

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematické modelování



Numerická aproximace vzájemné
interakce proudění a kmitání
elastického tělesa metodou
konečných prvků

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Jan Valášek
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.
Rok: 2014

Před svázáním místo téhle stránky

vložíte zadání práce

 s podpisem děkana (bude to jediný oboustranný list ve Vaší práci) !!!!

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....
Jan Valášek

Poděkování

Děkuji Doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, za laskavé rady, podnětné návrhy a veškerý mi věnovaný čas. Také velmi děkuji rodičům za podporu ve studiu, své přítelkyni Lucii Samlerové za trpělivost při vytváření této práce a v neposlední řadě kamarádovi Petru Habáskovi za věcné připomínky k textu této práce.

Děkuji, že tato práce mohla vzniknout za podpory výzkumného grantu č. P101/11/0207 Grantové agentury České republiky.

Jan Valášek

Název práce:

Numerická aproximace vzájemné interakce proudění a kmitání elastického tělesa metodou konečných prvků

Autor: Jan Valášek

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.

Katedra technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá odvozením matematického modelu a následnou implementací problému interakce nestlačitelné tekutiny a elastického tělesa. Jedná se o sdružený problém. Nejprve je celá problematika popsána parciálními diferenciálními rovnicemi, včetně podmínek na společném rozhraní. Kvůli neznámému tvaru rozhraní je nutno použít ALE metodu. Pak je odvozen numerický model pro jednotlivé oblasti – proudění nestlačitelné tekutiny a deformace elastického tělesa. Pro prostorovou diskretizaci byla zvolena metoda konečných prvků v obou případech, pro časovou diskretizaci proudění je implementována zpětná Eulerova metoda, pro deformaci elastického tělesa pak Newmarkova metoda. Dále tato práce obsahuje popis implementace, včetně algoritmu řešení sdruženého problému. Na závěr jsou zařazeny výsledky numerických experimentů.

Klíčová slova: Metoda konečných prvků, lineární elasticita, nestlačitelné proudění, ALE metoda, sdružený problém

Title:

Numerical approximation of reciprocal interaction of flow and vibrations of elastic bodies by finite element method

Author: Jan Valášek

Abstract: This diploma thesis deals with the derivation of mathematical model and following implementation of interaction between incompressible flow and elastic body. It is a coupled problem. First both problems are described by partial differential equations, including conditions on the common interface. Due to the unknown shape of interface it has to be applied ALE method. Then it is derived the numerical model for separate domains – incompressible flow and deformation of elastic body. For space discretization it is used the finite element method in both cases, for time discretization of flow problem it is implemented the backward Euler method, for deformation of elastic body it is used the Newmark method. Further this thesis contains the description of implementation including the algorithm of coupled problem. At the end the numerical experiments are included.

Key words: Finite element method, linear elasticity, incompressible flow, ALE method, coupled problem

Obsah

Úvod	1
1 Matematický aparát	3
1.1 Zavedení použitých prostorů a norem	3
1.2 Důležité vztahy	5
2 Matematický popis modelu	7
2.1 Elastické těleso	8
2.1.1 Statické rovnice elastického tělesa	8
2.1.2 Dynamické rovnice elastického tělesa	10
2.2 Proudění nestlačitelné tekutiny	12
2.2.1 Zákony zachování	13
2.2.2 Nestlačitelné proudění	14
2.2.3 Bezrozměrný tvar rovnic	15
2.2.4 ALE metoda	16
2.2.5 Okrajové a počáteční podmínky	18
2.3 Sdružený problém	19
2.3.1 Podmínky na rozhraní	19
2.3.2 Rovnice sdruženého problému	20
3 Numerický model	22
3.1 Elastické těleso	22
3.1.1 Prostorová diskretizace	22
3.1.2 Metoda konečných prvků	25
3.1.3 Časová diskretizace	27
3.2 Proudění	31

3.2.1	Časová diskretizace	31
3.2.2	Prostorová diskretizace	32
3.2.3	Metoda konečných prvků	36
3.2.4	Nelineární problém a jeho linearizace	38
3.2.5	Soustava lineárních rovnic	39
3.3	Celkový algoritmus řešení sdruženého problému	42
4	Výsledky numerické simulace	43
4.1	Technické aspekty implementace	43
4.1.1	Triangulace	43
4.1.2	Implementovaný program	43
4.1.3	Zobrazení výsledků	44
4.2	Určení charakteristických frekvencí kmitajících těles	44
4.2.1	Modální analýza	44
4.2.2	Fourierova transformace	46
4.3	Výsledky numerických experimentů	46
4.3.1	Elastické těleso	46
4.3.2	Proudění nestlačitelné tekutiny	50
	Závěr	55
	Seznam použitých zdrojů	56
	Příloha	58

Úvod

Interakce proudící tekutiny s elastickým tělesem je komplexní a nejen po matematické stránce velmi zajímavý problém. Má velké využití jak v technické praxi, například při modelování obtékání profilu křidel letadel, tak v oblasti biomechaniky s medicínskými aplikacemi. Zde jako příklad můžeme uvést zkoumání proudění krve v cévách nebo model, na který jsme se orientovali v této práci – simulace tvorby lidského hlasu, který hraje velmi důležitou roli v kvalitě lidského života. Simulace lidského hlasu je důležitá kvůli nemožnosti provádět fyzikální měření in vivo a proto zde matematické modelování hraje nezastupitelnou roli při pochopení tohoto děje. Bohužel nebyly dosud všechny detaily tvorby hlasu plně vysvětleny.

Tvorba hlasu je složitý biologický proces. Proud vzduchu přichází z plic, obtéká hlasivku a svým tlakem ji rozvibruje. Hlasivka pak kmitá na frekvencích blízkým svým vlastním frekvencím. V hrtanu se nacházejí další dutiny hlasového ústrojí, které ovlivňují tento základní tón. Konečná modulace hlasu pak nastává v dutině ústní. V této práci se budeme zabývat jen kmitáním hlasivky pod tlakem proudícího vzduchu, přesto se stále jedná o tzv. sdružený problém, kdy řešení obou problémů na sobě vzájemně závisí.

Už i tento model je dostatečně komplexní a je třeba u něj skloubit dynamiku tekutin, deformaci pružného tělesa a jejich vzájemnou interakci. V naší práci řešíme odděleně rovnice proudící tekutiny a rovnice popisující vibraci hlasivky. Můžeme tak použít metody, které jsou více efektivní pro daný typ úlohy. Pro účely naší práce jsme se omezili posléze na dvojrozměrné modely. Pro ně jsme odvodili matematicko-fyzikální popis obou úloh a jejich vzájemné interakce. Na základě tohoto popisu jsme odvodili numerická schémata řešící jak deformaci elastického tělesa, tak i proudění nestlačitelné tekutiny, a popsali jsme, jak obě schémata skloubit při řešení vzájemné interakce. Na základě této části jsme pak implementovali program, který modeluje dynamickou úlohu lineární elasticity a stacionární i nestacionární problém nestlačitelného proudění. Na implementaci vzájemné interakce dále pracujeme.

V první kapitole této práce jsou shrnuty základní pojmy z funkcionální analýzy a uvedeny některé věty, které dále používáme.

Druhá kapitola obsahuje matematický popis deformace elastického tělesa pomocí parciálních diferenciálních rovnic a odvození Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelné proudění ze zákonů zachování a jejich přeformulování pomocí ALE metody. Ta nám dovoluje modelovat úlohy s časově proměnnou výpočetní oblastí a s neznámou polohou rozhraní. Na konci této kapitoly jsou pak uvedeny rovnice popisující tento sdružený problém.

Ve třetí kapitole jsou odvozena numerická schémata pro oba dva problémy. Původní parciální diferenciální rovnice jsou převedeny do slabé formulace, je zaveden pojem slabého řešení a následně je slabá formulace prostorově diskretizována pomocí metody konečných prvků. Pro následnou časovou diskretizaci elastického tělesa byla použita Newmarkova metoda, resp. pro proudění tekutiny zpětné Eulerovo schéma. Dále je zde představeno několik možností, jak linearizovat nelineární soustavu rovnic a jak vyřešit vzniklou soustavu lineárních rovnic ve tvaru sedlového bodu. Na konci této kapitoly je uveden celkový algoritmus numerického řešení sdruženého problému.

Do čtvrté kapitoly jsou zařazeny některé aspekty praktické realizace. Je zde i popsána modální analýza a spektrální analýza signálu, dvě metody, které nám dovolují získat a porovnat základní vlastní frekvence kmitání elastického tělesa. Ve zbylé části této kapitoly jsou uvedeny získané výsledky numerických experimentů.

Závěr obsahuje zhodnocení dosažených výsledků v této práci.

Kapitola 1

Matematický aparát

V této kapitole zavedeme několik pojmů a vět z funkcionální analýzy, na které se budeme v celé práci odvolávat. Pro přehlednost budeme v celé práci indexovat veličiny spojené s popisem tekutiny pomocí horního indexu f (z angl. fluid), resp. pro popis elastického tělesa budeme používat index s (z angl. structure). Pro elegantnější zápis budeme používat Einsteinovu sumační konvenci.

1.1 Zavedení použitých prostorů a norem

Pro vlastnosti funkčních prostorů, které budeme definovat, je důležité, nad jakou oblastí jsou sestrojeny:

Definice 1 (viz [14]). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ je omezená oblast. Řekneme, že hranice oblasti $\partial\Omega$ je lipschitzovsky spojitá, když splňuje následující podmínku: Pro libovolné $z \in \partial\Omega$ existuje okolí $U = U(z)$ takové, že množinu $U \cap \partial\Omega$ lze v nějakém kartézském souřadnicovém systému (x_1, \dots, x_d) vyjádřit ve tvaru*

$$x_d = F(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad (1.1)$$

a množinu $U \cap \Omega$ lze vyjádřit nerovností

$$x_d < F(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad (1.2)$$

kde F je lipschitzovsky spojitá funkce.

Poznámka. Oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí má definovaný jednotkový vektor vnější normály skoro všude na $\partial\Omega$.

Pro zjednodušení budeme dále používat značení zavedené v následující definici.

Definice 2. *Derivací podle multiindexu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, kde $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ rozumíme parciální derivace $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$, kde $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ a $d \in \mathbb{N}$.*

Mezi základní prostory funkcí patří prostor $L^p(\Omega)$, kde $1 \leq p < \infty$. Tyto prostory jsou definovány pomocí Lebesgueovy míry a integrálu. Prostor $L^p(\Omega)$ obsahuje takové funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, pro které platí

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty. \quad (1.3)$$

Prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy prostory s normou

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.4)$$

pro $1 \leq p < \infty$. Pro $p = \infty$ je norma volena jako $\text{ess sup } f$, viz [1].

Poznámka. Obdobně pracujeme s prostory $L^p(\partial\Omega)$, kde $\partial\Omega$ je hranice oblasti Ω .

Speciálně prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertův, neboť na něm existuje skalární součin definovaný předpisem

$$(u, v)_{L^2_{\Omega}} = \int_{\Omega} u v dx. \quad (1.5)$$

V dalším textu budeme označovat skalární součin na $L^2(\Omega)$ zkráceně jako $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$. Pro vektorové prostory $[L^2(\Omega)]^d$, $d \in \mathbb{N}$ definujeme skalární součin jako

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\Omega} = \sum_{i=1}^d (f_i, g_i)_{\Omega}, \quad (1.6)$$

kde funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in [L^2(\Omega)]^d$ a f_i, g_i značí jejich i -tou složku.

Pro $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p \leq \infty$ můžeme definovat Sobolevův prostor

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k, D^{\alpha} f \in L^p(\Omega)\}, \quad (1.7)$$

kde symbolem D^{α} je označena derivace podle multiindexu α . Normu na tomto prostoru zavádíme jako

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.8)$$

Kromě normy pracujeme na tomto prostoru také se seminormou

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = |u|_{k,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|=k} \left(\int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.9)$$

Bude-li z kontextu jasné, přes jakou oblast integrujeme, budeme tento index Ω vynechávat.

Nejvíce používaný vektorový prostor v této práci $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ označíme jako $\mathbf{W}(\Omega)$.

O hodnotě funkce na hranici oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ můžeme mluvit pouze v případě, kdy je $2k > d$ a ze Sobolevových vět plyne vnoření $W^{k,p}(\Omega)$ do $C(\bar{\Omega})$, viz [4]. V ostatních případech používáme větu o stopách, zde uvedenou bez důkazu:

Věta: 1. *Nechť je oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s lipschitzovskou spojitou hranicí. Pak existuje právě jeden omezený lineární operátor $T : W^{k,p}(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ takový, že $\forall u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ platí, že $Tu = u|_{\partial\Omega}$.*

Znění a důkaz viz [17].

Nyní, kdy již má smysl mluvit o hodnotě funkce $f \in W^{k,p}(\Omega)$ na hranici, můžeme zavést prostor V , který použijeme při slabé formulaci problému elasticity, takto

$$V = \{f \in W^{1,2}(\Omega^s) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{\text{Dir}}^s \text{ ve smyslu stop}\} \subset W^{1,2}(\Omega^s). \quad (1.10)$$

Prostor V má stejnou normu jako prostor $W^{1,2}(\Omega)$.

Pokud budeme požadovat integrovatelnost i vyšších derivací, lze tento prostor ještě zobecnit na

$$V^{(k)} = \{f \in W^{k,2}(\Omega^s) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{\text{Dir}}^s\} \subset W^{k,2}(\Omega^s). \quad (1.11)$$

Prostor všech omezených lineárních funkcionalů definovaných na prostoru V označíme jako V^* , mluvíme pak o tzv. duálním prostoru. Na tomto prostoru definujeme normu pro $F \in V^*$ vztahem

$$\|F\|_* = \max_{u \in V} \frac{|F(u)|}{\|u\|_V}. \quad (1.12)$$

Pro řešení úlohy rovinné pružnosti zavedeme značení kartézského součinu Sobolevových prostorů jako $\mathbf{V} = V \times V = [\{f \in W^{1,2}(\Omega^s) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{\text{Dir}}^s\}]^2$. Na tomto prostoru definujeme normu vztahem

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} = \sqrt{\|u_1\|_{\Omega^s,1,2}^2 + \|u_2\|_{\Omega^s,1,2}^2}. \quad (1.13)$$

Z teorie Sobolevových prostorů využijeme i prostor funkcí s kompaktním nosičem, $W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_V}$, tj. uzávěr nekonečně hladkých funkcí s kompaktním nosičem na oblasti Ω v normě prostoru V , viz např. [20]. Pro jednoduchost pak značíme $\mathbf{W}_0(\Omega) = [W_0^{1,2}(\Omega)]^2$.

1.2 Důležité vztahy

Dále budeme používat následující vztahy.

Věta: 2 (o substituci). *Nechť $P, R \subset \mathbb{R}^d$ a f je prosté spojitě regulární zobrazení otevřené množiny P na R , které má nenulový Jacobián $|f'(\hat{x})|$. Nechť $M \subset R$. Pak pro libovolnou měřitelnou funkci g platí*

$$\int_M g(x) dx = \int_{f^{-1}(M)} g(f(\hat{x})) |f'(\hat{x})| d\hat{x}. \quad (1.14)$$

Znění a důkaz viz [10].

Věta: 3 (Greenova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ a nechť funkce $f, g \in W^{1,2}(\Omega)$. Pak platí*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial\Omega} f g n_i dS - \int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx, \quad (1.15)$$

kde n_i je i -tá souřadnice jednotkového vektoru vnější normály.

Znění a důkaz viz [14].

Věta: 4 (Friedrichsova nerovnost). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ a $\Gamma \subset \partial\Omega$ je její část s kladnou Lebesgueovou mírou. Pak existuje kladná konstanta C_F závislá jen na Ω a Γ taková, že pro každou funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ platí*

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq C_F \left(\int_{\Gamma} u^2 dx + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) \quad (1.16)$$

Znění a důkaz viz [17].

Věta: 5 (Kornova nerovnost). *Nechť \mathbf{V} je uzavřený podprostor $\mathbf{W}(\Omega^s)$, kde $\mathbf{W}_0(\Omega^s) \subset \mathbf{V} \subset \mathbf{W}(\Omega^s)$. Nechť $P_V = P \cap \mathbf{V}$ a Q_V je ortogonální doplněk množiny P_V v prostoru \mathbf{V} , tedy $\mathbf{V} = P_V \oplus Q_V$. Pak existuje kladná konstanta $C_K > 0$, že platí*

$$\sum_{i,j} e_{ij}^s(\mathbf{u})^2 \geq C_K \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \quad \forall \mathbf{u} \in Q_V, \quad (1.17)$$

kde e_{ij} je tenzor malých deformací¹ a P je podprostor rotací² v prostoru $\mathbf{W}(\Omega^s)$.

Znění a důkaz viz [14].

Věta: 6 (Lax - Milgram). *Nechť V je Hilbertův prostor, $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ je bilineární forma na V a nechť L je lineární omezený funkcionál na V . Nechť dále platí*

1. na V omezená, tj. $(\exists K > 0)$, že $(|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{u}\|_{1,2} \|\mathbf{v}\|_{1,2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$
2. na V koercivní, nebo-li $(\exists \alpha > 0)$, že $(\forall \mathbf{v} \in V)(|\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2)$

Pak existuje právě jedna funkce $\mathbf{u} \in V$ taková, že $L(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$. Navíc platí $\|\mathbf{u}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_$.*

Znění a důkaz viz [17].

¹ e_{ij}^s je definován vztahem (2.7) ve druhé kapitole

²To jsou takové funkce $\mathbf{v} \in \mathbf{W}(\Omega^s)$, že $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{v}$ a tudíž je pro ně $e_{ij}(\mathbf{v}) = 0$, více v [14].

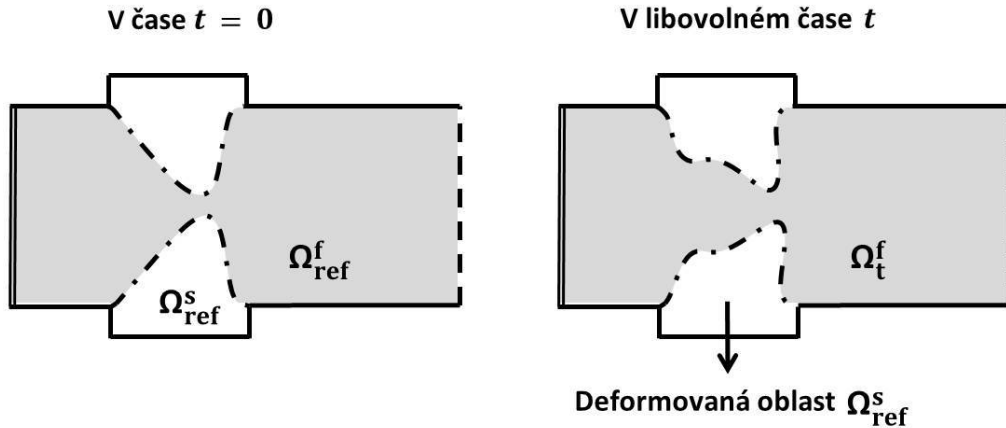
Kapitola 2

Matematický popis modelu

V této kapitole odvodíme rovnice popisující nejprve elastické těleso a pak proudící tekutinu. V obou případech zanedbáme reálnou strukturu látek a budeme předpokládat, že látky mají spojitou konzistenci. Nahradíme je tedy modelem matematického kontinua, více viz [2]. Předpokládáme-li, že vyšetřované veličiny jsou dostatečně hladké, lze fyzikální zákony formulovat matematicky pomocí diferenciálních rovnic.

Problém deformace elastického tělesa budeme řešit na referenční oblasti $\Omega^s = \Omega_{ref}^s \subset \mathbb{R}^3$, kde budeme vycházet z Lagrangeova popisu. Proudění tekutiny budeme modelovat na časově proměnné oblasti $\Omega_t^f = \Omega^f(t) \subset \mathbb{R}^3$, $t \in (0, T)$. V případě proudění bez interakce s elastickým tělesem je oblast $\Omega_t^f = \Omega_0^f$ nezávislá na čase. To odpovídá Eulerovu popisu, opět viz dále. Dále tento popis zobecníme pomocí ALE metody, která nám dovoluje modelovat proudění na časově proměnné oblasti Ω_t^f .

V celé práci předpokládáme, že obě oblasti Ω^s a Ω_{ref}^f jsou disjunktní, tedy $\Omega^s \cap \Omega_{ref}^f = \emptyset$. Zároveň ale předpokládáme, že mají společnou neprázdnou hranici rozhraní $\Gamma_{w,ref} = \bar{\Omega}^s \cap \bar{\Omega}^f$, jak je znázorněno na obrázku (2.1). Pro jednoduchost uvažujeme, že $\Omega_{ref}^f = \Omega_0^f$ je oblast proudění okolo nedeformovaného tělesa Ω^s . Při



Obrázek 2.1: Znázornění modelu hlasivky a výpočetní oblasti proudění nestlačitelné tekutiny.

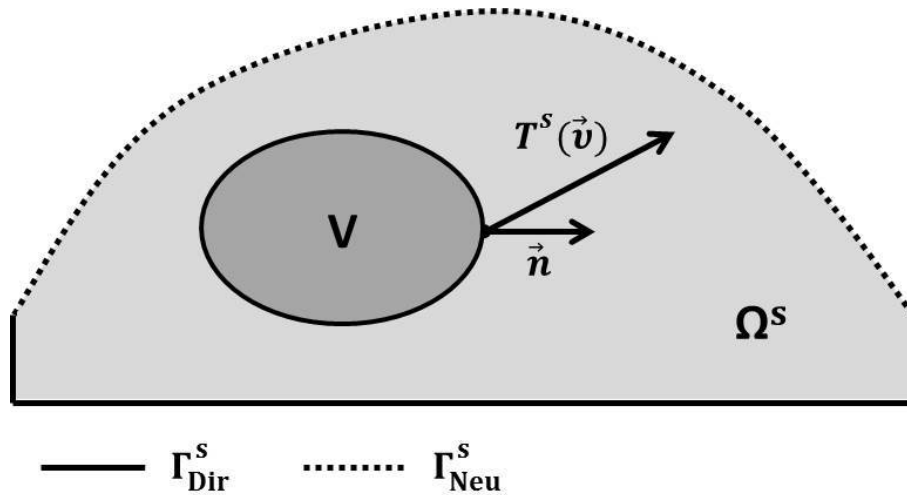
modelování z hlediska elastického tělesa uvažujeme toto rozhraní časově neměnné ($\Gamma_{W_{\text{ref}}}$), zatímco z pohledu proudící tekutiny bude časově proměnné (Γ_{W_t}).

2.1 Elastické těleso

V této podkapitole popíšeme matematický model elastického tělesa, viz např. [2], [14]. Navazujeme na předchozí práci [23], kde je uvedeno podrobnější odvození. Zde nejprve uvedeme rovnice popisující statickou rovnováhu poddajného tělesa a z nich následně pomocí D'Alembertova principu odvodíme rovnice popisující dynamický problém.

2.1.1 Statické rovnice elastického tělesa

Nejprve předpokládejme veškeré veličiny časově nezávislé a těleso modelujeme omezenou oblastí $\Omega^s \subset \mathbb{R}^3$ s lipschitzovsky spojitou hranicí $\partial\Omega^s$. Uvažujeme působení sil dvojího druhu, objemové síly s objemovou hustotou označenou \mathbf{f}^s a síly plošné. Jejich působení na elastické těleso je popsáno pomocí vektoru napětí a tenzoru napětí.



Obrázek 2.2: Znázornění hranic elastického modelu hlasivky a působení plošných sil na objemový element V .

Vektor napětí $\mathbf{T}^s(\vec{v})$ udává vliv plošných sil na těleso v bodě $x \in \partial V$ ve směru obecného vektoru \vec{v} , který je obecně nezávislý na směru vnější normály \vec{n} , jak je zobrazeno na obrázku (2.2). Jako $\mathbf{T}^s(\vec{n})$ budeme označovat vektor napětí působící ve směru vnější normály k uvažovanému povrchu objemu ∂V v bodě x . Dále označme jako $\overset{i}{\mathbf{T}}^s$ vektor napětí působící na plošku kolmou k ose x_i s normálou shodně orientovanou s touto osou. Tenzor napětí τ_{ij}^s je definován jako průmět tohoto vektoru napětí $\overset{i}{\mathbf{T}}^s$ do směrů jednotlivých souřadných os

$$\overset{i}{\mathbf{T}}_j^s = \tau_{ij}^s \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Tenzor τ_{ij}^s je symetrickým tenzorem druhého řádu. Pomocí odvození silové rovnováhy plošných sil na infizitimálně malém čtyřúhelníku – více v [2], lze získat vyjádření pro složky obecného vektoru napětí ve formě

$$T_i^s(\vec{n}) = \tau_{ji}^s n_j, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

kde n_j jsou složky jednotkové normály k plošce $S = \partial V$, na kterou působí vektor napětí $\mathbf{T}^s(\vec{n})$.

Podmínky rovnováhy

Silová rovnováha kontinua je dána touto integrální rovnicí

$$\int_V \mathbf{f}^s \, dx + \int_S \mathbf{T}^s(\vec{n}) dS = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

kde první integrál vyjadřuje působení objemových sil na vybraný objem elastického tělesa V a druhý integrál udává plošné síly působící na ploše S , která objem V uzavírá, jak je znázorněno na obrázku (2.2). Použitím Gaussovy věty, dosazením za $\mathbf{T}^s(\vec{n})$ z (2.1) a (2.2) a užitím symetrie τ_{ij} získáme vztah

$$\int_V \left(f_i^s + \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} \right) dx = 0, \quad (2.4)$$

který musí platit pro libovolný objem V . Vztah (2.4) může být splněn pro libovolný objem V jen tehdy, pokud je roven nule integrand. Odvodili jsme tak tři rovnice statické rovnováhy pro elastické těleso

$$f_i^s + \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \text{ v } \Omega^s. \quad (2.5)$$

Kromě podmínky rovnováhy sil, musí být též zachována podmínka rovnováhy momentů sil. Jak je ukázáno např. v [2], tato podmínka je ekvivalentní symetrie tenzoru napětí τ_{ij}^s .

Deformace tělesa

Deformace elastického tělesa reprezentovaného oblastí Ω^s je popsána vektorovou funkcí posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, která udává průměty deformace daného bodu $x \in \Omega^s$ do souřadných os.

Tenzor konečné deformace zavedený vztahem (viz [2])

$$\epsilon_{jk}^s = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (j, k = 1, 2, 3), \quad (2.6)$$

vyjadřuje změnu vzájemné vzdálenosti dvou infinitizimálně vzdálených bodů. Pro malé výchylky zanedbáváme člen se smíšenými derivacemi a definujeme tenzor malých deformací

$$e_{jk}^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (2.7)$$

Tenzor malých deformací je symetrický tenzor druhého řádu. Více viz [2].

Hookeův zákon

Hookeův zákon popisuje lineární závislost složek tenzoru deformace na složkách tenzoru napětí pomocí tenzoru čtvrtého řádu C_{ijkl}

$$\tau_{ij}^s = C_{ijkl} e_{kl}^s, \quad (2.8)$$

kde τ_{ij}^s , e_{kl}^s jsou tenzory druhého řádu, k, l sčítací indexy. Tenzor čtvrtého řádu C_{ijkl} je symetrický v indexech i a j , k a l . Veličiny C_{ijkl} nazýváme elastickými koeficienty. Obecně má 15 nezávislých složek, ale pro homogenní izotropní těleso se jejich počet redukuje na dvě. V této práci se omezíme pouze na tento případ a tenzor C_{ijkl} budeme popisovat pomocí Lamého konstant λ^s a μ^s . Zobecněný Hookeův zákon (2.8) pak lze zapsat

$$\tau_{ij}^s = \lambda^s \delta_{ij} \theta + 2\mu^s e_{ij}^s, \quad (2.9)$$

kde invariant $\theta = e_{ii}^s = e_{11}^s + e_{22}^s + e_{33}^s = \operatorname{div} \mathbf{u}$ představuje kubickou dilataci tělesa. Lamého koeficienty lze určit ze známých materiálových konstant – Youngova modulu pružnosti E a Poissonovy konstanty σ , podle vztahu

$$\lambda^s = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu^s = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (2.10)$$

Dále budeme uvažovat parametry λ^s, μ^s (dle materiálového zastoupení) po částech konstantní.

2.1.2 Dynamické rovnice elastického tělesa

Nyní odvodíme z rovnic statické rovnováhy pohybové rovnice. Proto budeme předpokládat, že funkce u_i, τ_{ij}^s a f_i^s jsou funkcemi nejen souřadnic x , ale i času t .

Použitím D'Alembertova principu získáme pohybové rovnice elastického tělesa tak, že k původním rovnicím (2.4) vyjadřujícím rovnováhu sil plošných a objemových přidáme člen popisující sílu setrvačnou. Z D'Alembertova principu plyne, že setrvačná síla tělesa se rovná zápornému součinu jeho hmoty a zrychlení. Na objemový element V pak působí setrvačná síla $-\int_V \rho^s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dx$, kde ρ^s je hustota tělesa. Uvážíme-li setrvačnou sílu v silové rovnováze dané rovnicí (2.4), získáme dynamické rovnice elastického tělesa

$$-\int_V \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dx + \int_V \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} + f_i^s dx = 0, \quad (2.11)$$

kteře jsou vztaženy k libovolnému objemu tělesa $V \subset \Omega^s$. Protože rovnice (2.11) musí platit pro libovolný objem tělesa, dostáváme opět tři pohybové rovnice elastického tělesa

$$-\rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} + f_i^s = 0 \quad \text{v } \Omega^s, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Ve skutečnosti mechanické systémy ztrácejí energii třením. Doplněním rovnic (2.12) o tlumení získáme rovnice elastického tělesa s disipativním členem

$$-\rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + C \rho^s \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} + f_i^s = 0 \quad \text{v } \Omega^s, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.13)$$

kde výraz $C \rho^s \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $C \geq 0$, představuje disipativní tlumení systému. Dále nebudeme tlumení uvažovat z důvodu zjednodušení zápisu.

Rovinná pružnost

V této práci budeme řešit rovinnou deformaci tělesa, omezíme se tedy dále jen na řešení v oblasti $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$, tj. budeme hledat funkce posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ v každém bodě tělesa na základě zadaných objemových sil a okrajových a počátečních podmínek. Tento postup je vhodný pro symetrická tělesa nebo tělesa s převládajícími rozměry v ose z . Komplementární problém rovinné pružnosti, kdy je hledaná nezměnaná funkce napětí, lze získat snadnou úpravou rovnic – [3].

Okrajové a počáteční podmínky

Pro úplnou matematickou formulaci dynamického problému je třeba rovnici (2.12) doplnit předepsáním okrajových a počátečních podmínek. Předpokládejme, že máme dvě disjunktní, neprázdné části hranice Γ_{Dir}^s a Γ_{Neu}^s referenční oblasti Ω^s takové, že $\Gamma_{\text{Dir}}^s \cup \Gamma_{\text{Neu}}^s = \partial\Omega^s$, jak je znázorněno na obrázku (2.2). Dále v této práci ztotožníme hranici Γ_{Neu}^s s rozhraním $\Gamma_{\text{W}_{\text{ref}}} = \Gamma_{\text{W}_0}$ mezi tekutinou a tělesem. Podmínky na rozhraní jsou podrobně popsány na konci této kapitoly.

Rozlišujeme tři základní typy zadání okrajových podmínek – Dirichletovy, Neumannovy a smíšené okrajové podmínky, které uvažujeme v této práci. V případě Dirichletových okrajových podmínek je na hranici zkoumaného tělesa předepsána funkce posunutí

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_{\text{Dir}}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Dir}}^s, \quad t \in (0, T), \quad (2.14)$$

v případě Neumannových okrajových podmínek je na hranici zkoumaného tělesa zadáno působení vnějších plošných sil \mathbf{q}^s , kdy

$$\tau_{ij}^s(x, t) n_j^s(x) = q_i^s(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Neu}}^s, \quad t \in (0, T), \quad (i = 1, 2), \quad (2.15)$$

a τ_{ij}^s můžeme dále vyjádřit pomocí Hookova zákona, n_j jsou složky vnější jednotkové normály k hranici Γ_{Neu}^s . Tyto plošné síly \mathbf{q}^s ale v této práci představují aerodynamické síly, kterými působí obtékající tekutina na těleso. Funkce \mathbf{q}^s není tedy

předepsána, ale bude určena z aerodynamických veličin. Předpokládáme, že složky $(\mathbf{u}_{\text{Dir}})_i$ jsou z prostoru $C(\Gamma_{\text{Dir}}^s)$ a $\tau_{ij}^s \in C(\Gamma_{\text{Neu}}^s)$. Tyto předpoklady lze dále zeslabit.

Smišené okrajové podmínky představují kombinaci obou předem zmíněných.

V čase $t = 0$ dále předepíšeme počáteční podmínky pro deformaci a rychlost elastického tělesa

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{pro } x \in \Omega^s, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{pro } x \in \Omega^s. \quad (2.17)$$

Jak bylo řečeno v úvodu, pro jednoduchost předpokládáme, že $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, případně i $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Tento předpoklad nám dovoluje zaměňovat Ω^s a Ω_{ref}^s , Γ_{Wref} a Γ_{W0} , a též Ω_0^f s Ω_{ref}^f .

2.2 Proudění nestlačitelné tekutiny

Pro popis proudící tekutiny existují dva základní přístupy – Eulerův a Lagrangeův popis. Z nich dále vychází tzv. ALE metoda, které se budeme věnovat později.

Lagrangeův popis – či též materiálový popis, je motivován myšlenkou sledovat pohyb každého jednotlivého bodu kontinua (resp. elementu objemu) dané tekutiny. Pohyb takového bodu je pak popsán rovnicí

$$x(t) = \tilde{x}(X, t), \quad X \in V_0^f, \quad \forall t \in (0, T), \quad (2.18)$$

kde zobrazení \tilde{x} udává trajektorii bodu X z referenční množiny $V_0^f \subset \Omega_{ref}^f$ do nové konfigurace v oblasti V_t^f . Množina V_t^f je tedy tvořena stejnými částicemi jako V_0^f , $V_t^f = \{x \mid x(t) = \tilde{x}(X, t), X \in V_0^f\}$. O zobrazení \tilde{x} budeme dále předpokládat:

- $\tilde{x}(X, 0) = X$,
- \tilde{x} je spojitě diferencovatelné,
- pro pevné t je $X \rightarrow \tilde{x}(X, t)$ bijektivní zobrazení V_0^f na V_t^f ,
- Jacobián zobrazení \tilde{x} nechtě je $J(X, t) > 0$, $\forall t > 0$, $\forall X \in V_0^f$.

Rychlost hmotného bodu X při Lagrangeově popisu je dána jako

$$\hat{\mathbf{v}}(X, t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}(X, t). \quad (2.19)$$

Eulerův popis – někdy také nazývaný prostorový popis, zkoumá pohyb jednotlivých bodů kontinua v předem určené pevné oblasti $V^f \subset \Omega^f$. V každém bodě $x \in V^f$ je pak rychlost dána vztahem

$$\mathbf{v}(x, t) = \hat{\mathbf{v}}(X, t) = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}(X, t), \quad (2.20)$$

kde X je referencí bodu x , tj. platí (2.18).

2.2.1 Zákony zachování

Zákony zachování formulujeme v Eulerově popisu. Pro jejich odvození použijeme Reynoldsův transportní teorém, více např. viz [6] nebo [7].

Věta: 7. (*Reynoldsův transportní teorém*)

Nechť zobrazení \tilde{x} splňuje předchozí předpoklady a skalární funkce φ je spojitě diferencovatelná. Pak platí

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t^f} \varphi(x, t) \, dx = \int_{V_t^f} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v})(x, t) \, dx, \quad (2.21)$$

kde funkce $\mathbf{v}(x, t)$ je dána (2.20) a $V_t^f \subset \Omega_t^f$ je omezená oblast s lipschitzovskými spojitou hranicí.

Zákon zachování hmoty

Použijme Reynoldsův transportní teorém (RTT) na bilanci hmoty kontrolního objemu tekutiny V_t^f . Hmotnost tohoto objemu je dána funkcí hustoty $\rho(x, t)$ jako

$$m(V_t^f) = \int_{V_t^f} \rho^f(x, t) \, dx. \quad (2.22)$$

Protože však v našem modelu žádná hmota nevzniká ani nezaniká, je hmotnost konstantní, a tedy

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_t^f} \rho^f(x, t) \, dx = \int_{V_t^f} \frac{\partial \rho^f}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho^f \mathbf{v})(x, t) \, dx. \quad (2.23)$$

Rovnice (2.23) platí pro libovolný kontrolní objem tekutiny V_t^f , a proto můžeme rovnici (2.23) přepsat do diferenciální podoby

$$\frac{\partial \rho^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^f \mathbf{v}) = 0 \quad \text{v } \Omega_t^f. \quad (2.24)$$

Tato rovnice se nazývá **rovnici kontinuity**, viz též [6], [7].

Zákon zachování hybnosti

Aplikujme RTT na zákon zachování hybnosti. Hybnost je dána jako integrál součinu hustoty a rychlosti uzavřené v objemu V_t^f a může být změněna skrze působení objemové $\mathbf{g}^f(x, t)$ resp. povrchové síly $\mathbf{b}^f(x, t, \vec{n})$ na tento objem resp. povrch

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t^f} (\rho^f v_i)(x, t) \, dx = \int_{V_t^f} (\rho^f g_i^f)(x, t) \, dx + \int_{\partial V_t^f} b_i^f(x, t, \vec{n}) \, dS. \quad (2.25)$$

Pomocí Cauchyho věty, viz např. [6], můžeme vyjádřit působení vektoru plošných sil $\mathbf{b}^f(x, t, \vec{n})$ pomocí tenzoru napětí v tekutině $\boldsymbol{\sigma}^f$ se složkami σ_{ij}^f , tedy $\mathbf{b}^f(x, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}^f(x, t) \cdot \vec{n}$, kde jako \vec{n} označujeme jednotkovou vnější normálu k ∂V_t^f . Použitím Reynoldsovy věty na levou stranu rovnice (2.25) a Gaussovy věty na pravou stranu dostaneme tři rovnice pro $i = 1, 2, 3$

$$\int_{V_t^f} \frac{\partial \rho^f v_i}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho^f v_i \mathbf{v})(x, t) \, dx = \int_{V_t^f} (\rho^f g_i^f + \frac{\partial \sigma_{ji}^f}{\partial x_j})(x, t) \, dx. \quad (2.26)$$

Tyto rovnice lze ekvivalentně vektorově zapsat jako

$$\int_{V_t^f} \frac{\partial \rho^f \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(x, t) \, dx = \int_{V_t^f} (\rho^f \mathbf{g}^f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^f)(x, t) \, dx, \quad (2.27)$$

kde \otimes značí tenzorový součin, zavedený jako $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$, viz [2]. Složkový zápis nelineárního členu vypadá takto

$$\operatorname{div}(\rho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(x, t) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^f v_j v_i)(x, t). \quad (2.28)$$

Z rovnic (2.27) analogicky k zákonu zachování hmoty vyplývá diferenciální tvar zákona zachování hybnosti, tedy

$$\frac{\partial \rho^f \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho^f \mathbf{g}^f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^f \quad \text{v } \Omega_t^f, \quad (2.29)$$

neboť stejně jako v předchozím případě musí rovnice (2.26) platit pro libovolný kontrolní objem V_t^f . Tento tvar se nazývá konzervativní, viz např. [7].

Užitím rovnice kontinuity lze (2.29) přepsat do ekvivalentního, nekonzervativního tvaru

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho^f \mathbf{g}^f + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^f \quad \text{v } \Omega_t^f. \quad (2.30)$$

Zde chápeme závorku $(\rho^f \mathbf{v} \cdot \nabla)$ jako advekční operátor.

Analogicky bychom odvodili **zákon zachování momentu hybnosti**. Ale jak je dokázáno např. v [7], tento zákon zachování platí právě tehdy, když je tenzor napětí v tekutině $\boldsymbol{\sigma}^f$ symetrický.

Stejným způsobem lze odvodit **zákon zachování energie**. Ten ale není nutné v této práci uvažovat, protože nepředpokládáme změny teploty nebo vnitřní energie, více viz [7].

2.2.2 Nestlačitelné proudění

Obecně uvažujeme tenzor napětí v tekutině ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}^f = (-p + \lambda^f \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbb{I} + 2\mu^f \mathbb{D}(\mathbf{v}), \quad (2.31)$$

kde p značí tlak, \mathbb{I} je jednotková matice, μ^f, λ^f jsou dynamická a druhá viskozita, viz [2], $\mathbb{D}(\mathbf{v})$ je tenzor rychlosti deformace. První člen rovnice (2.31) vyjadřuje normálová napětí, druhý člen představuje smyková napětí v tekutině a stopa tenzoru napětí má fyzikální význam změny objemu zkoumané tekutiny.

V této práci budeme předpokládat pouze *newtonovskou tekutinu*, tj. lineární závislost tenzoru rychlosti deformace na rychlosti ve tvaru $\mathbb{D}(\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$. V dalším budeme považovat obě viskozity λ^f, μ^f za konstantní.

V našem modelu uvažujeme pouze nestlačitelné proudění, tedy takové, pro které je funkce hustoty popisující proudící tekutinu konstantní, nezávislá na čase t ani prostorové souřadnici x . Pak se rovnice kontinuity zjednoduší na tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.32)$$

Následně můžeme upravit i rovnici zachování hybnosti (2.30), kam dosadíme za tenzor napětí v tekutině $\boldsymbol{\sigma}^f$ ze vztahu (2.31). Jeho úpravou dostaneme

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho^f \mathbf{g}^f - \nabla p + \mu^f \Delta \mathbf{v} + (\lambda^f + \mu^f) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (2.33)$$

Díky nestlačitelnosti tekutiny je poslední člen identicky roven nule. Výsledné rovnice

$$\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu^f \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \rho^f \mathbf{g}^f \quad (2.34)$$

se nazývají Navierovy-Stokesovy.

Člen $\rho^f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)$ má fyzikální význam změny hybnosti, člen $-\mu^f \Delta \mathbf{v}$ představuje disipaci kinetické energie, gradient tlaku ∇p je po matematické stránce Lagrangeův multiplikátor problému vázaného extrému, kde vazbu reprezentuje rovnice kontinuity. Zbývající člen $\rho^f \mathbf{g}^f$ popisuje hustotu objemových sil.

Rovnici (2.34) budeme dále uvažovat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu^f \Delta \mathbf{v} + \nabla \tilde{p} = \mathbf{g}^f, \quad (2.35)$$

který získáme vydělením původní rovnice hustotou ρ^f a zavedením kinematické viskozity ν^f jako $\nu^f = \frac{\mu^f}{\rho^f}$ a kinematického tlaku $\tilde{p} = \frac{p}{\rho^f}$, který bude dále značen bez horního indexu \sim .

2.2.3 Bezrozměrný tvar rovnic

Pro potřeby numerického řešení je vhodné převést výchozí systém rovnic do bezrozměrného tvaru. Toho docílíme vztažením jednotlivých veličin na vhodné referenční veličiny, tedy referenční délku (např. průměr oblasti L_∞) a rychlost (např. průměrná rychlost vstupního proudu V_∞). Definujme bezrozměrné veličiny

$$x^* = \frac{x}{L_\infty}, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{V_\infty}, \quad t^* = \frac{V_\infty}{L_\infty} t, \quad p^* = \frac{p}{\rho^f V_\infty^2}, \quad \mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}^f L_\infty}{V_\infty^2}.$$

Po zřejmé transformaci jednotlivých členů, jejich dosazením do obecnější rovnice (2.34) a vydělením výrazem $\rho^f \frac{V_\infty^2}{L_\infty}$ získáme bezrozměrné Navierovy-Stokesovy rovnice

$$\partial_{t^*} \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla_{x^*}) \mathbf{v}^* = -\nabla_{x^*} p^* + \frac{1}{Re} \Delta_{x^*} \mathbf{v}^* + \mathbf{g}^*, \quad (2.36)$$

kde jsme zavedli bezrozměrný koeficient $Re = \frac{\rho^f L_\infty V_\infty}{\mu^f}$, nazývaný Reynoldsovo číslo, viz např. [6]. Toto bezrozměrné číslo udává poměr mezi setrvačnými silami a vnitřním třením tekutiny (viskozitou). Podle velikosti Reynoldsova čísla rozlišujeme charakter proudění. Pro hodnoty do cca 2000 hovoříme o laminárním proudění, při jeho velikosti do 4000 se jedná o přechodový charakter proudění mezi laminárním a turbulentním prouděním a pro vyšší hodnoty je proudění turbulentní.

Rovnice kontinuity má stejný tvar i v bezrozměrném případě. Dále v této práci budeme uvažovat stále veličiny a rovnice s fyzikálními rozměry, ačkoliv v numerických výpočtech se bezrozměrné veličiny často užívají.

2.2.4 ALE metoda

V předchozích odstavcích jsme odvodili rovnice popisující nestlačitelné proudění v časově neměnné oblasti. Tyto rovnice dále upravíme, aby popisovaly proudění i v časově proměnné oblasti, jak to vyžaduje problém s neznámým a proměnným tvarem rozhraní mezi elastickým tělesem a proudící tekutinou. K této úpravě využijeme tzv. ALE metodu (z anglického arbitrary Lagrangian–Eulerian method). Jedná se o další zobecnění Eulerova a Langrangeova popisu vyšetřované oblasti.

Při ALE metodě předpokládáme, že je dáno difeomorfní zobrazení A_t , které zobrazuje referenční oblast Ω_{ref}^f na výpočetní oblast Ω_t^f v každém čase $t \in [0, T]$. Toto zobrazení tedy musí splňovat

$$A_t : \bar{\Omega}_{ref}^f \longrightarrow \bar{\Omega}_t^f, \quad \text{t.j. } X \in \bar{\Omega}_{ref}^f \longmapsto x = \tilde{x}(X, t) = A_t(X) \in \bar{\Omega}_t^f, \quad (2.37)$$

kde používáme značení X pro body v oblasti $\bar{\Omega}_{ref}^f$ a x pro body v $\bar{\Omega}_t^f$. O tomto zobrazení dále předpokládáme

$$\frac{\partial A_t}{\partial t} \in C(\bar{\Omega}_{ref}^f), \quad A_t(\partial \Omega_{ref}^f) = \partial \Omega_t^f, \quad t \in [0, T]. \quad (2.38)$$

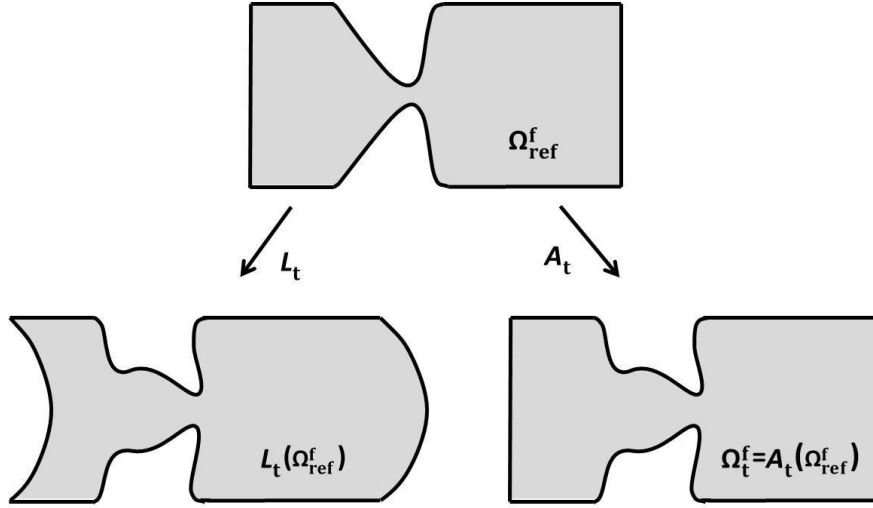
Pak toto zobrazení nazýváme ALE zobrazení. Je však třeba dodat, že ALE zobrazení nepopisuje skutečný pohyb tekutiny jako při Langrangeově popisu, ale pouze mapuje referenční oblast na proměnlivou výpočetní oblast. Situace je zobrazena na obrázku (2.3).

Nyní můžeme definovat rychlost deformace oblasti \mathbf{w}_D jako

$$\mathbf{w}_D(x, t) = \hat{\mathbf{w}}_D(A_t^{-1}(x), t), \quad t \in (0, T), \quad x \in \Omega_t^f, \quad (2.39)$$

kde $\hat{\mathbf{w}}_D$ je veličina definovaná na Ω_{ref}^f a

$$\hat{\mathbf{w}}_D(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_t(X), \quad t \in (0, T), \quad X \in \Omega_{ref}^f. \quad (2.40)$$



Obrázek 2.3: Rozdíly mezi Eulerovým, Lagrangeovým popisem (zde reprezentovaným zobrazením L_t) a ALE zobrazením A_t .

Následně můžeme zavést tzv. ALE derivaci funkce $f = f(x, t)$ pro $x \in \Omega_t^f$ a $t \in (0, T)$ jako derivaci vzhledem k pevnému bodu $X \in \Omega_{ref}^f$, kde $x = A_t(X)$, takto

$$\frac{D^A}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(X, t), \quad (2.41)$$

kde $\hat{f}(X, t) = f(A_t(X), t)$. Použitím věty o derivaci složené funkce více proměnných získáme následující vyjádření ALE derivace

$$\frac{D^A}{Dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(A_t(x), t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \mathbf{w}_D(x, t) \cdot \nabla f(x, t), \quad (2.42)$$

kde $\mathbf{w}_D(x, t)$ je rychlost deformace oblasti zavedená rovnicí (2.39). Pro podrobnější výklad a důkaz předchozí rovnosti odkazujeme např. na článek [15].

Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE tvaru

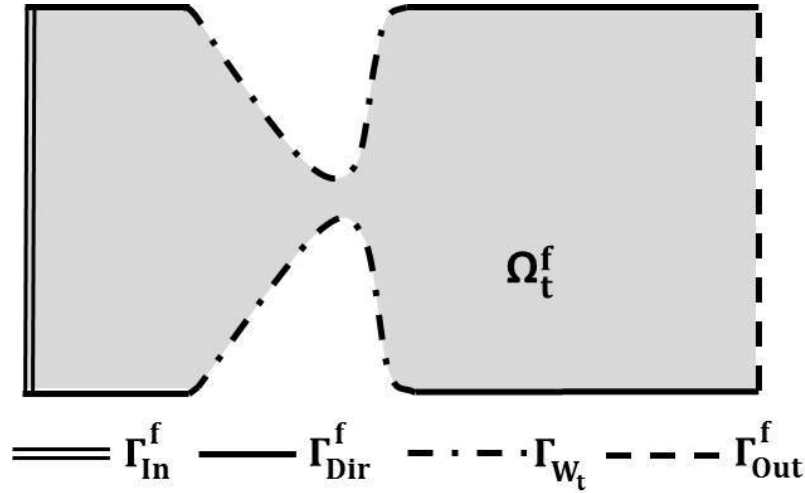
Nyní můžeme přeformulovat dříve odvozené rovnice v Eulerově popisu do ALE tvaru. Vyjdeme z rovnic pro nestlačitelné proudění (2.32) a (2.35). Rovnice kontinuity zůstane ve stejném tvaru, protože v nestlačitelném případě neobsahuje časovou derivaci. V Navierových-Stokesových rovnicích odpovídajících zákonu zachování hybnosti pak zaměníme klasickou časovou derivaci za ALE derivaci podle vztahu (2.42)

$$\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{w}_D \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu^f \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{g}^f, \quad (2.43)$$

což můžeme přepsat do konečného tvaru

$$\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu^f \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{g}^f. \quad (2.44)$$

Toto je Navierova-Stokesova rovnice v ALE popisu.



Obrázek 2.4: Znázornění hranic oblasti vyplněnou proudící tekutinou.

2.2.5 Okrajové a počáteční podmínky

Pro úplnou formulaci úlohy musí být Navierovy-Stokesovy rovnice doplněny o okrajové a počáteční podmínky. Rozdělení hranic oblasti Ω_t^f je znázorněno na obrázku (2.4). Hranice Γ_{Dir}^f , Γ_{In}^f , Γ_{Out}^f uvažujeme nezávislé na čase, naopak hranici Γ_{W_t} , kterou tvoří rozhraní mezi tekutinou a hlasivkou, bereme jako časově proměnnou.

Podobně jako v případě elastického tělesa uvažujeme na části hranice oblasti vyplněné tekutinou Dirichletovy okrajové podmínky ve tvaru

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{0} \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Dir}}^f, \quad t \in (0, T), \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_{\text{Dir}}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{In}}^f, \quad t \in (0, T). \quad (2.45b)$$

Rovnost $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ má fyzikální význam ulpívání vazké tekutiny na hranici oblasti, pomocí ní modelujeme podmínky na pevných stěnách Γ_{Dir}^f . Okrajová podmínka (2.45b) je pak její pouhé matematické zobecnění, pomocí kterého předepisujeme vstupní profil proudění na hranici Γ_{In}^f .

Pro výstupní část hranice používáme tzv. "do-nothing" okrajovou podmínku ve tvaru

$$(p(x, t) - p_{ref})\vec{n} - \nu^f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \vec{n}}(x, t) = 0, \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Out}}^f, \quad t \in (0, T), \quad (2.46)$$

kde p_{ref} značí vhodnou hodnotu referenčního tlaku a \vec{n} jednotkovou vnější normálu k hranici Γ_{Out}^f . Tato podmínka přirozeně vyplyne při odvození slabé formulace ve třetí kapitole.

Okrajové podmínky pro rozhraní Γ_{W_t} popíšeme v další podkapitole.

Jako počáteční podmínku mějme zadánu počáteční rychlost

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad \forall x \in \Omega_0^f. \quad (2.47)$$

V dalším se omezíme pouze na 2D úlohu proudění nestlačitelné tekutiny, podobně jako při řešení problému elastického tělesa.

2.3 Sdružený problém

Uvažované problémy proudění a deformace elastického tělesa nelze řešit odděleně. Je třeba je řešit dohromady, neboť tvar hranice představuje další neznámou veličinu, která závisí na silách mezi deformovaným elastickým tělesem a proudící tekutinou. Tedy jedno řešení závisí na druhém a naopak. Pak mluvíme o tzv. sdruženém problému. Při jeho popisu nejprve vyšetříme podmínky na rozhraní.

2.3.1 Podmínky na rozhraní

Deformace resp. poloha rozhraní Γ_{W_t} v čase t je závislá na (předchozím) působení aerodynamických a elastických sil. V každém časovém okamžiku t se ustálí nový tvar rozhraní v závislosti na nastolení nové silové rovnováhy. Naopak i síly závisí na poloze rozhraní Γ_{W_t} , na kterou působí. Proto mluvíme o sdruženém problému.

Výsledkem rovnováhy sil mezi tělesem a tekutinou v čase t je změna tvaru hranice Γ_{W_t} určená funkcí deformace \mathbf{u} . Poloha rozhraní je v každém čase dána jako

$$\Gamma_{W_t} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = X + \mathbf{u}(X, t), X \in \Gamma_{W_{\text{ref}}}\}. \quad (2.48)$$

Z pohledu tělesa musí nastat rovnováha plošných sil, které působí na společnou hranici mezi tělesem a tekutinou. Tekutina tlačí na těleso aerodynamickými silami danými vektorem plošných sil $\mathbf{b}^f(x, t, \vec{n})$, resp. dále formulovanými pomocí tenzoru napětí tekutiny z Cauchyho věty a dále vyjádřenými pomocí rovnice (2.31), které se v případě nestlačitelné tekutiny zjednoduší na $\boldsymbol{\sigma}^f = -p\mathbb{I} + 2\mu^f\mathbb{D}(\mathbf{v})$. Těleso klade odpor silami vystupující proti deformaci ve tvaru $\mathbf{T}^s(\vec{n})$ a dále přeformulovanými pomocí tenzoru napětí tělesa vztahem (2.2). Celkem tedy předepisujeme jako okrajovou podmínku na rozhraní pro elastické těleso

$$\sum_{j=1}^2 \tau_{ij}^s(X) n_j(X) = - \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}^f(x) n_j(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \Gamma_{W_t}, X \in \Gamma_{W_{\text{ref}}}, \quad (2.49)$$

kde n_j značí složky normály k rozhraní $\Gamma_{W_{\text{ref}}}$ směřující ven z tělesa a x je vypočteno ze známé deformace vztahem v rovnici (2.48). Podmínky (refeq:rozhran2) předepisujeme pouze pro případ lineární elasticity a tedy malých deformací, kdy je vzdálenost bodů x a X malá. Pak tedy můžeme vyjádřit funkci \mathbf{q}^s , kterou předepisujeme jako Neumannovu okrajovou podmínku, takto

$$q_i^s(X, t) = -\sigma_{ij}^f(x) n_j(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \Gamma_{W_t}. \quad (2.50)$$

Dále budeme používat značení pomocí \mathbf{q}^s z důvodu elegantnějšího zápisu a mít na mysli toto vyjádření.

Okrajové podmínky předepisované pro tekutinu na společném rozhraní jsou jednodušší. Reflektují deformaci hranice a předepisujeme zde rychlost shodnou s jejím pohybem pomocí Dirichletových okrajových podmínek

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{w}_D(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{W_t}, t \in (0, T), \quad (2.51)$$

kde jako \mathbf{w}_D jsme označili rychlost deformace hranice

$$\mathbf{w}_D(x, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(X, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\mathbf{w}_t}, \quad X \in \Gamma_{\mathbf{w}_{\text{ref}}} \quad t \in (0, T), \quad (2.52)$$

což koresponduje s předchozím zavedením rychlosti deformace oblasti \mathbf{w}_D rovnicí (2.39) díky shodnosti ALE zobrazení a deformace v čase t pro body na rozhraní $\Gamma_{\mathbf{w}_t}$.

2.3.2 Rovnice sdruženého problému

Nyní, když již víme, jak formulovat okrajové podmínky pro rozhraní, shrneme odvozené rovnice, pomocí kterých budeme modelovat sdružený problém interakce elastického tělesa s proudící tekutinou.

Elastické těleso

Hledáme neznámou funkci deformace $\mathbf{u} : \Omega^s \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$, která splňuje parciální diferenciální rovnice

$$\rho^s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^s(\mathbf{u})}{\partial x_j} = \mathbf{f}^s \quad \text{v } \Omega^s \times (0, T), \quad (2.53a)$$

spolu s podmínkami

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_{\text{Dir}}(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Dir}}^s, \quad t \in [0, T], \quad (2.53b)$$

$$\tau_{ij}^s(x, t) n_j(x) = q_i^s(x, t) \quad \text{pro } x \in \Gamma_{\text{Neu}}^s, \quad t \in [0, T], \quad (2.53c)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) \quad \text{pro } x \in \bar{\Omega}^s, \quad (2.53d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{u}_1(x) \quad \text{pro } x \in \bar{\Omega}^s, \quad (2.53e)$$

kde je τ_{ij}^s dáno vztahem (2.9), a funkce q_i^s jsou stanoveny pomocí rovnice (2.50).

Dále předpokládáme, že platí $f_i^s \in C(\bar{\Omega}^s \times [0, T])$, $\mathbf{u}_{\text{Dir}}(x, t) \in [C(\Gamma_{\text{Dir}} \times [0, T])]^2$, $q_i^s \in C(\Gamma_{\text{Neu}} \times [0, T])$ a $\mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_1(x) \in C(\bar{\Omega}^s)$ a ρ^s je konstantní. Necht' je oblast $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$ omezená a má lipschitzovsky spojitou hranici $\partial\Omega^s$, $\Gamma_{\text{Dir}}^s \cup \Gamma_{\text{Neu}}^s = \partial\Omega^s$, $\Gamma_{\text{Dir}}^s \neq \emptyset$.

Pak za *klasické řešení* rovnic (2.53a), (2.53b) až (2.53e) považujeme funkci $\mathbf{u}(x, t) = (u_1, u_2)$, kde $u_1, u_2 \in C^{(2)}((\Omega^s) \times (0, T)) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}^s \times (0, T))$ splňují rovnice (2.53a) spolu s podmínkami (2.53b, c, d, e).

Proudění nestlačitelné tekutiny

Hledáme neznámou funkci rychlosti proudění tekutiny $\mathbf{v} : \Omega_t^f \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^2$ a hodnoty tlaku $p : \Omega_t^f \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, které splňují parciální diferenciální rovnice

$$\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu^f \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{g}^f \quad \text{v } \Omega_t^f \times (0, T), \quad (2.54a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{v } \Omega_t^f \times (0, T), \quad (2.54b)$$

a okrajové podmínky

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_{\text{Dir}}(x, t) \quad \text{na } \Gamma_{\text{In}}^f, \quad t \in [0, T], \quad (2.54c)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{\text{Dir}}^f, \quad t \in [0, T], \quad (2.54d)$$

$$(p(x, t) - p_{\text{ref}}) \vec{n} - \nu^f \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{\text{Out}}^f, \quad t \in [0, T], \quad (2.54e)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{w}_D(x, t) \quad \text{na } \Gamma_{\text{W}_t}, \quad t \in [0, T], \quad (2.54f)$$

a předepsanou počáteční podmínku

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad \forall x \in \Omega_0^f, \quad (2.54g)$$

kde $\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt}$ značí ALE derivaci a rychlost deformace hranice \mathbf{w}_D je dána rovnicí (2.39).

Dále předpokládáme, že platí $g_i^f \in C(\bar{\Omega}^f \times [0, T])$, $\mathbf{v}_{\text{Dir}}(x, t) \in [C(\Gamma_{\text{Dir}} \times [0, T])]^2$, $\mathbf{v}_0(x) \in C(\bar{\Omega}^f)$, ν^f je konstantní, oblast $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^2$ je omezená a má lipschitzovsky spojitou hranici $\partial \Omega^f$ pro $\forall t \in [0, T]$, $\Gamma_{\text{Dir}}^f \cup \Gamma_{\text{In}}^f \cup \Gamma_{\text{Out}}^f \cup \Gamma_{\text{W}_t} = \partial \Omega_t^f$, $\Gamma_{\text{Dir}}^f, \Gamma_{\text{In}}^f \neq \emptyset$.

Pak za *klasické řešení* rovnic (2.54a), (2.54b), (2.54c) až (2.54g) považujeme dvojici funkcí $\mathbf{v}(x, t) = (v_1, v_2)$ a $p(x, t)$, kde $v_1, v_2 \in C^{(1)}(\bar{\Omega}_t^f \times (0, T))$, $p \in C^{(1)}(\bar{\Omega}_t^f \times (0, T))$ splňují rovnice (2.54a) a (2.54b) spolu s podmínkami (2.54c, d, e, f, g).

Společné rozhraní

Předchozí problémy (2.53a) a (2.54a, b) jsou sdruženy přes problém neznámé polohy rozhraní dané rovnicí (2.48) a pomocí okrajových podmínek (2.49) a (2.51).

Kapitola 3

Numerický model

V této kapitole je popsán způsob odvození numerických schémat, které řeší obě dvě části sdruženého problému. Numerické schéma pro problém elastického tělesa je zformulováno v první části této kapitoly, druhá část je věnována opět problému proudění. V obou případech je prostorová diskretizace provedena pomocí metody konečných prvků. V podkapitole o proudění je uvedeno několik možností, jak linearizovat Navierovy-Stokesovy rovnice, a dále jsou popsány dvě metody, jak řešit soustavu rovnic sedlového bodu. Na závěr je uveden celkový algoritmus řešení sdruženého problému.

3.1 Elastické těleso

Nejprve odvodíme slabou formulaci rovnic lineární elasticity. Tu diskretizujeme v prostoru pomocí metody konečných prvků. Následně pro vzniklou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic představíme vhodnou numerickou metodu k jejich vyřešení.

3.1.1 Prostorová diskretizace

Na konci předchozí kapitoly jsme sestavili rovnice (2.53a) v tzv. klasickém smyslu. Pro potřeby metody konečných prvků je převedeme do slabé formulace.

Slabá formulace

Vyjdeme z rovnice (2.53a), kterou vynásobíme v daném čase $t \in (0, T)$ funkcí $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ z prostoru $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}(\Omega^s)$ zavedeném v kapitole o matematickém aparátu.

Po integraci po složkách přes celou oblast Ω^s získáme rovnost

$$\int_{\Omega^s} \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \phi_i \, dx - \int_{\Omega^s} \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} \phi_i \, dx = \int_{\Omega^s} f_i^s \phi_i \, dx. \quad (3.1)$$

Použitím Greenovy věty, viz věta 3 v matematickém aparátu, dostáváme

$$-\int_{\Omega^s} \frac{\partial \tau_{ij}^s}{\partial x_j} \phi_i \, dx = \int_{\Omega^s} \tau_{ij}^s \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \, dx - \int_{\partial \Omega^s} \tau_{ij}^s n_j \phi_i \, dS, \quad (3.2)$$

kde n_j jsou složky vnější normály k povrchu $\partial \Omega^s$.

Z definice prostoru \mathbf{V} a z okrajových podmínek (2.53c) plyne

$$\int_{\partial \Omega^s} \tau_{ij}^s n_j \phi_i \, dS = \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{Dir}}^s} \tau_{ij}^s n_j \phi_i \, dS}_{=0} + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} q_i^s \phi_i \, dS. \quad (3.3)$$

Zároveň můžeme využít symetrie tenzoru τ_{ij}^s a dále upravit $\int_{\Omega^s} \tau_{ij}^s \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) \, dx$

$$\int_{\Omega^s} \tau_{ij}^s \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} \left(\tau_{ij}^s \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \tau_{ij}^s \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right) \, dx = \int_{\Omega^s} \tau_{ij}^s e_{ij}^s(\Phi) \, dx. \quad (3.4)$$

S pomocí Hookeova zákona můžeme vyjádřit τ_{ij}^s

$$\int_{\Omega^s} \tau_{ij}^s e_{ij}^s(\Phi) \, dx = \int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\mathbf{u}) e_{ij}^s(\Phi) \, dx. \quad (3.5)$$

Nyní převedeme výraz s Neumannovou okrajovou podmínkou na pravou stranu a rovnice upravíme do výsledné podoby

$$\int_{\Omega^s} \rho^s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \phi_i \, dx + \int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\mathbf{u}) e_{ij}^s(\Phi) \, dx = \int_{\Omega^s} f_i^s \phi_i \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} q_i^s \phi_i \, dS. \quad (3.6)$$

Tímto postupem jsme převedli rovnici (2.53a) spolu s okrajovými podmínkami v libovolném čase t do integrálního tvaru.

Slabým řešením původních rovnic elastického tělesa (2.53a) v čase t nyní nazveme takovou funkci $\mathbf{u} : (0, T) \mapsto \mathbf{W}(\Omega^s)$, pro kterou platí:

- $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{z}(x, t) + \mathbf{z}_0(x, t)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{W}(\Omega^s)$, $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{V}$,
- $\mathbf{z}(x, t) = \mathbf{u}_{\text{Dir}}(x, t) \quad \forall x \in \Gamma_{\text{Dir}}^s$,
- funkce \mathbf{u} splňuje rovnost (3.6) pro libovolné $\Phi \in \mathbf{V}$,
- $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \in L^2(\Omega^s)$.

Poznámka. Existence a jednoznačnost slabého řešení pro stacionární případ, tj. $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$ v rovnici (3.6), plyne z Laxovy-Milgramovy věty, viz věta 6, kde pro ověření jejich předpokladů je třeba užít Friedrichsovu a Kornovu nerovnost, viz věta 4 a 5. Podrobnější odvození je možno nalézt v mé bakalářské práci [23].

Poznámka. Pro dokazování existence slabého řešení je často slabá formulace provedena i v čase, tj. rovnice (3.6) jsou zintegrovány ještě přes časový interval $[0, T]$. Řešení je pak hledáno v tzv. Bochnerově prostoru, jehož definici je možno nalézt např. v knize [1]. Důkaz jednoznačnosti a existence slabého řešení lze nalézt např. v [14].

Diskrétní formulace

Budeme hledat přibližné řešení slabé formulace problému (3.6) metodou konečných prvků v prostoru testovacích funkcí $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h$, kde prostor V_h je konečně dimenzionální, $\dim V_h = N_h$. Přibližné řešení $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ musí splňovat pro všechna Φ_h z \mathbf{V}_h identitu

$$\int_{\Omega^s} \rho^s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2} \cdot \Phi_h \, dx + \int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\mathbf{u}_h) e_{ij}^s(\Phi_h) \, dx = \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \Phi_h \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} \mathbf{q}^s \cdot \Phi_h \, dS. \quad (3.7)$$

Při označení bázevých funkcí jako $\Phi_1 \dots \Phi_{2N_h}$ zvolíme bázi bez újmy na obecnosti v prostoru \mathbf{V}_h takto $\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_{i+N_h} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{i+N_h}(x) \end{pmatrix}$, $\phi_{i+N_h} = \phi_i$, $i = 1, \dots, N_h$. Potom můžeme každou funkci z prostoru \mathbf{V}_h a tedy i řešení úlohy (3.7) vyjádřit pomocí lineární kombinace těchto bázevých funkcí. Uvažujeme navíc koeficienty lineární kombinace proměnné v čase

$$\mathbf{u}_h(x, t) = \sum_{m=1}^{2N_h} \alpha_m(t) \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^{N_h} \alpha_m(t) \begin{pmatrix} \phi_m(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=N_h+1}^{2N_h} \alpha_m(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_m(x) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

kde předpokládáme, že $\alpha_m(t) \in C^{(2)}([0, T])$. Pak dosazením tohoto vyjádření do rovnice (3.7) získáme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} \rho^s \sum_{m=1}^{2N_h} \frac{\partial^2 \alpha_m}{\partial t^2} \Phi_m \cdot \Phi_n \, dx + \int_{\Omega^s} \sum_{m=1}^{2N_h} \alpha_m C_{ijkl} e_{kl}^s(\Phi_m) e_{ij}^s(\Phi_n) \, dx &= \quad (3.9) \\ &= \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \Phi_n \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} \mathbf{q}^s \cdot \Phi_n \, dS, \end{aligned}$$

kdy rovnice (3.9) musí platit pro všechny bázevé funkce $\Phi_n \in \mathbf{V}_h$. Ty se nyní budeme snažit přepsat pomocí maticového zápisu. Z rovnic (3.9) záměnou sumy a integrace dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{2N_h} \alpha_m'' \underbrace{\int_{\Omega^s} \rho^s \Phi_m \cdot \Phi_n \, dx}_{=m_{nm}} + \sum_{m=1}^{2N_h} \alpha_m \underbrace{\int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\Phi_m) e_{ij}^s(\Phi_n) \, dx}_{=k_{nm}} &= \quad (3.10) \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \Phi_n \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} \mathbf{q}^s \cdot \Phi_n \, dS}_{=b_n}, \end{aligned}$$

kde jako m_{nm} , k_{nm} , b_n budeme značit prvky matic \mathbb{M} , \mathbb{K} , resp. složky vektoru $\mathbf{b}(t)$. Pak lze rovnice (3.10) zapsat jako

$$\mathbb{M}\boldsymbol{\alpha}'' + \mathbb{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}(t), \quad (3.11)$$

kde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_m)_{m=1}^{2N_h}$ je neznámý vektor koeficientů a kde jsou jednotlivé prvky soustavy dány těmito vztahy

$$\begin{aligned} (\mathbb{M})_{nm} &= m_{nm} = \int_{\Omega^s} \rho^s \boldsymbol{\Phi}_n \cdot \boldsymbol{\Phi}_m \, dx, \\ (\mathbb{K})_{nm} &= k_{nm} = \int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\boldsymbol{\Phi}_m) e_{ij}^s(\boldsymbol{\Phi}_n) \, dx, \\ (\mathbf{b}(t))_n &= b_n(t) = \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} \mathbf{q}^s \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dS, \end{aligned} \quad (3.12)$$

pro $m, n = 1, \dots, 2N_h$.

Takto jsme převedli původní parciální diferenciální rovnice (2.53a) na systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu s neznámým vektorem koeficientů $\boldsymbol{\alpha}$.

Tento systém ještě musí být doplněn slabými verzemi počátečních podmínek, které získáme aplikací stejného postupu

$$\sum_{m=1}^{N_h} \alpha_m(0) \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\Phi}_m \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dx = \underbrace{\int_{\Omega^s} \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dx}_{=\boldsymbol{\alpha}_0}, \quad (3.13a)$$

$$\sum_{m=1}^{N_h} \alpha'_m(0) \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\Phi}_m \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dx = \underbrace{\int_{\Omega^s} \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\Phi}_n \, dx}_{=\boldsymbol{\alpha}_1}. \quad (3.13b)$$

Maticově zapsáno

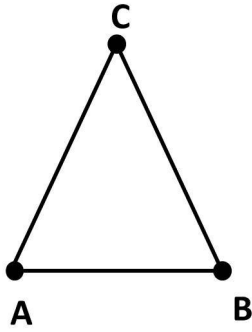
$$\mathbb{M}^T \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0, \quad \mathbb{M}^T \boldsymbol{\alpha}'(0) = \boldsymbol{\alpha}_1. \quad (3.14)$$

Poznámka. Matice \mathbb{K} se často nazývá maticí tuhosti a je symetrická a pozitivně definitní, tedy i regulární. Matici \mathbb{M} se říká matice hmotnosti a je také symetrická a pozitivně definitní.

Tvrzení 1. *Pro Cauchyovu úlohu danou systémem obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (3.11) a počátečními podmínkami (3.14) existuje právě jedno řešení $\boldsymbol{\alpha}(t)$.*

3.1.2 Metoda konečných prvků

Základem metody konečných prvků je právě odvozená prostorová diskretizace s takovou volbou bázevých funkcí $\boldsymbol{\Phi}_n$ prostoru \mathbf{V}_h , aby výsledný maticový systém rovnic (3.11) daný maticemi \mathbb{K} a \mathbb{M} byl snadno řešitelný i pro velký počet neznámých. Toho dosáhneme volbou bázevých funkcí s co nejmenším nosičem, abychom získali řídké matice.



K je trojúhelník s vrcholy A, B, C .

Množina lineárních funkcionálů obsahuje

$$L_1(f) = f(A) \quad L_2(f) = f(B) \quad L_3(f) = f(C).$$

Prostor funkcí volíme jako prostor

polynomů prvního stupně.

Obrázek 3.1: Lineární Lagrangeův konečný prvek

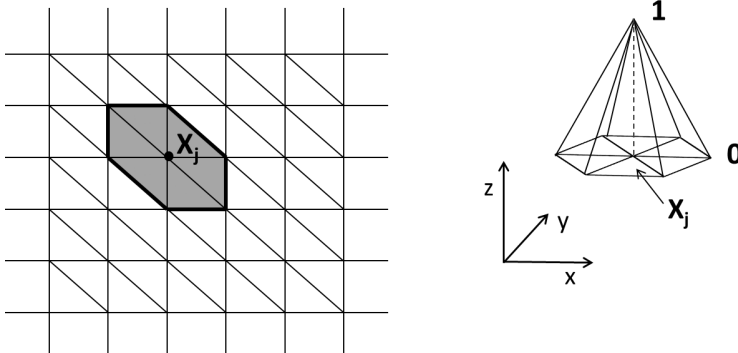
V dalším budeme předpokládat, že oblast Ω^s je polygonální. Tento předpoklad nemusí být v reálných situacích vždy splněn, ale v této práci se tímto problémem nebudeme zabývat.

Polygonální oblast $\Omega^s \subset \mathbb{R}^2$ pokryjeme triangulací τ_h , kde parametr h charakterizuje velikost trojúhelníků. O vytvořené triangulaci budeme dále předpokládat, že je přípustná, viz [23], tedy speciálně, že $\bar{\Omega}^s = \bigcup_{K \in \tau_h} K$, a dále, že systém triangulací parametrizovaný parametrem h je regulární. Dále označíme $s_h, s_h^{\text{Neu}}, s_h^{\text{Dir}}$ strany trojúhelníků z τ_h , které leží na hranici $\partial\Omega^s, \Gamma_{\text{Neu}}^s, \Gamma_{\text{Dir}}^s$, tedy $\Gamma_{\text{Neu}}^s = \bigcup_{S \in s_h^{\text{Neu}}} S, \Gamma_{\text{Dir}}^s = \bigcup_{S \in s_h^{\text{Dir}}} S$.

V této práci zvolíme konečné prvky jako Lagrangeovské lineární trojúhelníky, viz obrázek (3.1). Tedy prostor konečných prvků \mathbf{V}_h je tvořen spojitými, po částech lineárními funkcemi které jsou nulové na hranici Γ_{Dir}^s . Bázové funkce prostoru \mathbf{V}_h jsou jednoznačně určeny hodnotami ve vrcholech, které neleží na hranici Γ_{Dir}^s . Označme N_h počet vrcholů triangulace uvnitř oblasti Ω^s a na hranici Γ_{Neu}^s . Složky bázových funkcí $\Phi_n(x)$ jsou funkce $\phi_i(x)$, které splňují

$$\phi_i(X_j) = \delta_{ij}, \quad (3.15)$$

kde X_j označuje j -tý vrchol triangulace. Mimo trojúhelníky obsahující j -tý bod je bázová funkce ϕ_j nulová, jak je znázorněno na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Tvar bázových funkcí lineárních Lagrangeových prvků – na levé straně je vyšrafován nosič bázové funkce od vrcholu X_j , napravo graf jejího průběhu na nosiči.

Tato volba aproximačního prostoru \mathbf{V}_h nám zaručuje spojitost funkcí z \mathbf{V}_h , řídkou strukturu matic \mathbb{K}, \mathbb{M} , existenci jednoduchých afinity ekvivalentních prvků a praktickou implementaci, viz [19]. Důkaz konvergence přibližných řešení $\mathbf{u}_h(x, t)$ pro daný čas t k řešení $\mathbf{u}(x, t)$ vzhledem k parametru sítě h najdeme ve skriptech [19].

Numerická integrace

Další úpravou vztahů (3.12) a díky aditivnosti integrálu získáme

$$\begin{aligned} m_{nm} &= \int_{\Omega^s} \rho^s \Phi_n \cdot \Phi_m \, dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \rho^s \Phi_n \cdot \Phi_m \, dx \\ k_{nm} &= \int_{\Omega^s} C_{ijkl} e_{kl}^s(\Phi_m) e_{ij}^s(\Phi_n) \, dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K C_{ijkl} e_{kl}^s(\Phi_m) e_{ij}^s(\Phi_n) \, dx \\ b_n(t) &= \int_{\Omega^s} \mathbf{f}^s \cdot \Phi_n \, dx + \int_{\Gamma_{\text{Neu}}^s} \mathbf{q}^s \cdot \Phi_n \, dS = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \mathbf{f}^s \cdot \Phi_n \, dx + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{Neu}}} \int_S \mathbf{q}^s \cdot \Phi_n \, dS, \end{aligned} \quad (3.16)$$

pro $m, n = 1, \dots, 2N_h$.

Pro výpočet integrálu přes libovolný prvek $K \in \tau_h$ použijeme numerickou integraci

$$\int_K \varphi(x) \, dx \approx \frac{1}{3} |K| \sum_{i=1}^3 \varphi(X_i), \quad (3.17)$$

kde $|K|$ značí obsah trojúhelníku K a X_1, X_2, X_3 jsou jeho vrcholy.

K vyjádření integrálu přes hranici Γ , resp. hranu trojúhelníku S_K využijeme aproximaci

$$\int_{S_K} \varphi(x) \, dS \approx \frac{1}{2} |S_K| \sum_{i=1}^2 \varphi(X_i), \quad (3.18)$$

kde $|S_K|$ značí délku jedné strany trojúhelníku K a X_1, X_2 jsou vrcholy ohraničující tuto stranu.

Tyto numerické aproximace jsou přesné pro polynomy prvního stupně, viz [19].

3.1.3 Časová diskretizace

V předchozí části jsme původní parciální diferenciální rovnice (2.53a) diskretizovali v prostoru pomocí metody konečných prvků. Výsledkem je systém obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (3.11) s počátečními podmínkami (3.11). Nyní budeme hledat přibližné řešení vzniklého systému rovnic numericky. Proto zvolme dělení časového intervalu $[0, T]$ na N ekvidistantních dílů, tedy $t_n = t_0 + n\Delta t$ pro $n = 1, \dots, N$, kde $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Newmarkova metoda

Newmarkova metoda, viz např. [13], se často používá pro řešení počáteční úlohy obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} y''(t) &= f(t, y(t), y'(t)) \quad \text{pro } t \in (0, T), \\ y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= y'_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že y splňuje $y \in C^{(4)}((0, T)) \cap C^{(1)}([0, T])$.

Vyjádřeme nyní hodnotu funkce $y(t_{n+1})$ pomocí Taylorova rozvoje v bodě t_n

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 y''(t_n) + \frac{1}{6} \Delta t^3 y'''(t_n) + O(\Delta t^4). \quad (3.20)$$

Přičtením a odečtením členu $(\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) \Delta t^2$ od pravé strany rovnice a jednoduché úpravě získáme rovnost

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \Delta t^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) y''(t_n) \right) - \\ &\quad - (\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta t^3 y'''(t_n) + O(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde $\beta \in \mathbb{R}$ je parametr.

Z Taylorova rozvoje plyne také následující vztah

$$y''(t_{n+1}) - y''(t_n) = \Delta t y'''(t_n) + O(\Delta t^2), \quad (3.22)$$

jeho dosazením do rovnice (3.21) a následným zahrnutím členu $(\frac{1}{6} - \beta) \Delta t^3 y'''(t_n)$ do chybu řádu $O(\Delta t^3)$ dostáváme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \Delta t^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) y''(t_n) \right) + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \beta \right) \Delta t^3 y'''(t_n)}_{=O(\Delta t^3)} + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pokud nyní využijeme toho, že $y''(t_{n+1})$ řeší původní rovnici (3.19), pak obdržíme

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \\ &\quad + \Delta t^2 \left(\beta f(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) f(t_n, y(t_n), y'(t_n)) \right) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Podobně postupujme pro funkci $y'(t)$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \Delta t y''(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 y'''(t_n) + O(\Delta t^3). \quad (3.25)$$

Přičtíme a odečtíme $\gamma(y''(t_{n+1}) - y''(t_n))\Delta t$ a upravme

$$\begin{aligned} y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + \Delta t(\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma)y''(t_n)) - \\ &\quad - \Delta t(\gamma y''(t_{n+1}) - \gamma y''(t_n)) + \frac{1}{2}\Delta t^2 y'''(t_n) + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde $\gamma \in \mathbb{R}$ je parametr.

Nahrazením $y''(t_{n+1}) - y''(t_n)$ členem $\Delta t y'''(t_n) + O(\Delta t^2)$ a zahrnutím členu $(\frac{1}{2} - \gamma)y'''(t_n)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$ do chyby druhého řádu $O(\Delta t^2)$ dostaneme

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \Delta t(\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma)y''(t_n)) + O(\Delta t^2). \quad (3.27)$$

Po dosazení z rovnice (3.19) získá předchozí vztah (3.27) konečnou podobu

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + (\gamma f(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + (1 - \gamma)f(t_n, y(t_n), y'(t_n))) + O(\Delta t^2). \quad (3.28)$$

Pokud zavedeme označení $y_n = y(t_n)$, $y'_n = y'(t_n)$, $f_n = f(t_n, y_n, y'_n)$, vypadá numerické schéma následovně

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t y'_n + \Delta t^2 \left(\beta f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) f_n \right), \quad (3.29)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \Delta t (\gamma f_{n+1} + (1 - \gamma) f_n). \quad (3.30)$$

Obecně se pro každé (y_{n+1}, y'_{n+1}) jedná o nelineární soustavu, kterou je možno řešit například Newtonovou metodou. My však řešíme systém s konstantními koeficienty, tedy v našem případě je funkce f lineární a soustava (3.29), (3.30) je také lineární, ale schéma zůstává implicitní. Vytvoření iteračního schématu pro rovnice (3.11) následuje v další sekci.

Metoda pro volbu parametrů $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ dosahuje druhého řádu přesnosti a je nepodmíněně stabilní, viz [13].

Numerické řešení

Při numerickém řešení rovnice (3.11) vyžadujeme její platnost na každé časové vrstvě, tedy

$$\mathbb{M}\mathbf{y}''_n + \mathbb{C}\mathbf{y}'_n + \mathbb{K}\mathbf{y}_n = \mathbf{b}_n, \quad (3.31)$$

kde jsme do rovnice (3.31) navíc přidali člen $\mathbb{C}\mathbf{y}'_n$, kterým modelujeme tlumení systému. Ten je v zmíněném případě nulový. Tuto obecnější formulaci budeme uvažovat i v dalším odstavci z důvodu možnosti dalších rozšíření. Užitím vztahů (3.29) a (3.30) pro vektorovou funkci \mathbf{y}'_{n+1} a \mathbf{y}_{n+1} v rovnici (3.31) pro $t = t_{n+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\mathbf{y}''_{n+1} + \mathbb{C}(\mathbf{y}'_n + \Delta t(1 - \gamma)\mathbf{y}''_n + \Delta t\gamma\mathbf{y}''_{n+1}) + \\ + \mathbb{K}\left(\mathbf{y}_n + \Delta t\mathbf{y}'_n + \frac{1 - 2\beta}{2}\Delta t^2\mathbf{y}''_n + \beta\Delta t^2\mathbf{y}''_{n+1}\right) = \mathbf{b}_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

a převedením všech neznámých na nové časové vrstvě na levou stranu rovnice dostáváme vztah

$$\underbrace{\left(\mathbb{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbb{C} + \beta(\Delta t)^2 \mathbb{K} \right)}_{=\mathbb{A}} \mathbf{y}_{n+1}'' = \mathbf{g}_{n+1}, \quad (3.33)$$

kde \mathbb{A} je iterační matice a jako pravou stranu jsme označili

$$\mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{b}_{n+1} - \mathbb{C}\mathbf{y}'_n - \frac{\Delta t}{2} \mathbb{C}\mathbf{y}''_n - \mathbb{K}\mathbf{y}_n - \Delta t \mathbb{K}\mathbf{y}'_n - \frac{1-2\beta}{2} (\Delta t)^2 \mathbb{K}\mathbf{y}''_n.$$

Postup při numerickém řešení je potom následující:

Na začátku máme zadánu počáteční úlohu, tedy známe výchylky \mathbf{y}_0 a rychlosti \mathbf{y}'_0 v čase t_0 . Použitím první rovnice (3.31) dostaneme lineární soustavu rovnic pro neznámé zrychlení \mathbf{y}''_0 , které vyřešíme například pomocí metody konjugovaných gradientů, viz např. [24]. Připomeňme, že matice \mathbb{K} , \mathbb{C} , \mathbb{M} jsou symetrické a pozitivní definitnost. Odtud plynou stejné vlastnosti i pro matici \mathbb{A} . Proto bude metoda konjugovaných gradientů konvergovat.

Nyní pro libovolné $n = 0, 1, 2, \dots$ postupujme takto:

Ze známých hodnot $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}'_n, \mathbf{y}''_n$ a ze soustavy (3.33) vypočteme opět metodou konjugovaných gradientů zrychlení \mathbf{y}''_{n+1} na nové časové vrstvě. Dosazením ze vzorců (3.29) dopočteme i rychlost \mathbf{y}'_{n+1} a výchylky \mathbf{y}_{n+1} pro t_{n+1} . Tento postup opakujeme až do času t_N .

Eulerova zpětná metoda

Další možností, jak řešit počáteční úlohu, je převést vzniklý systém na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu a následně použít jedno ze známých schémat, například zpětnou Eulerovu metodu. Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} Y'(t) &= F(t, Y), \quad \text{pro } t \in (0, T), \\ Y(0) &= Y_0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

O funkci F předpokládáme, že je spojitá a lipschitzovská vzhledem k Y na množině $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Úlohu (3.34) diskretizujeme pomocí zpětné Eulerovy metody jako

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta t} = F(t_{n+1}, Y_{n+1}). \quad (3.35)$$

Toto schéma je implicitní, nepodmíněně stabilní a prvního řádu přesnosti, viz [16].

Použití Eulerovy metody

Nejprve převedeme soustavu (3.11) na úlohu prvního řádu. Zavedeme nové proměnné η_1, η_2 jako $\eta_1 = \mathbf{y}, \eta_2 = \mathbf{y}'$. Pak má soustava v nových proměnných tvar

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \eta_2, \\ \mathbb{M}\eta_2' &= \mathbf{b} - \mathbb{C}\eta_2 - \mathbb{K}\eta_1, \end{aligned} \quad (3.36)$$

do kterých jsme opět pro větší obecnost přidali člen $\mathbb{C}\eta_2$. Tyto rovnice doplníme počátečními podmínkami

$$\eta_1(0) = \eta_1^0 \quad \text{a} \quad \eta_2(0) = \eta_2^0, \quad (3.37)$$

kde horním indexem značíme časovou závislost.

Aplikací numerického schématu zpětné Eulerovy metody na rovnice (3.36) dostáváme

$$\begin{aligned} \eta_1^{n+1} - \Delta t \eta_2^{n+1} &= \eta_1^n, \\ \mathbb{M}\eta_2^{n+1} + \Delta t \mathbb{K}\eta_1^{n+1} + \Delta t \mathbb{C}\eta_2^{n+1} &= \Delta t b^{n+1} + \mathbb{M}\eta_2^n, \end{aligned} \quad (3.38)$$

zapsáno v maticové podobě

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E} & -\Delta t \mathbb{E} \\ \Delta t \mathbb{K} & \mathbb{M} + \Delta t \mathbb{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^{n+1} \\ \eta_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1^n \\ \mathbb{M}\eta_2^n + \Delta t b^{n+1} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

kde \mathbb{E} značí jednotkovou matici.

Při numerickém řešení tedy ze známých hodnot výchylek η_1^0 a rychlostí η_2^0 vypočteme ze soustavy lineárních algebraických rovnic (3.39) řešení η_1, η_2 na nové časové vrstvě. Pro řešení lze použít např. Gaussovu-Seidlovu iterační metodu, neboť se pro dostatečně malá Δt jedná o matici ostře diagonálně dominantní. Takto postupujeme pro $n = 1, 2, \dots, N$.

3.2 Proudění

V této podkapitole nejprve odvodíme numerické schéma časové diskretizace, které narozdíl od předchozí části až následně diskretizujeme v prostoru pomocí metody konečných prvků. Pak popíšeme několik možností, jak linearizovat nelineární rovnice a na závěr uvedeme, jak řešit vzniklou soustavu lineárních rovnic.

3.2.1 Časová diskretizace

Nejprve diskretizujeme problém v čase, vyjdeme přitom ze stejného ekvidistantního rozdělení časového intervalu jako v případě elastického tělesa, tedy $t_n = t_0 + n\Delta t$ pro $n = 1, \dots, N$, kde $\Delta t = \frac{T}{N}$. Hodnoty funkcí na n -té časové vrstvě budeme označovat pomocí horního indexu: $f^n = f(t_n)$. Pro diskretizaci rovnic (2.54a) a (2.54b) jsme z palety existujících metod vybrali a použili zpětnou Eulerovu metodu, kterou lze lehce modifikovat na metodu Crankovu-Nicolsonové.

Numerické schéma Eulerovy metody

Plně se odkazujeme na předchozí odstavec 3.1.3, kde byla zpětná Eulerova metoda vysvětlena. Tuto metodu aplikujeme na předchozí rovnice (2.54a) a (2.54b). Nejprve

musíme nahradit ALE derivaci pomocí časové diference. Z definice ALE derivace jako $\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt}(x, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t}(X, t)$, $x = A_t(X) \in \Omega_t^f$ a náhrady derivace

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t}(X, t_{n+1}) \approx \frac{\hat{\mathbf{v}}^{n+1}(X) - \hat{\mathbf{v}}^n(X)}{\Delta t} \quad (3.40)$$

plyne

$$\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt}(x_{n+1}, t_{n+1}) \approx \frac{\hat{\mathbf{v}}^{n+1}(X) - \hat{\mathbf{v}}^n(X)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1}(x_{n+1}) - \mathbf{v}^n(x_n)}{\Delta t}, \quad (3.41)$$

kde $x_{n+1} = A_{t_{n+1}}(X) \in \Omega_{t_{n+1}}^f$ a $x_n = A_{t_n}(X) \in \Omega_{t_n}^f$.

Označíme-li $\bar{\mathbf{v}}^n(x_{n+1}) = \mathbf{v}^n(x_n)$, tedy $\bar{\mathbf{v}}^n(x_{n+1}) = \mathbf{v}^n(A_{t_n}(A_{t_{n+1}}^{-1}(x_{n+1})))$, lze celé numerické schéma zapsat následovně

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t} + ((\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{w}_D^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} - \nu^f \Delta \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{g}^{f, n+1} \quad (3.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0. \quad (3.43)$$

Schéma doplníme počáteční podmínkou $\mathbf{v}^0(x) = \mathbf{v}_0(x)$, $\forall x \in \Omega_0^f$.

Crankova-Nicolsonové metoda

Crankova-Nicolsonové metoda se používá pro řešení počátečních úloh ve stejném tvaru jako zpětná Eulerova metoda. Její numerické schéma se liší pravou stranou

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F(t^n, Y^n) + F(t^{n+1}, Y^{n+1})). \quad (3.44)$$

Toto schéma je implicitní, nepodmíněně stabilní a druhého řádu přesnosti za předpokladu hladkosti funkce F , viz [24].

Numerické schéma vypadá následovně

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(((\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{w}_D^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} - \nu^f \Delta \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1}) + \quad (3.45)$$

$$+ \frac{1}{2}(((\mathbf{v}^n - \mathbf{w}_D^n) \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \nu^f \Delta \mathbf{v}^n + \nabla p^n) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}^{f, n+1} + \mathbf{g}^{f, n}),$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{v}^n) = 0. \quad (3.46)$$

Schéma doplníme stejnou počáteční podmínkou $\mathbf{v}^0(x) = \mathbf{v}_0(x)$, $\forall x \in \Omega_0^f$.

Poznámka. Původní Crankovo-Nicolsonové schéma má tvar $\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = F(t^{n+\frac{1}{2}}, Y^{n+\frac{1}{2}})$, ale pro pravou stranu se běžně používá tato aproximace $F(t^{n+\frac{1}{2}}, Y^{n+\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}(F(t^n, Y^n) + F(t^{n+1}, Y^{n+1}))$.

3.2.2 Prostorová diskretizace

Po časové diskretizaci rovnic (2.54a), (2.54b) pokračujeme jejich slabou formulací.

Slabá formulace

V této části popíšeme slabou formulaci Navierových-Stokesových rovnic v ALE formulaci v pevném, ale libovolném časovém okamžiku $t_{n+1} \in (0, T)$. Na slabou formulaci pak navážeme v části věnované metodě konečných prvků.

Vynásobme rovnici (3.42) v časovém okamžiku t_{n+1} funkcí $\boldsymbol{\varphi}$ z prostoru funkcí $\mathbf{X} = X \times X$, kde

$$X = \{f \in W^{1,2}(\Omega_{t_{n+1}}^f) \mid f = 0 \text{ na } \Gamma_{\text{Dir}}^f \cup \Gamma_{\text{In}}^f \cup \Gamma_{\text{W}_{t_{n+1}}}^f \text{ ve smyslu stop}\} \subset W^{1,2}(\Omega_{t_{n+1}}^f). \quad (3.47)$$

Dále v tomto odstavci budeme vynechávat spodní index vyznačující časovou závislost oblasti $\Omega_{t_{n+1}}^f$, podobně jako horní index u hodnot funkcí \mathbf{v}^{n+1} a p^{n+1} na $n+1$ -ní časové vrstvě, tj. $\Omega^f = \Omega_{t_{n+1}}^f$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{n+1}$ a $p = p^{n+1}$.

Zintegrujme nyní vzniklou rovnost přes celou oblast Ω^f

$$\int_{\Omega^f} \frac{\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \nu^f \Delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_{\Omega^f} \mathbf{g}^f \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx. \quad (3.48)$$

Na třetí a čtvrtý člen použijeme Greenovu větu (viz věta 3)

$$- \int_{\Omega^f} \nu^f \Delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_{\Omega^f} \nu^f \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int_{\partial \Omega^f} \nu^f \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \, dS, \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega^f} \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega^f} p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_{\partial \Omega^f} p \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS, \quad (3.50)$$

a z definice prostoru \mathbf{X} plyne (neboť $\boldsymbol{\varphi} = 0$ na $\Omega^f \setminus \Gamma_{\text{Out}}^f$)

$$\int_{\partial \Omega^f} \nu^f \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \, dS = \int_{\Gamma_{\text{Out}}^f} \nu^f \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} \, dS \quad \text{a} \quad \int_{\partial \Omega^f} p \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\Gamma_{\text{Out}}^f} p \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS. \quad (3.51)$$

Užitím okrajové podmínky (2.46) na hranici Γ_{Out}^f , tedy $p(x, t) \bar{\mathbf{n}} - \nu^f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{\mathbf{n}}}(x, t) = p_{\text{ref}} \bar{\mathbf{n}}$, a převedením takto spočítaných integrálů na pravou stranu obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^f} \frac{\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \nu^f \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} - p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx &= \\ &= \int_{\Omega^f} \mathbf{g}^f \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int_{\Gamma_{\text{Out}}^f} p_{\text{ref}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS, \end{aligned} \quad (3.52)$$

kde funkce p_{ref} je referenční hodnota na hranici Γ_{Out}^f , která udává střední hodnotu tlaku na této hranici. Ve výpočtech ji volíme rovnu nule.

Druhou rovnici 3.43) vynásobíme funkcí q z prostoru $M = L^2(\Omega^f)$ a dostaneme rovnici

$$\int_{\Omega^f} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = 0. \quad (3.53)$$

Rovnice (3.52), (3.53) lze zapsat pomocí skalárního součinu v $L^2(\Omega^f)$, resp. $[L^2(\Omega^f)]^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}\right)_{\Omega^f} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} + \nu^f (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} = \\ = (\mathbf{g}^f, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} - (p_{ref}, \boldsymbol{\varphi} \cdot \vec{n})_{L^2(\Gamma_{\text{Out}}^f)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$(q, \operatorname{div} \mathbf{v})_{\Omega^f} = 0. \quad (3.55)$$

Nyní zavedeme na prostoru $\mathbf{W} \times M$ trilineární formu $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ při označení argumentů $V = (\mathbf{v}, p) \in \mathbf{W} \times M$, $V^* = (\mathbf{v}^*, p^*) \in \mathbf{W} \times M$, $Y = (\boldsymbol{\varphi}, q) \in \mathbf{X} \times M$ jako

$$\begin{aligned} a(V^*, V, Y) = \left(\frac{\mathbf{v}}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}\right)_{\Omega^f} + ((\mathbf{v}^* - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} + \nu^f (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} - \\ - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} + (q, \operatorname{div} \mathbf{v})_{\Omega^f}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Trilineární forma $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ je součtem levých stran rovnic (3.54) a (3.55) bez členu s rychlostí $\bar{\mathbf{v}}^n$, který zahrneme do pravé strany.

Na stejném prostoru definujeme funkcionál $L(\cdot)$ jako

$$L(Y) = (\mathbf{g}^f, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} - (p_{ref}, \boldsymbol{\varphi} \cdot \vec{n})_{L^2(\Gamma_{\text{Out}}^f)} + \left(\frac{\bar{\mathbf{v}}^n}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}\right)_{\Omega^f}, \quad (3.57)$$

kde jeho vyjádření dostaneme sečtením pravých stran rovnic (3.54) a (3.55) a členu s $\bar{\mathbf{v}}^n$.

Pak *slabým řešením* problému (3.42) v čase t_{n+1} nazveme takovou dvojici funkcí $V = (\mathbf{v}, p)$, $\mathbf{v} : \mathbf{W} \mapsto \mathbb{R}^2$, $p : M \mapsto \mathbb{R}$, pro kterou platí:

- $\mathbf{v}(x) = \mathbf{z}(x) + \mathbf{z}_0(x)$, $\mathbf{z} \in \mathbf{W}(\Omega^f)$, $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{X}$,
- $\mathbf{z}(x) = \mathbf{v}_{\text{Dir}}(x, t_{n+1}) \quad \forall x \in \Gamma_{\text{In}}^f$, $\mathbf{z}(x) = \mathbf{w}_D(x, t_{n+1}) \quad \forall x \in \Gamma_{\text{Wt}}$,
- dvojice $V = (\mathbf{v}, p)$ splňuje rovnici $a(V, V, Y) = L(Y)$, $\forall Y = (\boldsymbol{\varphi}, q) \in \mathbf{X} \times M$.

Poznámka. Důkaz existence a jednoznačnosti stacionárního slabého řešení problému proudění bez ALE formulace, tj. ve tvaru $((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} + \nu^f (\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} - (p, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f} = (\mathbf{g}^f, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f}$ a $(q, \operatorname{div} \mathbf{v})_{\Omega^f} = 0$, lze nalézt např. v [16]. Tamtéž je i vysvětleno, že pro nestacionární případ, tj. pro první rovnici doplněnou o člen $(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega^f}$, je obecná otázka existence a jednoznačnosti této úlohy je stále otevřená, resp. je dokázána pouze pro specifické případy a závisí mimo jiné na dimenzi úlohy a hodnotě viskozity. Podrobnější výklad lze nalézt v knize [21].

Diskrétní formulace

Podobně jako v části věnované elastickému tělesu řešíme problém proudění na prostoro-
rech s konečnou dimenzí \mathbf{X}_h a M_h . Pro přehlednost zápisu budeme v této sekci vyne-
chávat horní i dolní index značící časovou závislost, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h^{n+1}$, $p = p_h^{n+1}$, $\Omega_{t_{n+1}}^f =$
 Ω^f . Hledáme tedy takovou dvojici funkcí $V_h = (\mathbf{v}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times M_h$, která splňuje
následující rovnici

$$a(V_h, V_h, Y_h) = L(Y_h) \quad \forall Y_h \in \mathbf{X}_h \times M_h. \quad (3.58)$$

Nechť prostory funkcí \mathbf{X}_h a M_h mají dimenze $2N_h^{vel}$ a N_h^p . Zvolme v nich báze
 $\varphi_1, \dots, \varphi_{2N_h^{vel}}$ a $q_{2N_h^{vel}+1}, \dots, q_{2N_h^{vel}+N_h^p}$, kde $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_j(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_{j+N_h^{vel}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{j+N_h^{vel}}(x) \end{pmatrix}$,
 $\varphi_{j+N_h^{vel}} = \varphi_j$, $j = 1, \dots, N_h^{vel}$. Bázové funkce pro tlak q_j indexujeme až od indexu
 $2N_h^{vel} + 1$ z důvodu pozdějšího přehlednějšího maticového zápisu. Pak můžeme vyjá-
dřit hledaná řešení \mathbf{v}_h a p_h v těchto bázích jako lineární kombinace bázových funkcí
s koeficienty $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{j=1}^{2N_h^{vel}}$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_j)_{j=2N_h^{vel}+1}^{2N_h^{vel}+N_h^p}$, tedy

$$\mathbf{v}_h(x) = \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \beta_j \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{N_h^{vel}} \beta_j \begin{pmatrix} \varphi_j(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=N_h^{vel}+1}^{2N_h^{vel}} \beta_j \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_j(x) \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$p_h(x) = \sum_{j=2N_h^{vel}+1}^{2N_h^{vel}+N_h^p} \gamma_j q_j(x). \quad (3.60)$$

Dosaďme toto vyjádření do rovnice (3.58) za druhý argument V_h . Pvní argument
označíme hvězdičkou V_h^* stejně jako při definici formy $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ a nebudeme jej roze-
pisovat. Třetí argument zvolme jako $Y_h = (\boldsymbol{\varphi}_i, \mathbf{0})$. Po rozepsání jednotlivých členů
dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \left(\frac{\beta_j \boldsymbol{\varphi}_j}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}_i \right)_{\Omega^f} + \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \left((\mathbf{v}_h^* - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla \right) \beta_j \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i \Big|_{\Omega^f} + \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \nu^f (\nabla \beta_j \boldsymbol{\varphi}_j, \nabla \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} - \\ & - \sum_{j=2N_h^{vel}+1}^{2N_h^{vel}+N_h^p} (\gamma_j q_j, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} = (\mathbf{g}^f, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} - (p_{ref}, \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \vec{n})_{L^2(\Gamma_{\text{Out}}^f)} + \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \left(\frac{\beta_j^n \boldsymbol{\varphi}_j}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}_i \right)_{\Omega^f}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

kteřá musí být splněná pro všechny bázové funkce $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbf{X}_h$, tedy $i = 1, \dots, 2N_h^{vel}$.
V této rovnici jsme označili časovou závislost na koeficientu β_j^n z předchozí časové
vrstvy pomocí horního indexu n .

Nyní dosaďme do stejné rovnice za třetí argument $Y_h = (\mathbf{0}, -q_i)$

$$\sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} (-q_i, \operatorname{div} \beta_j \boldsymbol{\varphi}_j)_{\Omega^f} = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Tato rovnice musí platit pro všechna $q_i \in M_h$, odtud $i = 2N_h^{vel} + 1, \dots, 2N_h^{vel} + N_h^p$.

Když nyní označíme jednotlivé členy rovnic (3.61) a (3.62) jako

$$m_{ij} = (\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} \quad (3.63)$$

$$c_{ij} = ((\mathbf{v}_h^* - \mathbf{w}_D) \cdot \nabla) \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} \quad (3.64)$$

$$d_{ij} = \nu^f (\nabla \boldsymbol{\varphi}_j, \nabla \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} \quad (3.65)$$

$$b_{ij} = (-q_j, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} \quad (3.66)$$

$$g_i = (\mathbf{g}^f, \boldsymbol{\varphi}_i)_{\Omega^f} - (p_{ref}, \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \vec{n})_{L^2(\Gamma_{\text{out}}^f)} + \sum_{j=1}^{2N_h^{vel}} \left(\frac{\beta_j^n \boldsymbol{\varphi}_j}{\Delta t}, \boldsymbol{\varphi}_i \right)_{\Omega^f}, \quad (3.67)$$

lze obě rovnice přepsat do kompaktní maticové formy s neznámým vektorem koeficientů $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A(\mathbf{v}_h) & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

kde jsme označili $A(\mathbf{v}_h) = \frac{1}{\Delta t} M + C(\mathbf{v}_h) + D$. Matice $M = (m_{ij})$, $C(\mathbf{v}_h) = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, 2N_h^{vel}\}$ jsou dány vztahy (3.63) až (3.65), matice $B = (b_{ij})$ a vektor $\mathbf{g} = (g_i)$, $i \in \{1, \dots, 2N_h^{vel}\}$, $j \in \{2N_h^{vel} + 1, \dots, 2N_h^{vel} + N_h^p\}$ pak vztahy (3.66) a (3.67). Vektor \mathbf{v}_h je určen vyjádřením (3.59). Tento systém rovnic je nelineární, neboť prvky $c_{ji}(\mathbf{v}_h^*)$ závisí na hledaném řešení $\mathbf{v}_h^* = \mathbf{v}_h$. Matice soustavy má rozměry $(2N_h^{vel} + N_h^p) \times (2N_h^{vel} + N_h^p)$.

Poznámka. Matice M , resp. D se v literatuře běžně nazývá maticí hmotnosti, resp. tuhosti, a obě dvě jsou symetrické a pozitivně definitní. Matice B je diskrétní aproximace operátoru divergence. Matice C představuje nelineární člen a není symetrická. Odlišnou formulací úlohy lze dosáhnout její antisymetrie.

Poznámka. Na stacionární Stokesovy rovnice, tj. soustavu rovnic (3.68) bez matic M a C , lze po matematické stránce ekvivalentně pohlížet jako na úlohu vázaného extrému, kde $\boldsymbol{\gamma}$ představuje Lagrangeův multiplikátor. Více viz např. [16]

Poznámka. Pro vysoká Reynoldsova čísla, resp. malé hodnoty ν^f , je nutné přidat do původní formulace problému (2.54a), (2.54b) dodatečné stabilizační členy, které zaručí kovergenci řešení i pro tyto případy. Protože však v této práci vysoká Reynoldsova čísla neuvažujeme, tímto jsme se nezabývali. Více lze nalézt např. v [16].

3.2.3 Metoda konečných prvků

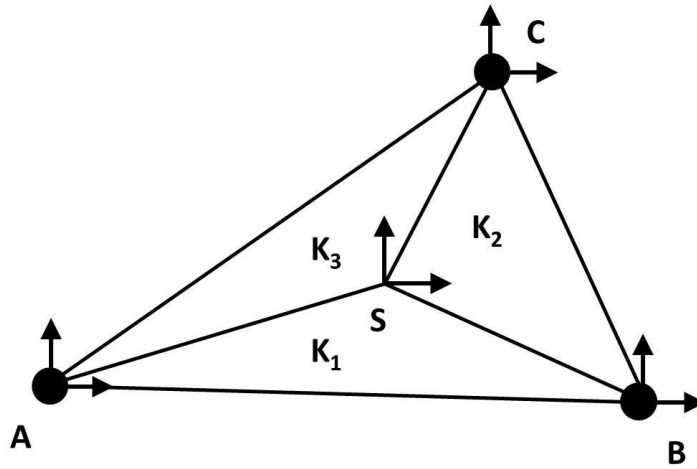
Předpokládáme, že oblast $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^2$, na které řešíme problém proudění, je v každém čase $t_n \in (0, T)$ polygonální. Tuto oblast pak pokryjeme přípustnou triangulací τ_h , stejně jako v případě elastického tělesa. Dále předpokládáme, že systém triangulací τ_h parametrizovaný h , je regulární.

Metoda konečných prvků, pomocí které diskretizujeme v prostoru problém nestlačitelného proudění, vychází ze stejných myšlenek jako v případě elastického tělesa. Opět tedy volíme báze funkce tak, aby měly co nejmenší nosič a aby vzniklá matice

měla co nejméně prvků. Problém proudění však je rozdílný v tom, že prostory \mathbf{X}_h, M_h nemůžeme zvolit libovolné a na sobě nezávislé, ale musejí splňovat tzv. inf-sup podmínku, někdy též nazývanou po slavném českém matematikovi Babuškova-Brezziho podmínka. Její diskretní podoba má tvar

$$\inf_{q_h \in M_h, q_h \neq 0} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{\|(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{\Omega^f}\|}{\|q_h\|_{L^2} \|\mathbf{v}_h\|_{1,2,\Omega^f}} \geq C > 0. \quad (3.69)$$

Inf-sup podmínka zaručuje, že jádro matice $\text{Ker} B^T = \{0\}$, a tím i jednoznačnou řešitelnost vzniklé soustavy rovnic (3.68). Pokud by nebyla splněna, vede k nestabilnímu numerickému schématu, více viz [16]. V této práci jsme z důvodu nejsnazšího rozšíření existujícího programu zvolili za konečné prvky tzv. P1-crossgrid/P1 prvky, které splňují inf-sup podmínku, více viz [16].



Obrázek 3.3: Crossgrid konečný prvek. Tečky ve vrcholech značí neznámé funkce tlaku, šipky vyznačují body, ve kterých jsou dvě neznámé funkce rychlosti. K_1, K_2, K_3 označují jednotlivé subtrojúhelníky.

Tyto crossgrid prvky, jež jsou znázorněny na obrázku (3.3), používají pro diskretizaci tlaku nám již známé Lagrangeovy lineární (L1) prvky. Ty byly podrobně popsány v odstavci (3.1.2). Pro aproximaci rychlosti jsou použity též lineární báze funkce, které mají pro vrcholy trojúhelníku stejný tvar jako L1 prvky. K těmto bázevým funkcím doplníme ještě jednu lineární, která přísluší středu trojúhelníku S . Tato funkce má na každém subtrojúhelníku daném dvěma vrcholy a zmíněným středem S lineární průběh, na hraně velkého trojúhelníku je nulová a ve středu S rovna jedné. Tuto bázevou funkci příslušnou středu trojúhelníku je možno analyticky vyjádřit pomocí tří bázevých funkcí

$$\begin{aligned} \varphi_S &= 3\varphi_A \quad \text{na } K_2, \\ &= 3\varphi_B \quad \text{na } K_3, \\ &= 3\varphi_C \quad \text{na } K_1, \end{aligned} \quad (3.70)$$

kde φ_A je bázevá funkce příslušející vrcholu A atd.

Volba crossgrid konečných prvků zajišťuje spojitost funkcí z daného aproximačního prostoru, řídkou strukturu matic soustavy (3.68), existenci jednoduchých afinně ekvivalentních prvků i relativně jednoduchou implementaci.

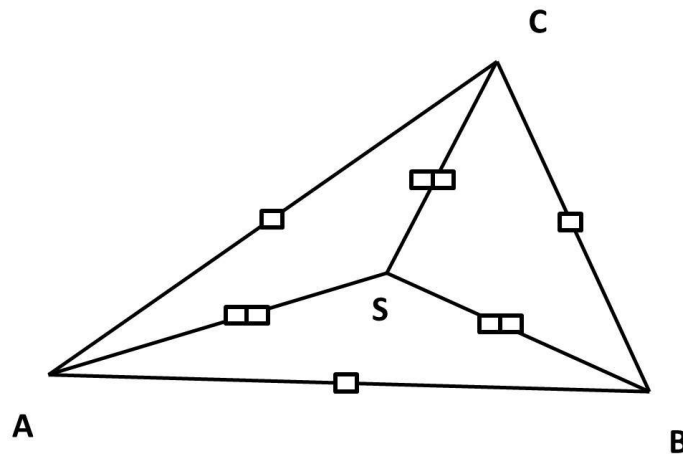
Poznámka. V literatuře se často označuje metoda, kdy jsou neznámé funkce hledány na odlišných funkčních prostorech, jako smíšená. Více o tomto tématu lze nalézt například v knize [9].

Numerická integrace

Při výpočtu jednotlivých prvků globální matice (3.68) jednotlivé integrály díky aditivnosti můžeme opět počítat po jednotlivých trojúhelnících z triangulace τ_h . Pro výpočet lokálních příspěvků do globálních matic pak využíváme numerickou integraci

$$\int_K \varphi(x) \, dx \approx \omega |K| \sum_{i=1}^N \varphi(X_i), \quad (3.71)$$

kde volíme počet kvadraturních uzlů $N = 9$ a váhu $\omega = \frac{1}{9}$. Uzly X_i , ve kterých funkci vyčísľujeme, volíme, jak je znázorněno na obrázku (3.4), tj. využíváme středů stran velkého trojúhelníku i subtrojúhelníků. Celkem vyčísľujeme hodnotu integrované funkce v devíti bodech, resp. šesti různých bodech. Tato numerická kvadratura je přesná pro polynomy druhého stupně na velkém trojúhelníku.



Obrázek 3.4: Čtverce ve středech stran představují kvadraturní uzly. Na spojnici mezi vrcholy trojúhelníku a středem S je též volíme ve středu. Uvažujeme zde hodnotu funkce dvakrát, jednou jako limitní hodnotu z jednoho subtrojúhelníku, podruhé z druhého.

3.2.4 Nelineární problém a jeho linearizace

Existuje několik způsobů, jak linearizovat nelineární člen $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ v čase t_{n+1} . Zde uvádíme nejpoužívanější

1. Explicitní schéma
 - a) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|_{t=t_{n+1}} \approx (\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n$ je řádu $O(\Delta t)$
2. Semi-implicitní schéma
 - a) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|_{t=t_{n+1}} \approx (\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1}$ je řádu $O(\Delta t)$
 - b) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|_{t=t_{n+1}} \approx ((2\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1}$ je řádu $O(\Delta t^2)$
3. Plně implicitní schéma
 - a) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|_{t=t_{n+1}} \approx (\mathbf{v}^{n+1,m} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1,m+1}$, postupně pro $m = 0, 1, \dots$ opakujeme, dokud není rozdíl $|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n|$ dostatečně malý, pak pokračujeme dalším časovým krokem $n + 2$, atd.

Explicitní schéma má výhodu v tom, že nelineární člen zůstává při časové diskretizaci na pravé straně a pak je matice A symetrická. Nevýhodou je podmíněná stabilita a menší přesnost řešení. Semi-implicitní schémata jsou stejně jako explicitní poměrně jednoduchá na implementaci a jejich algoritmus je rychlejší oproti plně implicitním. Jejich nevýhodou je opět jen podmíněná stabilita. Pro vyšší přesnost výpočtu a také z důvodu stability je proto vhodné zvláště pro vyšší Reynoldsova čísla implementovat plně implicitní schémata. My v této práci používáme linearizaci pomocí metody 2a), někdy též nazývanou Oseenova linearizace.

3.2.5 Soustava lineárních rovnic

Po provedené linearizaci můžeme přistoupit k řešení soustavy lineárních rovnic ve tvaru sedlového bodu. Většina základních metod jako Gaussova-Seidelova, SOR nebo metoda konjugovaných gradientů není schopná soustavu rovnic v tomto tvaru vyřešit, protože není splněna podmínka pozitivní definitnosti a celý diagonální blok globální matice je nulový. Proto je třeba použít jiné metody určené pro tento tvar rovnic. V této práci jsme pro jejich vyřešení implementovali dva řešiče.

Vankův zhlazovač

Vankův zhlazovač je iterativní řešič, který existuje v několika verzích. Základní algoritmus je ale vždy stejný – postupné procházení celé oblasti po jednotlivých elementech, sestavení lokální soustavy a po jejím vyřešení následná oprava tlaku. Právě velikostí a přesnými rozměry této soustavy se liší jednotlivé postupy. Vždy se ale jedná o soustavu ve tvaru sedlového bodu

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

Tu řešíme následovně. Vynásobíme první řádek maticí $B^T A^{-1}$ zleva a odečteme od něj druhý. Dostaneme

$$B^T A^{-1} B \boldsymbol{\gamma} = B^T A^{-1} \mathbf{g}. \quad (3.73)$$

Z této soustavy pak získáme novou hodnotu tlaku. Matice $B^T A^{-1} B$ se nazývá Schurův doplněk. Je-li matice A pozitivně definitní a má-li matice B plnou hodnotu ($\text{Ker } B = \{0\}$), jedná se o pozitivně definitní matici. Proto můžeme použít obvyklé metody pro vyřešení nové hodnoty tlaku z této soustavy.

Tímto postupem opravíme hodnoty tlaků ve všech uzlech sítě. Rozlišujeme dvě verze, jak je znázorněno na obrázku (3.5):

- uzlová – aktualizaci hodnoty tlaku v jednom vrcholu vypočteme z lokální soustavy rovnic, která se skládá ze všech sousedů tohoto vrcholu a zvoleného vrcholu. Od toho vrcholu vybereme všechny prvky do lokální matice, u sousedních vrcholů jen prvky odpovídající rychlostem v těchto bodech. Bohužel na obecně nestrukturované síti se jedná o soustavu s dopředu neznámými rozměry. Výhodou ale je, že ji potřebujeme vyřešit jenom vůči jedné neznámé – tlaku ve zvoleném vrcholu. Označíme A_{lok}, B_{lok} příslušné prvky matice A, B , rez_{lok}^u, rez_{lok}^p lokální rezidua odpovídající zvoleným stupňům volnosti a opravy ve stupních volnosti $\Delta\beta_{lok}, \Delta\gamma_{lok}$, jak je rozepsáno dále v rovnici (3.74).
- prvková – opravu hodnot tlaku provádíme po celých konečných prvcích, tj. na každém trojúhelníku. Taková soustava má pak pevné rozměry 11×11 , kde jsou 3 neznámé pro tlak a 2×4 pro rychlost, tj. všechny neznámé na jednom crossgrid elementu. Tato soustava má též tvar sedlového bodu. Po úpravě (3.73) je třeba vyřešit ale jen soustavu 3×3 pro neznámé hodnoty tlaku, což je velmi snadné na implementaci. Tento přístup je však vhodný pro odlišnou volbu prvků, tzv. Rannacher-Turkovy prvky, viz [22], proto jeho implementace nekonvergovala při volbě crossgrid prvků.

V obou zmíněných případech řešíme soustavu rovnic pro lokální stupně volnosti $\beta_{lok}, \gamma_{lok}$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix} A_{lok} & B_{lok} \\ B_{lok}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\beta_{lok} \\ \Delta\gamma_{lok} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rez_{lok}^u \\ rez_{lok}^p \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Tyto dvě popsané metody lze ještě dále modifikovat tak, že místo lokální matice budeme řešit pouze její aproximaci, například z matice A_{lok} budeme uvažovat jen diagonální prvky. Získané řešení lokální soustavy sice nebude tak přesné, ale uspořádaný výpočetní čas nám dovolí provést více iterací. Získané řešení $\Delta\gamma_{lok}$ pak přičteme k lokálním uzlům volnosti

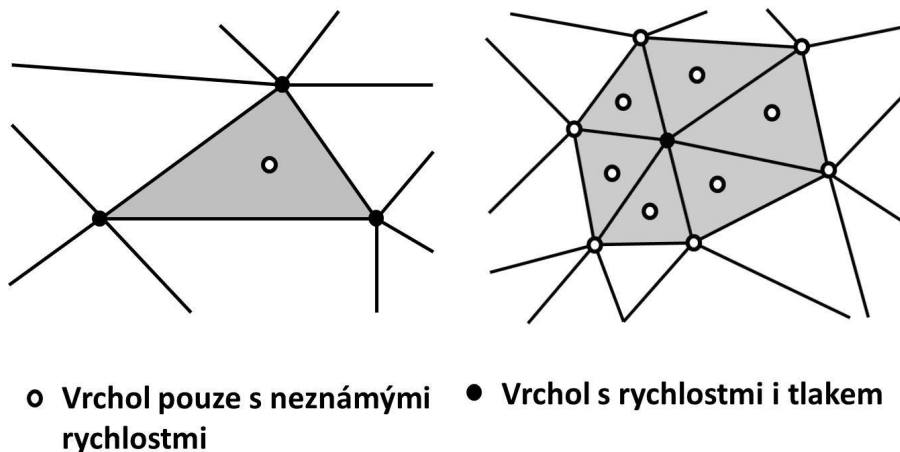
$$\gamma_{lok} = \gamma_{lok} + \omega_p \Delta\gamma_{lok}, \quad (3.75)$$

kde ω_p představuje relaxační koeficient.

Po opravě tlaku ve všech vrcholech je třeba i aktualizovat hodnoty neznámých rychlostí. Pro tento účel uvažujeme původní soustavu (3.72) ve tvaru

$$A \Delta\beta = \mathbf{g} - B\gamma, \quad (3.76)$$

kde tlak γ již známe. Protože se jedná o soustavu s pozitivně definitní maticí, řešíme ji pomocí Gaussovy-Seidlovy nebo SOR metody, viz např [24] nebo [23]. Získanou



Obrázek 3.5: Vyšrafovaná oblast zobrazuje prvky, z jejichž proměnných se skládá lokální matice. Vlevo je znázorněna prvková varianta a vpravo uzlová varianta Vankova zhlazovače.

opravu řešení rychlosti pak opět přičteme k původní hodnotě

$$\beta = \beta + \omega_v \Delta \beta, \quad (3.77)$$

kde ω_v je opět relaxační koeficient.

Vankův zhlazovač se většinou nepoužívá jako přímý řešič, ale v rámci multigridu. V této práci byl použit pouze na Stokesův problém, a to v implementaci plné prvkové a aproximační uzlové variantě. Prvně jmenovaná varianta nekonvergovala, konvergence druhé silně závisela na volbě relaxačního parametru ω_p .

Přímý řešič – UMFPACK

Jako alternativu lze použít volně dostupnou matematickou knihovnu UMFPACK, [5]. Ta je založena na LU rozkladu matice, nejprve symbolickém a následně numerickém. V dalším kroku je vypočteno přímé řešení. Pro rychlý výpočet přímého řešení je doporučeno používat správně přilinkovanou, volně dostupnou matematickou knihovnu BLAS. Ta je velmi výkonná v řešení lineárních soustav.

Ačkoliv v programu pracujeme s jiným formátem matice, UMFPACK obsahuje funkce na převedení seznamu hodnot prvků matice do CCF (Compressed Column Format) formátu, který je pracovní formát UMFPACKU. Následné vyřešení soustavy bylo pro naše jednoduché příklady řádově rychlejší než implementace Vankova zhlazovače, nicméně užití přímých řešičů je omezeno pamětí. Paměťová náročnost přímých řešičů je o něco menší než $O(n^2)$ a výpočetní složitost řádově $O(n^3)$, což pro reálné proudění nebo rozšíření úlohy do 3D znamená omezenou použitelnost.

3.3 Celkový algoritmus řešení sdruženého problému

Nyní, když již máme připravené řešiče obou dvou oblastí sdruženého problému, popíšeme, jak je skloubit v jeden algoritmus. Obecně existuje více přístupů, my zde uvádíme dva základní.

- Semi-implicitní schéma: Vydeme ze známých hodnot $\mathbf{v}^0, p^0, \mathbf{u}_0, \mathbf{q}_0^s, A_{t_0}, \Omega_{t_0}^f$. Pak pro $n = 0, 1, \dots$ provádíme
 1. Na základě odvozeného schématu pro problém deformace (3.33) získáme nové řešení \mathbf{u}_{n+1} na $n+1$ -ní časové vrstvě, kde \mathbf{q}_{n+1}^s extrapolujeme z \mathbf{q}_n^s .
 2. Nyní máme stanovenou novou polohu rozhraní v čase $\Gamma_{W_{t_{n+1}}}$ ze známé deformace \mathbf{u}_{n+1} vztahem (2.48), a tím i tvar výpočetní oblasti $\Omega_{t_{n+1}}^f$. Z definice (2.37) můžeme určit i ALE zobrazení $A_{t_{n+1}}$, a na jeho základě dopočítat rychlost deformace oblasti \mathbf{w}_D^{n+1} aproximované jako $\hat{\mathbf{w}}_D^{n+1}(X) \approx \frac{A_{t_{n+1}}(X) - A_{t_n}(X)}{\Delta t}$, tedy $\mathbf{w}_D^{n+1}(x) = \hat{\mathbf{w}}_D^{n+1}(A_t^{-1}(x))$ pro každý bod $x \in \Omega_{t_{n+1}}^f$.
 3. Pak provedeme výpočet problému proudění na výpočetní oblasti $\Omega_{t_{n+1}}^f$ z rovnic (3.68). Získáme tak řešení pro rychlost a tlak na $n+1$ -ní časové vrstvě $\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}$.
 4. Ze známého řešení $\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}$ dopočítáme působení aerodynamických sil na rozhraní a tedy i hodnoty Neumannovy okrajové podmínky \mathbf{q}_{n+1}^s ze vztahu (2.50) v čase t_{n+1} . Takto máme plně zadán problém lineární elasticity.
 5. Položíme $n := n + 1$ a jdeme opět na první krok.
- Plně implicitní schéma – schéma je velmi podobné, liší se pouze čtvrtým a pátým krokem
 4. Jako předtím ze známých hodnot rychlosti a tlaku $\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1}$ dopočítáme působení aerodynamických sil na rozhraní ze vztahu (2.50), které ale označíme $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^s$.
 5. Ověříme, jestli je splněna podmínka $|\mathbf{q}_{n+1}^s - \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^s| < \epsilon$, kde ϵ je vhodně zvolená konstanta.
 - Pokud ano, položíme $n := n + 1$ a pokračujeme prvním krokem.
 - Pokud ne, položíme $\mathbf{q}_{n+1}^s := \tilde{\mathbf{q}}_{n+1}^s$ a pokračujeme prvním krokem, tj. iterujeme ve vnitřním cyklu, dokud není tato podmínka splněna.

Výhodou semi-implicitního schématu je větší rychlost výpočtu a jednodušší implementace, naopak nevýhodou je podmíněná stabilita a dostatečná přesnost řešení jen pro relativně malé rychlosti a deformace. Pro vyšší rychlosti je nutno implementovat plně implicitní schéma.

Kapitola 4

Výsledky numerické simulace

Tato kapitola obsahuje tři části. Nejprve představíme obecné aspekty provedené implementace. V druhé části pak popíšeme dvě metody, pomocí kterých lze získat základní charakteristické frekvence kmitání elastických těles. Na závěr jsou představeny výsledky numerických experimentů.

4.1 Technické aspekty implementace

Program řešící odvozená numerická schémata je napsán v programovacím jazyku C. Vytvořený program umí načíst síť ze souboru ve formátu *.msh*, vyplnit řádkou maticí tuhosti a vektor pravé strany, vzniklou soustavu vyřešit a řešení uložit do souboru ve formátu *.vtk*. V následujících odstavcích popíšeme jeho základní celky, podrobnější popis pak lze nalézt v [23].

4.1.1 Triangulace

Triangulaci oblasti Ω vygenerujeme v programu **Gmsh**. Tento program je volně dostupný, viz [8], má interaktivní prostředí, podporuje vytváření nestrukturovaných sítí ve 2D i ve 3D a obsahuje zabudovaný CAD engine pro vytváření složitějších geometrických útvarů a těles.

Popis modelované oblasti, resp. tělesa načteme ze souboru ve formátu *.geo*. Výhodou je možnost označit všechny možné elementů sítě pomocí speciálního indexu pro odlišení různých okrajových podmínek nebo parametrů oblastí. Program vygeneruje triangulaci s požadovanou velikostí sítě a uloží ji ve formátu *.msh*.

4.1.2 Implementovaný program

Vyvinutý program nejprve načte síť ze vstupního souboru *.msh* a uloží potřebná data do připravených struktur. Pak naalokuje potřebné množství paměti pro sestavení řídkých matic. Jako pracovní formát řídkých matic program používá maticový

seznam hodnot, někdy nazývaný jako *Triplet*. Ten dovoluje rychlý výpočet všech příspěvků do globální matice v jednom průchodu přes všechny trojúhelníky. Toto provádí procedura `FILLtriplet()`, která je jádrem programu. Ta spočítá veškeré příspěvky řídkých matic a vyplní vektor pravé strany. Při výpočtu používá k vyčíslení integrálů numerickou integraci. Výsledkem této procedury je seznam příspěvků od jednotlivých stupňů volnosti, který musí být následně setříděn. Tento seznam setřídíme pomocí algoritmu *Quicksort* a sečteme příspěvky se stejnými indexy do jednoho. Pro potřeby modální analýzy jsou vypsány řídké matice popisující elastické těleso do textového souboru. Ten je pak načten a zpracován matematickým programem Matlab, viz [12].

Poté vyřešíme takto sestavený systém rovnic. Pro elastické těleso používáme Gaussovu-Seidelovu iterační metodu, pro nestlačitelné proudění pak vybíráme mezi implementovaným Vankovým zhlazovačem a řešičem z matematické knihovny *UMFPACK*. Pokud řešíme stacionární případ, vypíšeme získané řešení do výstupního souboru ve formátu *.vtk* pro další zobrazení, dealokujeme všechny dynamické datové struktury a skončíme. Je-li implementován nestacionární případ, po vyřešení soustavy a výpisu řešení do *vtk* souboru nebo textového souboru pokračujeme na novou časovou hladinu. Tento algoritmus opakujeme, dokud není dosaženo konečného času T .

4.1.3 Zobrazení výsledků

K zobrazení výsledků používáme program *Paraview* a formát dat *.vtk*. Jedná se o freeware program pro vědecké a interaktivní vizualizace, viz [18], kde lze nalézt i potřebnou dokumentaci. Byl navržen pro paralelní práci se soubory na velkých superpočítačích, ale lze ho spustit i na osobních počítačích. Jeho výhodou je, že dokáže pracovat s velmi velkými objemy dat a vytvářet animace. Jeho zobrazovací režim poskytuje nastavení mnoha detailů.

4.2 Určení charakteristických frekvencí kmitajících těles

Ze sestavených rovnic elastického tělesa (3.11) lze pomocí modální analýzy získat základní charakteristické frekvence kmitání. Tyto charakteristické frekvence představují pro technickou praxi velmi důležité hodnoty, které udávají, při jakých frekvencích dochází k rezonanci kmitání, a tedy které frekvence jsou vhodné pro zamýšlené vybuzení kmitání, resp. které frekvence jsou nebezpečné při nezamýšleném buzení jako například u stavebních konstrukcí. Pro ověření získaných výsledků jsme implementovali i spektrální analýzu signálu, která využívá Fourierovu transformaci.

4.2.1 Modální analýza

V předchozí části práce jsme odvodili a implementovali pro rovnici (2.53a) prostorovou diskretizaci pomocí metody konečných prvků. Nyní spočítáme aproximaci

vlastní frekvence kmitání elastického tělesa. Vyjdeme z rovnice (3.11) popisující kmitající soustavu bez tlumení a bez buzení

$$\mathbb{M}\mathbf{u}'' + \mathbb{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

kde \mathbb{M} je matice hmotnosti a \mathbb{K} je matice tuhosti, které jsou dány vzorci (3.12).

Obecné řešení této soustavy je dáno superpozicí kmitání s jednotlivými frekvencemi

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^N e^{i\omega_j t} \mathbf{u}_j, \quad (4.2)$$

kde \mathbf{u}_j jsou v tomto případě jednotlivá řešení.

Nyní budeme předpokládat řešení ve $\mathbf{u} = e^{i\omega_j t} \mathbf{u}_j$, tj. soustava bude kmitat pouze s jedinou frekvencí ω_j . Toto řešení dosadíme do rovnice (4.1)

$$e^{i\omega_j t} (-\omega_j^2 \mathbb{M}\mathbf{u}_j + \mathbb{K}\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

odkud plyne

$$(\mathbb{K} - \omega_j^2 \mathbb{M})\mathbf{u}_j = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Tato rovnice představuje tzv. problém zobecněných vlastních čísel. Je to homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé složky vektoru \mathbf{u}_j . Tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, je-li její determinant nulový

$$\det(\mathbb{K} - \omega_j^2 \mathbb{M}) = 0. \quad (4.5)$$

Rovnici (4.5) se říká charakteristická rovnice soustavy (4.1), její kořeny nazýváme zobecněná vlastní čísla $\lambda_j = \omega_j^2$, která jsou nezáporná díky pozitivní definitnosti a symetrii matic \mathbb{K} a \mathbb{M} . Pro ω_j platí $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$. Čísla ω_j nazýváme vlastní frekvence a je jich stejně jako počet stupňů volnosti soustavy, tedy N . Jejich dosazením do soustavy rovnic (4.4) získáme singulární soustavu, jejichž řešení jsou vlastní vektory \mathbf{u}_j . Jednotlivé vlastní vektory reprezentují vlastní kmity tělesa, ve fyzice se jim říká módy tělesa.

Z fyzikálního hlediska je nejdůležitější určení nejnižší frekvence daného tělesa, protože vyšší frekvence jsou jejími násobky. Frekvence ve fyzikálním rozměru Hz dostáváme jako

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}. \quad (4.6)$$

Při implementaci pro řešení problému nejmenších vlastních čísel použijeme program Matlab. Do něj exportujeme z našeho programu obě řídké matice a najdeme nejmenší vlastní čísla tohoto problému pomocí funkce `eigs()`.

4.2.2 Fourierova transformace

V následující části bude užitečné zobrazit spektrální analýzu zvoleného signálu, např. výchylky určitého bodu v čase. K tomu používáme diskrétní Fourierovu transformaci, což je zobrazení mezi dvěma obecně komplexními posloupnostmi $\{u_j\}_{j=0}^N$ a $\{y_k\}_{k=0}^N$ dané vztahem

$$y_k = \sum_{j=0}^N u_j e^{-\frac{2\pi}{N+1}ijk}, \quad (4.7)$$

kde i je komplexní jednotka. Fourierovu transformaci lze chápat jako rozvoj posloupnosti do báze tvořené funkcemi $\sin(k\frac{2\pi}{N+1}x_j)$ a $\cos(k\frac{2\pi}{N+1}x_j)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Tedy tato transformace převádí výchylky na frekvence, kde největší složky nového vektoru určují dominantní zastoupení jednotlivých frekvencí. Takto můžeme určit nejvýznamější frekvence kmitání dané koeficienty u_j .

Při implementaci opět využijeme program Matlab. Do něj načteme vyexportovaný textový soubor z hlavního programu s diskrétními hodnotami časového výchylek předem zvolených bodů elastického tělesa. Na posloupnost těchto výchylek pak aplikujeme funkci `fft()` a z výsledku odečteme dominantní frekvence kmitání. Ty pak můžeme porovnat s výsledky získanými modální analýzou.

Poznámka. Abychom mohli rozpoznat danou frekvenci pomocí Fourierovy transformace, doporučuje se volit časový krok během řešení časové úlohy asi $30 - 40x$ menší než je délka jedné periody očekávané frekvence.

Poznámka. Vyšší přesnost Fourierovy transformace dosahujeme pro delší časové intervaly. Pro účely naší práce je vhodná přesnost minimálně 10 Hz.

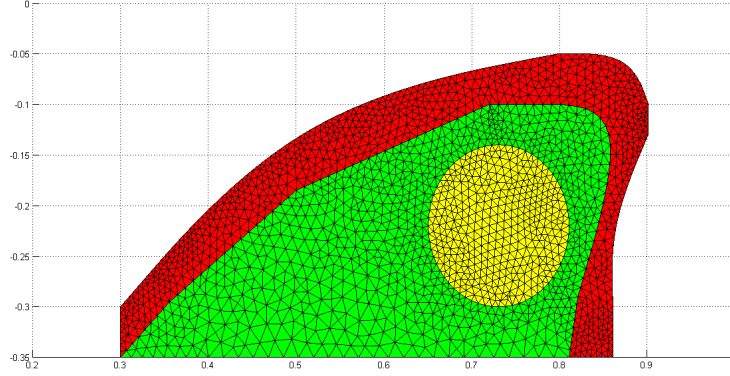
4.3 Výsledky numerických experimentů

Tato část obsahuje výsledky implementovaného programu použitého na modelové příklady elastického tělesa a proudění nestlačitelné tekutiny.

4.3.1 Elastické těleso

Jak jsme již uvedli v úvodu, jako demostrační příklad elastického tělesa v této práci používáme model lidské hlasivky. Ten je popsán rovnicemi (2.53a), geometrická podoba modelu je znázorněna na obrázku (4.1).

V řešení případě byly okrajové podmínky byly zvoleny tak, že na hraně určené souřadnicí $y = -0,35$ (na obr. (4.1) ležící na měřítku osy x) a na krátké hraně rovnoběžné s osou y , tj. mající souřadnici $x = 0,3$, jsou zadané nulové Dirichletovy podmínky. Na zbývající části hranice jsou předepsány nulové Neumannovy podmínky. Parametry úlohy jsme volili následovně: Pro červenou oblast jsme zvolili Youngův modul pružnosti $E = 100000$ Pa, pro zelenou $E = 12000$ Pa, pro žlutou $E = 8000$



Obrázek 4.1: Model hlasivky. Barvy jsou použity pro odlišení oblastí s rozdílnými parametry. Rozměry jsou v [cm].

Pa. Poissonovu konstantu $\sigma = 0,4$ a hustotu $\rho = 1040 \text{ kg/m}^3$ jsme uvažovali stejnou pro celý model hlasivky.

Na obr. (4.2) jsou zobrazeny vlastní tvary modelu hlasivky získané pomocí modální analýzy. Ze zobecněných vlastních čísel získaných z modální analýzy dané vzorcem (4.4) jsme přeskálováním pomocí vztahu (4.6) získali deset nejnižších vlastních frekvencí. Tyto frekvence jsme porovnali s výsledky práce [11], jak je znázorněno v tabulce 4.1. Výsledné frekvence v této tabulce jsou trochu odlišné, což může být způsobeno volbou mírně odlišných parametrů a jinou triangulací oblasti. Řádově si ale frekvence odpovídají.

Dále jsme modelovali časový vývoj kmitání hlasivky pro zadané počáteční podmínky ve tvaru

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} -(0,35 - X_i)^2/5 \\ (-0,3 - Y_i)^2/10 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

kde $[X_i, Y_i]$ jsou souřadnice i -tého vrcholu triangulace ležící v oblasti Ω^s a speciálně je tato počáteční podmínka rovna nule na Dirichletově části hranice Γ_{Dir}^s . Takto zadanou úlohu jsme řešili Newmarkovou metodou s parametry $\beta = 0,25$ a $\gamma = 0,5$. Dále jsme zvolili bod o souřadnicích $[0,656, -0,189]$, dále označovaný jako bod A . Pro něj jsme zaznamenávali výchylky s časovým krokem $1/500$ s. Na obr. (4.3) a (4.4) jsou zobrazeny jeho výchylky ve směry osy x , resp. osy y , a provedena Fourierova transformace. Na obr. (4.5) jsou pak výchylky bodu A v obou osách pro znázornění proloženy dominantní frekvencí. V tab. (4.2) je pak určeno prvních pět dominantních frekvencí ze spektrální analýzy výchylek bodu A (zobrazenými též na pravých částech obr. (4.3) a (4.4)). Porovnáním zjistíme, že tyto frekvence velmi dobře korespondují s frekvencemi získanými modální analýzou v tab. (4.1).



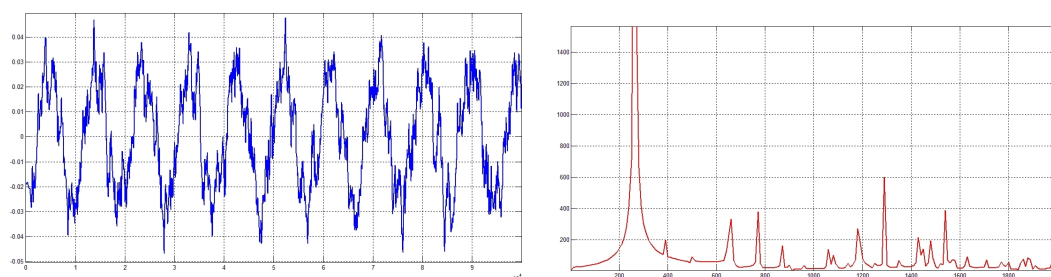
Obrázek 4.2: Prvních 8 módů kmitání hlasivky.

Frekvence [Hz]	Naše výsledky	Výsledky A. Kosíka
f_1	264, 1	192, 5
f_2	389, 9	337, 88
f_3	496, 9	366, 45
f_4	634, 8	507, 39
f_5	656, 5	538, 96
f_6	771, 2	674, 99
f_7	868, 8	675, 84
f_8	904, 1	680, 34
f_9	959, 6	762, 75
f_{10}	1057, 9	795, 25

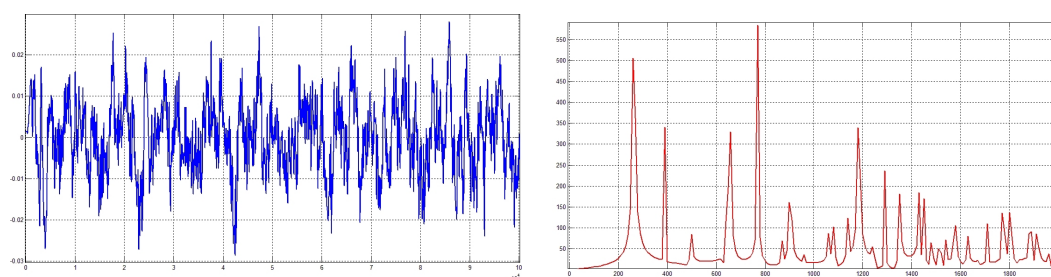
Tabulka 4.1: Srovnání nejnižších vlastních frekvencí kmitající hlasivky získané pomocí modální analýzy s prací A. Kosíka.

Frekvence [Hz]	x -ové výchylky	y -ové výchylky
f_1	260	770
f_2	1290	260
f_3	1540	390
f_4	660	1180
f_5	770	660

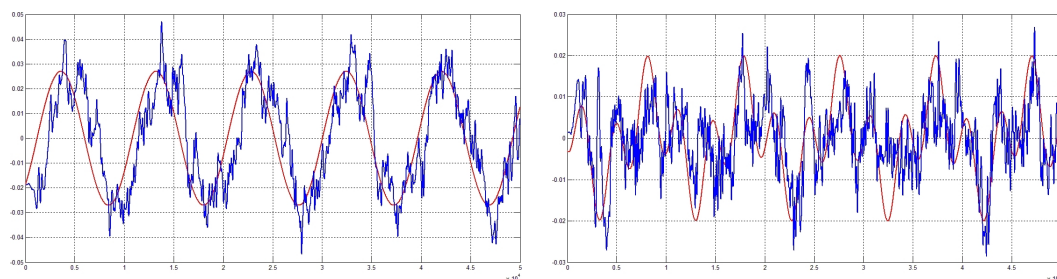
Tabulka 4.2: Vlastní frekvence získané pomocí spektrální analýzy výchylek zvoleného bodu hlasivky s přesností na desítky Hz. Seřazeno podle významnosti.



Obrázek 4.3: Vlevo jsou vyneseny výchylky ve směru osy x bodu A hlasivky, vpravo pak jeho Fourierova transformace.



Obrázek 4.4: Vlevo jsou vyneseny výchylky ve směru osy y bodu A hlasivky, vpravo pak jeho Fourierova transformace.



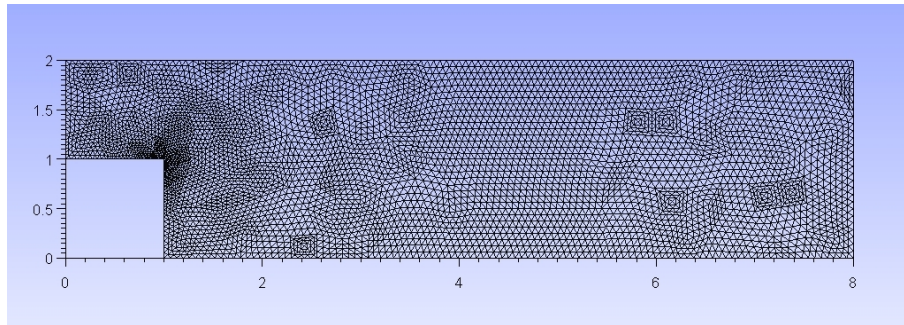
Obrázek 4.5: Porovnání výchylek a dominantní frekvence, vlevo pro výchylky bodu A ve směru x , vpravo ve směru y , kde je průběh výchylek proložen součtem dvou dominantních frekvencí.

4.3.2 Proudění nestlačitelné tekutiny

Vyvinutý program jsme vyzkoušeli na dvou modelech – proudění tekutiny v rozšiřujícím se potrubí a obtékání profilu hlasivky.

Proudění tekutiny v potrubí

Jako modelový případ proudění jsme vybrali proudění nestlačitelné tekutiny v potrubí, které je popsáno rovnicemi (2.54a) a (2.54b), kde je z důvodu neměnné výpočetní oblasti $\Omega_t^f = \Omega_0^f$ za ALE zobrazení dosazeno identické zobrazení a tedy $\mathbf{w}_D = \mathbf{0}$. Geometrie tohoto modelu je zobrazenou na obrázku (4.6).



Obrázek 4.6: Ukázka triangulace modelu trubky. Rozměry jsou v [m].

Pro stacionární i nestacionární případ jsme volili stejné okrajové podmínky. Na levé hranici zúžené trubky rovnoběžné s osou y a s x -ovou souřadnicí rovné nule byl předepsán vstupní parabolický profil proudění ve tvaru

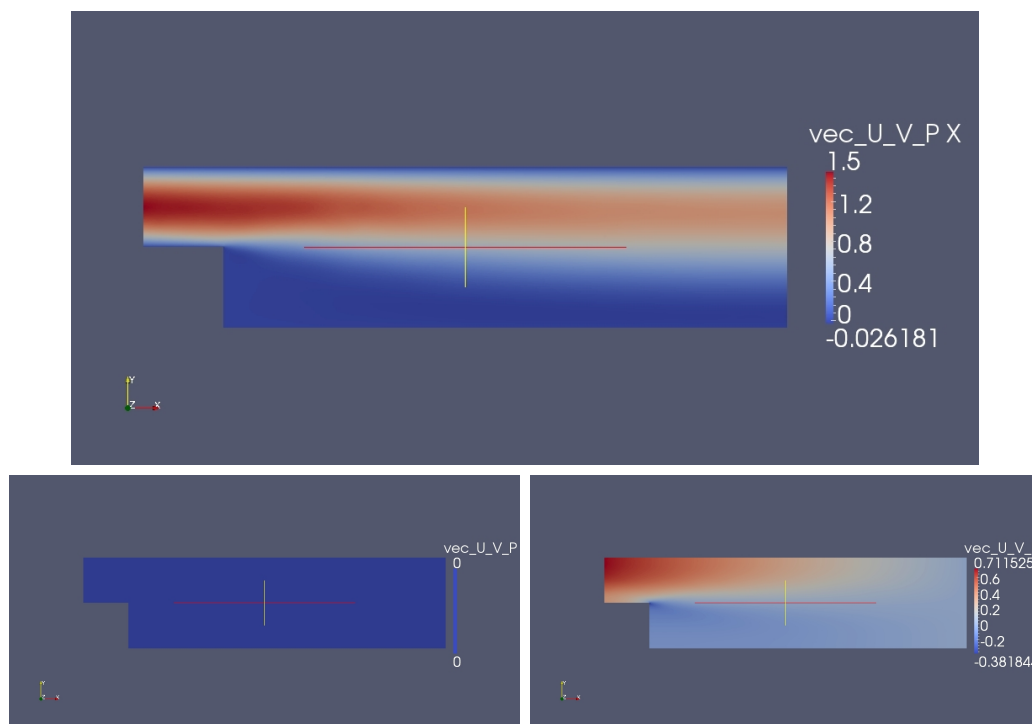
$$\mathbf{v}_{\text{Dir}} = \begin{pmatrix} -1.5(y-2)(y-1)/25 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Na pravé hranici rovnoběžné s osou y a x -ovou souřadnicí rovné osmi byla zadána do-nothing podmínka, viz (2.46), pomocí které modelujeme výstupní část proudění. Na zbylých částech hranice pak byly zvoleny nulové Dirichletovy podmínky. Koeficient viskozity jsme nastavili jako $\nu^f = 1\text{m}^2/\text{s}$.

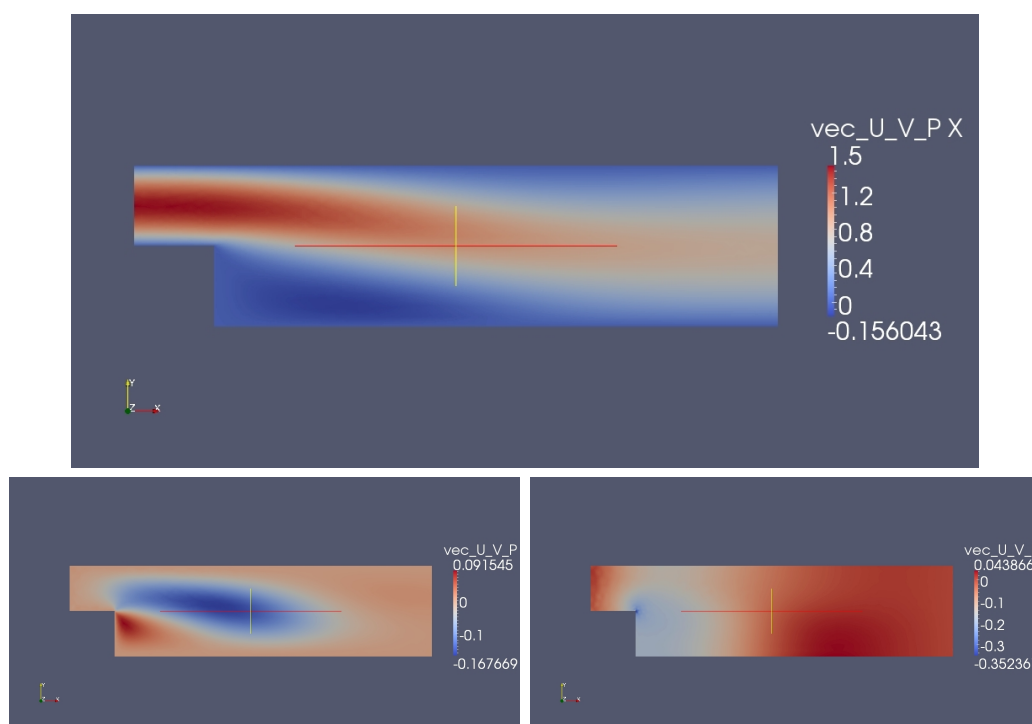
Na prvním obrázku (4.7) je zachyceno řešení stacionárního problému proudění Stokesovy úlohy, které jsme získali pomocí Vankova zhlazovače při volbě relaxačních parametrů $\omega_v = 0, 3$, $\omega_p = 0, 2$. Jak je z obrázku vidět, v tomto případě y -ová složka rychlosti nezkonvergovala.

Na druhém obrázku (4.8) je zobrazeno řešení stacionárního problému proudění Navierovy-Stokesovy úlohy, které jsme získali pomocí řešiče z knihovny UMFPACK.

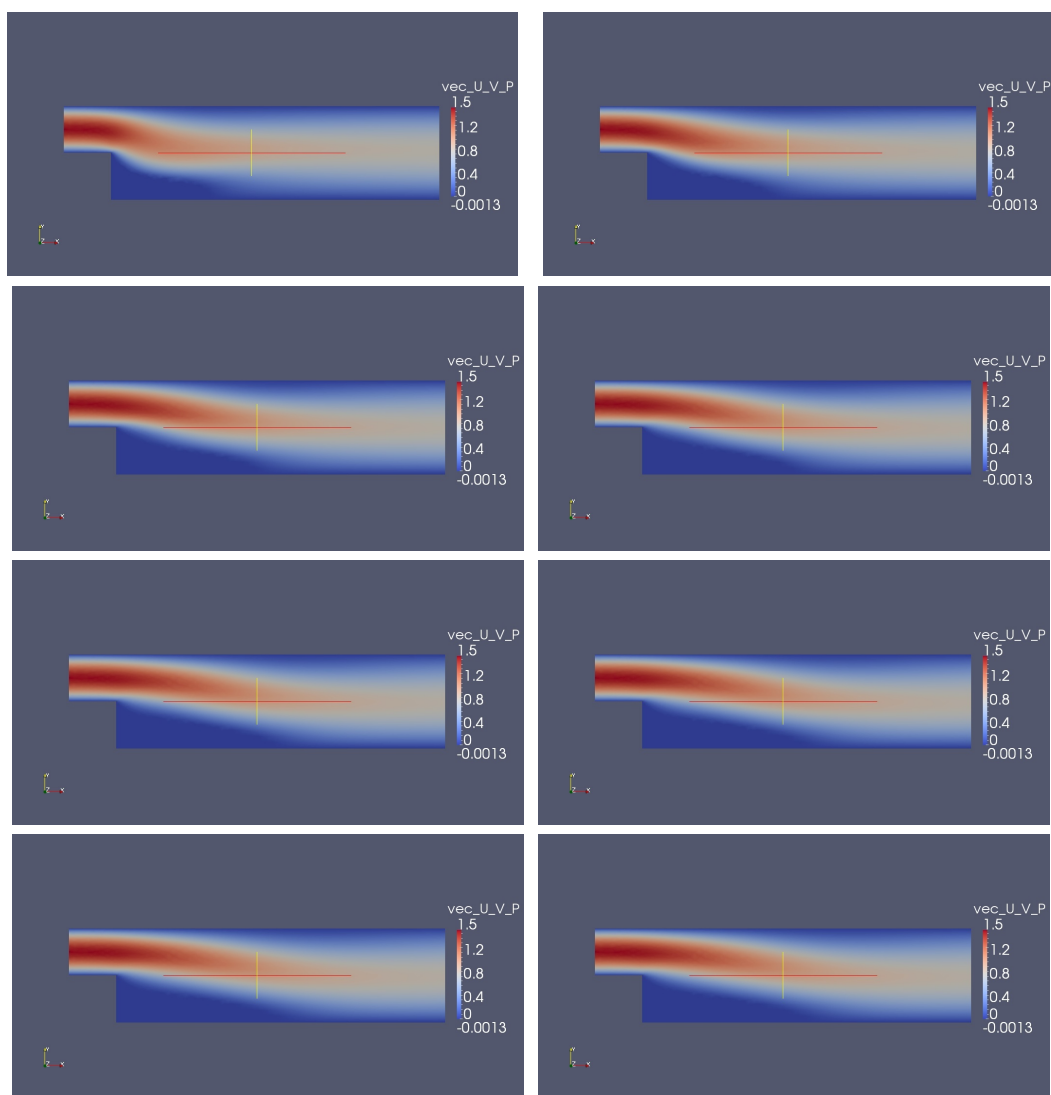
Při modelování nestacionárního proudění jsme použili nulové počáteční podmínky. Řešení tohoto problému je zobrazeno na obrázku (4.9).



Obrázek 4.7: Řešení Stokesova problému pro příklad proudění v trubce, rovnice vyřešeny pomocí Vankova zhlazovače. Nahoře je zobrazena x -ová složka rychlosti, dole vlevo y -ová složka rychlosti a vpravo hodnoty tlaku.



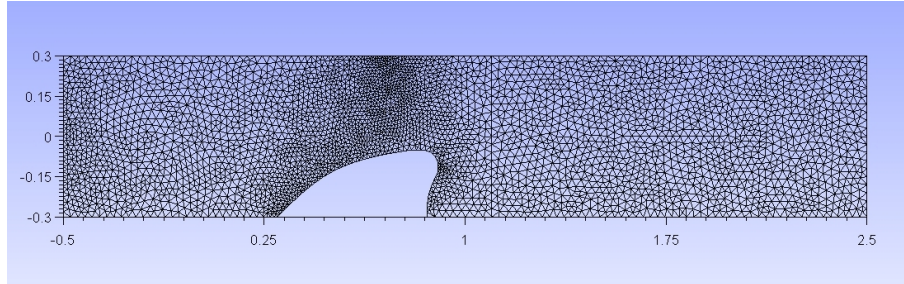
Obrázek 4.8: Řešení Navierových-Stokesových rovnic nestlačitelného proudění v trubce. Nahoře je zobrazena x -ová složka rychlosti, dole vlevo y -ová složka rychlosti a vpravo hodnoty tlaku.



Obrázek 4.9: Ukázka nestacionárního proudění v modelu rozšiřující se trubky, zobrazeny x -ové složky rychlosti. Obrázky jsou řazeny zleva doprava, časový krok $\Delta t = 0, 1s$.

Obtékání profilu hlasivky

Jedna z motivací naší práce byla simulace obtékání profilu hlasivky. Toto proudění je popsáno rovnicemi (2.54a) a (2.54b), kde je ALE zobrazení z důvodu neměnnosti výpočetní oblasti rovno identitě a tedy $\mathbf{w}_D = \mathbf{0}$. Geometrie tohoto modelu je zobrazenou na obrázku (4.10).



Obrázek 4.10: Ukázka triangulace oblasti Ω_0^f , ve které modelujeme obtékání lidské hlasivky. Rozměry jsou v [cm].

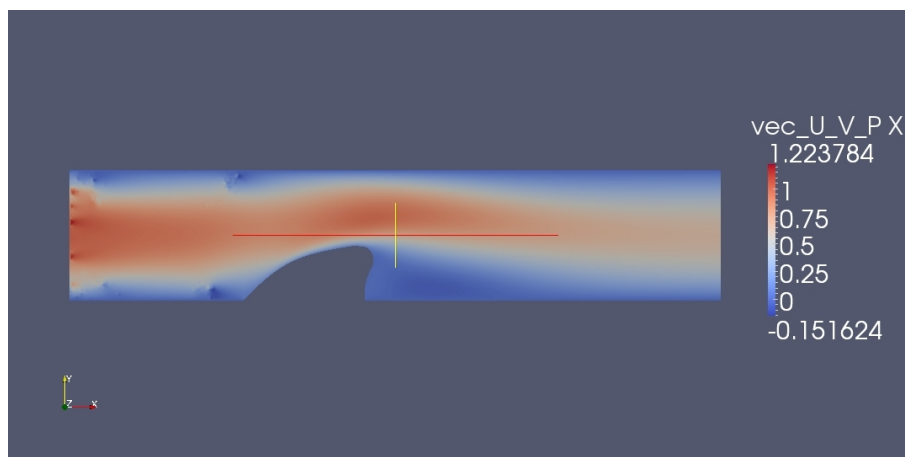
Pro stacionární i nestacionární proudění předepisujeme stejné okrajové podmínky. Na levé hranici oblasti Ω_0^f rovnoběžné s osou y a s x -ovou souřadnicí $x = -0,5$ bylo předepsáno vstupní proudění ve tvaru

$$\mathbf{v}_{\text{Dir}} = \begin{pmatrix} -0,25(y + 0,3)(y - 0,3)/2,25 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

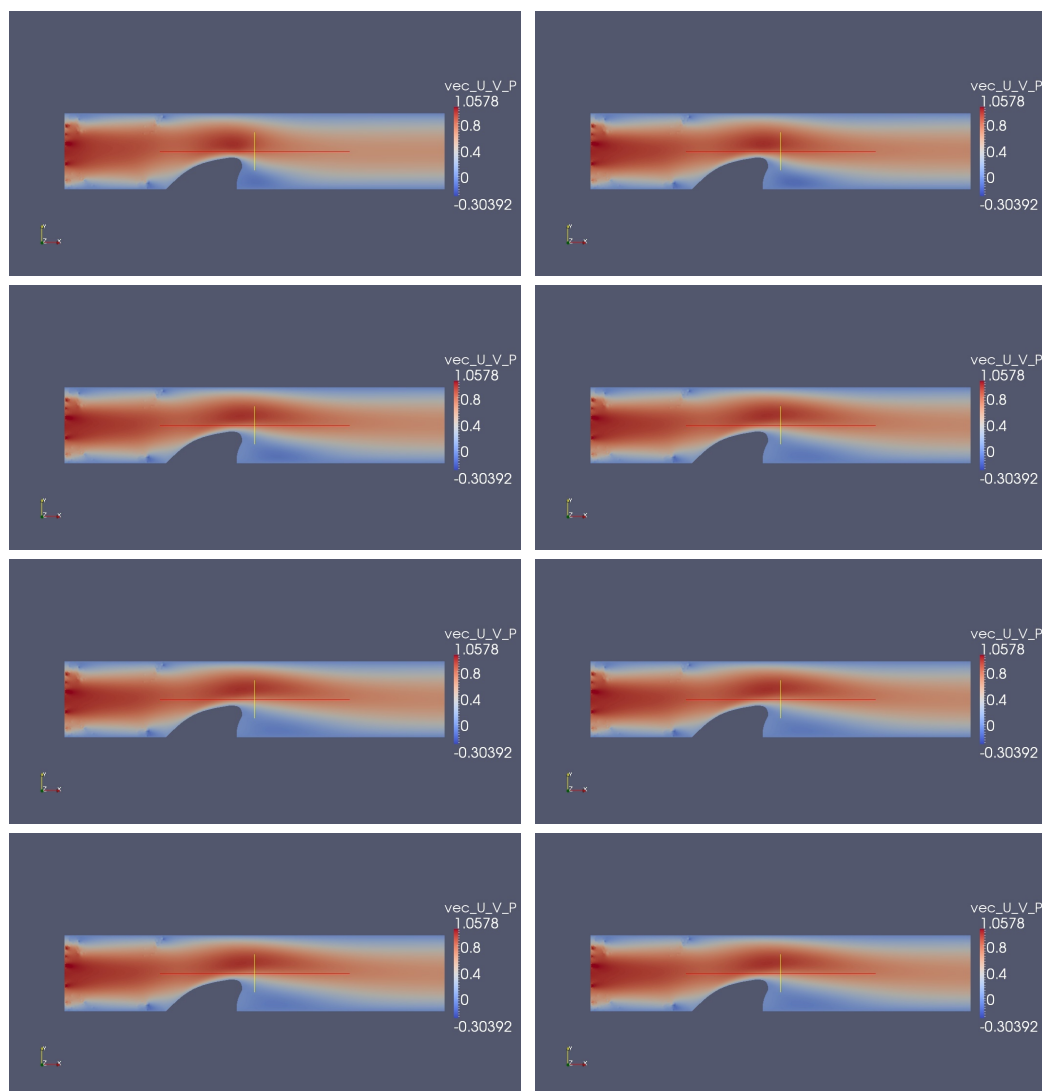
Na pravé hranici rovnoběžné s osou y a x -ovou souřadnicí $x = 2,5$ pak implementujeme do-nothing podmínku modelující výstupní část proudění, viz (2.46). Na zbylých částech hranice pak byly zvoleny nulové Dirichletovy podmínky. Koeficient viskozity jsme položili $\nu^f = 1\text{m}^2/\text{s}$.

Na prvním obrázku (4.11) je zachyceno řešení stacionárního problému proudění Navierovy-Stokesovy úlohy. Pro vyřešení vzniklé soustavy lineárních rovnic používáme řešič z knihovny UMFPACK.

Při modelování nestacionárního proudění jsme zadali nulové počáteční podmínky. Na obr. (4.12) je pak zachycen časový průběh tohoto proudění.



Obrázek 4.11: Ukázka stacionárního proudění nad profilem hlasivky, zobrazena x -ová složka rychlosti.



Obrázek 4.12: Ukázka časového vývoje obtékání modelu hlasivky, zobrazeny x -ové složky rychlosti. Obrázky jsou řazeny zleva doprava, časový krok $\Delta t = 0,15$ s.

Závěr

V této práci jsme se seznámili s problematikou proudění nestlačitelné tekutiny a její interakce s elastickým tělesem. Na základě studia literatury jsme tyto problémy matematicky popsali pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Speciálně Navierovy-Stokesovy rovnice jsme přeformulovali pomocí tzv. ALE metody, která nám dovoluje modelovat proudění na časově proměnné výpočetní oblasti.

Při odvozování numerického schématu jsme pro časovou diskretizaci rovnic elastického tělesa použili Newmarkovu metodu a pro případ proudění Eulerovu zpětnou metodu. V prostoru byly oba problémy diskretizovány pomocí metody konečných prvků, kde pro aproximaci proudění byl použit tzv. crossgrid lineární prvek, resp. lineární Lagrangeův prvek pro problém lineární elasticity. Crossgrid prvky splňují inf-sup podmínku, která nám zaručuje numerickou stabilitu. Dále je v této práci zmíněno několik způsobů linearizace obecně nelineárních Navierových-Stokesových rovnic. Uvedeny jsou i dvě metody, které řeší vzniklou soustavu lineárních rovnic ve tvaru sedlového bodu. Na konci třetí kapitoly je popsán algoritmus, jak řešit sdružený problém vzájemné interakce.

Následně jsme implementovali program řešící dynamický problém deformace elastického tělesa, stacionárního proudění nestlačitelné tekutiny i jeho nestacionární verzi. Na propojení obou oblastí pracujeme. Implementované metody jsme ověřili na několika modelových příkladech. I když byly řešeny relativně jednoduché příklady, je provedená implementace zcela obecná pro řešení jak kmitání rovinných úloh, tak i pro proudění nestlačitelné tekutiny. Proto ji lze aplikovat v celé řadě nejen technických problémů.

Seznam použitých zdrojů

- [1] BLANK, J., EXNER, P., HAVLÍČEK, M. *Lineární operátory v kvantové fyzice*. Praha : Karolinum, 1993.
- [2] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2000.
- [3] KUBA, F. *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. Praha : SNTL, 1977.
- [4] CIARLET, P., G. *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam : Elsevier North-Holland Pub. Co., 1978.
- [5] DAVIS, T. *UMFPACK* [matematická knihovna]. Verze 5.6.2. University of Florida, USA. [citováno 2014-3-12] Dostupné na: <<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/>>.
- [6] ECK, CH., GARCKE, H., KNABNER, P. *Mathematische Modellierung*. Berlin : Springer, 2011.
- [7] FEISTAUER, M. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Harlow : Logman Scientific & Technical, 1993.
- [8] GEUZAIN, CH., REMACLE, J.-F. *Gmsh* [počítačový program]. Verze 2.8.4. Belgie, 2014 [citováno 2014-2-12]. Dostupné na: <<http://geuz.org/gmsh/>>.
- [9] GIRAULT, V., RAVIART, P., A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Berlin : Springer, 1986.
- [10] JARNÍK, V. *Integrální počet II*. Praha : Academia, 1984.
- [11] KOSÍK, A. *Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa*. Diplomová práce, MFF UK, 2010. Dostupná v archivu MFF UK.
- [12] MATHWORKS *Matlab* [počítačový program]. Verze R2012b. USA, Natick, MA, 2012. Dostupné pro studenty a zaměstnance ČVUT na: <<https://download.cvut.cz/>>.
- [13] MERTA, M. *Newmarkova metoda pro numerické řešení počátečních problémů 2. řádu*. Bakalářská práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009. [citováno 2014-1-17] Dostupné na: <<http://am.vsb.cz/theses/bakalari/2009/pdfs/mer126.pdf>>.

- [14] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. Praha : SNTL, 1983.
- [15] NOMURA, T., HUGHES, T. J. R. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95:115–138, 1992.
- [16] QUARTERONI, A., VALLI, A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Berlin : Springer, 1999.
- [17] REKTORYS, K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. Praha : SNTL, 1974.
- [18] SANDIA NATIONAL LABORATORY *ParaView* [počítačový program]. Verze 4.1. USA, Los Alamos, 2011 [citováno 2014-3-21]. Dostupné na: <<http://www.paraview.org/download/>>.
- [19] SVÁČEK, P., FEISTAUER, M. *Metoda konečných prvků*. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2006.
- [20] ŠŤOVÍČEK, P. *Metody matematické fyziky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004.
- [21] TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations. Theory and numerical analysis*. Amsterdam : North-Holland, 1984.
- [22] TUREK, S. *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems*. Berlin : Springer, 1999.
- [23] VALÁŠEK, J. *Numerické řešení deformace pružného tělesa metodou konečných prvků*. Bakalářská práce, ČVUT FJFI, 2012. Dostupné v archivu KM FJFI ČVUT.
- [24] VITÁSEK, E. *Numerické metody*. Praha : SNTL, 1987.

Příloha

Na přiloženém DVD je text diplomové práce a text abstraktu. V adresáři Program jsou zdrojové kódy a skripty vytvořených programů roztríděné do odpovídajících složek. Dále podadresáře adresáře Program obsahují vygenerované triangulace použité při numerických experimentech a některé výsledky simulací ve formátu *vtk*.