Matematika I – přednáška 15

Shrnutí co bylo minule

Vyšetření lokálních a globálních extrémů..

Co bude dnes

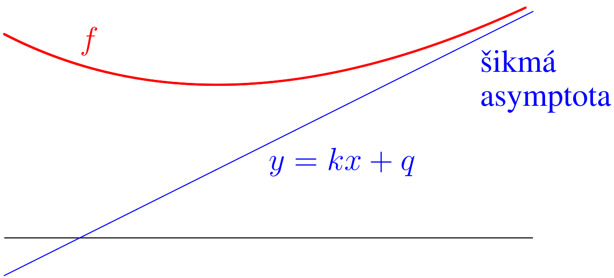
Asymptoty, průběh funkce, oskulační kružnice.

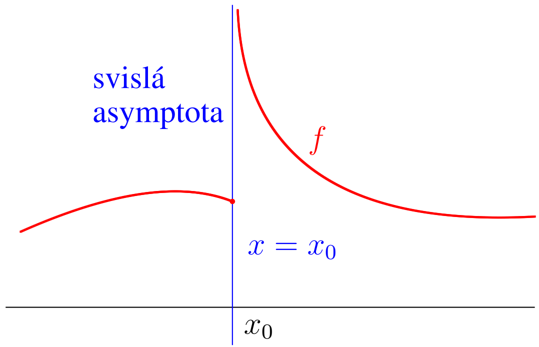
Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M1\_Neu\_prednaska15.pdf$
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 15

Asymptoty grafu funkce

Motivace: Na následujících obrázcích vidíte přímky, ke kterým se graf funkce „přimyká" pro $x \to \infty$ (šikmá přímka) nebo pro $x \to x_0-$ (svislá přímka).





Definice (šikmá asymptota). Přímku $y = kx + q$ nazýváme *šikmou asymptotou* grafu funkce f *pro* $x \to \infty$, jestliže $\lim_{x\to\infty} [\, f(x) - kx - q\,] = 0$.

Podobně, přímku $y = kx + q$ nazýváme *šikmou asymptotou* grafu funkce f *pro* $x \to -\infty$, jestliže $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx - q] = 0$.

Věta (nutné a postačující podmínky pro šikmou asymptotu). *Přímka* $y = kx + q$ *je šikmou asymptotou grafu funkce* f *pro* $x \to \infty$ *právě když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad a \qquad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Princip důkazu: viz TABULE

Vyšetření šikmé asymptoty pro $x \to \infty$:

Vypočítáme uvedené limity. Pokud obě existují a jejich hodnoty k a q jsou konečné, pak přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou funkce f pro $x \to \infty$. Jestliže některá z obou limit neexistuje nebo je nekonečná, šikmá asymptota funkce f pro $x \to \infty$ neexistuje.

Poznámka. Větu lze stejně použít i k vyšetření šikmé asymptoty pro $x \to -\infty$. Stačí pouze všude zaměnit ∞ za $-\infty$.

Příklad: viz TABULE

Definice (svislá asymptota). Přímku $x = x_0$ nazýváme *svislou asymptotou* grafu funkce f v bodě x_0, jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě x_0 je nevlastní (tj. nekonečná).

Vyšetření svislé asymptoty pro $x \to x_0$ zprava nebo zleva:

Pokud v jakémkoliv konečném bodě x_0 vychází

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty,$$

pak přímka $x = x_0$ je svislou asymptotou funkce f.

Příklad: viz TABULE

II.9. Průběh funkce (Vyšetření pomocí derivací)

I. Co lze přímo získat z analytického vyjádření funkce f:

- Určíme definiční obor f (není-li již zadán).
- Zjistíme, zda funkce f je sudá, lichá, periodická.
- Určíme, kde je funkce f spojitá a vypočítáme jednostranné limity v krajních bodech intervalů které tvoří definiční obor f, případně též v bodech nespojitosti.
- Stanovíme průsečíky grafu f s osami souřadného systému a najdeme intervaly, v nichž je funkce kladná, respektive záporná.

II. Co lze získat z první derivace funkce f:

- Vypočítáme f' (nezapomeneme na definiční obor f').
- Pomocí znaménka f' najdeme maximální intervaly, ve kterých je funkce f rostoucí nebo klesající.
- Najdeme lokální extrémy funkce f.

III. Co lze získat ze druhé derivace funkce f:

- Vypočítáme f'' (nezapomeneme na definiční obor f'').
- Pomocí znaménka f'' najdeme maximální intervaly, v nichž je f konvexní nebo konkávní.
- Najdeme inflexní body funkce f.

IV. Na závěr:

- Najdeme a načrtneme asymptoty grafu funkce f.
- Načrtneme graf funkce f.

Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^{2/3} - x$.

Řešení:

I. • $f(x) = (x^{1/3})^2 - x \ \ldots \ D(f) = (-\infty, \infty)$

• Funkce f není sudá, ani lichá, ani periodická.

• Funkce f je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$, protože a) $(x^{1/3})^2$ je spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$ (jakožto složená funkce, přičemž vnitřní funkce $x^{1/3}$ je spojitá v $(-\infty, \infty)$ a vnější funkce druhá mocnina je rovněž spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$) a b) $-x$ je také spojitá funkce v $(-\infty, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x^{2/3} - x] = \infty - (-\infty) = = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} [x^{2/3} - x] = \lim_{x\to\infty} x^{2/3} [1 - x^{1/3}] = \infty \cdot [1 - \infty] = -\infty.$$

• Průsečík grafu f s osou x: řešíme rovnici $x^{2/3} - x = 0 \ \ldots \ x^{2/3} [1 - x^{1/3}] = 0 \ \ldots$ $x_1 = 0, \ x_2 = 1$. Dosazením do $f(x)$ ověříme, že odpovídající funkční hodnoty jsou $y_1 = 0, \ y_2 = 0$.

Průsečík grafu f s osou y: $x = 0$, dopočítáme $y = 0$.

Kde je funkce f kladná: $\ldots$ řešíme nerovnici $x^{2/3} - x > 0 \ \ldots \ x^{2/3}\,[1 - x^{1/3}] > 0$ $\ldots \ x \neq 0$ a $1 - x^{1/3} > 0 \ \ldots \ x \neq 0$ a $\sqrt[3]{x} < 1 \ \ldots \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Kde je funkce f záporná: $\ldots$ řešíme nerovnici $x^{2/3} - x < 0 \ \ldots \ x^{2/3}\,[1 - x^{1/3}] < 0$ $\ldots \ x \neq 0$ a $1 - x^{1/3} < 0 \ \ldots \ x \neq 0$ a $\sqrt[3]{x} > 1 \ \ldots \ x \in (1, \infty)$

II. • $f'(x) = \frac{2}{3}\, x^{-1/3} - 1$ pro $x \neq 0$. Tudíž: $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

• Kde je funkce f rostoucí: v $D(f')$ řešíme nerovnici $\frac{2}{3}\, x^{-1/3} - 1 > 0 \ \ldots \ \frac{2}{3}\, x^{-1/3} > 1$ $\ldots$ a) $x > 0$ a $\frac{2}{3} > x^{1/3}$ nebo b) $x < 0$ a $\frac{2}{3} < x^{1/3}$ $\ldots \ x \in (0, \frac{8}{27})$ (z možnosti a)). Jelikož funkce f je spojitá na $\langle 0, \frac{8}{27} \rangle$, dospíváme k závěru: f je rostoucí v $\langle 0, \frac{8}{27} \rangle$.

Kde je funkce f klesající: v $D(f')$ řešíme nerovnici $\frac{2}{3}\, x^{-1/3} - 1 < 0 \ \ldots \ \frac{2}{3}\, x^{-1/3} < 1$ $\ldots$ a) $x > 0$ a $\frac{2}{3} < x^{1/3}$ nebo b) $x < 0$ a $\frac{2}{3} > x^{1/3}$ $\ldots \ x \in (\frac{8}{27}, \infty)$ (z možnosti a)) a $x \in (-\infty, 0)$ (z možnosti b)). Jelikož funkce f je spojitá na $\langle \frac{8}{27}, \infty)$ i na $(-\infty, 0\rangle$, dospíváme k závěru: f je klesající v intervalech $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle \frac{8}{27}, \infty)$ (tj. v každém z nich).

- Lokální extrémy funkce f: „podezřelé body" jsou $x_3 = 0$ (zde derivace neexistuje) a $x_4 = \frac{8}{27}$ (zde je derivace $= 0$).

  O bodu $x_3 = 0$ lze říci: f je klesající v $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v $\langle 0, \frac{8}{27}\rangle$. V bodě $x_3 = 0$ má tudíž funkce f ostré lokální minimum $f(x_3) = f(0) = 0$.

  O bodu $x_4 = \frac{8}{27}$ lze říci: f je rostoucí v $\langle 0, \frac{8}{27}\rangle$ a klesající v $\langle \frac{8}{27}, \infty)$. V bodě $x_4 = \frac{8}{27}$ má tudíž funkce f ostré lokální maximum $f(x_4) = f(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$.

III.
- $f''(x) = -\frac{2}{9}\, x^{-4/3}$ pro $x \neq 0$. Tudíž: $D(f'') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

- Kde je funkce f ryze konvexní: v $D(f'')$ řešíme nerovnici $-\frac{2}{9}\, x^{-4/3} > 0$ ... $x^{-4/3} < 0$ ... neplatí pro žádná $x \in D(f'')$.

  Kde je funkce f ryze konkávní: v $D(f'')$ řešíme nerovnici $-\frac{2}{9}\, x^{-4/3} < 0$ ... $x^{-4/3} > 0$ ... platí pro všechna $x \in D(f'')$, tj. $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$. Jelikož funkce f je spojitá v $(-\infty, 0\rangle$ i v $\langle 0, \infty)$, dospíváme k závěru: f je ryze konkávní v intervalech $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, \infty)$ (tj. v každém z nich).

- Jelikož $D(f') = D(f'') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, tak inflexním bodem může být jedině bod $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, kde $f''(x) = 0$. Žádný takový bod však neexistuje. Funkce f tudíž nemá žádný inflexní bod.

IV. Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2/3} - x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x^{1/3}} - 1\right] = -1,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} [x^{2/3} - x + x] = \lim_{x\to\infty} x^{2/3} = \infty.$$

Šikmá asymptota pro $x \to \infty$ tudíž neexistuje.

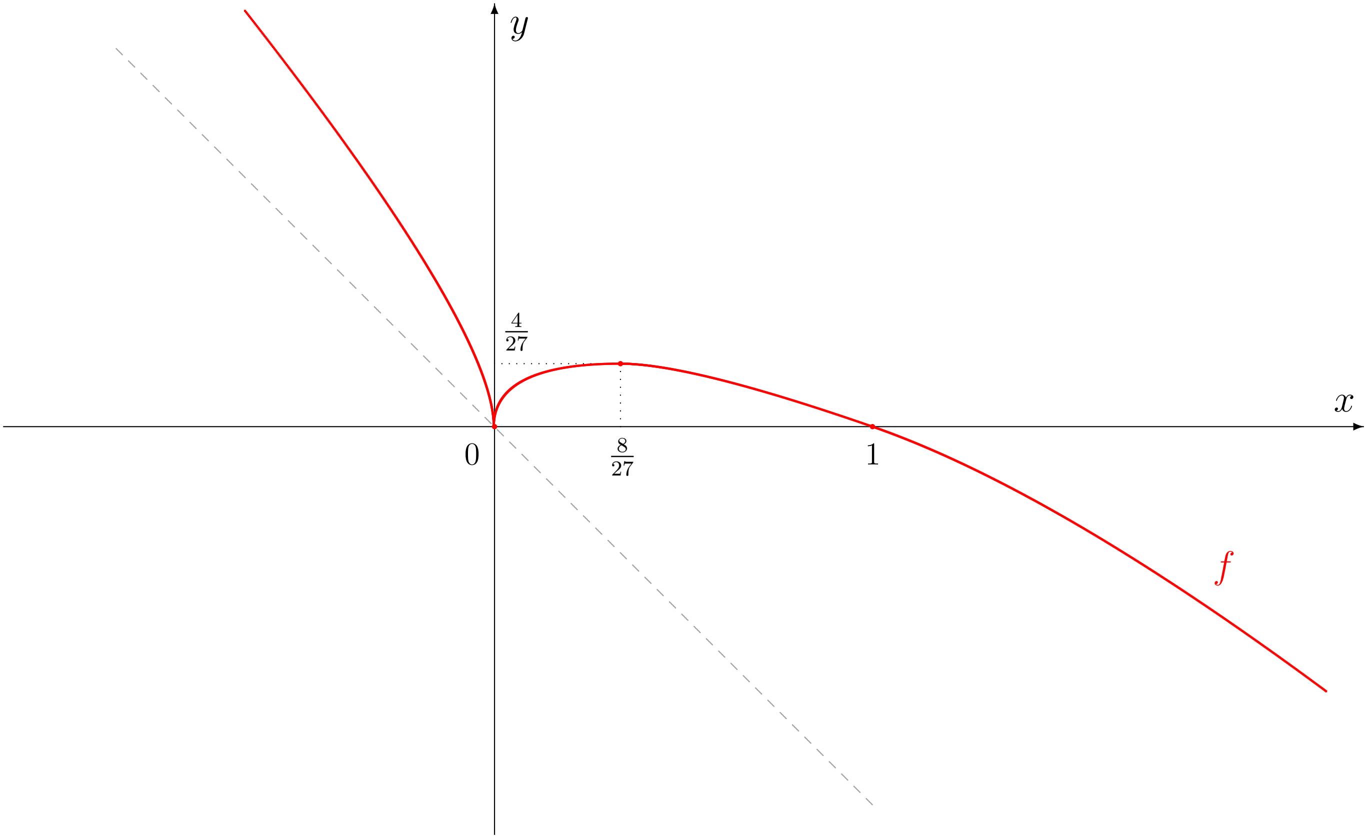
Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2/3} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{x^{1/3}} - 1\right] = -1,$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty} [x^{2/3} - x + x] = \lim_{x\to-\infty} x^{2/3} = \infty.$$

Šikmá asymptota pro $x \to -\infty$ tudíž také neexistuje.

Vyšetření svislé asymptoty grafu funkce f: V žádném bodě $x_0 \in (-\infty, \infty)$ neplatí $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Graf funkce f proto nemá žádnou svislou asymptotu.



y
$\frac{4}{27}$
x
0
$\frac{8}{27}$
1
f

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Řešení:

I. • $f(x) = \exp(-x^2)$ $\ldots$ $D(f) = (-\infty, \infty)$

• Funkce f je sudá, není periodická.

• Funkce f je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$, protože vnější funkce $\exp$ je spojitá v $(-\infty, \infty)$ a vnitřní funkce $(-x^2)$ je také spojitá v $(-\infty, \infty)$.

limity v krajních bodech $D(f)$: $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$.

• Průsečík grafu f s osou x: rovnice $\mathrm{e}^{-x^2} = 0$ nemá žádné řešení v $\mathbb{R}$, graf f tudíž neprotíná osu x.

Průsečík grafu f s osou y: $x = 0$, dopočítáme $y = 1$.

Funkce f je kladná v celém $D(f)$, protože vnější funkce $\exp$ nabývá pouze kladných hodnot.

II. • $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(-2x)$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

• Kde je funkce f rostoucí: řešíme nerovnici $\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) > 0 \ \ldots \ x \in (-\infty, 0)$. Jelikož f je spojitá až do bodu 0, dospíváme k závěru: f je rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$.

Kde je funkce f klesající: řešíme nerovnici $\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) < 0 \ \ldots \ x \in (0, \infty)$. Jelikož f je spojitá až do bodu 0, dospíváme k závěru: f je klesající v $\langle 0, \infty)$.

• Lokální extrémy funkce f: jediným „podezřelým bodem" je $x_0 = 0$, kde derivace $= 0$. O bodu $x_0 = 0$ lze říci: f je rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$ a klesající v $\langle 0, \infty)$. V bodě $x_0 = 0$ má tudíž funkce f ostré lokální maximum $f(x_0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

III. • $f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(4x^2 - 2)$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

• Kde je funkce f ryze konvexní: řešíme nerovnici $\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2 - 2) > 0 \ \ldots \ 4x^2 > 2 \ \ldots \ x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, \infty)$. Jelikož funkce f je spojitá až do krajních bodů $-\sqrt{2}/2$ a $\sqrt{2}/2$, dostáváme tvrzení: funkce f je ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -\sqrt{2}/2\rangle$ a na intervalu $\langle\sqrt{2}/2, \infty)$.

Kde je funkce f ryze konkávní: řešíme nerovnici $\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2 - 2) < 0 \ \ldots \ 4x^2 < 2 \ \ldots \ x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Jelikož funkce f je spojitá až do krajních bodů $-\sqrt{2}/2$ a $\sqrt{2}/2$, dostáváme tvrzení: funkce f je ryze konávní na intervalu $\langle -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\rangle$.

- Inflexní body: řešíme rovnici $\mathrm{e}^{-x^2}(4x^2-2)=0$ ... $x_1=-\sqrt{2}/2$, $x_2=\sqrt{2}/2$.

  O bodu $x_1=-\sqrt{2}/2$ lze říci: f je ryze konvexní v levém okolí x_1 (konkrétně v $(-\infty,x_1\rangle$) a ryze konkávní v pravém okolí x_1 (konkrétně v $\langle x_1,x_2)$. Proto
  x_1 je inflerxním bodem.

  O bodu $x_2=\sqrt{2}/2$ lze říci: f je ryze konkávní v levém okolí x_2 (konkrétně v $(x_1,x_2\rangle$) a ryze konvexní v pravém okolí x_2 (konkrétně v $\langle x_2,\infty)$. Proto
  x_2 je inflerxním bodem.

IV. Vyšetření šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x\to\infty$:

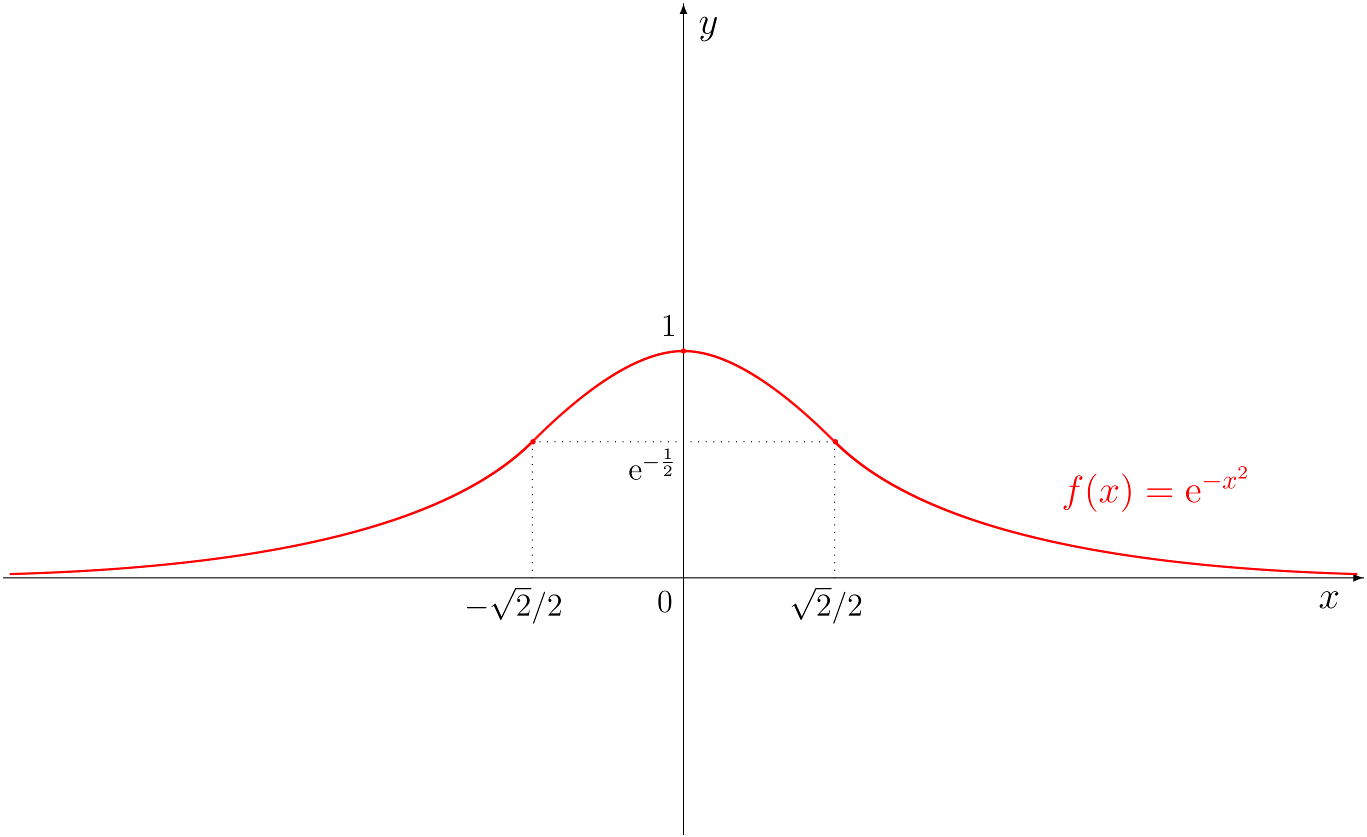
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}=\frac{0}{\infty}=0,\qquad q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=0.$$

Šikmou asymptotou pro $x\to\infty$ je tudíž přímka $y=0$ (= osa x).

Podobně zjistíme:

Šikmou asymptotou pro $x\to-\infty$ je také přímka $y=0$ (= osa x).

Vyšetření svislé asymptoty grafu funkce f: V žádném bodě $x_0\in(-\infty,\infty)$ neplatí $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$. Graf funkce f proto nemá žádnou svislou asymptotu.



y
1
e^{-1/2}
f(x) = e^{-x^2}
−√2/2
0
√2/2
x

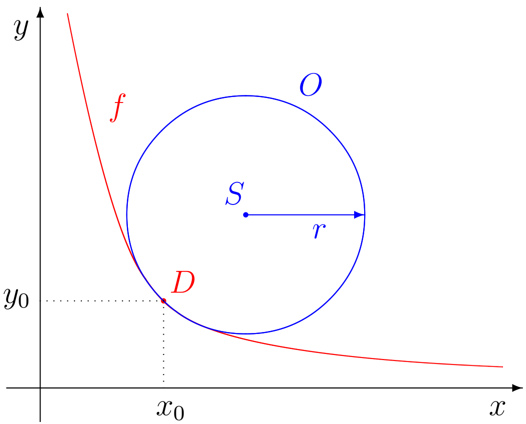
Matematická přestávka

Víte co udělá matematik, když ho požádáte, aby uvařil vodu? Přijde k rychlovarné konvici, podívá se, jestli je prázdná, natočí do ní vodu a dá ji vařit. Pokud prázdná není, tak vodu vyleje a tím tento úkol převede na předchozí případ.

Oskulační kružnice, křivost

Předpokládejme, že $f''(x_0) \neq 0$. Označme
$$y_0 = f(x_0),\ y_0' = f'(x_0) \text{ a } y_0'' = f''(x_0).$$

Problém: Hledejme kružnici, která se ze všech kružnic nejvíce přimyká ke grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$. Hledaná kružnice má rovnici
$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2, \tag{1}$$
kde x_s, y_s (souřadnice středu kružnice) a r (poloměr) jsou zatím neznámé. Kružnice bude jednoznačně určena hodnotami těchto neznámých.



O ... oskulační kružnice
r ... poloměr křivosti
r^{-1} ... křivost

$S = [x_s, y_s]$ ... střed křivosti
$D = [x_0, f(x_0)]$ ... bod dotyku

Jak vypočítáme souřadnice středu křivosti a poloměr křivosti?

Neznámé v rovnici (1) jsou tři, na kružnici tudíž můžeme klást tři podmínky:

1) Kružnice prochází bodem $[x_0, y_0]$.

2) Kružnice má v bodě $[x_0, y_0]$ stejný sklon jako graf funkce f.

3) Kružnice je v bodě $[x_0, y_0]$ stejně zakřivena, jako graf funkce f.

Užijeme-li vhodně tyto tři podmínky, obdržíme vzorce:

$$x_s = x_0 - y_0' \, \frac{1 + {y_0'}^2}{y_0''}, \qquad y_s = y_0 + \frac{1 + {y_0'}^2}{y_0''}, \qquad r = \frac{(1 + {y_0'}^2)^{3/2}}{|y_0''|}.$$

Příklady: viz TABULE

Princip odvození výše uvedených vzorců:

1) Kružnice prochází bodem $[x_0, y_0]$:

$$(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 \; = \; r^2 \tag{2}$$

2) Kružnice má v bodě $[x_0, y_0]$ stejný sklon jako graf funkce f. Považujeme-li kružnici v okolí bodu $[x_0, y_0]$ za graf funkce $y(x)$, pak $y(x)$ vyhovuje rovnici (1). Tuto rovnici derivujeme podle x:

$$2\,(x - x_s) + 2\,\big(y(x) - y_s\big)\,y'(x) \;=\; 0.$$

Dosadíme $x = x_0$ a $y(x_0) = y_0$. Podmínka stejného sklonu kružnice a grafu funkce f znamená: $y'(x_0) = y'_0$. Takto dostaneme:

$$2\,(x_0 - x_s) \;+\; 2\,\big(y_0 - y_s\big)\cdot y'_0 \;=\; 0. \tag{3}$$

3) Kružnice je v bodě $[x_0, y_0]$ stejně zakřivena, jako graf funkce f. Rovnici (1) derivujeme dvakrát podle x:

$$2 + 2\,y'(x)^2 + 2\,\big(y(x) - y_s\big)\,y''(x) \;=\; 0.$$

Dosadíme $x = x_0$, $y = y_0$ a $y'(x_0) = y'_0$. Podmínka stejného zakřivení znamená: $y''(x_0) = y''_0$. Takto dostaneme:

$$2 + 2\,{y'_0}^2 + 2\,\big(y_0 - y_s\big)\,y''_0 \;=\; 0. \tag{4}$$

Vypočítáme-li x_s, y_s a r ze soustavy rovnic (2), (3), (4), obdržíme vzorce pro x_s, y_s a r.