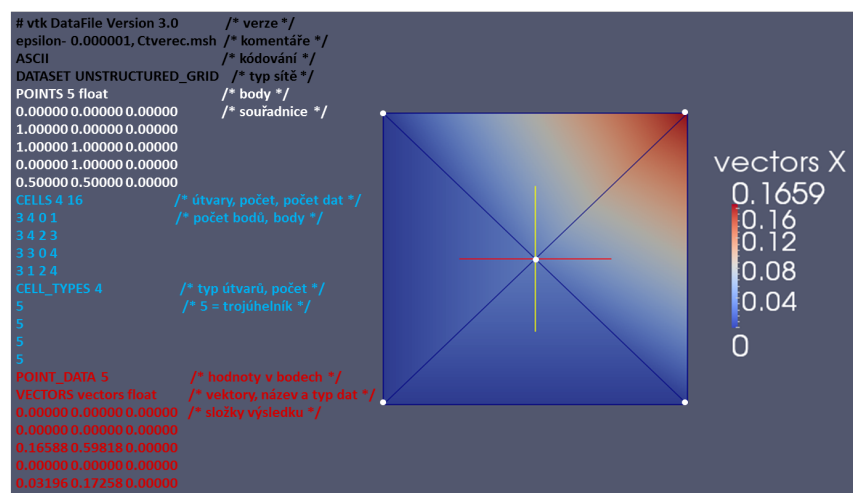
## 5.2.6 Řešení vzniklé soustavy

Nyní na setříděný a zkrácený *Triplet*, který představuje soustavu lineárních algebraických rovnic s pravou stranou, můžeme použít *Gauss-Seidlovu metodu*. Toto je iterační metoda, která postupně zmenšuje reziduum. Metoda skončí při zmenšení rezidua pod zadanou hodnotu - parametr *epsilon*. To jsou spolu s počáteční aproximací řešení jediné dva parametry, které je třeba před začátkem procedury nastavit. Konvergence je zajištěna pro symetrické a pozitivně definitní matice [13]. Jedinou změnou implementace oproti klasickému algoritmu zde bude práce s reprezentací řídké matice.

Postupujeme následovně: Začneme procházet řádky matice ve struktuře *Triplet* - podle nich byl utříděn procedurou `Quicksort`. Budeme postupně od pravé strany odečítat součin mimodiagonálních prvků s příslušnými složkami iteračního řešení. Výsledek pak vydělíme diagonálním členem a přepíšeme jím původní hodnotu dané složky iteračního řešení. Takto projdeme všechny řádky struktury *Triplet*. Na konci cyklu pak testujeme, jestli vektor rozdílu pravé strany a součinu matice soustavy s iteračním řešením je ve vhodné normě menší než zadaná hodnota *epsilon*. Je-li menší končíme, není-li iterujeme dále.



Obrázek 5.4: Zobrazování v programu ParaView



Obrázek 5.5: Ukázka formátu vtk.

## 5.2.7 Výstupní soubor

Po vyřešení soustavy je potřeba vypsat dané řešení do souboru pro další zobrazení. Pro použití programu *Paraview* byla vytvořena procedura `Tisk_VTK`, která získané řešení uloží ve formátu `.vtk`. Řešení tedy vypíšeme v proceduře `Tisk_VTK(const char *fname, const char *fname1, mesh2D *P, PStrana *X)` do výstupního souboru ve formátu `.vtk`, jehož příklad je na obrázku 5.5. Ukázky získaných vizualizací jsou zařazeny v šesté kapitole.

Před koncem programu ještě dealokujeme všechny dynamické datové struktury a pak ukončíme program.

## 5.3 Zobrazení výsledků

K zobrazení výsledků jsme zvolili program *Paraview* a formát *.vtk*. Jedná se o freeware program pro vědecké a interaktivní vizualizace. Lze ho získat například z internetové adresy <http://www.paraview.org> [9] i s potřebnou dokumentací. Byl navržen pro paralelní práci se soubory na velkých superpočítačích, ale lze ho spustit i na osobních počítačích. Jeho výhodou je, že dokáže pracovat s velmi velkými objemy dat. Jeho zobrazovací režim poskytuje nastavení mnoha detailů, jak je patrné z obrázku 5.4.

## 5.4 Odlišnosti implementace pro úlohu rovinné pružnosti

Předchozí postup byl formulován sice pro oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , ale výstupem byla skalární funkce na této oblasti. Pro popsání řešení úlohy rovinné pružnosti potřebujeme výstup jako vektorovou funkci posunutí ve směrech  $x$  a  $y$  definovanou na této oblasti. To vyžaduje obecně zvládnutí dimenze použitých datových struktur. Vstupní triangulace je shodná, protože jde o shodnou oblast. Nicméně je třeba změnit zadání okrajových podmínek, tj. skalární funkce nahradíme vektorovými, které ale implementujeme jen příslušným počtem skalárních.

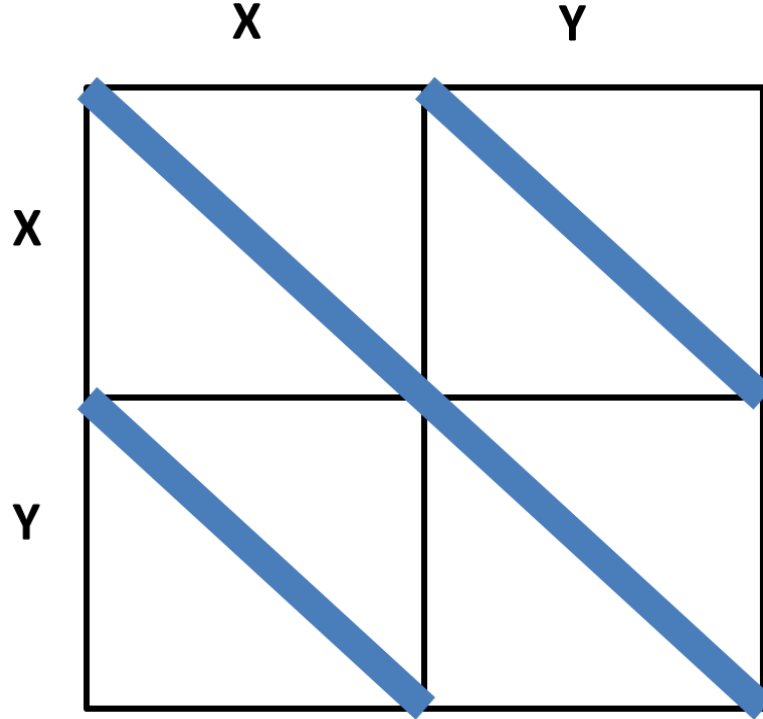
Taktéž vektor řešení a pravých stran, tj. datovou strukturu *PStrana*, změníme tak, že naalokujeme dvojnásobné pole hodnot. První polovina bude představovat  $x$ -ovou složku řešení a druhá  $y$ -ovou. (Pracujeme s veličinami s dvojnásobnými rozměry velice podobně jako v modelové úloze, jen složky druhé poloviny alokovaného pole nyní chápeme jako  $y$  složku.) Podobně upravíme i proceduru *VyplnPStrana*. Zde vyplníme první část vektoru s pomocí  $x$ -ové složky funkce na pravé straně, a druhou, která odpovídá  $y$ -ové složce pravé strany, pomocí zadané funkce pro druhou složku.

Jisté změny si vyžádá i vytváření matice soustavy. Bude nyní mít dvojnásobné rozměry, tj. v reprezentaci řídké matice pomocí *Tripletu* je třeba čtyřnásobný počet záznamů oproti modelové úloze. Matice pak získá strukturu, jaké je zobrazena na obrázku 5.6.

Dále je potřeba změnit procedury *VYPLNtriplet* a *Dirichlet*. První z nich modifikujeme tak, že ve cyklu přes všechny trojúhelníky počítáme příspěvky

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} e_{kl}(\varphi_m) e_{ij}(\varphi_n) dx,$$

kde  $\varphi_m, \varphi_n$  jsou báze funkce tvaru  $\varphi_m = ((\varphi_x)_m(x, y), (\varphi_y)_m(x, y)) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ . Zde využijeme toho, že báze funkce pro tento případ volíme stejně jako pro skalární řešení, tj.  $x$ -ová i  $y$ -ová složka mají stejný průběh jako v předchozím případě. Ve výrazech  $e_{ij}(\varphi)$  vystupují jen první parciální derivace lineárních báze funkcí. Výraz je pak roven konstantě. Tyto derivace umíme vyjádřit pomocí transformace



Obrázek 5.6: Struktura matice pro úlohu rovinné pružnosti, kde písmeno X značí část matice odpovídající soustavě rovnic pro  $x$ -ovou složku řešení, podobně pro Y. Modrou barvou jsou přibližně znázorněny nenulové pásy v řídké matici.

na referenční trojúhelník. Tenzor  $C_{ijkl}$  je pro úlohu rovinné pružnosti konstantní pro celou oblast  $\Omega$ . Protože však řešíme dvourozměrnou úlohu, dostaneme od jedné kombinace bázových funkcí  $\varphi_m = ((\varphi_x)_m, (\varphi_y)_m)$ ,  $\varphi_n = ((\varphi_x)_n, (\varphi_y)_n)$  na trojúhelníku  $K$  celkem čtyři příspěvky

$$\begin{aligned}
 XX &: |K|((\lambda + 2\mu) \frac{\partial(\varphi_x)_m}{\partial x} \frac{\partial(\varphi_x)_n}{\partial x} + \mu \frac{\partial(\varphi_x)_m}{\partial y} \frac{\partial(\varphi_x)_n}{\partial y}) \\
 XY &: |K|(\lambda \frac{\partial(\varphi_x)_m}{\partial x} \frac{\partial(\varphi_y)_n}{\partial y} + \mu \frac{\partial(\varphi_x)_m}{\partial y} \frac{\partial(\varphi_y)_n}{\partial x}) \\
 YX &: |K|(\lambda \frac{\partial(\varphi_y)_m}{\partial y} \frac{\partial(\varphi_x)_n}{\partial x} + \mu \frac{\partial(\varphi_y)_m}{\partial x} \frac{\partial(\varphi_x)_n}{\partial y}) \\
 YY &: |K|((\lambda + 2\mu) \frac{\partial(\varphi_y)_m}{\partial y} \frac{\partial(\varphi_y)_n}{\partial y} + \mu \frac{\partial(\varphi_y)_m}{\partial x} \frac{\partial(\varphi_y)_n}{\partial x}),
 \end{aligned}$$

kde  $|K|$  značí obsah trojúhelníka  $K$  a dvojice symbolů v levém sloupci před výrazem značí, do jaké submatice z obrázku 5.6 daný příspěvek patří.

V proceduře `Dirichlet` doplníme jedničku na diagonálu nejen v místě pro  $x$ -ovou, ale i pro  $y$ -ovou složku.

Ostatní procedury zůstávají stejné, musíme jen dbát na vhodně zvolený datový typ proměnných, aby nedošlo k přetečení, tj. například místo `integeru` volit typ `long integer`.

# Kapitola 6

## Výsledky numerické simulace

Konvergence odvozeného numerického schématu a funkčnost vyvinutého programu pro řešení úlohy rovinné pružnosti byla ověřena na testovacích úlohách.

### 6.1 Modelová úloha

Jako první příklad k otestování správné implementace numerického modelu byla použita modelová úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ v } \Omega \\ u &= g \text{ na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.1}$$

kde funkci  $u$  hledáme pro dané funkce  $f, g$  na rovinné oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Tato rovnice například popisuje stacionární rozvrstvení tepelného pole v oblasti  $\Omega$ . Funkce  $f$  představuje tepelné zdroje a okrajová podmínka  $g$  zadává pevnou teplotu na okraji. V praxi může jít například o přenos tepla a ustálení teplotního toku v místnosti, kde máme vevnitř zadanou teplotu kamen a na okraji teplotu studeného okna.

#### 6.1.1 Řád konvergence

Před konkrétními příklady ještě objasníme pojem řádu konvergence.

*Koeficientem EOC* (experimental order of convergence) nazveme číslo  $\alpha$  dané podílem

$$\frac{E_n}{E_m} = \left( \frac{h_n}{h_m} \right)^\alpha, \tag{6.2}$$

kde  $h_n$  je parametr triangulace a  $E_n$  je chyba určená v námi vybrané normě.

**Poznámka.** Koeficient *EOC* závisí mimo jiné na dané úloze, na použité triangulaci a její jemnosti dané  $h_{max}$ .

V následujících tabulkách budeme porovnávat chyby ve třech normách:

- maximová norma - tj.  $\|\mathbf{u}\|_{max} = \max_{(x,y) \in \Omega} \{|u_1(x,y)|, |u_2(x,y)|\}$
- $L^2$  norma - tj.  $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\|u_1(x,y)\|_{0,2,\Omega}^2 + \|u_2(x,y)\|_{0,2,\Omega}^2}$
- seminorma - tj.  $|\mathbf{u}|_{1,2,\Omega} = \sqrt{|u_1(x,y)|_{1,2,\Omega}^2 + |u_2(x,y)|_{1,2,\Omega}^2}$

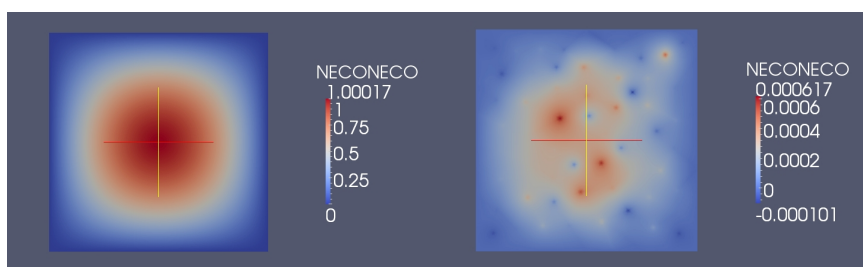
### 6.1.2 Řešení úlohy a konvergence metody

V tomto testovacím případě byl za oblast  $\Omega$  zvolen čtverec  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Oblast byla triangulována v programu *Gsmh* jako nepravidelná síť. Na čtverci jsme předepsali okrajovou podmínku a funkci  $f$  odpovídající předem zvolenému analytickému řešení tak, abychom mohli ověřit správnost výpočtu. Toto řešení jsme postupně porovnávali s numerickým na různě hustých triangulacích. Přitom jsme zadávali tyto testovací úlohy:

1.  $u_{analyticke}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , odtud pak plyne, že funkce na pravé straně je rovna  $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  a že pro okrajovou podmínku vychází  $g = 0$ .
2.  $u_{analyticke}(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ , odtud je pak  $f = 2(x(1-x) + y(1-y))$  a  $g = 0$ .
3.  $u_{analyticke}(x, y) = \sin(\pi x) + \sin(\pi y)$ , odtud pak  $f = \pi^2(\sin(\pi x) + \sin(\pi y))$  a  $g = \sin(\pi x) + \sin(\pi y)$ .

$h_{max}$	$E_{max}$	$EOC_{max}$
0,04275	0,001582	1,35840
0,02165	0,000617	1,96534
0,01082	0,000158	

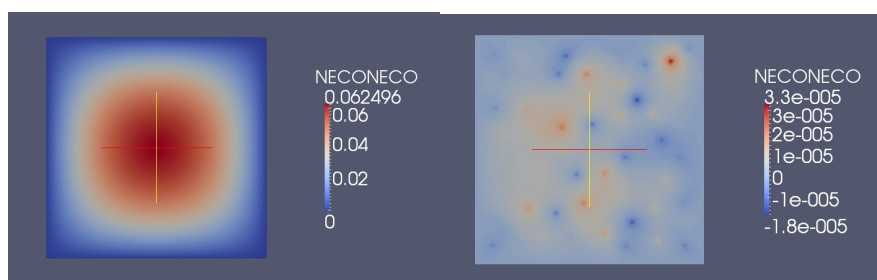
Tabulka 6.1: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 1 pro různé triangulace.



Obrázek 6.1: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 1 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

$h_{max}$	$E_{max}$	$EOC_{max}$
0,04275	$7,40E - 05$	1,16505
0,02165	$3,30E - 05$	1,34395
0,01082	$1,30E - 05$	

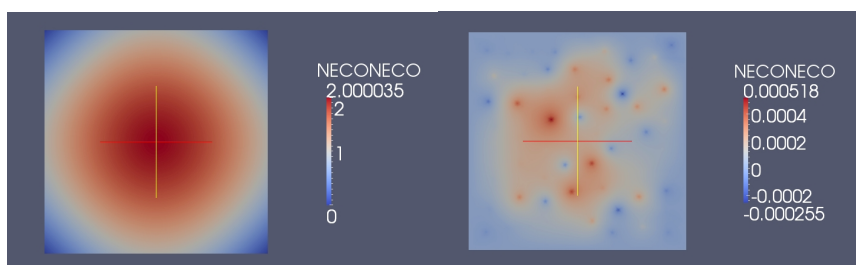
Tabulka 6.2: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 2 pro různé triangulace.



Obrázek 6.2: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 2 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

$h_{max}$	$E_{max}$	$EOC_{max}$
0,04275	0,001425	1,45993
0,02165	0,000518	1,95071
0,01082	0,000134	

Tabulka 6.3: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 3 pro různé triangulace.



Obrázek 6.3: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 3 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

Díky znalosti analytického řešení můžeme chybu jednoduše určit jako rozdíl našeho numerického řešení a řešení přesného. Tento rozdíl vytiskneme do výstupního souboru ve formátu .vtk a zobrazíme pomocí programu Paraview. Následující tabulky 6.1 - 6.3 a obrázky 6.1 - 6.3 vpravo zachycují výsledné rozdíly pro výše popsané testovací úlohy 1 - 3 při volbě parametru  $\epsilon = 10^{-6}$  a nulové počáteční aproximaci v Gauss-Seidlově iterační metodě. Obrázky 6.1 - 6.3 vlevo zobrazují průběh řešení na dané rovinné oblasti.

Numerické řešení modelové úlohy ověřuje, že výsledný algoritmus je dobře naimplementován a úloha konverguje, neboť s klesajícím parametrem triangulace  $h_{max}$  klesá i chyba řešení (viz tabulky 6.1 - 6.3). Konvergence je pomalejší, než je teoretická předpověď, ale na hustší síti se blíží předpovězené hodnotě  $\alpha = 2$ , jak je patrné z hodnot  $EOC$  v tabulkách 6.1 - 6.3, což odpovídá asymptotickému odhadu konvergence v kapitole 3.6.

## 6.2 Úloha rovinné pružnosti

Nyní přikročíme k hlavnímu cíli naší práce a to je ověření správnosti vytvořeného programu na úloze rovinné pružnosti a ověření rychlosti její konvergence. Řešíme tedy soustavu parciálních diferenciálních rovnic spolu s okrajovými podmínkami

$$-\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = f_i \quad \text{v } \Omega \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{Dir}} = \mathbf{u}_{Dir} \quad (6.2b)$$

$$\tau_{ij} \cdot n_j|_{\Gamma_{Neu}} = q_i, \quad (6.2c)$$

kde hledáme neznámou funkci posunutí  $\mathbf{u}$  zadanou implicitně Hookeovým zákonem (1.14) skrze tenzor deformace  $\tau_{ij}$  a tenzor malých posunutí  $e_{ij}$  pro rovinnou oblast  $\Omega$ . Dále platí  $\partial\Omega = \Gamma_{Dir} \cup \Gamma_{Neu}$ ,  $\Gamma_{Dir} \neq \emptyset$  a  $n_j$  jsou složky normálového vektoru na hranici  $\partial\Omega$ . Zadané funkce  $f_i$  předepisují hustotu objemových sil, funkce  $\mathbf{u}_{Dir}$  udávají počáteční posunutí a funkce  $q_i$  zadávají hustotu plošných sil.

Tyto rovnice popisují deformaci pružného tělesa představované oblastí  $\Omega$  pod vlivem působících sil. Ač tuto úlohu řešíme pouze pro dvojrozměrný případ, lze z výsledného řešení odhadnout konečný tvar deformace pro mnoho třírozměrných situací. K úplnému zadání úlohy musíme určit koeficienty tenzoru čtvrtého řádu v Hookeově zobecněném zákoně. V tomto případě z teorie pro izotropní homogenní těleso vyplývá

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}) \\ e_{22}(\mathbf{u}) \\ e_{12}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

kde jsme pro zkrácení zápisu vynechali člen  $e_{21}(\mathbf{u})$ , protože tenzor deformace  $\tau_{ij}$  je symetrický. Koeficienty  $\lambda, \mu$  jsme určili ze vztahu (1.16), kam jsme za hodnoty Youngova modulu pružnosti a Poissonovy konstanty dosadili testovací hodnoty -  $E = 10\,000$  Pa a bezrozměrnou konstantu  $\sigma = 0,3$  (odpovídající přibližně lidské šlaše).



V praktickém použití představuje tedy úloha například průhyb nosníku při zatížení nebo namáhání stěny trubky při vnitřním přetlaku. Funkce  $\mathbf{f}$  zadává hustotu objemově působících sil. Okrajová Dirichletova podmínka popisuje pevné uchycení nosníku ve zdi, zatímco Neumannova podmínka reprezentuje účinek plošných sil působících na povrchu tělesa. Spojení všech tří podmínek nastává například pro nosník v homogenním gravitačním poli, jednou stranou ukotvený ve zdi a na druhé straně zatížený závažím. Ale jak již bylo řečeno v první kapitole, tyto rovnice popisují pouze relativně malé posunutí, na to se nesmí zapomenout.

Správnost řešení a rychlost konvergence byla testována na čtverci  $(0, 1) \times (0, 1)$  jakožto oblasti  $\Omega$ . Tentokrát jsme zvolili různé kombinace okrajových podmínek na hranách čtverce a ověřovali numerické řešení oproti předepsanému analytickému řešení  $\mathbf{u}_{analyticke} = (0, \frac{xy}{10})$  na různě hustých nepravidelných sítích, získaných programem *Gmsh*. Při popisu hran čtverce vycházíme z očíslování čtverce na obr. 5.2.

4. Bylo zadáno  $\mathbf{u}_{analyticke}$ . Na celé hranici  $\partial\Omega$  byla dána Dirichletova okrajová podmínka  $\mathbf{u}_{Dir} = \mathbf{u}_{analyticke}|_{\partial\Omega}$ .
5. Bylo zadáno  $\mathbf{u}_{analyticke}$ . Na hraně 2, tj. spojnice bodů 2 a 3, byla dána Neumannova podmínka odpovídající analytickému řešení  $\mathbf{q}|_2 = (\tau_{11}, \tau_{21}) = (\frac{\lambda x}{10}, \frac{\mu y}{10})$ . Na zbytku hranice  $\partial\Omega$  mimo hranu 2 byla předepsána Dirichletova okrajová podmínka stejně jako v předchozím případě.
6. Bylo zadáno  $\mathbf{u}_{analyticke}$ . Na hraně 2 a hraně 3 byla dána Neumannova podmínka
 

hrana 2:  $\mathbf{q}|_2 = (\tau_{11}, \tau_{21}) = (\frac{\lambda x}{10}, \frac{\mu y}{10})$ .

hrana 3:  $\mathbf{q}|_3 = (\tau_{12}, \tau_{22}) = (\frac{\mu y}{10}, \frac{(\lambda+2\mu)x}{10})$ .

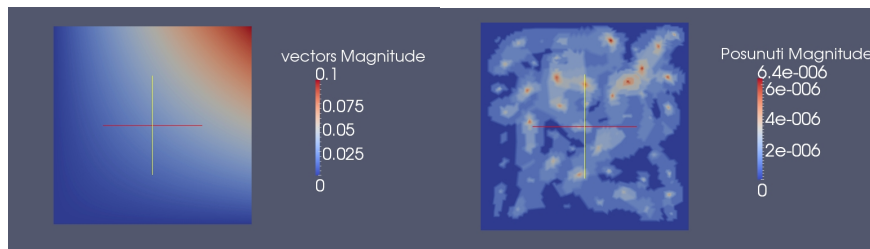
 Na zbylé části hranice  $\partial\Omega$  byla opět předepsána Dirichletova okrajová podmínka.
7. Bylo zadáno jiné analytické řešení  $\mathbf{u}_{jine} = (\frac{x^2 y^3}{10}, \frac{\cos(\pi x) \sin(\pi y)}{10})$ . Na hraně 2 byla dána Neumannova podmínka  $\mathbf{q}|_2 = (\tau_{11}, \tau_{21}) = \frac{1}{10}((\lambda + 2\mu)2xy^3 + \lambda\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y), \mu(3x^2 y^2 - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y)))$ . Na zbylé části hranice  $\partial\Omega$  byla předepsána Dirichletova okrajová podmínka.

Chybu opět určíme jako rozdíl numerického a analytického řešení. Tento rozdíl vytiskneme do výstupního souboru ve formátu *.vtk* a zobrazíme pomocí programu *Paraview*. Pro ověření rychlosti konvergence jsme chybu spočítali v několika normách a shrnuli do následujících tabulek 6.4 - 6.7 pro jednotlivé úlohy 4 - 7. Obrázky 6.4 - 6.7 vpravo zachycují výsledné rozdíly pro výše popsané testovací úlohy 4 - 7 při volbě parametru  $\epsilon = 10^{-6}$  a nulové počáteční aproximaci v Gauss-Seidlově iterační metodě. Obrázky 6.4 - 6.7 vlevo zobrazují průběh řešení na dané rovinné oblasti.

Numerická řešení úlohy rovinné pružnosti ověřují, že výsledný algoritmus je správně naimplementován. Úloha také konverguje, neboť s klesajícím parametrem triangulace  $h_{max}$  klesá i chyba řešení (viz tabulky 6.4 - 6.7). Konvergence metody postupně roste pro jemnější síť a na hustších sítích se již blíží předpovězené hodnotě  $\alpha = 2$ , jak je vidět z hodnot *EOC* v tabulkách 6.4 - 6.7. To je v souladu s asymptotickým odhadem konvergence v kapitole 3.6.

$h_{max}$	$E_{L^2}$	$E_{semi}$	$E_{max}$	$EOC_{L^2}$	$EOC_{semi}$	$EOC_{max}$
0,04275	$3,40150E-06$	0,001856	$1,31611E-05$	1,47112	0,94194	1,16880
0,02165	$1,22692E-06$	0,000978	$5,85391E-06$	1,98784	1,00031	1,81776
0,01082	$3,09325E-07$	0,000488	$1,66052E-06$			

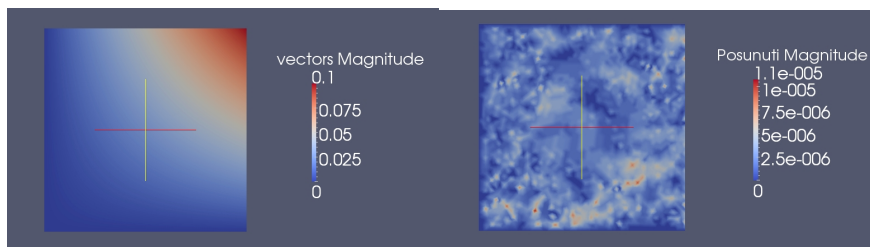
Tabulka 6.4: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 4 pro různé triangulace.



Obrázek 6.4: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 4 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

$h_{max}$	$E_{L^2}$	$E_{semi}$	$E_{max}$	$EOC_{L^2}$	$EOC_{semi}$	$EOC_{max}$
0,05815	$8,32051E-06$	0,002580	$2,66659E-05$	1,85260	1,00230	1,45617
0,02907	$2,30389E-06$	0,001288	$9,71865E-06$	1,92505	1,00124	1,59163
0,01453	$6,06644E-07$	0,000643	$3,22443E-06$			

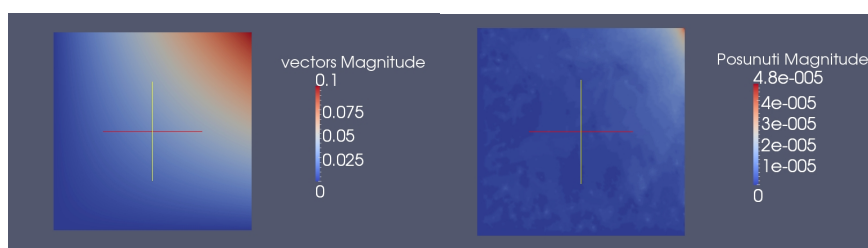
Tabulka 6.5: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 5 pro různé triangulace.



Obrázek 6.5: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 5 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

$h_{max}$	$E_{L^2}$	$E_{semi}$	$E_{max}$	$EOC_{L^2}$	$EOC_{semi}$	$EOC_{max}$
0,07356	$6,57674E-05$	0,00356	0,000505	1,96834	1,00203	1,76776
0,03678	$1,68062E-05$	0,00178	0,000148	1,98554	1,00067	1,80671
0,01839	$4,24407E-06$	0,00088	$4,24624E-05$	1,98970	0,99870	1,83102
0,00919	$1,06862E-06$	0,00044	$1,19347E-05$			

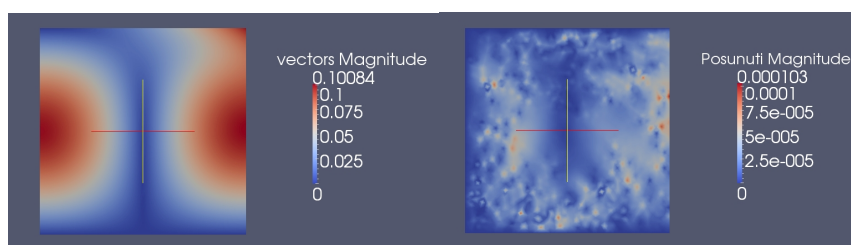
Tabulka 6.6: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 6 pro různé triangulace.



Obrázek 6.6: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 6 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

$h_{max}$	$E_{L^2}$	$E_{semi}$	$E_{max}$	$EOC_{L^2}$	$EOC_{semi}$	$EOC_{max}$
0,05815	$9,51503E-05$	0,010395	0,000289	1,96337	1,00080	1,50743
0,02907	$2,43991E-05$	0,005194	0,000101	1,97399	1,00400	1,61157
0,01453	$6,21074E-06$	0,002590	$3,3352E-05$			

Tabulka 6.7: Velikost chyby a řád konvergence pro úlohu 7 pro různé triangulace.



Obrázek 6.7: Zobrazené vypočítané řešení a chyba numerického řešení pro úlohu 7 pro síť s řádově 5000 trojúhelníky.

# Závěr

V této práci jsme se seznámili s problematikou teorie pružnosti a jejím matematickým popisem. Pak jsme za využití variačního principu pomocí metody konečných prvků odvodili základní numerické schéma řešení úloh rovinné lineární pružnosti. Pro volbu Langrangeovských lineárních trojúhelníkových prvků byly odvozeny všechny potřebné vztahy a schéma naimplementováno. Pro ověření správné funkčnosti vyvinutého programu byly zvoleny jednoduché testovací příklady, které byly numericky řešeny vyvinutým programem. Ač má konvergence asymptotický charakter, již na poměrně řídkých sítích numerické řešení uspokojivě konvergovalo a na jemnějších se řád konvergence blížil teoretické hodnotě.

Na jemnějších sítích se již projevila časová náročnost této metody. Tuto náročnost lze snížit další optimalizací programu, například použitím superrelaxační metody místo Gauss-Seidlovy pro vyřešení získané soustavy lineárních algebraických rovnic.

Výsledky obsažené v práci ukazují správnou funkčnost vyvinutého programu.

I když byly řešeny relativně jednoduché příklady, je provedená implementace v programu zcela obecná pro řešení rovinných úloh, provedená implementace již umožnila seznámit se s obtížností obecné implementace při řešení praktických úloh.

Řešení problémů teorie pružnosti jsou velmi používána v technické praxi. Mezi příklady aplikací nastudovaného tématu a implementovaného programu mohou být úlohy deformace rovinných útvarů, například průhyby nosníků, deformace trubek, kroucení prutů, deformace membrán, rozložení teplotního pole, teplotní deformace aj.

Další práce v tomto zajímavém tématu by se mohla zaměřit na modální analýzu dané soustavy a do budoucna i vyšetření časového průběhu řešení odpovídajícího dynamického problému.

# Seznam použitých zdrojů

- [1] BLANK, J., EXNER, P., HAVLÍČEK, M. *Lineární operátory v kvantové fyzice*. Praha : Karolinum, 1993.
- [2] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2000.
- [3] KUBA, F. *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. Praha : SNTL, 1977.
- [4] CIARLET, P., G. *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam : Elsevier North-Holland Pub. Co., 1978.
- [5] GEUZAIN, CH., REMACLE, J.-F. *Gmsh* [počítačový program]. Verze 2.5.0. Belgie, 2010 [citováno 2011-2-12]. Dostupné na: <<http://geuz.org/gmsh/>>.
- [6] JARNÍK, V. *Integrální počet II*. Praha : Academia, 1984.
- [7] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. Praha : SNTL, 1983.
- [8] REKTORYS, K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Praha : SNTL, 1974.
- [9] SANDIA NATIONAL LABORATORY *ParaView* [počítačový program]. Verze 3.8.1. USA, Los Alamos, 2011 [citováno 2011-5-21]. Dostupné na: <<http://www.paraview.org/paraview/resources/software.html>>.
- [10] SVÁČEK, P., FEISTAUER, M. *Metoda konečných prvků*. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2006.
- [11] ŠŤOVÍČEK, P. *Metody matematické fyziky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004.
- [12] TICHONOV, A., SAMARSKIJ, A. *Rovnice matematické fyziky*. Praha : ČSAV, 1955.
- [13] VITÁSEK, E. *Numerické metody*. Praha : SNTL, 1987.

# Příloha

Na přiloženém CD je text bakalářské práce a text abstraktu. V adresáři Program jsou zdrojové kódy vytvořených programů. Podadresář *BC 0* obsahuje zadání a programy modelové úlohy. Podadresář *BC X* obsahuje zadání a programy úlohy rovinné pružnosti.