Matematika I – přednáška 9

Shrnutí co bylo minule

Základní pojmy diferenciálního počtu. Posloupnosti reálných čísel.

Co bude dnes

Limita funkce.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Matematika I – přednáška 9

Limita funkce

Motivace. Definičním oborem funkce $f(x) = \sin x / x$ je množina $R - \{0\}$. Tabulka hodnot této funkce v některých bodech x:

Matematika I – přednáška 9

Limita funkce

Motivace. Definičním oborem funkce $f(x) = \sin x/x$ je množina $\mathbb{R} - \{0\}$. Tabulka hodnot této funkce v některých bodech x :

x	-1	-0.2	-0.05	-0.01	0.01	0.05	0.2	1
$f(x)$	0.84147	0.99335	0.99958	0.99998	0.99998	0.99958	0.99335	0.84147

Z tabulky lze usuzovat, že pro x „blížící se" k nule se $f(x)$ „blíží" k jedné. Toto lze přesným způsobem vyjádřit užitím pojmu „limita funkce".

Definice (limita funkce). Předpokládejme, že $x_0 \in R^*$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0. Platí-li pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P(x_0)$ implikace

$$\lim x_n = x_0 \implies \lim f(x_n) = a \, ,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou a. Píšeme: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Definice (limita funkce). Předpokládejme, že $x_0 \in \mathrm{R}^*$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0. Platí-li pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P(x_0)$ implikace

$$\lim x_n = x_0 \implies \lim f(x_n) = a,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnou a. Píšeme: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Poznámka. Existence a hodnota limity funkce f v bodě x_0 jsou určeny výhradně chováním funkce f v okolí bodu x_0, nikoliv v bodě x_0 samém.

$a \in \mathrm{R}$ . . . vlastní limita
$a = \pm\infty$ . . . nevlastní limita

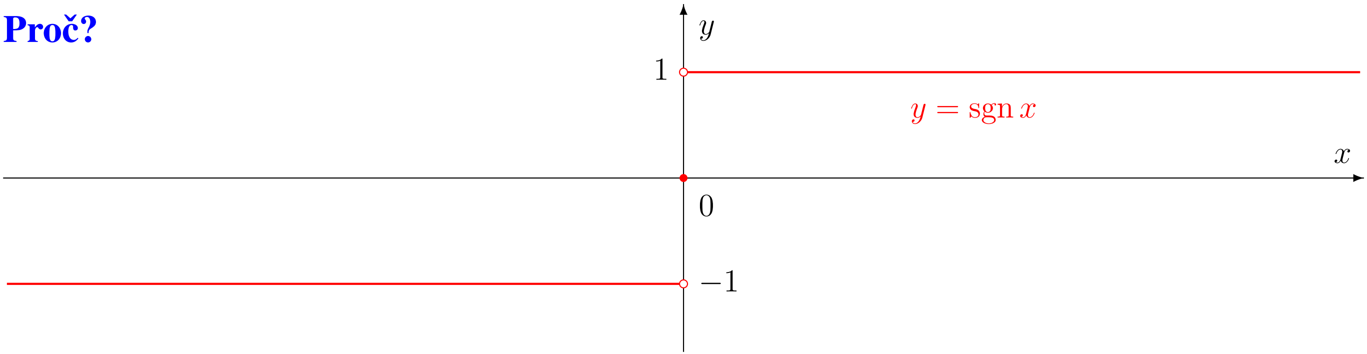
$x_0 \in \mathrm{R}$ . . . limita ve vlastním bodě
$x_0 = \pm\infty$ . . . limita v nevlastním bodě

Věta. *Funkce* f *může mít v jakémkoliv bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *nejvýše jednu limitu.*

Limita funkce f v bodě x_0 může, ale nemusí existovat.

Příklad. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu.

Proč?



Věta. *Funkce f může mít v jakémkoliv bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*

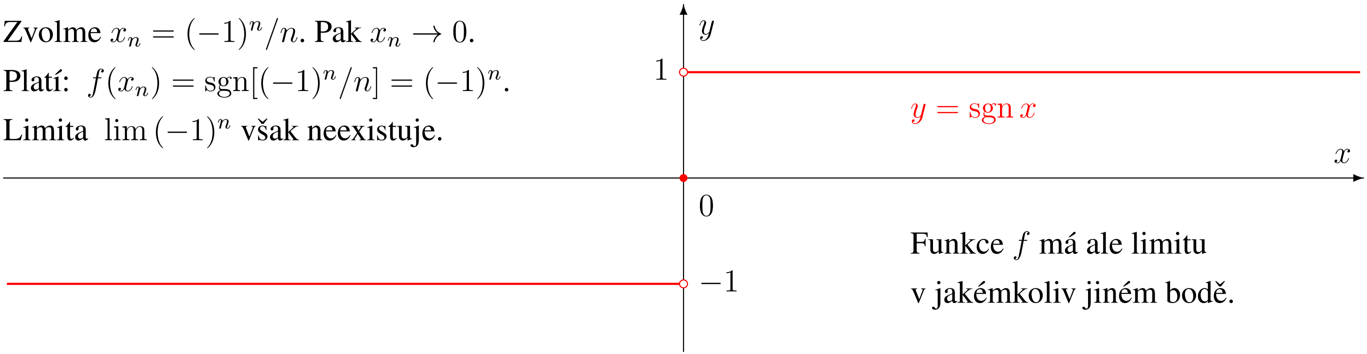
Limita funkce f v bodě x_0 může, ale nemusí existovat.

Příklad. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu.

Zvolme $x_n = (-1)^n/n$. Pak $x_n \to 0$.

Platí: $f(x_n) = \operatorname{sgn}[(-1)^n/n] = (-1)^n$.

Limita $\lim (-1)^n$ však neexistuje.

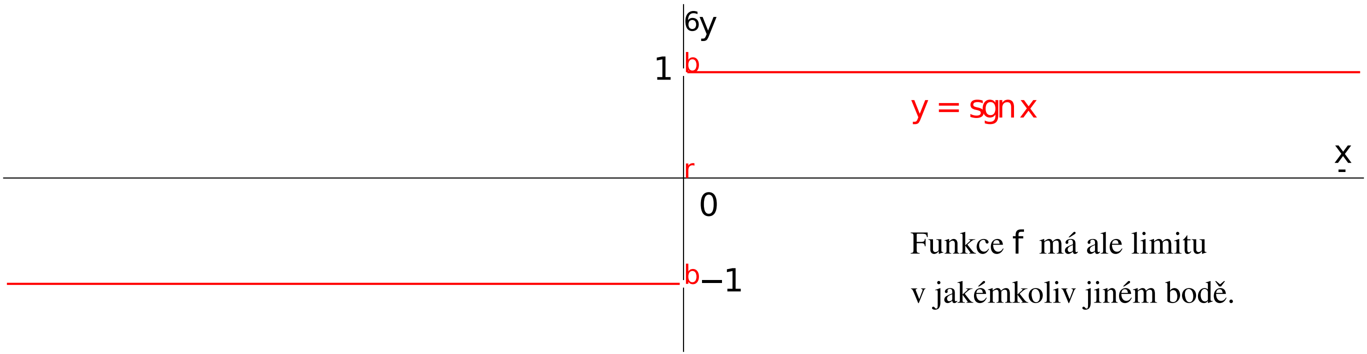


Funkce f má ale limitu v jakémkoliv jiném bodě.

Věta. Funkce f může mít v jakémkoliv bodě $x_0 \in R^*$ nejvýše jednu limitu.

Limita funkce f v bodě x_0 může, ale nemusí existovat.

Příklad. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nemá v bodě 0 limitu.



Funkce f má ale limitu v jakémkoliv jiném bodě.

Poznámka. Skutečnost, že $\lim x_n = x_0$, se někdy také zkráceně zapisuje: $x_n \to x_0$. Podobně, místo $\lim f(x_n) = a$ můžeme krátce psát: $f(x_n) \to a$. Užijeme-li toto značení, můžeme implikaci v definici limty funkce psát takto:

$$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to a.$$

Při výpočtu hodnot konkrétních limit je důležitá tato věta:

Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). *Nechť* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *a* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. *Pak platí:*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$,

c) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$,

d) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$,

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl.

Příklady: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

Příklady: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-x^{-1}}{1+4x^{-1}} = \dfrac{\infty-0}{1+0} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x+4} = \dfrac{2^2-1}{2+4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Poznámka. Lze ukázat, že je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Rozmyslete si sami případy, kdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) \lesseqgtr 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$.

Příklady: 1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-x^{-1}}{1+4x^{-1}} = \frac{\infty\ -0}{1+0} = \infty$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x+4} = \frac{2^2-1}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Poznámka. Lze ukázat, že je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty\,.$$

Rozmyslete si sami případy, kdy $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) \lessgtr 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$.

Příklady. 1) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{(x-1)^2}$

Příklady: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-x^{-1}}{1+4x^{-1}} = \dfrac{\infty\ -0}{1+0} = \infty$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-1}{x+4} = \dfrac{2^2-1}{2+4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Poznámka. Lze ukázat, že je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

Rozmyslete si sami případy, kdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) \lesseqgtr 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$.

Příklady. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{(x-1)^2} = \infty$ 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x-4}{(x+2)^2}$

Def nice (limita zprava). Předpokládejme, že $x_0 \in R$ a že def niční obor funkce f obsahuje některé pravé okolí $P_+(x_0)$ bodu x_0. Jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P_+(x_0)$ platí implikace

$$\lim x_n = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim f(x_n) = a \ ,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnou a.
Píšeme: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$.

Definice (limita zprava). Předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R}$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé pravé okolí $P_+(x_0)$ bodu x_0. Jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P_+(x_0)$ platí implikace

$$\left[\lim x_n = x_0\right] \implies \left[\lim f(x_n) = a\right],$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu zprava* rovnou a.
Píšeme: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a$.

Analogicky můžeme definovat *limitu zleva* funkce f v bodě x_0. Píšeme: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a$.

Věta. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnou a právě když má v bodě x_0 limitu zprava i limitu zleva a obě jsou rovné a.*

Velmi užitečné jsou také následující věty o limitách složených funkcí:

Věta (1. věta o limitě složené funkce). Nechť $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in R$ a nechť funkce f je spojitá v bodě λ. Pak platí: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$.

Velmi užitečné jsou také následující věty o limitách složených funkcí:

Věta (1. věta o limitě složené funkce). Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in R$ a nechť funkce f je spojitá v bodě λ. Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$.

Věta (2. věta o limitě složené funkce). Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ (respektive $-\infty$). Nechť $\lim_{y \to \infty} f(y) = L$ (respektive $\lim_{y \to -\infty} f(y) = L$). Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.