Matematika I – přednáška 14

Shrnutí co bylo minule

Užití derivace, intervaly monotónie, konvexní a konkávní funkce.

Co bude dnes

Vyšetření lokálních a globálních extrémů.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 14

II.7. Užití derivace: vyšetření lokálních a globálních extrémů

Definice (lokální maximum a minimum). Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum,* existuje-li $r > 0$ takové, že $U_r(x_0) \subset D(f)$ a pro všechna $x \in P_r(x_0)$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$.

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum,* existuje-li $r > 0$ takové, že $U_r(x_0) \subset D(f)$ a pro všechna $x \in P_r(x_0)$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$.

Užijeme-li výrok „pro všechna $x \in P_r(x_0)$ platí: $f(x) < f(x_0)$“, získáme definici *ostrého lokálního maxima.*

Užijeme-li výrok „pro všechna $x \in P_r(x_0)$ platí: $f(x) > f(x_0)$“, získáme definici *ostrého lokálního minima.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{lokální maximum}\\ \text{lokální minimum}\end{array}\right\}\ \text{lokální extrémy}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ostré lokální maximum}\\ \text{ostré lokální minimum}\end{array}\right\}\ \text{ostré lokální extrémy}$$

Poznámka. Abychom odlišili maximum funkce f na celém definičním oboru (nebo na nějaké množině $M \subset D(f)$) od lokálního maxima, nazýváme je často *globálním maximem* nebo *absolutním maximem.*

Podobně, minimum funkce f na celém definičním oboru (nebo na množině $M \subset D(f)$) často nazýváme *globálním minimem* nebo *absolutním minimem.*

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Má-li funkce* f *v bodě* x_0 *lokální extrém a existuje-li* $f'(x_0)$, *pak* $f'(x_0) = 0$

Poznámka. Rovnost $f'(x_0) = 0$ <u>není podmínkou postačující</u> pro existenci lokálního extrému v bodě x_0. Příklad: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$*

Poznámka. Rovnost $f'(x_0) = 0$ není podmínkou postačující pro existenci lokálního extrému v bodě x_0. Příklad: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Důsledek věty. Funkce může nabývat lokálních extrémů v bodech dvou typů:

a) v bodech, kde derivace $= 0$,

b) v bodech, kde derivace neexistuje.

Vyšetření lokálních extrémů zadané funkce f

I. Najdeme všechny „podezřelé body", což jsou vnitřní body definičního oboru funkce f, ve kterých derivace buď je rovna nule nebo neexistuje.

II. Ke zjištění, zda v „podezřelých bodech" funkce f skutečně má lokální extrém, můžeme použít některou z následujících dvou vět.

Věta. *Předpokládejme, že funkce f je spojitá v bodě x_0.*

Je-li f rostoucí a v nějakém levém okolí bodu x_0 a klesající v nějakém pravém okolí bodu x_0, pak f má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Je-li f klesající v nějakém levém okolí bodu x_0 a rostoucí v nějakém pravém okolí bodu x_0, pak f má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta. *Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Poznámka: Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) = 0$, pak o lokálním extrému nelze (bez dalších informací) usoudit nic.

Matematická přestávka

Tři přátelé geograf, fyzik a matematik si při výletu ve Vysokých Tatrách všimli kamzíka na hřebenu protějších skal. Geograf na to reaguje výrokem: "V Tatrách žijí hnědí kamzíci, říkal jsem vám to!" "Pane kolego, buďme ve svých soudech opatrní" opravuje jej fyzik, "můžeme pouze konstatovat, že v Tatrách žije alespoň jeden hnědý kamzík." Nespokojený matematik to však ještě upřesňuje: "Je zřejmé, že v Tatrách existuje alespoň jeden kamzík, který je alespoň z jedné strany hnědý."

Vyšetření globálních (= absolutních) extrémů zadané funkce f (v intervalu I)

- K potvrzení existence extrémů můžeme použít

  a) buď již známou větu, která říká: *je-li I uzavřený a omezený interval a funkce f je spojitá v I, pak extrémy $\max_I f$ a $\min_I f$ existují,* nebo

  b) nějakou jinou úvahu.

- Absolutních extrémů v intervalu I může funkce f nabývat pouze

1) ve vnitřních bodech intervalu I, ve kterých má f derivaci rovnou nule, nebo
2) ve vnitřních bodech intervalu I, ve kterých derivace funkce f neexistuje, nebo
3) v krajních bodech intervalu I (pokud do intervalu I patří).

Najdeme tedy body všech kategorií 1), 2) a 3). Vypočítáme hodnoty funkce f ve všech nalezených bodech. Největší z nich je $\max_I f$ a nejmenší z nich je $\min_I f$.

Příklady: viz TABULE