Matematika I – přednáška 13

Shrnutí co bylo minule

Derivace funkce. Diferenciál funkce. Derivace vyšších řádů, L'Hospitalovo pravidlo.

Co bude dnes

Užití derivace, intervaly monotónie, konvexní a konkávní funkce.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 13

II.7. Užití derivace: intervaly monotónie, konvexní a konkávní funkce

(tj. intervaly, ve kterých je funkce rostoucí nebo klesající, případně neklesající nebo nerostoucí – nalezení pomocí derivace)

Je-li I interval v $\mathbb{R}$, pak množinu všech vnitřních bodů tohoto intervalu nazýváme *vnitřek intervalu I* a značíme ji I°.

Například: $I = (a, b\rangle \ldots\ I^\circ = (a, b)$,

$I = \langle 0, 1\rangle \ldots\ I^\circ = (0, 1)$, apod.

Věta. *Nechť* f *je spojitá funkce v intervalu* I. *Pak platí implikace*

a) $f' > 0$ *v* I° $\Longrightarrow$ f *je v intervalu* I *rostoucí,*

b) $f' < 0$ *v* I° $\Longrightarrow$ f *je v intervalu* I *klesající.*

Princip důkazu: viz TABULE

Příklady užití: viz TABULE

Poznámka. Podobná tvrzení lze odvodit v případech, že $f' \geq 0$ v I°, $f' \leq 0$ v I°, případně $f' = 0$ v I°: *Nechť* f *je spojitá funkce v intervalu* I. *Pak platí implikace*

c) $f' \geq 0$ *v* $I^{\circ} \implies f$ *je v intervalu* I *neklesající,*

d) $f' \leq 0$ *v* $I^{\circ} \implies f$ *je v intervalu* I *nerostoucí,*

e) $f' = 0$ *v* $I^{\circ} \implies f$ *je v intervalu* I *konstantní.*

Poznámka. Podobná tvrzení lze odvodit v případech, že $f' \geq 0$ v I°, $f' \leq 0$ v I°, případně $f' = 0$ v I°: *Nechť f je spojitá funkce v intervalu I. Pak platí implikace*

c) $f' \geq 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu I neklesající,*

d) $f' \leq 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu I nerostoucí,*

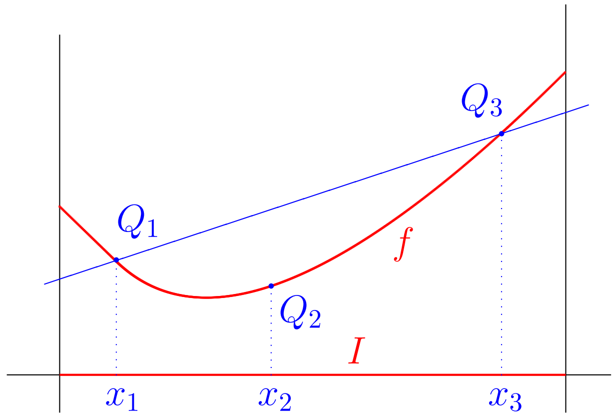
e) $f' = 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu I konstantní.*

Konvexní a konkávní funkce. (Vyšetření pomocí druhé derivace)

Motivace:

Funkce f má v intervalu I vlastnost:

Pro libovolné tři body $x_1 < x_2 < x_3$ v intervalu I bod $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží pod nebo na sečně, procházející body $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.



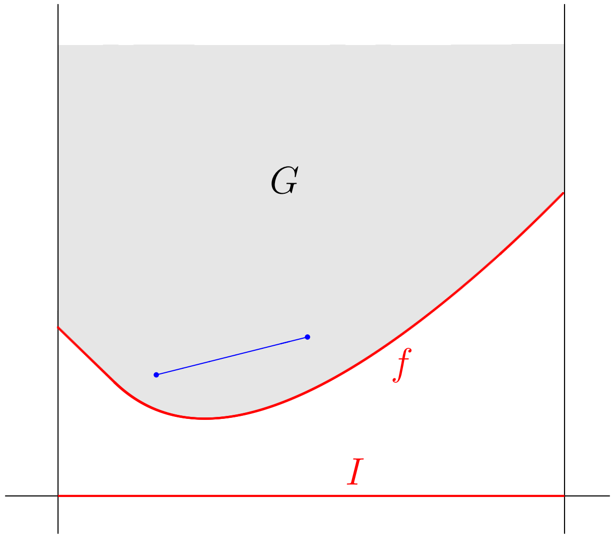
Definice (konvexní funkce). Funkci f nazýváme *konvexní v intervalu I,* je-li $I \subset D(f)$ a jestliže pro každé tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí: Bod $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží pod nebo na sečně Q_1Q_3, kde $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.

Poznámka. Konvexní funkci f v intervalu I lze charakterizovat tímto výrokem: *množina bodů nad grafem funkce f v intervalu I (tj. množina*

$$G := \{[x, y];\ x \in I,\ y > f(x)\})$$

je konvexní.

Připomínáme, že množinu G nazýváme *konvexní,* je-li množné každé dva body v G spojit úsečkou, která leží celá v G.



Definice (konkávní funkce). Funkci f nazýváme *konkávní v intervalu* I, je-li $I \subset D(f)$ a jestliže pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí: Bod $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží nad nebo na sečně Q_1Q_3, kde $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.

Poznámka. Konkávní funkci f v intervalu lze charakterizovat výrokem: *množina bodů pod grafem funkce* f *v intervalu* I *(tj. množina* $G := \{[x, y]; x \in I, \ y < f(x)\}$*) je konvexní.*

Definice (konkávní funkce). Funkci f nazýváme *konkávní v intervalu I,* je-li $I \subset D(f)$ a jestliže pro každé tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí: Bod $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ leží nad nebo na sečně Q_1Q_3, kde $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.

Poznámka. Konkávní funkci f v intervalu lze charakterizovat výrokem: *množina bodů pod grafem funkce f v intervalu I (tj. množina $G := \{[x, y];\ x \in I,\ y < f(x)\}$) je konvexní.*

Obrázky: viz TABULE

Věta. *Předpokládejme, že funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace*

1) $f'' \geq 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu I konvexní,*

2) $f'' \leq 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu I konkávní,*

Příklad užití: viz TABULE

Funkce ryze konvexní a ryze konkávní

Nahradíme-li v definici konvexní funkce slova „pod nebo na" slovem „pod", získáme definici funkce *ryze konvexní* v intervalu I .

Nahradíme-li v definici konkávní funkce slova „nad nebo na" slovem „nad", získáme definici funkce *ryze konkávní* v intervalu I .

Obrázky: viz TABULE

Funkce ryze konvexní a ryze konkávní

Nahradíme-li v definici konvexní funkce slova „pod nebo na" slovem „pod", získáme definici funkce *ryze konvexní* v intervalu I.

Nahradíme-li v definici konkávní funkce slova „nad nebo na" slovem „nad", získáme definici funkce *ryze konkávní* v intervalu I.

Obrázky: viz TABULE

Poznámka. Ryze konvexní funkce je speciálním případem konvexní funkce a ryze konkávní funkce je speciálním případem konkávní funkce.

Poznámka. Poslední větu lze modifikovat v tom smyslu, že za stejného předpokladu (tj. spojitosti funkce f v intervalu I) platí implikace:

a) $f'' > 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *ryze konvexní,*

b) $f'' < 0$ *v* $I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *ryze konkávní.*

Úkol. Rozmyslete si sami, co lze říci o funkci f, pokud $f'' = 0$ v I°.

Poznámka. V definici konvexní a konkávní funkce se vyskytují výroky

„bod Q_2 leží <u>pod nebo na</u> sečně Q_1Q_3"

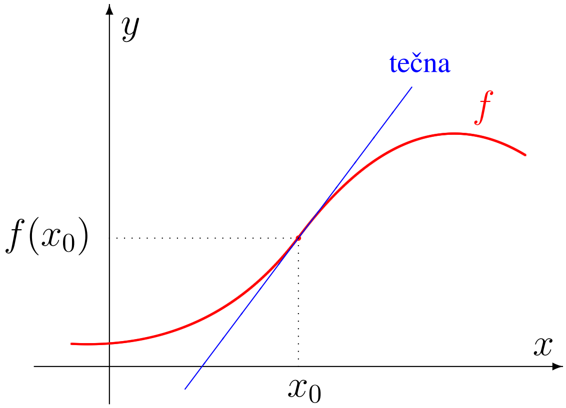
a „bod Q_2 leží <u>nad nebo na</u> sečně Q_1Q_3",

kde $Q_1 = [x_1, f(x_1)]$, $Q_2 = [x_2, f(x_2)]$ a $Q_3 = [x_3, f(x_3)]$.

Rozmyslete si sami, že například první výrok, tj. „bod Q_2 leží <u>pod nebo na</u> sečně Q_1Q_3", lze přesně vyjádřit nerovnicí

$$f(x_2) \le f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

Inflexní body



Definice (inflexní bod). Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci. (Tudíž v bodě $[x_0, f(x_0)]$ existuje tečna ke grafu funkce f.) Tečna dělí rovinu xy na dvě poloroviny. Přechází-li v bodě $[x_0, f(x_0)]$ graf f z jedné poloroviny do druhé, nazýváme x_0 *inflexním bodem* funkce f.

Věta (nutná podmínka pro inflexní bod). *Je-li* x_0 *inflexním bodem funkce* f *a existuje-li* $f''(x_0)$, *je* $f''(x_0) = 0$.

Poznámka. Rovnost $f''(x_0) = 0$ není podmínkou postačující pro to, aby x_0 byl inflexním bodem funkce f. Příklad: $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$.

Důsledek. Najdeme-li body, kde $f''(x_0) = 0$, pak máme pouze „kandidáty" na inflexní body. Jak ale zjistíme, který z těchto „kandidátů" je opravdu inflexním bodem?

Věta (nutná podmínka pro inflexní bod). *Je-li x_0 inflexním bodem funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.*

Poznámka. Rovnost $f''(x_0) = 0$ není podmínkou postačující pro to, aby x_0 byl inflexním bodem funkce f. Příklad: $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$.

Důsledek. Najdeme-li body, kde $f''(x_0) = 0$, pak máme pouze „kandidáty" na inflexní body. Jak ale zjistíme, který z těchto „kandidátů" je opravdu inflexním bodem?

Věta (postačující podmínky pro inflexní bod). *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexním bodem funkce f.*

Poznámka: Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) = 0$, pak o tom, zda x_0 je inflexním bodem funkce f, nemůžeme (bez dalších informací) usoudit vůbec nic. **Příklady:** viz TABULE

Věta (nutná podmínka pro inflexní bod). *Je-li x_0 inflexním bodem funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.*

Poznámka. Rovnost $f''(x_0) = 0$ <u>není podmínkou postačující</u> pro to, aby x_0 byl inflexním bodem funkce f. Příklad: $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$.

Důsledek. Najdeme-li body, kde $f''(x_0) = 0$, pak máme pouze „kandidáty" na inflexní body. Jak ale zjistíme, který z těchto „kandidátů" je opravdu inflexním bodem?

Věta (postačující podmínky pro inflexní bod). *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexním bodem funkce f.*

Poznámka: Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) = 0$, pak o tom, zda x_0 je inflexním bodem funkce f, nemůžeme (bez dalších informací) usoudit vůbec nic. **Příklady:** viz TABULE

Poznámka. Pokud zjistíme, že $f''(x_0) = 0$ a ze znaménka f'' usoudíme, že funkce f je konvexní v nějakém pravém okolí bodu x_0 a konkávní v nějakém levém okolí x_0 (nebo naopak), pak x_0 je inflexním bodem funkce f. (V tomto případě nemusíme počítat f'''.)

Příklad: viz TABULE