Quadratic functions, inequalities

Quadratic function $y = ax^2 + bx + c.$

Domain and range of a function

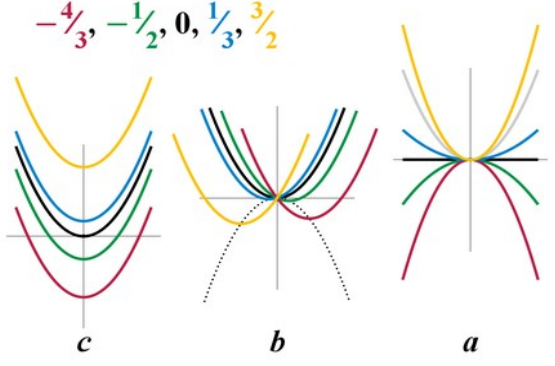
Dependence on coefficients a, b and c

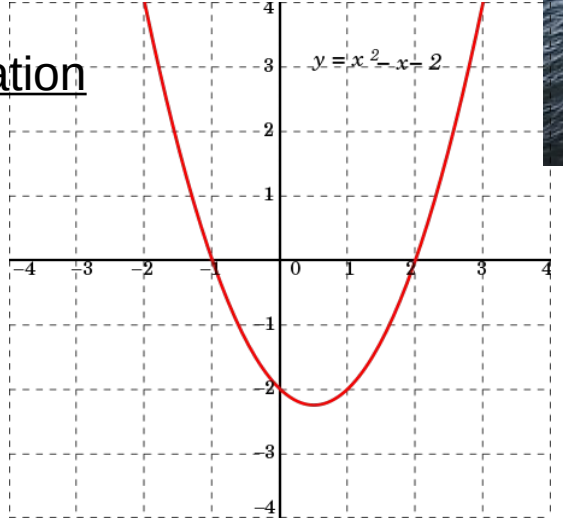
Graphs of a quadratic function

Real solutions of quadratic equation



$y = \frac{1}{2}at^2 + v_y t + h$



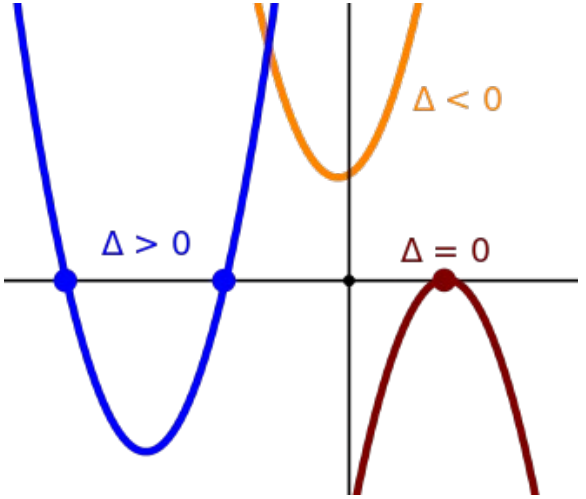


Solution of quadratic equation

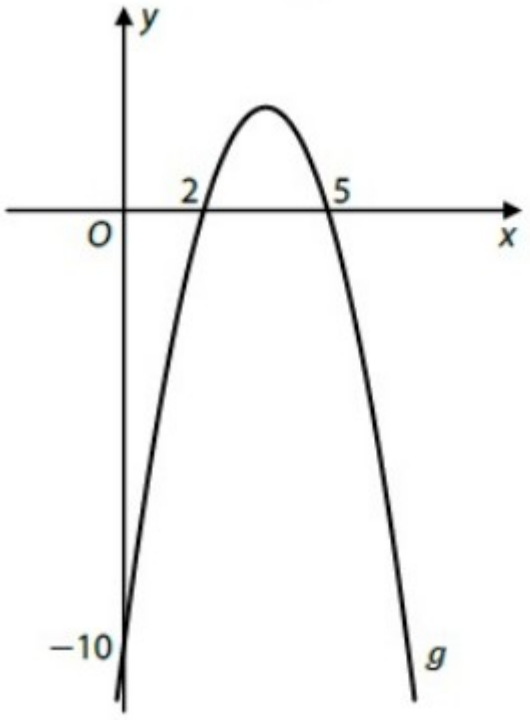
$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$



Ex9: Which formula describes the graph of quadratic function g?



A) $y = x^2 + 7x - 10$

B) $y = -x^2 + 7x + 10$

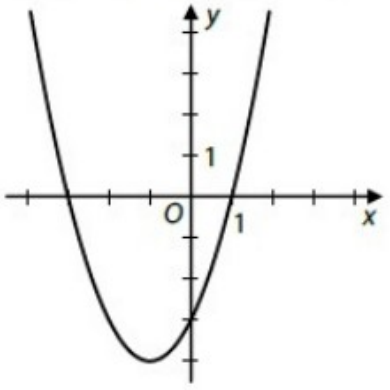
C) $y = -(x + 2)(x + 5)$

D) $y = (x - 2)(x + 5)$

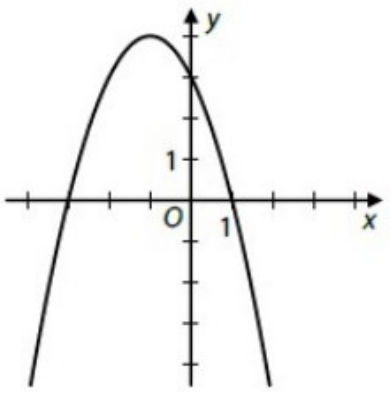
E) $y = (x - 2)(5 - x)$

Ex10: Connect formulas and graphs.

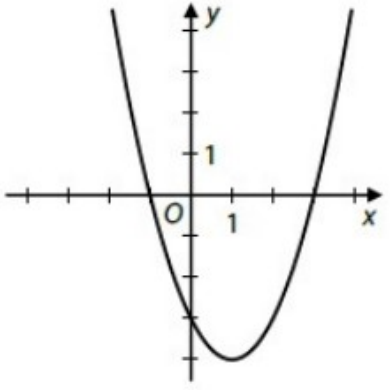
25.1



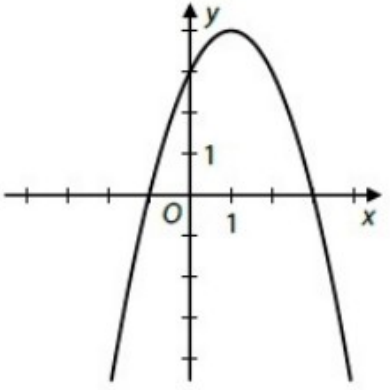
25.2



25.3



25.4



A) $y = (x-3)(x+1)$

B) $y = (x-3)(x-1)$

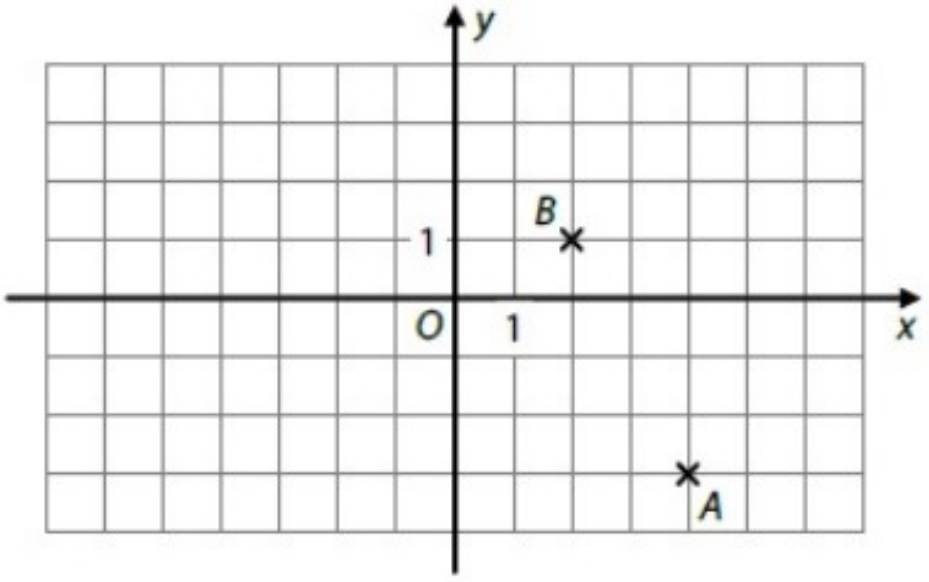
C) $y = (3-x)(x+1)$

D) $y = (x+3)(x+1)$

E) $y = (x+3)(x-1)$

F) $y = (x+3)(1-x)$

Ex11: Find the parabola with the top at point A and containing point B.



Describe it by one formula:

A) $y = -2x + 5$

B) $y = x^2 - 8x + 13$

C) $y = -x^2 + 4x - 3$

D) $y = \frac{x-1}{3-x}$

E) $y = \frac{3x-9}{x-5}$

14 Find roots:

a) $x^2 - 5x + 6$
b) $x^2 + 7x + 10$
c) $x^2 + 2x - 8$
d) $x^2 + 10x - 11$
e) $x^2 + x - 2$
f) $x^2 - 11x + 30$
g) $x^2 - 10x + 25$
h) $x^2 + 4x + 4$
i) $x^2 - 6x + 9$
j) $4x^2 + 4x + 1$
k) $16x^2 - 25$
l) $15x^2 - 30x$
m) $2x^2 + x - 1$
n) $3x^2 - 17x + 10$
o) $-x^2 + 7x + 8$
p) $-2x^2 + 11x - 15$
q) $x^2 + 4$
r) $x^2 + 4x + 5$

15 Určete maximum (resp. minimum) kvadratického trojčlenu (resp. dvojčlenu) pomocí úpravy:

a) $x^2 + 2x + 6$
b) $x^2 + 4x + 4$
c) $x^2 - 3x + 2$
d) $4x^2 - 4x$
e) $4x^2 + 8x + 12$
f) $2x^2 - 8x + 1$
g) $-2x^2 + x$
h) $-x^2 + 2x + 3$
i) $-x^2 - 16$

What is min or max of quadratic expression?

16 Rozložte kvadratické trojčleny, zapište, kdy má výraz smysl a zjednodušte:

a) $\dfrac{4x^2 + 7x - 2}{12x^2 + 5x - 2}$

b) $\dfrac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2} - \frac{x^2-x-12}{x^2+x-6}}{\frac{x^2+2x-15}{x^2+3x-10} - \frac{x^2+10x+24}{x^2+4x-12}}$

Factorize expressions.

14 a) $(x-3)(x-2)$ b) $(x+2)(x+5)$ c) $(x-2)(x+4)$ d) $(x-1)(x+11)$ e) $(x-1)(x+2)$ f) $(x-6)(x-5)$ g) $(x-5)^2$ h) $(x+2)^2$ i) $(x-3)^2$ j) $(2x+1)^2$ k) $(4x-5)(4x+5)$ l) $15x(x-2)$ m) $(2x-1)(x+1)$ n) $(3x-2)(x-5)$ o) $(8-x)(x+1)$ p) $(2x-5)(3-x)$ q) nelze v R rozložit r) nelze v R rozložit

15 a) $(x+1)^2 + 5 \Rightarrow$ pro $x = -1$ min. 5; b) pro $x = -2$ min. 0; c) pro $x = \frac{3}{2}$ min. $-\frac{1}{4}$; d) $4(x - \frac{1}{2})^2 - 1 \Rightarrow$ pro $x = \frac{1}{2}$ min. -1; e) pro $x = -1$ min. 8; f) pro $x = 2$ min. -7; g) $-2(x-\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow$ pro $x = \frac{1}{4}$ max. $\frac{1}{8}$; h) pro $x = 1$ max. 4; i) pro $x = 0$ max. -16.

16 a) $\frac{x+2}{3x+2}$ $[x \neq \frac{1}{4}; -\frac{2}{3}]$; b) -1 $[x \neq -6; -5; -3; -1; 2]$.

Ex12: Plot function y = x(x – 36) and find the coordinates of its top.

Ex13: Solve the equation: $\frac{2}{x} = \frac{5}{x^2 - 2x} - 1$

Solve:

a) $4x^2 + x = 0$
b) $2x^2 - 5 = 0$
c) $3x^2 + x - 2 = 0$
d) $x^2 + 2x - 1 = 0$
e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
f) $3x^2 + x + 2 = 0$
g) $x^2 + (2\sqrt{3} + 1)x + 3 + \sqrt{3} = 0$
h) $x^2 + x(2\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{3} = 0$
i) $x^2 - \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} = 0$
j) $\frac{1}{2}(2x - 1)^2 - \left[\frac{1}{2}(x + 1)\right]^2 = 3\left[\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

5 Ověřte, že číslo $x = 2 + 3\sqrt{2}$ je kořenem rovnice $x^2 - 6x - 10 + 6\sqrt{2} = 0$.

= Verify that number x is a root of the equation …

4 a) $\{0; -\frac{1}{4}\}$; b) $\left\{\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$; c) $\{-1; \frac{2}{3}\}$; d) $\{-1 \pm \sqrt{2}\}$; e) $\{\frac{1}{2}\}$; f) $\emptyset$;
g) $\{-\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}\}$;
h) $D = 12 + 4\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3} - 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; -2\sqrt{3}\}$;
i) $D = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Rightarrow x \in \{-1; \sqrt{2}\}$, nebo lze řešit vytýkáním; j) $\{2; \frac{1}{2}\}$.

Ex14: Find all y such that expression $-\frac{45}{5y-9}$ is positive.

Ex15: Find all real x such that $\frac{x^2-5x}{x} \leq 0.$

Ex16: Find all solutions $y^2 + 40y + 400 > 0.$

Ex: Find x for which is the expression $\frac{1-x}{x-7} + 1$ positive?

Ex17: For x and y holds: $x > 0\ y = -5.$ Which expression from the list below can be positive?

$A)$ $\frac{1}{x} + y$

$B)$ $y - x^2$

$C)$ $y - x$

$D)$ xy

$E)$ $\frac{x^2}{y}$

Ex18: Determine which inequality has as solution empty set.

$A)$ $\dfrac{15 \cdot x}{15^2 \cdot x^2} < 0$

$B)$ $\dfrac{x - 15^2}{15^2 - x} < 0$

$C)$ $(x + 15)^2 \leq 0$

$D)$ $x^2 + (-15)^2 \leq 0$

$E)$ $x - 15^2 < x + 15^2$

Ex19: Determine which inequality has as solution set (-1; 3)?

$A)$ $\dfrac{x - 3}{x^2 + 1} < 0$

$B)$ $(x + 1)(3 - x) < 0$

$C)$ $(x + 1)(x - 3) < 0$

$D)$ $\dfrac{3 - x}{x + 1} \geq 0$

$E)$ $\dfrac{x^2 - 9}{x + 1} \geq 0$

Ex20: Find solutions:

$$|2x - 5| \leq 3 \qquad |2 - x| \leq 1$$

$$|x + 4| \leq 2 \qquad |x + 2| < |x - 1|$$

Ex21: Plot area in plane, which suits inequalities:

$$a)\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$$

$$b)\ x \leq 0,\ y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 1$$

$$c)\ x \geq 0,\ y \leq 4 - x,\ y \leq \frac{3}{x}$$

2 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $(9-4x^2)(x^2-6x+9)=0$
b) $(4x^2+25)(50-x^2)=0$
c) $(x-6)(x+2)>0$
d) $(x+2)(4-x)\leqq 0$
e) $(x^2+2)(x+7)\geqq 0$
f) $x^2(11x-3)<0$
g) $(2-x)(x^2-9)\geqq 0$
h) $(x-10)(10-x)\leqq 0$

Solve...

3 Řešte rovnice a nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\dfrac{2x-5}{x+3}=0$
b) $\dfrac{(x+5)(x-6)}{36-x^2}=0$
c) $\dfrac{x+2}{3x-2}\leqq 0$
d) $\dfrac{4x-3}{7+x}>0$
e) $\dfrac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)}\leqq 0$
f) $\dfrac{1-2x}{x^2-1}<0$

2.2 Rovnice a nerovnice v součinovém tvaru

2 a) $\{\pm\frac{3}{2};3\}$; b) $\{\pm 5\sqrt{2}\}$; c) $(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$; d) $(-\infty;-2\rangle\cup\langle 4;\infty)$; e) $\langle -7;\infty)$; f) $(-\infty;\frac{3}{11})-\{0\}$; g) $(-\infty;-3\rangle\cup\langle 2;3\rangle$; h) $\mathbb{R}$.

2.3 Rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

3 a) $\{\frac{5}{2}\}$; b) $\{-5\}$; c) $\langle -2;\frac{2}{3})$; d) $(-\infty;-7)\cup(\frac{3}{4};\infty)$; e) $(-\infty;-4\rangle\cup(0;\frac{3}{5}\rangle\cup(6;\infty)$; f) $(-1;\frac{1}{2})\cup(1;\infty)$.

17 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 - 2x - 15 \geqq 0$
b) $3x^2 + 5x - 2 < 0$
c) $-2x^2 - 5x + 12 > 0$
d) $x^2 - 2x - 2 \leqq 0$
e) $2x - x^2 \geqq 2 - x$
f) $x^2 + 5x + 7 > 0$
g) $9x^2 - 6x + 1 \leqq 0$
h) $2x^2 + 3x \geqq 0$
i) $4x^2 \leqq 1$
j) $x^2 + 2x + 6 < 0$

19 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{1}{x} \geqq 6$
b) $\frac{2x+3}{x-1} < 1$
c) $\frac{x+3}{x-1} \leqq \frac{x+3}{x}$
d) $\frac{8}{x^2+4x+1} \leqq 0$
e) $\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x+2}{x+1} \geqq 1$
f) $2 \leqq \frac{x}{x^2+1}$

17 a) $(-\infty; -3\rangle \cup \langle 5; \infty)$; b) $(-2; \frac{1}{3})$; c) $(-4; \frac{3}{2})$; d) $\langle 1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\rangle$; e) $\langle 1; 2\rangle$; f) $\mathbb{R}$; g) $\{\frac{1}{3}\}$; h) $(-\infty; -\frac{3}{2}\rangle \cup \langle 0; \infty)$; i) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\rangle$; j) $\emptyset$.

19 a) $(0; \frac{1}{6}\rangle$; b) $(-4; 1)$; c) $(-\infty; -3\rangle \cup (0; 1)$; d) $(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3})$; e) $(-1; 1)$; f) $\emptyset$.

20 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x} + x = 2$

b) $3\sqrt{x+5} - 5 = x$

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$

d) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4$

e) $\sqrt{-x} = 2 - \sqrt{2-x}$

f) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-10} = 2$

g) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x+2}$

h) $\sqrt{-x - \sqrt{1-x}} = 1$

i) $\dfrac{2x}{2\sqrt{3}+\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{x}}{4\frac{1}{2}}$

j) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$

21 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x^2-4} \leqq x+1$

b) $\sqrt{x^2-1} < x+2$

c) $x+1 \leqq \sqrt{x^2+3x}$

d) $x-1 < \sqrt{x^2-4}$

20 a) $\{1\}$; b) $\{-5;4\}$; c) $\{5\}$; d) $\{-\frac{14}{9};2\}$; e) $\{-\frac{1}{4}\}$; f) $\emptyset$; g) $\{5\}$; h) $\{-3\}$; i) $\{\frac{6}{5}\}$; j) $\{-1;\frac{9}{16}\}$.

2.11 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

21 a) Umocníme $\Rightarrow x^2 - 4 \leqq (x+1)^2 \Rightarrow x \geqq -\frac{5}{2}$. Určíme podmínky: $x^2 - 4 \geqq 0 \wedge x + 1 \geqq$ $\geqq 0 \Rightarrow x \geqq 2$, tedy $x \in \langle -\frac{5}{2}; \infty) \cap \langle 2; \infty) \Rightarrow x \in \langle 2; \infty)$;

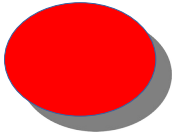
b) $(-\frac{5}{4}; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$;

c) Uvažujte dva případy. Pro $x + 1 < 0$, nelze nerovnici umocnit, stačí aby $x^2 + 3x \geqq$ $\geqq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle$. Pro $x + 1 \geqq 0$ postup jako a) $\Rightarrow x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 1; \infty)$;

d) $(-\infty; -2\rangle \cup (\frac{5}{2}; \infty)$.

22 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $|x| = 7$
b) $|x - 1| = 3$
c) $|x + 4| = 1$
d) $|x + \pi| = 6$
e) $|2x - 3| = 6$
f) $|6 - x| = 2$
g) $\left|x - \sqrt{3} + 1\right| = 2 - \sqrt{3}$
h) $\left|x - 5\sqrt{11}\right| = 0$
i) $|4x - 7| = -1$
j) $|x - 7| = x - 7$
k) $|x - 2| = 2 - x$
l) $|8 - 5x| = 5x - 8$
m) $|2x - 3| = x$
n) $|2x - 5| = 1 - 3x$
o) $|4 - x| - |2x + 3| = 7$
p) $|2x - 4| - |x + 3| = 2 - |x - 5|$
q) $|x - 1| + 3|2 - x| = x - |1 - x|$
r) $|x - 4| + |2x - 1| = |x| + 3$
s) $|x + 2| = 4|x - 3|$
t) $x^2 + |x - 1| - 1 = 0$
u) $|x^2 + 4x| - 3x - 6 = 0$
v) $|x^2 + 2x - 1| - x = 1$



22 a) $\{\pm 7\}$; b) $\{-2; 4\}$; c) $\{-5; -3\}$; d) $\{-\pi - 6; -\pi + 6\}$; e) $\{-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\}$; f) $\{4; 8\}$;
g) $\{-3 + 2\sqrt{3}; 1\}$; h) $\{5\sqrt{11}\}$; i) $\emptyset$; j) $\langle 7; \infty)$; k) $(-\infty; 2\rangle$; l) $\langle \frac{8}{5}; \infty)$;
m) $\{1; 3\}$;
n) $\{-4\}$; o) $\emptyset$; p) $\{1; 7\}$; q) $\{2\}$; r) $\langle \frac{1}{2}; 4\rangle$; s) $\{2; \frac{14}{3}\}$; t) $\{0; 1\}$; u) $\{-1; 2\}$;
v) $\{0; 1\}$.

23 Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

a) $|x| \geqq 6$
b) $|x-3| < 2$
c) $|x+5| \leqq 7$
d) $|x-\sqrt{3}| > 2+5\sqrt{3}$
e) $|3x-1| < x$
f) $|1-x| > 3|x+3|$
g) $|2x+1| - |3-x| \geqq x$
h) $x^2 - 3|x+1| - x \leqq 0$
i) $|x| < x^2 - 6$
j) $|x^2+4x| - 6 \leqq$
k) $\dfrac{3}{|x-2|} \leqq x$
l) $\dfrac{|x+3|}{x+1} \geqq 2$

1 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

a) $x(a-4) = a^2 - 16$
b) $x(2a+1) = 5$
c) $x(a-1) + a(x+4) = 2$
d) $a^2x - x + a = 1$
e) $(3x+5)(a+4) = 2a+8$
f) $xa^2 = a(1+3x) - 3$

2 Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby řešením rovnice $2p(xp+1) - (p^2+1)x = 2$ bylo kladné reálné číslo.

---

23 a) $(-\infty; -6\rangle \cup \langle 6; \infty)$; b) $(1;5)$; c) $\langle -12; 2\rangle$; d) $(-\infty; -2-4\sqrt{3}) \cup (2+6\sqrt{3}; \infty)$;
e) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$; f) $(-5;-2)$; g) $(-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty)$; h) $\langle 2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\rangle$;
i) $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$; j) $\langle -1; 2\rangle$; k) $\langle 3; \infty)$; l) $(-1; 1\rangle$.

1 a) $x \cdot (a-4) = a^2 - 16$

$a = 4$	$x \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R} - \{4\}$	$x \in \{a+4\}$

b) $x \cdot (2a+1) = 5$

$a = -0{,}5$	$x \in \emptyset$
$a \in \mathbb{R} - \{-0{,}5\}$	$x \in \{\frac{5}{2a+1}\}$

c) $x \cdot (2a-1) = -2(2a-1)$

$a = 0{,}5$	$x \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R} - \{0{,}5\}$	$x \in \{-2\}$

d) $x \cdot (a^2-1) = 1-a$

$a = 1$	$x \in \mathbb{R}$
$a = -1$	$x \in \emptyset$
$a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$	$x \in \{\frac{-1}{a+1}\}$

e) $x \cdot (a+4) = -1(a+4)$

$a = -4$	$x \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R} - \{-4\}$	$x \in \{-1\}$

f) $x \cdot (a^2-3a) = a-3$

$a = 0$	$x \in \emptyset$
$a = 3$	$x \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R} - \{0;3\}$	$x \in \{\frac{1}{a}\}$

2 $x > 0$ pro $p \in (-\infty; -1) \cup \{1\}$. **3** $m = 7$. **4** $p \cdot (q-1) = 1 - 2q$.