Matematika I – přednáška 12

Shrnutí co bylo minule

Derivace funkce.

Co bude dnes

Derivace funkce. Diferenciál funkce. Derivace vyšších řádů, L'Hospitalovo pravidlo.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 12

Věta (o derivaci inverzní funkce). *Nechť $y = f_{-1}(x)$ je inverzní funkce k funkci f. Má-li funkce f v bodě y nenulovou derivaci $f'(y)$, má inverzní funkce v bodě x derivaci:*

$$f'_{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(x))}.$$

Pomocí těchto vět lze odvodit vzorce pro **derivace dalších elementárních funkcí:**

h) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

k) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

l) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ m) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0)$

n) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$

Každý z těchto vzorců platí pro ta x, pro která má levá i pravá strana smysl.

Logaritmická derivace. Má-li funkce f derivaci v bodě x a je-li $f(x) > 0$, pak

$$[\ \ln f(x)\ ]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ . . . tzv. *logaritmická derivace funkce f.*

Nevlastní derivace. Je-li $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty,$$

pak hodnotu této limity rovněž označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji *nevlastní derivaci.*

l) $(\ln\, x)' = \dfrac{1}{x}$ m) $(a^x)' = a^x \cdot \ln\, a \quad (a > 0)$

n) $(\log_a\, x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln\, a} \quad (a > 0,\, a \neq 1)$

Každý z těchto vzorců platí pro ta x, pro která má levá i pravá strana smysl.

Logaritmická derivace. Má-li funkce f derivaci v bodě x a je-li $f(x) > 0$, pak

$$[\,\ln f(x)\,]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \ldots \text{ tzv. } \textit{logaritmická derivace funkce } f.$$

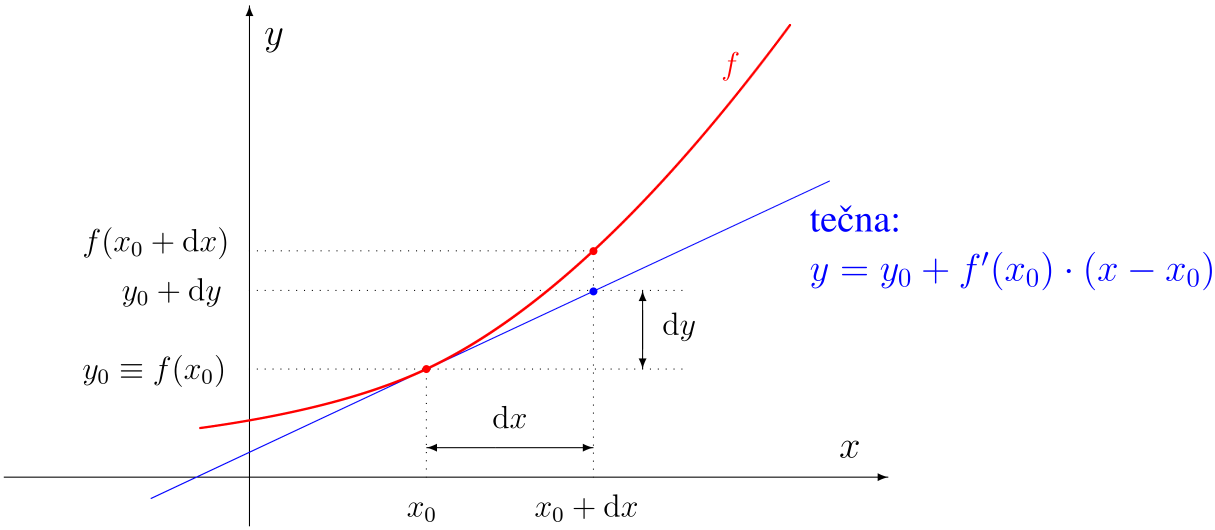
Nevlastní derivace. Je-li

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty,$$

pak hodnotu této limity rovněž označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji *nevlastní derivaci.*

Poznámka. Funkce může mít v nějakém bodě nevlastní derivaci a přesto nemusí být v tomto bodě spojitá. **Příklad:** viz TABULE

Diferenciál. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$.



Lineární funkce

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ze všech lineárních funkcí nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu x_0.

Hodnoty funkce f v bodech x v malém okolí bodu x_0 lze pomocí této lineární funkce přibližně vypočítat:

$$f(x) \doteq y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Píšeme-li $x = x_0 + \mathrm{d}x$, pak

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \doteq y_0 + \boxed{f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x}$$

značíme: $\mathrm{d}y$

Výraz $\mathrm{d}y := f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0.

Místo x_0 se často píše pouze x. Při tomto značení platí:

$$f(x + \mathrm{d}x) \doteq f(x) + \mathrm{d}y \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Hodnoty funkce f v bodech x v malém okolí bodu x_0 lze pomocí této lineární funkce přibližně vypočítat:

$$f(x) \doteq y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Píšeme-li $x = x_0 + \mathrm{d}x$, pak

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \doteq y_0 + \boxed{f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x}$$

značíme: $\mathrm{d}y$

Výraz $\mathrm{d}y := f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0.

Místo x_0 se často píše pouze x. Při tomto značení platí:

$$f(x + \mathrm{d}x) \doteq f(x) + \mathrm{d}y, \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Příklad. Pomocí diferenciálu přibližně vypočítejte $\sin 47°$.

Řešení: viz TABULE

$$\sin(47^\circ) = ?$$

$$\sin(45^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x_0

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$\longrightarrow$ tečna v bodě $x_0 = \pi/4$:

$$y_0 = f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = y_0 + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \pi/4).$$

$$f(x_0+dx) \doteq y_0 + \underbrace{f'(x_0)\cdot dx}_{=dy}$$

$$\sin(47^\circ) = 0{,}7314$$

$$0{,}7318$$

$$\sin(47^\circ) \doteq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{90+\pi}{90}\right)$$

$$x = 47^\circ = \frac{47\cdot 2\pi}{360}$$

$$dx = 2^\circ = \frac{2\cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{90}$$

$$\sin(47^\circ) \doteq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{90}$$

Poznámka. Viděli jsme, že diferenciál funkce f v bodě x_0 (který se značí $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f$ a platí: $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$) existuje právě tehdy, má-li funkce f derivaci v bodě x_0.

Odtud je odvozen následující termín: o funkci, která má derivaci v bodě x_0, říkáme, že je v bodě x_0 *diferencovatelná.*

Podobně, má-li funkce f derivaci v intervalu I, říkáme, že tato funkce je *diferencovatelná v intervalu I.*

Derivace vyšších řádů. *Derivací druhého řádu* funkce f rozumíme derivaci funkce f'.
Značení: f''

Podobně, *derivací třetího řádu* funkce f rozumíme derivaci funkce f''. Značení: f'''

ATD.

Derivaci n–tého řádu funkce f značíme $f^{(n)}$.

Pro definiční obory platí: $D(f) \supset D(f') \supset D(f'') \supset D(f''') \supset \dots$

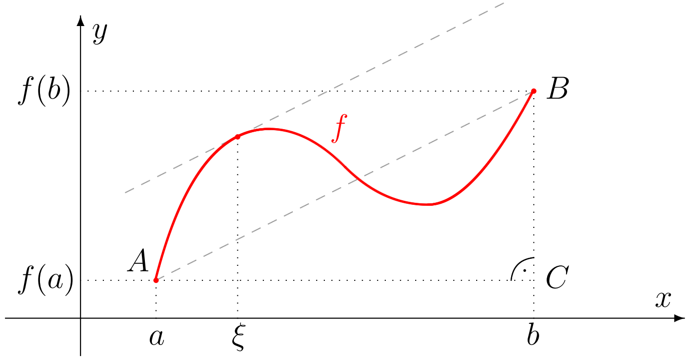
Derivace vyšších řádů též značíme $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$, $\dots$ $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $\dots$ apod.

Leibnizův vzorec. *Na průniku $D(f^{(n)})$ a $D(g^{(n)})$ lze derivaci n–tého řádu součinu $f \cdot g$ vypočítat:*

$$[f \cdot g]^{(n)} = f^{(n)}\, g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\, g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}\, g'' + \dots + \binom{n}{n} f\, g^{(n)}.$$

Příklady: viz TABULE

Následující věta má velký význam zejména při následném odvozování různých vlastností funkcí, které mají v nějakém intervalu I derivaci.



Věta (Lagrangeova). *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má derivaci v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

II.6. Užití derivace při výpočtu limit typu $\dfrac{\infty}{\infty}$ nebo $\dfrac{0}{0}$

(tzv. neurčité výrazy)

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Předpokládejme, že* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *a že limity* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *a* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ *jsou buď obě rovny* $\pm\infty$ *nebo obě rovny* 0. *Pak platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad \textit{existuje-li limita vpravo.}$$

(Stejná tvrzení platí i pro limitu zleva a limitu zprava.)

Příklady: viz TABULE

Co přesně znamenají rčení, že při výpočtu limit

„exponenciela vždy vyhrává nad jakoukoliv mocninou"

a naopak, *„logaritmus vždy prohrává s jakoukoliv mocninou"* ?

Vysvětlení: viz TABULE